Norges miljø- og
biovitenskapelige
universitet

Masteroppgave 2020 30 stp
Fakultet for realfag og teknologi

Lærerens verbale handlinger i matematiske diskusjoner der elevenes kreative resonnementer synliggjøres

The teacher's verbal actions in mathematical discussions where the students' creative reasoning is made visible

Anne Line Samuelsen
Lektorutdanning i realfag

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på min utdanning ved Norges miljø- og biovitenskaplige universitet, og jeg vil med dette si takk for meg og takk for fem fine år. Gjennom studiet har jeg fordypet meg i matematikk og biologi, og jeg har fått god innsikt i pedagogikk og matematikkdidaktikk. Lektorstudiet har lært meg mye, og jeg gleder meg til å ta i bruk og videreutvikle kunnskapen og erfaringene jeg har tilegnet meg, i yrkeslivet.

Takk til venner og familie for støtte og motivasjon, og takk til medstudenter som har gjort studietiden til en utelukkende god opplevelse. En spesielt stor takk går til Marthe, min gode venn og medstudent på lektorstudiet. Takk for mye moro, gode diskusjoner, fine praksisperioder og godt samarbeid gjennom studietiden. Disse fem årene hadde ikke vært det samme uten deg.

Jeg vil også rekke en stor takk til læreren og elevene som sa seg villig til å delta i denne studien. Jeg setter umåtelig stor pris på at dere lot meg låne litt av tiden deres i en hektisk skolehverdag. Uten dere hadde ikke denne studien vært mulig.

Tusen takk til min veileder, Margrethe Naalsund som gjennom hele denne prosessen har kommet med konstruktive tilbakemeldinger og gode innspill. Din veiledning og ditt engasjement har gjort arbeidet med denne masteroppgaven til en positiv opplevelse.

Ås, Mai 2020

Anne Line Samuelsen

Sammendrag

I det nye læreplanverket som etter planen skal tre i kraft fra høsten 2020 er dybdelæring et sentralt begrep. Dybdelæring er sterkt knyttet til utvikling av matematisk kompetanse og til resonnering. Mye av dagens matematikkundervisning er lagt opp på en slik måte at elevene benytter seg av innlærte algoritmer og fremgangsmåter som hverken krever selvstendig argumentasjon, refleksjon eller resonnering fra elevene. Resonnering er en viktig del av matematikken og kreative resonnementer bygger på elevers kreativitet og baserer seg i liten grad på innlærte algoritmer. Elevenes verbale formidling av resonnementer kan bidra til at deres evne til å argumentere og begrunne egne valg utvikles. Læreren har en sentral rolle i klasserommet og i veiledning av elever. I denne studien skal lærerens verbale handlinger undersøkes i lys av elevers synliggjøring av kreative resonnementer. Forskningsspørsmålet som blir besvart i denne studien er*: **Hva kjennetegner en lærers verbale handlinger i de matematiske diskusjonene mellom læreren og elevene der elevenes kreative resonnementer synliggjøres under deres arbeid med problemløsning?***

For å besvare forskningsspørsmålet har jeg gjennomført en kvalitativ casestudie. Dataene ble samlet inn ved hjelp av observasjon i en matematikk 1T klasse ved en norsk videregående skole. Fire elevgrupper ble observert ved hjelp av et videokamera mens de arbeidet med problemløsning. Ut fra de innsamle dataene ble lærerens verbale handlinger i de matematiske diskusjonene med elevene analysert og sett i sammenheng med elevenes synliggjøring av sine kreative resonnementer og i lys av teoretiske rammeverk. I denne studien ble Drageset (2014) sitt rammeverk for lærerens handlinger og NCTM (2014) sitt rammeverk for ulike spørsmålstyper brukt for å analysere lærens verbale handlinger.

Resultatene viser at lærerens handlinger preges av å være både fokuserende og fremdriftsrettet. Læreren stiller undersøkende spørsmål for å få tak på elevenes ideer og deres begrunnelser av ulike valg. Analysen viser at slike spørsmål kan være et godt utgangspunkt for å skape elevdeltakelse i de matematiske situasjonene og dermed synliggjøre elevenes kreative resonnementer. Studien viser også at elevenes kreative resonnementer er nokså stykkvise og blir i liten grad synliggjort uten veiledning fra læreren. De matematiske diskusjonene preges derfor også av at læreren driver problemløsningsprosessen framover ved å etablere frakta gjennom lukkede detaljorienterte spørsmål som får elevene til å uttrykke kunnskapen høyt.

Abstract

In the new curricula that are scheduled to be launched in the fall of 2020, deep learning is a central concept. Deep learning is strongly connected to students' development of mathematical proficiency and reasoning. Mathematics teaching today consists to a large extent of students using memorized algorithms and procedures where there is no need for independent student argumentation, reflection, or reasoning in order to solve a problem. Reasoning is an important part of mathematics and creative reasoning relies on the student's creativity rather than memorized algorithms. Students' verbal communication of their reasoning can develop their ability to argue and justify their own ideas. The teacher plays a central role in the classroom. This thesis looks at the teacher's verbal actions in light of sequences where the students make their creative reasoning visible. The research question is: ***What characterizes a teacher's verbal actions in the mathematical discussions between the teacher and the students where the students' creative reasoning is made visible during problem solving?***

To study this research question, I have chosen a qualitative case study. The data was collected thorough observations in a theoretical mathematics class in a Norwegian upper secondary school. Four groups of students were studied, using videotape, while solving problems. Based on the collected data the teacher's verbal actions and the students' reasoning were viewed in coherence with each other and analyzed. In this study Drageset's (2014) and NCTM's (2014) frameworks were used to analyze the teacher's actions and questions.

The analysis and discussion of the results show which teacher actions that were present in the mathematical discussions where the students creative reasoning was made visible. The results show that the teacher's actions were both focusing and progressing. The teacher asked probing questions to make the students explain, elaborate, and clarify their thinking and strategy choices. The analysis shows that these questions promote students' participance in the mathematical discussions and therefore contribute to make the reasoning visible. The study also shows that the studens' creative reasoning is rather discrete and are rarely made visible without guidance from the teacher. The teacher's actions are often progressing in the form of closed questions that gather information and make the students express their knowledge out loud.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

1.1 Bakgrunn

I skrivende stund er skole et hett tema og en av grunnene til dette er kanskje at en fornyelse av læreplanverket er rett rundt hjørnet. En fornyelse av lærerplanene er noe det har vært snakk om i flere år og denne ballen begynte å rulle etter at Ludvigsenutvalget i 2015 kom med sine anbefalinger. Selve arbeidet med fagfornyelsen startet for alvor i 2016 etter at Kunnskapsdepartementet publiserte stortingsmelding 28, *Fag - Fordypning - Forståelse: En fornyelse av kunnskapsløftet.* De nye læreplanene har fått navnet *fagfornyelsen* og i august 2020 starter innfasingen av disse. I 2020 skal alle elever på 1. - 9. trinn og VG1 ta i bruk de nye læreplanene og etter tre år skal disse benyttes på alle trinn. Et sentralt begrep som går igjen i disse lærerplanene er *dybdelæring*. Begrepet defineres som:

> Dybdelæring dreier seg om elevenes gradvise utvikling av forståelse av begreper, begrepssystemer, metoder og sammenhenger innenfor et fagområde. Det handler også om å forstå temaer og problemstillinger som går på tvers av fag- eller kunnskapsområder. Dybdelæring innebærer at elevene bruker sin evne til å analysere, løse problemer og reflektere over egen læring til å konstruere en varig forståelse. (NOU 2015:8, s. 14)

Dette skal være et fokusområde i alle fag, og dermed også matematikk. Begrepet er stort, og kan ved første øyekast oppleves som vanskelig å implementere i matematikkfaget. I kontrast til dybdelæringen står overflatelæring. Overflatelæring vektlegger i stor grad innlæring av faktakunnskaper og stimulerer i liten grad elevene til å se sammenhenger i fagene.

Norge har hatt en rekke nedturer med tanke på matematikkprestasjoner. Blant annet «PISA sjokket» i 2000 og nedgang i prestasjonene i TIMMS Advanced (Trends in International Mathematics and Science Study). Grønmo og Hole (2017) hevder at norske elevers resultater på TIMMS Advanced-oppgaver tyder på manglende dybdeforståelse av viktige matematiske sammenhenger. For å bedre denne situasjonen og øke elevers matematiske forståelse kan ikke fokuset utelukkende ligge på å løse matematikkoppgaver, men også på å stimulere til dybdelæring for eksempel gjennom diskusjon av hvorfor en metode fungerer i en gitt situasjon. Målet med dybdelæringen er å gi elever økt læringsutbytte ved at de ser sammenhenger og lærer seg å anvende kunnskapen i problemløsing. Grønmo og Hole (2017) skriver at «Dybdelæring krever konsentrasjon om sentrale områder og begreper over tid, slik at man får til en modningsprosess i elevenes forståelse. Mange emner og kort tid på hvert område vil være det motsatte av dybdelæring» (s. 263). Elever som aktivt tar del i egen læringsprosess er også en forutsetning for å få til dybdelæring. For å få til dette må også elevene reflektere over bruk av ulike læringsstrategier og kunne vurdere eget arbeid (Kunnskapsdepartementet, 2016).

Dybdelæring har en sterk tilknytning til kompetanseutvikling (NOU 2015:8). For å få dypere innsikt i hva dybdelæring er, og hva det innebærer i matematikk er det derfor nødvendig med en forståelse av hva matematisk kompetanse er. En mye brukt definisjon av dette begrepet hentes fra Kilpatrick, Swafford og Findell (2001). Deres definisjon bygger på en idé om at matematisk kompetanse består av fem komponenter. Disse fem er; forståelse, beregning, anvendelse, resonnering og engasjement. I **kapittel 2.1** går jeg nærmere inn på matematisk kompetanse og Kilpatrick et al. (2001) sine fem komponenter.

For over 20 år siden skrev Stein, Grover og Henningsen (1996) at elevers arbeid i matematikk i stor grad består av å memorere presenterte fakta og å anvende innlærte algoritmer og formler. Dette gjøres ofte uten fokus på strategien som brukes, uten refleksjon over hvorfor den brukes og når det er hensiktsmessig å benytte seg av ulike strategier. Selv om denne forskningen er fra 1996 er mitt inntrykk at dette er noe man også ser tendenser til i dagens skole. Dette kan ses i sammenheng med det Lithner (2008) omtaler som utenatlæring (*rote learning*). Utenatlæring innebærer at man lærer seg noe utenat eller lærer seg å huske noe framfor å lære seg å forstå det. Over tid er en overvekt av utenatlæring lite gunstig med tanke på elevens matematiske forståelse og deres utvikling av problemløsningsevner (Lithner, 2008; Stein et al., 1996). Dette kan føre til at elevene får en forventning om at matematikk kun handler om å anvende den løsningsmetoden læreren presenterer, og at det kun finnes én korrekt måte å løse oppgaver på. Dette er lite gunstig for elevens matematiske forståelse og for dybdelæringen, for å unngå dette kan en nøkkel være å fokusere på elevers resonnementer. Å resonnere innebærer evnen til logisk tenkning om sammenhenger mellom konsepter og situasjoner (Kilpatrick et al., 2001). Dersom elever trenes i å resonnere kan dette bidra til å skape mer selvstendige problemløsere samt fjerne fokuset fra pugging. Hvis ikke elever utvikler evne til å resonnere vil viktige elementer i faget også falle bort. Uten denne evnen vil man kunne oppleve at matematikk i stor grad handler om pugging, herming etter eksempler og å skrive ned innlærte løsningsmetoder.

Elever kan kun lære det de gis mulighet til å lære (Lithner, 2008). Gjennom planlegging og gjennomføring av undervisning legger læreren mye av grunnlaget for hva elevene får mulighet til å lære. I undervisningen må elever gis mulighet til å utvikle sine resonneringsevner og en måte å gjøre dette er gjennom problemløsning. Problemer er oppgaver der eleven ikke har en kjent algoritme for komme fram til løsningen. Disse oppgavetypene krever en annen type resonnement enn oppgaver der løsningsalgoritmen er kjent. Det er ikke bare hvilken oppgavetype elevene jobber med som er viktig for deres læring. I klasserommet skjer det kommunikasjon mellom elever, og mellom elever og lærere hele tiden og denne kommunikasjonen kan også ses i lys av elevenes resonnementer. Dialogen i klasserommet kan ses på som en del av en utforskende prosess der målet er å få ny innsikt (Alrø & Skovsmose, 2004). Det å snakke sammen, argumentere, lytte og stille og svare på spørsmål kan også være faktorer som stimulerer til resonnement hos elevene. Læreren spiller en sentral rolle i all dialog som skjer i klasserommet gjennom organisering av undervisning og gjennom sine fysiske og verbale handlinger. Hvordan læreren bruker språket til å argumentere, konkludere og å stille spørsmål påvirker også hvordan elevene gjør dette (Mercer & Littleton, 2007). Diskusjon og dialog i klasserommet kan gi elevene et bevisst forhold til egne resonnementer og også bidra med å utvikle elevenes evne til matematisk kommunikasjon og argumentasjon (Francisco, 2013). I følge Francisco og Maher (2011) er det enighet om at matematikklærere trenger mer kunnskap om elevers resonnementer og at dette er en forutsetning for effektiv undervisning. Kunnskap om elevers resonnementer og evne til å stimulere til dette kan øke elevens forståelse og evne til å utforme gode begrunnelser for sine matematiske ideer.

1.2 Forskningsspørsmål

Det er flere faktorer som har spilt inn på valg av forskningsspørsmål. Mitt forskningsspørsmål har sprunget ut fra problemet som beskrives av Lithner (2008) og Stein et al. (1996), nemlig at overdreven bruk av utenatlæring ikke er gunstig for elevenes forståelse og utvikling av problemløsningsevner. Valget motiveres også av norske elevers svake matematikkresultater og av fagfornyelsen og dens satsning på dybdelæring. Forskningsspørsmålet bygger på en overbevisning om at lærerens handlinger spiller en sentral rolle i elevers læringsprosess og at disse også kan spille en rolle for elevers resonnementer. Med dette utgangspunktet, og med en særlig interesse for lærerens verbale handlinger, har jeg kommet frem til at forskningsspørsmålet jeg ønsker å undersøke i denne studien er:

Hva kjennetegner en lærers verbale handlinger i de matematiske diskusjonene mellom læreren og elevene der elevenes kreative resonnementer synliggjøres under deres arbeid med problemløsning?

I denne studien ønsker jeg å undersøke lærerens verbale handlinger i de matematiske diskusjonene med elevene der elevenes kreative resonnementer synliggjøres under problemløsning i matematikk. Her forstås lærerens verbale handling i hovedsak som lærerens muntlige bidrag i de matematiske diskusjonene, altså det læreren sier. Matematisk diskusjon defineres som den faglige dialogen mellom deltakerne i klasserommet, dette utdypes nærmere i **kapittel 2.2**. Forskningsspørsmålet gir meg mulighet til å utforske hvordan *jeg* kan påvirke mine elever og kan gi meg kunnskap om hvordan mine handlinger påvirker elevene og deres synliggjøring av kreative resonnementer. Lithner (2015) hevder at vi mangler dypere forståelse som omhandler hvordan og hvorfor ulike undervisningstilnærminger påvirker ulike aspekter ved læring. Dette motiverer meg til å velge dette forskningsspørsmålet. Hvis det faktisk er slik Lithner (2015) hevder, at det mangler forståelse på dette området kan denne studien bidra til å utvikle feltet. Et annet argument for at dette er et interessant forskingsspørsmål er at godt etablert forskning viser at lærerens kunnskap om elevers resonnering er en essensiell komponent for elevers læring (Maher, Sigley, Sullivan & Wilkinson, 2018). Jeg håper denne studien kan bidra til å gi meg kunnskap om nettopp dette, og at jeg kan ta med meg det jeg lærer og bruke det videre i min karriere.

2 Teori

I dette kapittelet blir et utvalg litteratur som er relevant til forskningsspørsmålet presentert. I **kapittel 2.1** blir begrepet matematisk resonnement presentert. **Kapittel 2.2** tar for seg matematiske diskusjoner i klasserommet. K**apittel 2.3** tar for seg lærerens handlinger i de matematiske diskusjonene, i dette kapittelet legges det også frem ulike teoretiske rammeverk som brukes i analysen for å karakterisere lærerens handlinger.

2.1 Matematisk resonnement

De aller fleste assosierer matematikk med det å regne, ofte uten å reflektere over hva *å regne* innebærer. «Å kunne regne innebærer å resonnere og bruke matematiske begreper, fremgangsmåter, fakta og verktøy for å løse problemer og for å beskrive, forklare og forutse hva som skjer» (Kunnskapsdepartementet, 2016, s. 32). Slik beskrives regning i stortingsmelding 28 som kom ut i 2016 i forbindelse med arbeid med fagfornyelsen. Å mestre matematikk betyr å inneha matematisk kompetanse, noe som igjen betyr at man mestrer sentrale aspekter av matematikken. Både Kunnskapsdepartementets (2016) definisjonen av regning og Ludvigsen-utvalgets forståelse av dybdelæring kan knyttes til Kilpatrick et al. (2001) sin definisjon av matematisk kompetanse. Kilpatrick et al. (2001) beskriver fem komponenter som er tett knyttet sammen, til sammen beskriver disse fem komponentene hva matematisk kompetanse innebærer. De fem komponentene Kilpatrick et al. (2001) beskriver er:

- Begrepsforståelse *(conceptual understanding)* – Forståelse av matematiske konsepter, operasjoner og sammenhenger.
- Regneferdigheter *(procedural fluency)* – Evne til å utføre prosedyrer på en fleksibel, nøyaktig, effektiv og hensiktsmessig måte.
- Anvendelse *(strategic competence)* – Evne til å formulere, representere og løse matematiske problemer.
- Adaptiv resonnering *(adaptive reasoning)* - Evnen til logisk tenking, refleksjon, forklaring og begrunnelse.
- Engasjement *(productive disposition)* – Ønske om og evne til å se matematikken som meningsfull, verdifull og nyttig, samt tro på at matematikk er noe som er verdt å arbeide med.

Disse komponentene bør ses i sammenheng med hverandre, da hver enkelt av dem kun representerer en liten del av kompetansen. Komponentene avhenger av hverandre og Kilpatrick et al. (2001) skriver selv at «*the five strands are interwoven and interdependent in the development of proficiency in mathematics*» (s. 116). Matematisk kompetanse kan altså ikke oppnås ved å kun fokusere på én av komponentene nevnt ovenfor, dermed må adaptiv resonnering ses i sammenheng med de andre komponentene for å kunne oppnå en ønsket matematisk kompetanse. I denne studien kommer mitt hovedfokus likevel til å være på adaptiv resonnering siden denne komponenten kan knyttes direkte opp mot mitt forskningsspørsmål.

"It should be emphasized that the foundation of mathematics is reasoning" (Ross, 1998, s. 254). Altså er resonnering en stor og viktig del av matematisk læring. I denne studien ønsker jeg å dykke enda dypere ned dette. Resonnering omfatter evnen til logisk tenkning om matematiske konsepter, sammenhenger og situasjoner, samt å kunne forsvare og argumentere for en løsningsmetode og et svar. Det er flere grunner til at resonnering er viktig i matematikken og dermed flere grunner til at dette er interessant å studere. Det å kunne forsvare og forklare sine ideer vil ifølge Kilpatrick et al. (2001) være med på å gjøre elevenes resonnering tydeligere, utvikle deres evne til å resonnere og forbedre deres konseptuelle forståelse. Å utforme et resonnement ved hjelp av språket er ikke bare faglig gunstig men har også stor egenverdi. Det å kunne bruke språket til å formidle en ide, et argument eller synspunkt er helt nødvendig for å kunne formidle et budskap og å bli hørt, dette gjelder både i undervisningen på skolen og i senere privat- og yrkesliv (Mercer & Littleton, 2007). Resonnering spiller også en sentral rolle i elevers arbeid med problemløsning. Problemløsning krever at elevene får en forståelse av problemet, kommer med en løsningsstrategi og reflekterer over sluttproduktet. I alle disse prosessene er elevers evne til å tenke logisk, bruke kunnskapen sin og til å se sammenhenger viktig. Kilpatrick et al. (2001) hevder at resonnering er limet som holder alt sammen, og at dette er selve ledestjernen som viser vei for læringen. Resonnering kan brukes som et verktøy for å navigere seg gjennom fagstoffet og for å se sammenhenger mellom ulike elementer. Dette støtter påstanden om at resonnering er en viktig del av matematikken. Resonnering er en ferdighet som må øves i flere ulike situasjoner, for eksempel gjennom problemløsning av ulike problemer der elevene oppfordres til å begrunne og argumentere for sine strategier. Får man til dette kan det være med på å øke elevens konseptuelle forståelse (Kilpatrick et al., 2001).

Å resonnere er et begrep mange har et forhold til, og brukes mye i skolesammenheng, likevel er dette et begrep som ofte brukes uten en klar definisjon i litteraturen (Lithner, 2008). Ofte brukes begrepet med en antakelse om en universell forståelse, dermed ender litteraturen opp med mange ulike og uklare tilnærminger til begrepet. I denne oppgaven har jeg valgt å ta utgangspunkt i Lithner (2008) sin definisjon av resonnement:

> ... *reasoning* is the line of thought adopted to produce assertions and reach conclutions in task solving. It is not necessarily based on formal logic, thus not restricted to proof, and may even be incorrect as long as there are some kinds of sensible (to the reasoner) reasons backing it. (s. 257)

Grunnen til at jeg velger å ta utgangspunkt i akkurat denne definisjonen er fordi Lithner (2008) her kommer med en tydelig definisjon av begrepet. I tillegg har Lithner forsket mye på elevers resonnementer og han har dermed også en sentral rolle i annen litteratur som omhandler dette temaet. For å kunne nå den konklusjonen som Lithner (2008) omtaler i sin definisjon, er det nødvendig å overbevise seg selv eller andre om at resonnementet er adekvat. Argumentasjon er den delen av resonnementet som skal overbevise om at et resonnement er hensiktsmessig, at det har sin opprinnelse i matematiske egenskaper og at det baserer seg på en viss form for logikk. Store deler av matematikktimene består av at elevene arbeider med oppgaver og tidvis arbeid med problemer. I korte trekk kan man se på et problem som en oppgave som skal løses der elevene ikke kjenner til løsningsmetoden på forhånd (Schoenfeld, 1985). Problemer beskrives mer utfyllende i **kapittel 3.4**. Innenfor problemløsning er det to typer argumentasjon som er viktig, predikerende argumentasjon og verifiserende argumentasjon (Lithner, 2015). Predikerende argumenter brukes for å støtte et strategivalg, og er argumentasjonen som sier noe om hvorfor strategien vil løse oppgaven. Verifiserende argumenter støtter implementeringen av en strategi, altså hvorfor denne strategien løser oppgaven. Polya (1971) har laget en verdenskjent modell bestående av fire faser for å løse matematiske problemer. Å løse et matematisk problem innebærer å (1) forstå problemet, (2) lage en plan for hvordan problemet skal løses, (3) gjennomføre planen og (4) se tilbake. Denne forståelsen av problemløsningsprosessen kan knyttes til resonneringsstruktur og Lithner (2008) sitt syn på problemløsning. I likhet med Polya (1971) presenterer Lithner (2008) problemløsning som en prosess bestående av fire steg. Disse fire stegene er å angi problemet, velge en løsningsstrategi, implementere løsningsstrategien og komme med en konklusjon. I forbindelse med det andre og tredje steget trekker Lithner (2008) frem viktigheten av predikativ og verifiserende argumentasjon.

I forbindelse med oppgave- og problemløsning kan elevene benytte seg av ulike strategier og de kan også benytte seg av ulike former for resonnementer. I denne oppgaven har jeg valgt å fordype meg i de to ulike typene resonnementer som beskrives av Lithner (2008). Han deler resonnementer inn i to hovedgrupper, imitative - og kreative resonnementer, der førstnevnte igjen kan deles inn i to undergrupper. De to hovedtypene resonnementer og deres undergrupper presenteres ytterligere i de to neste delkapitlene.

2.1.1 Imitativt resonnement

Imitative resonnementer innebærer i grove trekk å kopiere en kjent løsningsmetode. Imitative resonnementer kan igjen deles inn i memorert resonnement og algoritmisk resonnement. Memorerte resonnementer baserer seg på at man husker et fullstendig svar og at det eneste som kreves er å skrive ned dette svaret. Denne typen resonnement er bare nyttig i et lite utvalg oppgaver, slik som oppgaver som ikke krever noen utregning og som kun har et entydig svar. Algoritmiske resonnementer likner de memorerte, da også algoritmiske resonnementer baserer seg på at den som resonnerer husker noe den har sett eller gjort før. Til forskjell fra memorerte resonnementer er det ikke et svar som huskes her, men en algoritme. Med algoritme menes en rekke med gjennomførbare instrukser som leder fram til et endelig resultat av en gitt oppgave (Lithner, 2008). Ved algoritmiske resonnementer omhandler altså selve resonnementet det å implementere en kjent løsningsmetode.

Basert på egne erfaringer fra klasserommet vil jeg hevde at en stor andel av oppgavene elever arbeider med i matematikktimene legger opp til et algoritmisk resonnement. Denne påstanden støttes av Lithner (2008) som også hevder at slikt fokus kan resultere i at elever fokuserer på å finne en algoritme for å løse oppgaven fremfor å lete etter en korrekt eller den enkleste måten å løse oppgaven på. I et kortsiktig perspektiv kan algoritmiske resonnementer være gunstige, for eksempel hvis elevens mål kun er å få en ståkarakter på en prøve. Når det er sagt kan algoritmiske resonnementer føre til langsiktige ulemper, og overdreven bruk kan ta fokuset vekk fra læringsprosessen, svaret blir det viktigste og målet blir å løse oppgaver så raskt som mulig uten det som oppfattes som unødige omveier. Dermed kan overdreven bruk av algoritmiske resonnementer i verste fall føre til at søken etter algoritmer *blir* matematikken istedenfor å være en del av den (Lithner, 2008).

2.1.2 Kreativt resonnement

Som en kontrast til imitative resonnementer som baserer seg på noe man har memorert har vi kreative resonnementer. I følge Haylock (1997) finnes det ingen entydig definisjon av kreativitet som brukes i forskning, og dermed må betydningen av ordet ses i sammenheng med konteksten ordet brukes i. Haylock (1997) hevder at kreativitet kan ses på to ulike måter, den ene referer til en spesiell type tenking eller mental funksjon, mens den andre knyttes til produkter som anses som kreative slik som kunst og musikk. Kreativitet i matematikk innebærer altså ikke det samme som kreativitet i kunstmaling eller dans. Av disse to synene er det mest nærliggende å se på kreativitet i matematikk som en spesiell måte å tenke på i arbeidet med faget. Store norske leksikon definerer kreativ tenkning slik; «kreativ tenkning er skapende tenkning, forsøk på å oppdage nye sammenhenger, oppnå nye løsninger på problemer, oppdage nye metoder eller fremgangsmåter og skape nye kunstneriske uttrykksformer» (Store norske leksikon, 2019). Kreativitet kan altså forbindes med noe som oppleves nytt eller at et kjent fenomen befinner seg en ny kontekst. I matematikken kan dette innebære å bruke kjente elementer i faget på en ny måte til å for eksempel sette sammen nye løsningsmetoder og oppdage nye sammenhenger.

Et kreativt resonnement må være kreativt, plausibelt og må kunne forankres i matematikken. Dette er de tre kriteriene Lithner (2015) mener et resonnement må oppfylle for å kunne sortere under *kreativt resonnement* og i denne studien har jeg valgt å ta utgangspunkt i denne tilnærmingen til begrepet. Først og fremst må et kreativt resonnement være kreativt. Dette innebærer at resonnementet er nytt for den som resonnerer og at det er en viss grad av nyskapning, eleven kan dermed ikke kopiere et eksempel som står i læreboka eller bruke samme fremgangsmåte som han gjorde på forrige oppgave. Kreativitetskriteriet stiller altså krav om at eleven må tenke på en ny måte for å komme opp med en løsningsmetode. Hva som kan karakteriseres som kreativt vil variere utfra hvem det er som resonnerer, og dermed kan det være vanskelig for utenforstående å kjenne igjen om dette kriteriet er oppfylt eller ikke. Videre er det viktig at det finnes argumenter som støtter den strategien som er valgt, altså at resonnementet er plausibelt. Plausibilitet handler om at noe er holdbart, akseptabelt eller rimelig. Bak et plausibelt argument for valg av strategi ligger det dermed en viss logikk. Dette kan derfor være en måte å luke ut når argumentet for en strategi kun baserer seg på gjetting. Det vil også være viktig at resonnementet kan forankres i matematikken. Dette innebærer at elementer i resonnementet kan knyttes til matematiske sannheter som teoremer, definisjoner og regler. Forankring referer til at elementer i argumentet kan kobles til relevante matematiske egenskaper, og er ikke det samme som at selve argumentet har en logisk verdi (Lithner, 2015). Dersom man skal undersøke elevers resonnementer i forbindelse med problemløsning kan argumenter som innehar disse tre kriteriene være gode indikatorer på et kreativt resonnement.

2.2 Matematiske diskusjoner

I klasserommet skjer det læring på mange forskjellige måter. Som lærer er det viktig å være klar over hvilken rolle man har for denne læringen og å ha kunnskap om hvordan det sosiale samspillet i klasserommet kan påvirke elevenes læring. Vygotsky og hans sosiokulturelle læringsteori baserer seg på en overbevisning om at læring er en sosial prosess, at læreren har en sentral rolle for elevenes læring og at utvikling skjer som følge av et sosialt samspill (Imsen, 2014). Derfor er det viktig å huske på at man som matematikklærer ikke bare står ansvarlig for å lære opp elevene i fagets innhold men at man også må lære opp elevene til å delta i ulike matematiske aktiviteter (Francisco, 2013). Elever må gis muligheter til å lære på en effektiv og hensiktsmessig måte. Det er mye som tyder på at undervisning der læreren gir elevene definisjoner, regler og formler som de må bruke for å løse bestemte oppgaver er lite gunstig. Et mer gunstig syn på undervisning og læring i matematikk er i følge National Council of Teachers of Mathematics (NTCM) (2014) at «The role of the teacher is to engage students in tasks that promote reasoning and problem solving and facilitate discourse that moves students toward shared understanding of mathematics» (s. 11). Altså er det ikke nok at læreren gir sine elever formler, fremgangsmåter og definisjoner, han må også legge til rette for elevers resonnementer, matematisk diskusjon og deling av ideer og tanker for å skape et gunstig læringsmiljø. Læreren bør fokusere på elevers konstruksjon av mening i faget framfor å gi elevene fakta som skal pugges. For at elevenes løsninger og forklaringer skal kunne verdsettes må det settes av tid til samarbeid, dialog og helkassediskusjoner (Cooke & Adams, 1998).

Selv om mange kanskje forbinder matematikk med tall og formler står også språket og det verbale sentralt i faget. Språket står sentralt både i innlæring av fagstoff, under arbeid med problemløsning, formulering av konklusjoner og i all verbal kommunikasjon som skjer i klasserommet. Verbal kommunikasjon i matematikk innebærer at lærer og elever bruker språket til å formidle og uttrykke matematiske egenskaper, sammenhenger, resonnementer og argumenter og å delta i matematiske diskusjoner. Å snakke med sidemannen, arbeide i store eller små grupper, helklassediskusjoner og elev-lærer dialog er alle former for matematisk diskusjon. «Here, I use the term mathematical discourse to mean the exchange of mathematical thoughts and information, in a learning environment, using either formal or informal mathematical language» (McCrone, 2005, s. 112). Altså kan matematisk diskusjon ses på som en utveksling av matematiske tanker og matematisk informasjon i en læringssituasjon ved hjelp av formelt eller uformelt matematisk språk. I denne oppgaven tar jeg utgangspunkt i denne definisjonen av begrepet matematisk diskusjon.

I følge NCTM (2014) er effektiv matematikkundervisning den undervisningen som gir elevene mulighet til å dele sine ideer, konstruere egne argumenter og å se ting fra ulike perspektiver gjennom verbal, visuell og skriftlig kommunikasjon. Det er altså gunstig at elevene deltar aktivt i kommunikasjonen og at de får uttrykke sine ideer og tanker. Hufferd-Ackles, Fuson og Sherin (2004) har utarbeidet et rammeverk for ulike nivåer av «Math-Talk Community». Et læringsfelleskap der lærer og elever bruker matematisk diskusjon ved læring av matematiske temaer. Rammeverket består av fire ulike komponenter som alle beskrives på fire ulike nivåer. Nivåene går fra nivå 0 til nivå 3, der de matematiske diskusjonene beveger seg fra å være lærerdominerte med passive elever til matematiske diskusjoner som i stor grad drives av elevene der læreren kun funger som en støttende part. Komponentene som trekkes fram som viktige for den matematiske diskusjonen i klasserommet er spørsmålstilling (*questioning*), å forklare matematisk tenkning (*explaining mathematical thinking*), kilde til matematiske ideer (*source of mathematical ideas*) og ansvar for læring (*responsibility*). I denne oppgaven anses *å forklare matematisk tenkning* som spesielt relevant for forskningsspørsmålet fordi denne komponenten kan direkte knyttes til synliggjøring av resonnementer. Pijls og Dekker (2011) hevder at elever i nederlandske klasserom stort sett arbeider med oppgaver individuelt. På tross av at mange elever sitter sammen i par løses oppgaver ofte uten matematisk diskusjon. Faren ved at elevene til enhver tid jobber selvstendig uten å snakke om matematikken er at de mister muligheten til å sette ord på sine tanker og ideer (Pijls & Dekker, 2011). Selvstendig arbeid er en gunstig måte å drive innlæring av algoritmer, men er trolig mindre gunstig for resonnering og refleksjon. Derfor er det ønskelig at tradisjonell undervisning der elevene kun arbeider individuelt med å løse oppgaver ved hjelp av penn og papir komplimenteres med mer interaktivt arbeid der dialog og diskusjon står sentralt.

«As educators, we want students who not only can think but who *do* think» (Ritchhart, Church & Morrison, 2011, s. 29). Mange vil nok si seg enige i dette utsagnet, nemlig at et overordnet mål er å skape elever som evner å tenke selvstendig. Skal man få til dette kan ikke elevene bare læres opp i hva de skal tenke, men må også få opplæring i hvordan de skal tenke på en selvstendig og kreativ måte. Her er språket og kommunikasjonen i klasserommet et viktig aspekt. Ved å gjøre tenkingen som skjer i klasserommet synlig, for eksempel gjennom matematiske diskusjoner, gjøres tenkingen mer konkret og ekte, og tenkingen blir dermed noe man kan snakke om og utforske, diskutere, utfordre og lære av (Ritchhart et al., 2011).

Elevene kan gjennom matematiske diskusjoner med medelever og lærer utvide sin faglige innsikt og få eierskap til egen læreprosess samtidig som at læreren kan få innblikk i hvor i læringsprosessen elevene befinner seg. Matematiske diskusjoner gir elever mulighet til å teste sine ideer, få innsyn i andres ideer og å styrke sin tenkning ved å sette ord på tankene sine. Dette kan bidra til å øke elevers matematiske forståelse ved å hjelpe elever til å forstå at det finnes mer enn én måte å løse et problem på og til å gjøre elever sikrere på egne ferdigheter under problemløsning (Cooke & Adams, 1998; McCrone, 2005). For at matematiske diskusjoner skal finne sted i klasserommet må elevene gis muligheten til å snakke om matematikken for eksempel gjennom samarbeid. Alrø og Skovsmose (2004) har utarbeidet *The inquiry co-operation model*. Denne modellen forklares ved at elevenes utforskende prosess kan ses på som læring gjennom handling og dialog. Samtidig som at refleksjon, samarbeid og verbalisering av tanker er viktige aspekter ved samhandlingen. Modellen fokuserer på dialogisk læring og ser på dialog som noe som er sammensatt av flere handlinger. Med bakgrunn i tidligere studier av lærer-elev kommunikasjon har Alrø og Skovsmose (2004) identifisert åtte slike dialogiske handlinger: Komme i kontakt, lokalisere, identifisere, argumentere, tenke høyt, reformulere, utfordre og evaluere. Samarbeid der elevene uttrykker matematikken verbalt kan øke elevers matematiske forståelse gjennom å fokusere på refleksjon, stimulere til diskusjon av ulike løsningsmetoder og ved å skape muligheter for dem til å rette et kritisk blikk mot egne resonnementer og dermed bygge opp nye mer passende resonnementer ved hjelp av innspill fra medelever og lærere (Francisco, 2013; Grønmo & Hole, 2017). Selv om matematiske diskusjoner er gunstig på flere områder kan det være utfordrende å få til. Dialogen og diskusjonene vil trolig ikke oppstå av seg selv og læreren spiller en sentral rolle for å tilrettelegge for matematisk diskusjon i klasserommet. Læreren må forberede oppgaver og organisere slik at forholdene ligger mest mulig til rette for produktive matematiske diskusjoner.

2.3 Lærerens handlinger i matematiske diskusjoner

Læreren legger mye av grunnlaget for hva som skjer i klasserommet. Han bestemmer hvilke oppgaver som skal gjøres, hvordan disse skal løses og hvilke svar som er tilfredsstillende og hvilke som ikke er det. Læreren legger også mye av grunnlaget for kommunikasjonen som skjer i klasserommet. Måten læreren prater på, oppfører seg og strukturerer klasseromsaktivitetene sender signaler til elevene om hvordan språket kan brukes og hvordan læringen skal skje (Mercer & Littleton, 2007). For at elevene skal ha mulighet til å delta i matematiske diskusjoner der de setter ord på egne tanker og utfordre hverandres ideer er elevene avhengige av å ha tilgang til språket som kreves for å gjøre dette i det gitte temaet (Hufferd-Ackles et al., 2004). Læreren legger trolig mye av dette grunnlaget og kan i mange sammenhenger fungere som en matematisk rollemodell. Læreren har altså stor myndighet i klasserommet, ikke bare med tanke på hva som gjøres i klasserommet men også med tanke på hva som sies og om språket brukes som et verktøy for læring. For at elever skal kunne bruke språket som en del av sin tankeprosess, selvstendig så vel som sammen med andre, er de avhengig av å delta i gode dialoger med lærer. Gode dialoger vil i dette tilfellet innebære at læreren bruker språket på en slik måte at elevene får øvelse i refleksjon, resonnering, utforskning og forklaring av egne ideer (Mercer & Littleton, 2007).

I en studie gjennomført av Fraivillig, Murphy og Fuson (1999) tydet resultatene på at lærere i stor grad evner å være støttende ovenfor sine elever og deres ideer. Studien viste imidlertid også at lærere i mye mindre grad evner å fremkalle elevers egne ideer og å utfordre elevenes tenking. Læreren er helt nødvendig for å legge til rette for et gunstig læringsmiljø og må også derfor evne å fremkalle elevers ideer så vel som å støtte dem. Dette innebærer at læreren må etablere klasseroms-normer som støtter opp om elevers utvikling av matematisk forståelse. Dette krever lærere med god kunnskap om både undervisning og elevers tenking (Fraivillig et al., 1999). Tradisjonelt sett preges kommunikasjonen i klasserommet av et «gjett hva læreren tenker på»-mønster. Altså at læreren stiller et spørsmål som han har en klar forestilling om hvordan skal besvares og eleven svarer på spørsmålet ved å gjette på hvilket svar læreren ønsker (Alrø & Skovsmose, 2004). Denne typen kommunikasjon kan være en god måte å lære hva som er «rett og galt» i matematikken, men er mindre gunstig for å utdanne selvstendige, reflekterte og resonnerende elever. Lærerens sentrale rolle i klasserommet antyder også at læreren har en sentral rolle når det kommer til om elever resonnerer, hvordan elever resonnerer og hva slags utfall resonnementene får (Francisco & Maher, 2011). For å kunne utføre handlinger som har positiv effekt på resonnementer er det essensielt at læreren er bevisst sin rolle og har kunnskap om elevers resonnementer og om hvorfor dette er viktig for deres matematiske forståelse. Læreren bør også ha kunnskap om når det er gunstig å arbeide med de ulike typene resonnement og hvilke tiltak som kan gjøres i forberedelser, og i selve undervisningen både på klasse- og enkeltelevnivå. Uten denne kunnskapen og et bevisst forhold til elevers resonnementer vil arbeidet med dette bli utfordrende og trolig lite gunstig for elevers læring.

Listen over handlinger som læreren gjennomfører i løpet av en undervisningsøkt er lang. I løpet av en time kan læreren skrive på tavla, stille elevene spørsmål, gi forklaringer, svare på spørsmål, gestikulere, smile, nikke, bevege seg rundt i klasserommet og så videre. Noen av handlingene er fysiske handlinger slik som å nikke, peke og gestikulere mens andre er verbale handlinger slik som å stille og besvare spørsmål, gi forklaringer og å delta i matematiske diskusjoner. *Funneling* og *focusing* er en måte å kategorisere lærerens verbale handlinger ved å finne mønstre i hvordan for eksempel spørsmål stilles (Wood, 1998). Her er det ikke kun hver enkelt handling eller spørsmål som kategoriseres men formålet og mønsteret dette gjøres i tas også med for å gi et helhetlig bilde på hva som preger samtalen. *Funneling* og *focusing* er begreper som er vanskelig å oversette til norsk og derfor velger jeg å beholde de engelske begrepene i denne oppgaven. *Funneling* kjennetegnes ved å være dominert av en lærer som driver prosessen framover og som har et klart bilde av den mest effektive veien til målet. I kontrast til *funneling* står *focusing*. *Focusing* bærer preg av å være åpen for elevenes innspill og veien til målet består i større grad av at elevene deler sine tanker og ideer (Wood, 1998).

Drageset (2014) deler lærerens handlinger inn i tre hovedkategorier, der hver hovedkategori igjen består av flere underkategorier. I **tabell 1** er alle hovedkategoriene og deres underkategorier skjematisk presentert. I analysen av de innsamlede dataene blir dette rammeverket brukt for å analysere lærerens handlinger i matematiske diskusjoner med elever der deres resonnementer kommer til syne. Dette rammeverket gjør det mulig å se på lærerens handlinger som analytiske enheter som gjør det enklere å systematisk observere ulike elementer i dialogen mellom lærer og elev. I **kapittel 3.5** blir det beskrevet hvordan dette rammeverket brukes i analysen i denne studien.

Tabell 1: Tabellen viser en oversikt over Drageset (2014) sin kategorisering av lærerens handlinger.

LÆRERENS HANDLINGER			
Endrende handlinger	Fremdriftshandlinger	Fokuserende handlinger	
		Etterspørre innspill fra elever	Understreke
Sette til side	Demonstrasjon	Opplyse om detaljer	Oppsummere
Foreslå en ny strategi	Forenkling	Begrunnelse	Tydeliggjøre
Stille korrigerende spørsmål	Lukkede detaljorienterte spørsmål	Anvende på liknende problemer	
	Åpne spørsmål	Etterspørre vurdering fra medelever	

Den første gruppen handlinger er de der læreren forsøker å få eleven inn på et nytt spor eller til å endre retning, Drageset (2014) kaller denne handlingsgruppen *endrende handlinger*. Et kjennetegn ved denne typen handlinger er at læreren har et klart bilde av hva han ønsker at utbytte av prosessen skal være, og som et resultat av dette tar læreren tydelig styring for å nå dette målet. Dette kan være i form av at læreren stiller korrigerende spørsmål, avfeier elevenes ideer eller rett og slett foreslår en annen tilnærming. Neste gruppe med handlinger er *framdriftshandlinger*. Disse handlingene fører prosessen framover, og er altså handlinger som sikrer framdrift. Et eksempel på en slik handling kan være forenkling. Forenkling innebærer å legge til eller bytte ut informasjon i det gitte problemet, eller å eksplisitt fortelle eleven hva han eller hun skal gjøre for å komme fram til en løsning. Dette kan gjøres i form av at læreren modellerer en løsningsmetode og bryter ned og forenkler konsepter. I denne kategorien står også lærerens spørsmål sentralt, både i form av lukkede detaljorienterte spørsmål og mer åpne spørsmål. De lukkede detaljorienterte spørsmålene krever ofte en rask respons og har ofte kun ett riktig svar mens de åpne spørsmålene i større grad åpner opp for flere ulike svar. Lukkede spørsmål som stilles av læreren kan ses på som en del av fremdriften ved at de i noen tilfeller er motoren som driver prosessen framover. Dette betyr at læreren kan dele en oppgave inn i ulike steg, og dermed stille et spørsmål for hvert steg. De åpne spørsmålene er i mindre grad en del av en stegvis modell for å nå målet, men kan heller fungere som en døråpner til flere mulige løsningsmetoder. Både handlinger som endrer retning og handlinger som sikrer framdrift kan ses i sammenheng med *funneling*. *Funneling* er prosessen der læreren bruker spørsmål til å lede eleven mot en løsningsmetode eller en konklusjon (Wood, 1998). I følge Wood (1998) er det læreren som gjør det meste av det intellektuelle arbeidet, mens elevene arbeider med å finne svar på det læreren spør om fremfor å tenke selv. *Funneling* kan minne om andre spørremønstre vi ser i klasserommet. Et vanlig spørremønster som brukes i mange klasserom er I-R-E (initiation – reponse – evalutaion). I-R-E går i hovedsak ut på at læreren stiller et spørsmål, eleven gir et svar og læreren evaluerer svaret i forhold til om det svaret var det han ønsket. Her gir ofte læreren eleven kort tid til å svare på spørsmål og er fast bestemt på hvilken respons som vil være den «riktige». Direkte *evaluering* av elevenes responser slik man kan se i I-R-E mønsteret er ikke noe som belyses i Dragesets (2014) rammeverk. Alrø og Skovsmose (2004) inkluderer derimot *evaluering* i sin *inquiry co-operation model* og ser på dette som en del av dialogisk læring. Evalueringen av elevenes responser kan for eksempel bestå av ren bekreftelse, kritikk, positiv og negativ tilbakemelding og støtte. Det er denne evalueringen av elevenes responser som er hovedgrunnen til at *funneling* skiller seg fra tradisjonelle spørremønstre som I-R.E. Selv om *funneling* kan minne om denne typen spørremønstre fokuserer *funneling* i liten grad på å evaluere elevenes respons direkte. På tross av dette kan *funneling* likevel føre til at eleven opplever at matematikk handler om å finne svarene læreren ønsker (Wood, 1998). Den siste gruppen handlinger som presenteres av Drageset (2014) er *fokuserende handlinger*. Wood (1998) beskriver *Focusing* som et kommunikasjonsmønster som dreier seg om at læreren får innblikk i elevenes tankeprosesser og oppfordrer eleven til å dele sine tanker, og å reflektere over egne og andres tanker (NCTM, 2014). Her kjennetegnes dialogen ved at lærer og elev er likeverdige, og samtalen er derfor ofte mindre lærerstyrt. Dette kan være en måte å få elever til å tenke over matematikken, det gir dem mulighet til å reflektere over egne ideer, komme fram til egne løsninger og evaluere andres resonnementer (Wood, 1998). Det kan se ut som at Drageset (2014) her har fått inspirasjon fra det Wood (1998) omtaler som *focusing* men at han har tatt dette et steg videre og gått enda mer i dybden. Drageset (2014) deler nemlig *fokuserende handlinger* inn i to underkategorier; å *etterspørre innspill fra elever* og å *understreke*. Får å få innspill fra elevene kan læreren spørre etter detaljer i elevenes arbeid og få dem til å forklare en løsningsmetode ved å fokusere på detaljer. Læreren kan etterspørre begrunnelser, der elevene bes om å begrunne både metodevalg og løsninger. Å oppmuntre elevene til å anvende en strategi til liknende problemer og å oppfordre til at elevene vurderer hverandres arbeid ses også på som fokuserende handlinger (Drageset, 2014). I underkategorien *understreke* trekkes tydeliggjøring og oppsummering frem. Tydeliggjøring kan innebære å vektlegge sentrale perspektiver som har kommet opp under dialogen og å minne om ny og gammel kunnskap. Det å repetere et argument eller reformulere og tydeliggjøre en løsning er en måte læreren kan oppsummere.

En av lærerens mange handlinger i klasserommet er å stille spørsmål. Å stille spørsmål er en stor del av lærerhverdagen, og dette er en viktig og krevende oppgave. I følge Sahin og Kulm (2008) hevder Stevens (1912) at så mye som 80% av matematikkundervisningen på hans tid bestod av at læreren stilte spørsmål til elevene. Selv om denne forskningen er fra en annen tid og skoletradisjon enn det vi har i dag, hevder Sahin og Kulm (2008) at også nyere forskning støtter dette og henviser til Brualdi (1998). Det at spørsmål opptar så store deler av undervisningen impliserer at spørsmål spiller en sentral rolle for elevers læring i klasserommet. Lærerens handlinger og hvilke spørsmål læreren stiller har innvirkning på elevers forståelse og på deres konstruksjon av kunnskap og deling av ideer (Drageset, 2014; Mueller, Yankelewitz & Maher, 2014). For å styrke både undervisningen og læringen i matematikk har NCTM (2014) beskrevet åtte elementer som står sentralt undervisningen. En av disse elementene er å stille meningsfulle spørsmål. «*Effective teaching of mathematics uses purposeful questions to assess and advance students' reasoning and sense making about important mathematical ideas and relationships*» (NCTM, 2014, s. 35). Effektiv undervisning avhenger av læreren og at læreren stiller spørsmål som oppfordrer elevene til å forklare og reflektere over egen tankegang. Hvis man som lærer er dyktig til å stille spørsmål kan dette gi læreren en dypere forståelse av elevers læring i matematikk og ha positiv innvirkning på elevers matematiske vekst (Mueller et al., 2014). «The questions the teacher asks in the classroom, play a crucial role in developing mathematical conversations and thinking, and are thus worth devoting attention to" (Ulleberg & Solem, 2018, s. 3).

Spørsmål kan brukes på mange ulike måter og for å oppnå mange ulike formål, og læreren stiller elevene sine spørsmål av ulike grunner. Eksempelvis kan spørsmål stilles for å kartlegge hva eleven har forstått, for å veilede elevene gjennom en oppgave, for å rette opp misoppfatninger eller for å hjelpe eleven å sortere egne tanker. For å nå de ulike målene er det ofte nødvendig med ulike typer spørsmål og ulike spørremønstre. Den generelle anbefalingen er å stille spørsmål som utfordrer elevene. I følge Ritchhart et al. (2011) bør man unngå at spørsmål som fokuserer på hva elevene husker, dominerer undervisningen. Man bør heller benytte seg av spørsmål som går utover det elevene vet og som stimulerer til anvendelse, analyse og vurdering. Dette kan knyttes til det som i faglitteraturen omtales som høyere og lavere ordens spørsmål. Høyere ordens spørsmål er spørsmål der det kreves mer enn å huske noe for å kunne komme med et svar. Å komme fram til svaret kan derfor stille krav om å se sammenhenger, resonnere og å bruke kunnskapen man har. Man kan også snakke om lavere ordens spørsmål, disse spørsmålene krever kun at man husker et svar (Barden, 1995). Hvilke typer spørsmål som stilles er avgjørende for at elevene skal kunne konstruere egne resonnementer (Mueller et al., 2014). I følge Boaler og Brodie (2004) peker forskning mot at lærere sjeldent stiller høyere ordens spørsmål, dette på tross av at slike spørsmål har vist seg å være effektive for å øke elevers forståelse.

Et spørsmål er ikke bare et spørsmål. Spørsmålene læreren stiller kan for eksempel ha ulike spørreord, fokusere på detaljer eller være åpne. Det finnes utallige rammeverk der ute som deler spørsmålene som brukes i klasserommet inn i kategorier. Man kan for eksempel skille mellom åpne og lukkede spørsmål, retoriske eller autentiske spørsmål eller spørsmål av lav eller høy kognitiv karakter (Ulleberg & Solem, 2018). Sahin og Kulm (2008) presenterer et rammeverk som består av tre ulike typer spørsmål: undersøkende, veiledende og faktasøkende spørsmål. Ofte er alle disse tre spørsmålstypene representert i undervisningen, men i noe ulik grad. Undersøkende spørsmål kan være spørsmål som stimulerer eleven til å forklare sin tankegang, gi bevis og bruke tidligere kunnskap. Veiledende spørsmål skal støtte elevene i arbeid med oppgaver. Dette gjøres ved å spørre etter svar, strategier og å bygge elevers forståelse. De faktasøkende spørsmålene har som mål å hente fram fakta og definisjoner, svar og spesielle steg i en løsningsmetode. Boaler og Brodie (2004) har undersøkt hvilke spørsmål som stilles og hvordan disse spørsmålene kan bidra til læring. Basert på dette har de laget et rammeverk bestående av ni ulike spørsmålskategorier. De ni spørsmålskategoriene er: *ledende spørsmål, innsetting av terminologi, utforsker matematiske ideer og/eller sammenhenger, begrunnelser, generere diskusjon, se sammenhenger, utvide tenkningen, fokusering* og *etablere kontekst* (Boaler & Brodie, 2004). Noen andre som også har utarbeidet et rammeverk bestående av ulike spørsmålskategorier er NCTM (2014) dette rammeverket baserer seg på Boaler og Brodie (2004) sine kategorier, men man kan også se likheter mellom dette rammeverket og Sahin og Kulm (2008) sin inndeling av spørsmål. NCTM (2014) har endt opp med å slå sammen flere av Boaler og Brodie (2004) sine kategorier slik at de får en inndeling bestående av fire spørsmålstyper. De fire kategoriene, beskrivelse av dem og eksempler kan ses i **tabell 2** på neste side.

Tabell 2: Tabellen viser fire typer spørsmål som brukes i matematikkundervisning. Tabellen er basert på tabellen til NCTM (2014) s. 36-37.

Spørsmålstype		Beskrivelse	Eksempel
1	Samle informasjon	Elevene husker fakta, definisjoner og prosedyrer	Hva betyr likhetstegnet? Hva er formelen for areal? Hva sier kjerneregelen?
2	Undersøke	Elevene forklarer, utdyper eller oppklarer egen tankegang. Dette inkluderer å beskrive stegene i en løsningsmetode eller fullførelsen av en oppgave.	Hva tenkte du da du tegnet tallinja? Kan du forklare hvordan du kom fram til svaret på denne oppgaven?
3	Gjøre matematikken synlig	Elevene studerer matematikken og ser temaer i sammenheng.	Kan du tenke deg en gunstig måte å løse denne oppgaven på?
4	Oppfordre til refleksjon og begrunnelser	Elevene viser en dypere forståelse av sin resonnering og egne handlinger. Dette innebærer å argumentere for gyldigheten for sitt arbeid.	Kan du bevise hvorfor svaret er 51? Hvordan vet du at summen av to oddetall alltid blir et partall?

Dette rammeverket inneholder en kategori som omfatter spørsmål som samler informasjon for eksempel gjennom å spørre etter definisjoner og fakta. Disse spørsmålene er ofte lukkede og har vanligvis kun et riktig svar. De undersøkende spørsmålene krever at eleven forklarer hva de har gjort eller tenkt og at de gir begrunnelser for valg som er tatt. Begge disse to kategoriene omfatter spørsmål læreren stiller for å kartlegge hva eleven vet og kan. Spørsmål av type 1 gir læreren informasjon om hva eleven kan mens spørsmål av type 2 også kan gi informasjon om hva eleven har forstått og hvordan eleven tenker. Spørsmål av type 3 kan hjelpe elevene å få en dypere forståelse ved å hjelpe elevene å se sammenhenger. Type 4 oppfordrer elevene til å vise refleksjon og begrunnelser og dermed gi læreren og dem selv tilgang til egne tankeprosesser og resonnementer. Alle de ulike spørsmålstypene er viktige på hver sin måte, og en variasjon av spørsmålstyper er også essensielt. Siden spørsmålene man stiller genererer ulike svar vil de også være nødvendig for ulike deler av læreprosessen. Dermed er det viktig å ha kunnskap om de ulike spørsmålstypene og å utnytte det brede spekteret. I sin studie av lærerens spørsmål forsket Boaler og Brodie (2004) på seks ulike lærere og undersøkte hva slags spørsmål disse lærerne brukte i sin undervisning. Resultatene fra denne studien peker mot at lærerne i studien hadde en klar overvekt av spørsmålstype 1. Mellom 61% og 99,5% av spørsmålene lærerne stilte var spørsmål der det forventes en rask respons og der læreren vet hvilket svar han er på jakt etter. En slik overvekt av en spørsmålstype er lite gunstig for matematisk diskusjon. Boaler og Brodie (2004) viser at man kan stimulere til gode matematiske diskusjoner ved å stille et bredt spekter av spørsmål. Læreren kan også fungere som en rollemodell for elevene og spørsmålene læreren stiller kan påvirke hvilke spørsmål elevene stiller seg selv og andre. Hvis læreren stiller konseptuelle spørsmål til elevene tenderer også elevene til å stille konseptuelle spørsmål til seg selv (Boaler & Brodie, 2004). I denne studien har jeg valgt å ta utgangspunkt i NCTM (2014) sitt rammeverk (**tabell 2**) i analysen av lærerens spørsmål i de matematiske diskusjonene.

At læreren stiller spørsmål er i seg selv ikke nok for å sikre at elever får en matematisk forståelse og avanserer sin evne til resonnering. For å få en helhetlig forståelse og for og best mulig kunne legge til rette for elevers resonnering er det viktig å se på samtalen som helhet og ikke bare hvert spørsmål for seg. Derfor skal jeg i denne studien bruke både Drageset (2014) sitt rammeverk for lærerens handlinger og NCTM (2014) sitt rammeverk for lærerens spørsmål til å kartlegge hvilke verbale handlinger som preger de matematiske diskusjonene der elevenes resonnementer synliggjøres.

3 Metode

I dette kapittelet presenteres og begrunnes forskningsmetodene som er brukt for å besvare forskningsspørsmålet. **Kapittel 3.1** presenterer studiens forskningstilnærming, forskningsdesign og metode. I **kapittel 3.2** presenteres studiens utvalg og hvordan dette utvalget ble valgt. En grundig beskrivelse av observasjon som metode og av observasjonene som ble gjennomført er beskrevet i **kapittel 3.3**. I studien ble problemløsning brukt som et metodisk grep. Problemløsning, kontekst og utarbeiding av problemene er beskrevet i **kapittel 3.4**. **Kapittel 3.5** beskriver analyseprosessen. I **kapittel 3.6** presenteres studiens kvalitet, deriblant dens svakheter mens **kapittel 3.7** belyser studiens etiske betraktninger.

3.1 Forskningsdesign og metode

I samfunnsforskning er det vanlig å skille mellom to ulike forskningstilnærminger, kvantitativ og kvalitativ tilnærming. I kvantitativ forskning foreligger dataene som tellbare enheter, mens dataene i kvalitativ forskning utformer seg som ord (Christoffersen & Johannessen, 2012). I min studie skal jeg undersøke lærerens verbale handlinger og jeg har derfor valgt en kvalitativ forskningstilnærming.

Studien jeg har gjennomført er en casestudie. En casestudie dreier seg om å forske detaljert på noe spesifikt framfor å forske på det generelle (Thomas, 2011). Grunnen til at en casestudie er hensiktsmessig å bruke her er at jeg ønsker å få dyp innsikt i den matematiske diskusjonen mellom lærer og elev, og undersøke hva som preger de diskusjonene der elevenes resonnementer synliggjøres. Dataene i denne studien ble hentet inn ved hjelp av observasjon av en lærer og hans elever i en naturlig setting, altså i klasserommet. Casestudier brukes for å undersøke et fenomen i dybden i sin virkelighetsnære kontekst, der fenomenet og konteksten ikke er tydelig adskilt (Yin, 2014). I denne studien er fenomenet de matematiske diskusjonene mellom lærer og elev og konteksten er matematikktimen i klasserommet.

I denne casestudien ble observasjon valgt som datainnsamlingsmetode og videokamera ble brukt som hjelpemiddel. Fire grupper med elever ble observert i to ulike matematikktimer. Elevene ble observert mens de arbeidet med problemer tilknyttet temaene funksjonsdrøfting og optimering innenfor hovedtemaet funksjoner. En grundig beskrivelse av observasjonen og observasjon som metode kan leses i **kapittel 3.3**.

3.2 Utvalg

For å finne en klasse å gjennomføre studien i startet jeg med å ta en prat med avdelingsleder på en skole jeg har tilknytning til. Hun ga meg en oversikt over alle matematikklærerne ved skolen og jeg begynte deretter å forhøre meg rundt. Det var det tidlig en lærer som meldte sin interesse. Jeg har valgt å kalle denne læreren Dag. Dag er en lærer i 40-årene og han har bakgrunn fra beregningsorientert biologi. Han har arbeidet som lærer i 5 år og er lærer blant annet i en matematikk 1T klasse. Han hadde ikke noe spesiell erfaring med å arbeide direkte med matematiske diskusjoner og elevers resonnementer, men uttrykte en interesse for dette. Jeg hadde også et ønske om at dataene skulle samles inn i en klasse til et av de teoretiske matematikkursene. Dette var fordi jeg anså sannsynligheten for at disse elevene synliggjorde sine resonnementer som større sammenliknet med elevene som tar en praktisk matematikkretning. Tradisjonelt sett er flere av elevene i et teoretisk matematikkurs mer motiverte og interesserte i matematikken, og dermed kan en slik klasse kanskje være et gunstig utgangspunkt. På bakgrunn av denne lærerens interesse for studien og at han underviser i et teoretisk matematikkurs på videregående nivå valgte jeg å gå inn i denne klassen og å bruke Dag og hans elever som grunnlag for datainnsamlingen.

Klassen denne studien ble gjennomført i ble altså valgt på grunnlag av læreren. Utvelgelsen av de faktiske deltakerne ble gjort basert på hvilke elever som ønsket å ha en aktiv del i studien, altså basert på hvem som samtykket til å bli filmet. Alle elevene i den aktuelle klassen fikk utlevert både informasjonsskriv og samtykkeskjema (se **vedlegg 1**). I denne studien ble i alt ti elever filmet i sitt arbeid med problemløsning. Det er læreren og disse ti elevene som danner grunnlaget for analysen i denne studien. Disse ti elevene var fordelt på fire grupper, to grupper av to elever og to grupper av tre elever (se **figur 1**).

3.3 Observasjon

<u>3.3.1 Observasjon som metode</u>

«Observasjon er den tidligste og mest fundamentale form for forskning» (Postholm, 2010, s. 56). Ved observasjon tar forskeren i bruk alle sine sanser og danner seg et bilde av situasjonen. I dagliglivet foretar vi utallige observasjoner i løpet av en dag, men disse observasjonene skiller seg fra en kvalitativ forskers observasjoner ved at en forskers observasjoner er systematiske og hensiktsmessige (Postholm, 2010).

Et argument for å bruke observasjon er at man kan få direkte tilgang til det man undersøker og at det kan gi et bilde av virkeligheten som er vanskelig å få tak i ved hjelp av andre datainnsamlingsmetoder (Christoffersen & Johannessen, 2012). Målet med datainnsamlingen var å få detaljert informasjon om lærerens handlinger i de matematiske diskusjonene mellom læreren og elevene og om elevenes resonnementer i deres arbeid med problemer. På bakgrunn av dette har jeg valgt å benytte meg av observasjon som datainnsamlingsmetode. Observasjonen ble gjennomført i to ulike økter, heretter referert til som *økt 1* og *økt 2*. En grundigere presentasjon av de fire gruppene og av observasjonen som ble gjennomført kan leses i **kapittel 3.3.2**.

Observasjon kan gjennomføres på ulike måter. Thomas (2011) deler observasjon inn i to ulike kategorier, strukturert og ustrukturert observasjon. Strukturert observasjon er når man ser etter en bestemt oppførsel, mens ustrukturert observasjon er når man går mer åpent inn i settingen og det man ser er det som oppleves som viktig når man befinner seg i settingen. Før jeg begynte å samle inn data hadde jeg et klart bilde av at det var interaksjonen mellom læreren og elevene og elevenes resonnement jeg ønsket å undersøke, og derfor kan observasjonen som ble gjennomført ses på som strukturert. Det er ikke uvanlig å benytte seg av et observasjonsskjema ved gjennomføring av strukturert observasjon der man har et klart bilde av hva som skal observeres (Christoffersen & Johannessen, 2012). I deler av observasjonen som ble gjennomført i denne studien valgte jeg å benytte meg av et observasjonsskjema (se **vedlegg 3**). Hvilke elementer ved interaksjonen mellom lærer og elev som har vært i hovedfokus har vært i stadig endring i hovedsak som følge av dataene og analysene som ble gjort etter *økt 1*. Selve analyseprosessen og dens påvirkning av observasjonsskjemaet beskrives i **kapittel 3.5**. I observasjonsskjemaet som ble brukt stod lærerens spørsmål i hovedfokus og dette skulle vise seg å bli mindre relevant for bruk i andre runde med observasjon da forskningsspørsmålet var noe endret. Derfor løsrev jeg meg fra observasjonsskjemaet i den andre observasjonen.

En kvalitativ forsker kan ha ulike roller i observasjonen, og Gold (1958) har kategorisert observasjon i fire kategorier basert på grad av åpenhet og forskerens deltakelse. De fire kategoriene er *fullstendig deltaker, deltaker som observatør, observatør som deltaker* og *fullstendig observatør*. I denne studien har min rolle vært som *observatør som deltaker*. I følge Gold (1958) kjennetegnes *observatør som deltaker* ved at observatøren er en del av gruppen som observeres men at man i liten grad deltar direkte. Kontakten med gruppen skjer ofte gjennom intervjuer separat fra settingen. Denne typen observasjon er åpen, altså vet gruppen at den blir observert. I denne studien var jeg tydelig tilstede i klasserommet men deltok ikke som lærer. Elevene var klar over at de ble observert.

Som antydet ovenfor er observasjon et vidt begrep og kan gjennomføres på flere måter. Et hjelpemiddel forskeren kan benytte seg av i forbindelse med observasjon er videoopptak. Videoopptak sikrer dokumentasjon av bevegelser, tale og kroppsspråk (Christoffersen & Johannessen, 2012) og gir forskeren mulighet til å ta med seg et ufortolket detaljert datamateriale ut fra situasjonen. Vi mennesker har begrensninger knyttet til observasjon, og videoopptak kan brukes som et hjelpemiddel for å dempe disse begrensningene (Powell, Francisco & Maher, 2003). Selv om observatøren har tilgang til de samme inntrykkene som kameraet, er det å ha et splittet fokus utfordrende for oss. Et videokamera kan ta inn uendelige mengder med inntrykk innenfor dets rekkevidde og ved å forevige situasjonen ved hjelp av et videokamera kan observatøren få et rikt og detaljert bilde av situasjonen. Powell et al. (2003) trekker frem følgende som en fordel med bruk av videoopptak i observasjon; «Video not only allows for multiple viewings but also for viewing from multiple points of view» (s. 410). Dette gjør at man potensielt kan unngå å trekke forhastede slutninger angående hva som observeres (Bryman, 2012; Powell et al., 2003).

Det er ikke bare mennesker som har begrensninger knyttet til observasjon, det finnes også noen begrensinger knyttet til det å bruke videoopptak i datainnsamling. Selv om det ikke ligger noen begrensinger i hvor mye data et videokamera har kapasitet til å ta inn, ligger det en begrensing i dets rekkevidde. Selv hvis hver eneste kvadratcentimeter av klasserommet befinner seg innenfor videokameraets rekkevidde vil det fremdeles være aspekter som kameraet ikke klarer å fange opp. Det kan for eksempel være det som skjer utenfor vinduet eller det som skjer på elevenes telefoner. Dette gjør at personen som setter opp videokameraet, hvilket videokamera som brukes og hvor og hvordan videokameraet plasseres er med på å styre hvilke data man får tak i og hvilke data som går tapt (Powell et al., 2003). En kritisk drøfting av studiens kvalitet og observasjon som metode kan leses i **kapittel 3.6**.

3.3.2 Gjennomføring

I forbindelse med forberedelsesarbeidet til studien gjennomførte jeg et pilotprosjekt der jeg testet ut observasjon som metode. I dette pilotprosjektet var jeg inne i en matematikklasse på en videregående skole. Der satt jeg bakerst i klasserommet og observerte det som foregikk. Jeg brukte synet og hørselen min og noterte ned det jeg observerte der og da i en bok. Dette pilotprosjektet skulle vise seg å bli nyttig for videre planlegging av studien. En erfaring jeg gjorde meg i løpet av pilotprosjektet var at det var utfordrende å samle inn data gjennom observasjon kun ved hjelp av egne sanser. Basert på denne erfaringen har jeg derfor valgt å ta i bruk videokamera som hjelpemiddel for å dokumentere dataene.

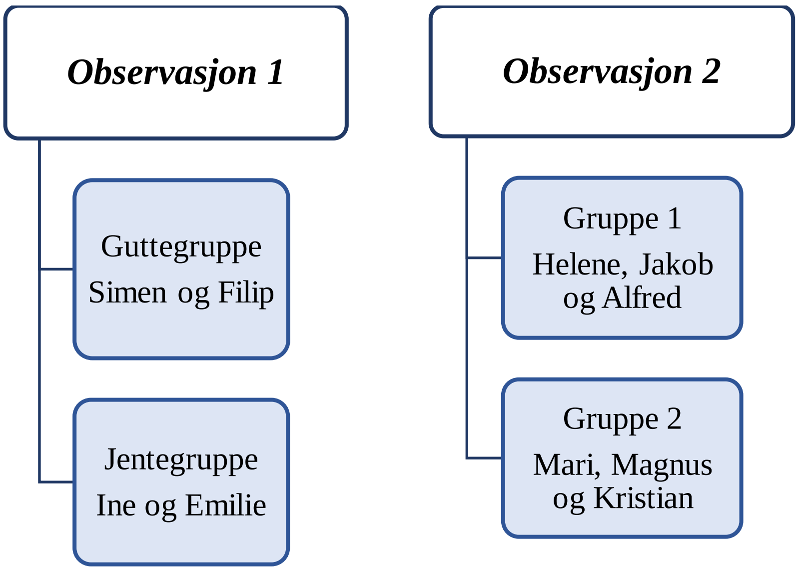
Forskningsspørsmålet som skal besvares omhandler lærerens handlinger i de matematiske diskusjonene mellom en lærer og hans elever og synliggjøring av elevers kreative resonnementer. I følge Lithner (2008) kan et resonnement ses på som en tankeprosess, et produkt av en tankeprosess eller begge deler. Det å observere en tankeprosess i sin originale form er vanskelig, da dette er noe som foregår inne i elevens hode og dermed noe jeg i utgangspunktet ikke har umiddelbar tilgang til. For å finne svar på forskningsspørsmålet var det derfor nødvendig å gjøre disse tankeprosessene synlige og observerbare. På grunnlag av dette har jeg valgt å se på et resonnement som et produkt av en tankeprosess i denne studien. Et slikt produkt av en tankeprosess kan for eksempel være det elevene skriver og sier i forbindelse med oppgaveløsning. I denne studien vil hovedvekten legges på elevenes muntlige formidling av sine tankeprosesser. Dette begrunnes med at dette er en måte å synliggjøre elevens resonnementer og å gjøre dem observerbare.

Det ble gjort observasjoner i en klasse i to ulike økter, *økt 1* og *økt 2,* og heretter vil observasjonene som ble gjort i de respektive øktene refereres til som *observasjon 1* og *observasjon 2*. I *økt 1* satt elevene på plassene sine og arbeidet med problemløsning sammen med den de vanligvis sitter ved siden av. I *økt 2* ble elevene delt inn i tilfeldige grupper på tre og problemet de fikk utdelt skulle løses ved hjelp av en liten tavle kalt «mini-tavle» som var klistret til veggen.

Observasjonen i hver av øktene var todelt, en del bestod av mine observasjoner fra da jeg var tilstede i settingen og den andre delen bestod av mine observasjoner basert på videoopptak fra settingen. Videokameraet filmet noen utvalgte elevgrupper mens de løste problemene. Dette ble gjort likt i begge øktene, og kameraet ble plassert slik at det pekte mot elevenes oppgaveark eller elevenes mini-tavler. Dette ble gjort slik at lyden som ble tatt opp kunne knyttes til det elevene skrev og det de satt med foran seg. Under *observasjon 1* i klasserommet benyttet jeg meg av et observasjonsskjema (se **vedlegg 3**) for å strukturere det jeg observerte. Dette var en måte å forsøke å effektivisere innsamlingen av data og en enkel måte å kategorisere observasjonene i forhåndsbestemte bolker under selve observasjonen. Jeg opplevde det som utfordrende å holde observasjonen innenfor de rammene jeg hadde satt på forhånd. På bakgrunn av dette og at forskingsspørsmålet endret seg som følge av analysen av dataene fra *observasjon 1* valgte derfor å gå bort fra observasjonsskjemaet i *observasjon 2*.

Dette medførte at jeg var mer åpen under *observasjonen 2*, siden jeg i mindre grad valgte bort data som ikke ble ansett som direkte relevante der og da.

I klassen det ble observert i sitter elevene til vanlig ved siden av hverandre i par. Etter samtale med læreren, som hadde fått innblikk i hovedtrekkene i forskningsspørsmålet, ble det bestemt at parene som sitter sammen skulle bli værende i *økt 1*. Deltakerne i *observasjon 1* ble valgt ut basert på lærerens inntrykk av elevene og hans erfaringer med hvordan elevene løser oppgaver, samarbeider og deres verbale ferdigheter. Parene som ble valgt ut var ifølge læreren et par bestående av to faglig sterke jenter, Ine og Emilie og et par gutter bestående av Simen og Filip, som læreren anså som sterke verbalt. Deltakerne i *observasjon 1* ble dermed ikke valgt ut helt tilfeldig da læreren og hans erfaringer var med på påvirke. Et argument for at lærerens erfaringer ble lagt til grunn for valg av deltakere er for å best mulig legge til rette for å sikre datagrunnlag. I *økt 2* ble deltakerne delt inn i tilfeldige grupper på tre. Deretter ble to grupper valgt ut tilfeldig, helt uavhengig av læreren og hans erfaringer. Dermed hadde jeg ikke noe kunnskap om hverken elevenes faglige nivå eller verbale ferdigheter på forhånd. Grunnen til at dette ble gjort er at læreren hadde god erfaring med å dele inn i tilfeldige grupper. I tillegg hadde erfaringer fra den første observasjonen gitt meg inntrykk av at elevene arbeidet godt med problemene og at mange av elevene var sterke verbalt. Derfor valgte vi å dele inn i tilfeldige grupper og jeg valgte ut to tilfeldige grupper som ble filmet. Gruppene i *observasjon 2* bestod som nevnt av tre elever, gruppe 1 bestod av Helene, Jakob og Alfred og gruppe 2 bestod av Mari, Magnus og Kristian. I **Figur 1** er alle deltakerne i prosjektet vist i en skjematisk oversikt.



Figur 1: Figuren viser en oversikt over elev-deltakerne som deltok i studien gjennom å bli filmet under problemløsningen.

3.4 Problemløsning og kontekst

I denne studien ble dataene samlet inn i en 1T klasse der temaet for undervisning var funksjonsdrøfting, derivasjon og optimalisering. Disse temaene er temaer som sorterer under hovedtemaet funksjoner, og disse er med på å bygge en helhetlig forståelse av funksjonsbegrepet og dets egenskaper. Funksjoner er et av matematikkens fundamenter (Michelsen, 2006). Funksjoner er et tema i samtlige læreplaner i matematikk i videregående skole og dermed noe alle elever bør ha et forhold til. Det er knyttet en del misoppfatninger til funksjonsbegrepet og mange elever har vanskeligheter med å få tak på dette begrepet. Generelt kan elever ha vansker med å forstå funksjoners kompleksitet, og de er ofte av den oppfatningen at funksjoner representeres ved hjelp av en enkelt formel. Dermed har mange elever kun en stykkevis forståelse av funksjoner og dette kan by på flere problemer (Best & Bikner-Ahsbahs, 2017). Dette kan blant annet by på utfordringer rundt forståelsen av variabler, ukjente størrelser og parametere og det kan gjøre det vanskelig å skille ulike funksjonstyper og deres egenskaper fra hverandre. Best og Bikner-Ahsbahs (2017) hevder at utfordringene knyttet til funksjoner melder seg i overgangen mellom ungdomsskole og videregående. Denne overgangen krever nemlig at elevenes funksjonsforståelse endres i retning av kalkulus. I undervisningen som omhandler funksjoner benyttes det ofte flere ulike representasjonsformer. Eksempler på slike representasjonsformer kan være tabeller, punkter, grafer, formler eller fortegnslinjer. Overgangen mellom disse ulike representasjonsformene er ofte utfordrende for elever (Best & Bikner-Ahsbahs, 2017; Dubinsky & Wilson, 2013). Et av undertemaene under funksjoner er derivasjon, og dette er også noe noen elever har problemer med. Det vil si ikke nødvendigvis problemer med beregning av den deriverte til en funksjon men flere har en manglende forståelse av hva derivasjon er. I følge Park (2016) kan dette skyldes derivasjonens komplekse definisjon og ulike representasjoner. For å få en fullstendig forståelse av hva derivasjon er, trengs nemlig en grundig forståelse av andre konsepter som funksjoner og grenseverdier (Park, 2015). Uten denne forståelsen på plass blir derivasjon fort et abstrakt begrep som kun knyttes til et sett med regneregler fremfor å være noe man kan benytte seg av i praktiske situasjoner.

I øktene der data skulle samles inn var både jeg og lærer involvert i undervisningsplanleggingen. I denne planleggingen hadde vi begge et ønske om å legge til rette for at elevene skulle få en helhetlig forståelse av temaet da dette er gunstig både for dybdelæring og elevenes matematiske kompetanse. At elevene beveger seg bort fra en stykkevis forståelse av derivasjon og funksjonsbegrepet er essensielt for å kunne utvide deres forståelse av begrepet. Funksjonsregning er essensielt for å kunne beskrive, forklare og forutse fenomener i den virkelige verden (Michelsen, 2006) og uten en helhetlig forståelse av dette begrepet vil elevene få problemer med å kunne knytte dette til praktiske sammenhenger og å anvende dette utenfor klasserommet.

Ulike oppgavetyper stimulerer ulike deler av læringsprosessen til eleven. Dermed kan man tenke seg at ikke alle oppgaver er like gode og gir samme mulighet for læring. NCTM (2014) skriver at læreren med jevne mellomrom bør gi oppgaver som fremmer resonnementer og problemløsning. Dette fordi denne typen oppgaver gir elevene mulighet til å tenke selv og gjør matematikken tilgjengelig på flere måter. Slike oppgaver kan bidra med å se ulike sammenhenger i matematikken, stimulere til bruk av flere ulike representasjoner, verktøy og fremgangsmåter og gi elevene et bredt spekter av løsningsstrategier (NCTM, 2014). *Problem* er et begrep som brukes mye i både norsk og engelsk matematikkdidaktisk faglitteratur og begrepet kan ha flere definisjoner. Enkelte bruker begrepet nokså generelt om alt arbeid med oppgaver der man søker et svar, mens andre bruker begrepet for å henvise til en oppgavetype som er mer kompleks og som ofte oppfattes som utfordrende for elevene på flere plan. Schoenfeld (1985) omtaler problemer som en oppgave der eleven ikke umiddelbart har tilgang på en løsningsmetode. Fordi en fremgangsmåte og løsningsmetode ikke umiddelbart er tilgjengelig for eleven kan slike oppgaver oppfattes som vanskelige eller utfordrende. Om en oppgave kan karakteriseres som et problem vil avhenge av hvem som skal løse den. Elevers forkunnskaper er varierende og dermed kan en oppgave være ren rutine for en elev mens en annen kan oppleve oppgaven som et komplekst problem.

Jäder, Sidenvall og Sumpter (2017) bruker begrepet rutinemessige og ikke-rutinemessige oppgaver. Der rutinemessige oppgave kjennetegnes ved at elevene har en oppskrift for å løse dem, mens ikke-rutinemessige oppgaver krever at eleven selv må skape en løsningsmetode for å klare å løse den. I denne oppgaven velger jeg å ta utgangspunkt i Schoenfeld (1985) sin forståelse av hva et problem er og Jäder et al. (2017) sin definisjon av ikke-rutinemessige oppgaver. Dette medfører at jeg her bruker begrepet *problem* om en oppgave der eleven ikke kjenner til løsningsmetoden fra start av og der de selv må konstruere sin egen løsningsmetode for å løse problemet. Som følge av dette forstås problemløsning som arbeid med problemer.

I denne studien blir ikke sammenhengen mellom problemer og elevers resonnementer undersøkt. Det jeg derimot ønsker, er å bruke problemer som et metodisk grep for å tilrettelegge for elevenes resonnementer. Stein et al. (1996) hevder at oppgaver av denne typen, altså problemer, er essensielle for å utvikle elevers resonnementer. Problemer er også en god måte å tilrettelegge for elevers kreative resonnementer, da forskning viser at elever i større grad tenderer til å bruke kreative resonnementer i møte med problemer sammenliknet med oppgaver med et mer rutinemessig preg (Jäder et al., 2017). Innenfor problemløsning er elevene avhengig av å ha en viss forståelse av de ulike representasjonsformene. Dette er fordi problemløsningsprosessen er avhengig av at elevene evner å oversette mellom ulike representasjonsformer og å ta disse i bruk (Gagatsis & Shiakalli, 2004; NCTM, 2014). Dette innebærer at elevene klarer å se de ulike undertemaene i sammenheng. For elevene som deltok i denne studien innebærer dette å se sammenhenger mellom blant annet funksjoner, grafer, tangenter, stigningstall og ekstremalpunkter. Borgen og Manu (2002) skriver at elevens konseptuelle forståelse øker når koblingene mellom kunnskap fra ulike temaer styrkes. Dette kan ses i sammenheng med at forståelsen av funksjoner øker dersom elevene klarer å koble kunnskap om for eksempel kritiske punkter og den deriverte sammen.

3.4.1 Utarbeiding av problemene

I begge de to øktene der observasjonen ble gjennomført arbeidet elevene med problemløsning, enten i par (*økt 1*) eller i grupper på tre (*økt 2*). Problemene elevene skulle jobbe med i disse øktene ble utarbeidet i samarbeid med faglærer. Grunnen til at faglærer hadde en aktiv del i denne prosessen er fordi læreren sitter med erfaringer jeg anså som en ressurs i denne delen av prosessen. Læreren har god kjennskap til, og kunnskap om både fagstoffet og elevene, deriblant deres forutsetninger og erfaringer. For å forsøke å legge til rette for en helhetlig forståelse av derivasjon og funksjonsbegrepet besluttet faglærer og jeg å lage oppgaver som elevene skulle løse sammen i gruppe. Vi forsøkte å lage oppgaver der elevene ikke på forhånd hadde tilgang til løsningsmetoden og som dermed ga dem mulighet til å tenke selvstendig. I et forsøk på å styre unna en stykkevis forståelse av de matematiske teamene lagde vi oppgaver som knyttet flere av delkapitlene fra boken sammen.

I problemløsning er det som nevnt et sentralt poeng at løsningsmetoden er ukjent for eleven. I følge Lithner (2017) er det ikke et poeng i seg selv at problemene skal være utfordrende for elevene, likevel utelukker jeg ikke at oppgaver der eleven ikke kjenner løsningsmetoden oppleves som utfordrende av eleven selv. Da oppgavene skulle utformes tok vi utgangspunkt i det elevene allerede hadde arbeidet med, samtidig ble det vi ønsket at elevene skulle lære tatt hensyn til i utformingen av oppgavene. I forkant av øktene der data ble samlet inn hadde elevene arbeidet med begrepene gjennomsnittlig vekstfart, momentan vekstfart og derivasjon. De hadde også jobbet med å bruke enkelte derivasjonsregler. I dette prosjektet ble tre elementer vektlagt underveis i utarbeidelsen av problemene:

- Løsningsmetoden til problemet er ikke umiddelbart kjent for eleven.
- Alle elevene skal ha forutsetninger for å kunne løse problemet. Noen vil kunne bruke sine forkunnskaper og sette kunnskapen i sammenheng, mens andre vil trenge ulik grad av veiledning fra læreren.
- Problemet skal ha en viss grad av åpenhet, slik at elevene har mulighet til å tenke kreativt for å komme fram til en løsningsstrategi.

Med disse kriteriene på plass ble to ulike oppgavesett utarbeidet. I *økt 1* arbeidet elevene med *oppgavesett 1* (se **vedlegg 4**) og i *økt 2* arbeidet de med *oppgavesett 2* (se **vedlegg 5**).

I *økt 1* var temaet funksjonsdrøfting og målet med timen var at elevene skulle knytte den deriverte til en funksjon til den originale funksjonen. Dette skulle de gjøre ved å arbeide med *oppgavesett 1*. Dette oppgavesettet er satt sammen av tre problemer, der faglærer antar at løsningsmetoden ikke er kjent for elevene, men hevder at elevene har forutsetninger for å klare oppgavene.

Oppgave 1: Tegn en graf med minst ett ekstremalpunkt i koordinatsystemet under. Lag deretter en fortegnslinje til denne grafen og til den deriverte til grafen. Forklar hvordan dere kan bruke fortegnslinjen til den deriverte til å finne grafens ekstremalpunkter.

Dette problemet ble laget av faglærer og bygger videre på det elevene har arbeidet med tidligere og kan bidra med å tydeliggjøre hvordan den deriverte kan knyttes sammen med hvordan grafen til en funksjon «oppfører seg». Oppgaven etterspør også at elevene skal sette sine egne ord på sammenhengen mellom ekstremalpunkter og den deriverte. Oppgaven er åpen i form av at elevene selv velger hvordan grafen de vil jobbe med ser ut og i form av at de skal bruke sine egne ord for å beskrive en sammenheng og svaret kan formuleres på flere ulike måter.

Oppgave 2: Gitt en funksjon f. Fortegnet til funksjonsuttrykket f(x) og til den deriverte av funksjonen f'(x)varierer som vist i figuren nedenfor. Lag en skisse som viser hvordan grafen til f kan se ut.

Denne oppgaven er hentet fra en tidligere gitt eksamen i faget og setter også fortegnet til den deriverte i sammenheng med grafen til funksjonen. Problemet gjør også at elevene kan utforske sammenhengen mellom nullpunktet til den deriverte og funksjonens ekstremalpunkter. Oppgaven er åpen i form av at elevene ikke vet noe om verdimengden til funksjonen, men opplysningene de får gir dem nok informasjon til å kunne lage en skisse.

Oppgave 3 handler om å knytte informasjon om fem ulike funksjoner og deres deriverte til riktig graf. Oppgaven er utformet på en slik måte at den er utfordrende å gjengi i korte trekk, se derfor **vedlegg 4** for fullstendig oppgavetekst.

Oppgave 3 kan ses på som en oppsummering av de to foregående oppgavene og er også hentet fra et tidligere eksamenssett. Her må elevene knytte ulik informasjon sammen og utfra dette danne seg et bilde av hvordan grafen til de aktuelle funksjonene ser ut.

I *økt 2* var temaet optimering. Optimering har sterk tilknytning til derivasjon og funksjoner og kan gi det å bruke derivasjon til å finne ekstremalpunktene til en funksjon en praktisk verdi. Optimalisering innebærer nemlig å bruke matematiske konsepter til å finne ut hvordan man utnytter det man har tilgjengelig på en mest mulig gunstig måte. Dette kan for eksempel være å finne produksjonsmengden som gir maksimal fortjeneste eller størst mulig areal av en innhegning gitt en bestemt omkrets. Målet for denne økta var at elevene skulle knytte funksjoner til praktiske sammenhenger, samt se sammenhengen mellom den deriverte og funksjonenes ekstremalpunkter og å bruke dette i en praktisk sammenheng. *Oppgavesett 2* (se **vedlegg 5** for fullstendig oppgave) inneholder kun et problem. Dette problemet er hentet fra Nasjonal digital læringsarena (NDLA) sine nettsider (Kristensen & Aanensen, 2018). I denne studien ble det gjort noen mindre justeringer av oppgaven og oppgaveteksten til problemet i *oppgavesett 2* lyder som følger:

Vi skal lage en eske uten lokk av en rektangelformet papplate med sider 50 cm og 40 cm. Vi gjør dette ved å klippe ut et kvadrat med side x i hvert hjørne. Deretter bretter vi opp kantene og får en eske med høyde x. Se figur. ***Finn det største volumet esken kan ha.***

Løsningen til dette problemet består av flere steg. Elevene er avhengig av å løse de foregående stegene for å få til en fullstendig løsning. Denne oppgaven kan løses på flere måter, enten ved at elevene systematisk prøver seg fram og finner en omtrentlig verdi for det største volumet eller ved å knytte praktiske fenomener som volum til mer abstrakte fenomen som funksjoner, og videre bruke denne kunnskapen til ekstremalpunkt, derivasjon og vekstfart. Den andre måten å løse oppgaven på krever at elevene ser sammenhenger i faget og kan bruke kunnskap fra tidligere.

3.5 Dataanalyse

Å analysere et datamateriale innebærer «… å arbeide med datamaterialet, sortere og organisere det, bryte det ned i håndterbare enheter, kode det og se etter mønstre» (Nilssen, 2014, s. 104). Tolkning av mønstre er viktig for å skape mening i kvalitative data og for å kunne bruke dataene til å gi et godt svar på forskningsspørsmålet kan teori være et godt hjelpemiddel i tolkningsprosessen. Tolkningen innebærer å gjøre funnene forståelige og forklare dataene ved hjelp av teori og annen forskning samt å tydeliggjøre hvorfor funnene er viktige (Postholm, 2010). Hvilken rolle teorien spiller og i hvor stor grad dataene får tale fritt kan knyttes til begrepene induksjon og deduksjon. Ved en induktiv tilnærming bruker man observasjonene og funnene man har gjort til å danne et teoretisk rammeverk mens man ved en deduktiv tilnærming bruker sitt teoretiske rammeverk som utgangspunkt for analysen av dataene (Bryman, 2012; Nilssen, 2014). Selv om det noen ganger er ønskelig å la de innsamlede dataene få tale fritt er det å ha en utelukkende induktiv tilnærming ofte vanskelig å få til i praksis. Det er teorien som gir retning til observasjonen og man kan se for seg at teorier og antakelser danner et filter som forskningsfeltet oppleves igjennom (Postholm, 2010). Dermed er en helt induktiv tilnærming der dataene får tale helt fritt ofte vanskelig å få til, rett og slett fordi enhver forsker har erfaringer, opplevelser, antakelser og teorier som han tar med seg inn i situasjonen. Dette legger grunnlaget for et deduktivt møte med praksisfeltet (Postholm, 2010). I denne studien har arbeidet med dataene foregått gjennom en kontinuerlig interaksjon mellom deduksjon og induksjon, og denne tilnærmingen kan kalles en abduktiv tilnærming. Ved en abduktiv tilnærming er nøkkelen å finne en balanse mellom det induktive og det deduktive.

Analysen av datamaterialet begynte umiddelbart etter at *observasjon 1* var gjennomført. Gjennom denne første runden med observasjon oppdaget jeg ting ved datamaterialet som fikk meg til å endre det opprinnelige forskningsspørsmålet. Dette innebar at jeg bestemte meg for å åpne opp for å se på flere av lærerens verbale handlinger og ikke bare undersøke lærerens spørsmål slik jeg først hadde tenkt til. Det å finne et passende forskningsspørsmål var en prosess, og forskningsspørsmålet jeg endte opp med kommer som følge av å ha gjennomgått dataene flere ganger.

I denne studien er det kun videoene som har blitt analysert og som derfor danner hovedgrunnlaget av datamaterialet i denne studien. Observasjonene jeg gjorde da jeg var tilstede i klasserommet fungerer som et supplement til de videobaserte dataene. Dermed gikk ulik bruk av observasjonsskjemaet i liten grad utover hva jeg satt igjen med av relevante data. Jeg har valgt å ta utgangspunkt i Powell et al. (2003) sin modell for analyse av videobaserte data i denne studien. Denne modellen består av følgende syv trinn:

1. Se oppmerksomt gjennom datamaterialet
2. Beskrive datamaterialet

3. Identifisere kritiske hendelser
4. Transkribere
5. Kode
6. Konstruere en sammenheng mellom kodene og kritiske øyeblikk
7. Lage en beskrivende historie

I arbeidet med å analysere dataene startet jeg med å se gjennom datamaterialet og beskrive det. Datamaterialet ble beskrevet i intervaller, det vil si at jeg tok for meg intervaller på 5-10 minutter og beskrev hovedtrekkene i disse. Fordi forskningsspørsmålet innebærer analyse av de matematiske diskusjonene mellom læreren og elevene der elevenes resonnementer er synlige, ble intervaller der læreren hadde samtaler med elevene markert. Neste steg i Powell et al. (2003) sin modell er transkripsjon. Et argument for å ikke transkribere er at videoopptak produserer store mengder data og at data lett kan gå tapt i transkripsjonsprosessen (Powell et al., 2003). I denne studien har jeg likevel valgt å transkribere videoene. For å unngå en for stor arbeidsbelastning og for å ikke ende opp med et for omfattende datamateriale ble det besluttet å kun transkribere de matematiske diskusjonene mellom læreren og elevene. De matematiske diskusjonene mellom lærer og elev ble nøye transkribert, og analysen og resultatene bygger på disse transkripsjonene. I mitt tilfelle innebar transkribering av data å oversette alt som skjedde i de matematiske diskusjonene til tekst. Her inngår dialogen som foregikk, kroppsspråket til deltakeren og alle andre aspekter som måtte være fremtredende. I transkripsjonen ble så mange detaljer som mulig tatt med og dialogen ble direkte sitert for å unngå at data skulle gå tapt i transkripsjonsprosessen.

De kritiske hendelsene er gitt ut fra mitt forskningsspørsmål, i denne studien ble derfor deler av samtalen der elevenes resonnementer er synlige kategorisert som kritiske hendelser. I arbeidet med å lokalisere de kritiske hendelsene ble Lithner (2008) sine kriterier for et kreativt resonnement brukt. Lithner (2008) vektlegger som nevnt i **kapittel 2.1.2** tre kriterier som et kreativt resonnement må oppfylle. Resonnementet må være kreativt, argumentene som brukes må være plausible og de må kunne forankres i matematikken. I analysen av dataene ble kun de to siste kriteriene vektlagt. Selv om vi i utarbeidelsen av problemene etter beste evne la til rette for at elevene ikke hadde tilgang til en innlært løsningsmetode på forhånd, er det vanskelig å observere om kravet om kreativitet er oppfylt. For en utenforstående observatør som ikke kjenner elevene er det utfordrende å avgjøre hvorvidt resonnementet er nyskapende for den som resonnerer eller ikke. Derfor ble ikke kriteriet om kreativitet i form av nyskapning vektlagt i analysen. I analysen ble det heller ikke skilt mellom predikativ og verifiserende argumentasjon.

I denne studien ble argumenter som var både plausible og som kunne forankres i matematikken sett på som indikatorer av et resonnement. Et argument alene kan ikke nødvendigvis ses på som et resonnement, men et argument er en del av et resonnement, og dette kan ofte være den formen som er lettest tilgjengelig for en utenforstående. Hvorvidt en kritisk hendelse bestod av ett eller flere argumenter varierte fra samtale til samtale, men det viktigste var at argumentene var plausible og matematisk forankret. I alt ble ni kritiske hendelser avdekket, disse ble sett i sammenheng med dialogen som fant sted i forbindelse med den kritiske hendelsen. Med utgangspunkt i de ni kritiske hendelsene ble det definert ni samtalesekvenser. Disse samtalesekvensene er utdrag av de matematiske diskusjonene mellom læreren og elevene og inneholdt alle kritiske hendelser, altså elevers synlige resonnement. Samtalesekvensene består altså av dialogen som befinner seg i nær relasjon til de kritiske hendelsene. Dette vil innebære de delene av samtalene som befinner seg nære i tid og i tematikk. Videre ble alle de ni samtalesekvensene analysert og kodet. Hver av de ni samtalesekvensene kan ikke ses på som enkeltstående samtaler, men må ses i den konteksten de er tatt ut fra. Dette skyldes at en samtale ikke består av isolerte hendelser men av en rekke hendelser som kommer som en konsekvens av det som har skjedd i forkant, og konteksten rundt samtalen. I denne studien har jeg likevel valgt å analysere samtalesekvensene enkeltvis. Dette begrunnes med studiens omfang og forskningsspørsmålets ordlyd. Når man observerer en samtale kan man ofte merke når en del av samtalen avsluttes og en ny påbegynnes. I denne studien kan dette for eksempel være når en konklusjon er nådd, når en ny deloppgave påbegynnes eller når læreren eller en av elevene stiller et nytt spørsmål som påvirker retningen den videre samtalen tar. I denne studien ble dette ansett som markører på at en samtalesekvens påbegynnes eller avsluttes. Det er disse naturlige oppdelingene av samtalene jeg har forsøkt å finne slik at jeg har klart å dele opp de lengere dialogene i kortere samtalesekvenser som det er naturlig å analysere hver for seg. Der slike naturlige begynnelser og avslutninger på samtalesekvenser ikke kom tydelig frem ble samtalesekvensen avsluttet etter at en av elevenes resonnementer var synliggjort. For å kunne gi et best mulig svar på forskningsspørsmålet har jeg derfor analysert de ni samtalesekvensene som ble definert ut fra hvor kritiske hendelser ble lokalisert.

Lærerens handlinger i de ni samtalesekvensene ble videre kodet ved hjelp av Drageset (2014) sitt rammeverk for lærerens handlinger samt rammeverket for lærerens spørsmål fra NCTM

(2014). Drageset (2014) sitt rammeverk er grundig fremstilt i **tabell 3**. Her vises de tre hovedkategoriene, deres underkategorier og beskrivelser av hver av dem. En utdyping av dette, samt en forklaring og oversikt over rammeverket som ble brukt for å analysere lærerens spørsmål finnes i **kapittel 2.3** (se **tabell 2**). I denne oppgaven forstås lærerens handlinger i hovedsak som lærerens verbale handlinger, altså det læreren sier. Dette skyldes at læreren i hovedsak kommuniserte med elevene gjennom verbal kommunikasjon. Kroppsspråk, gestikulering, tonefall og peking ble også tatt med i analysen der det var hensiktsmessig. Under kodingen ble hvert av lærerens utsagn plassert innenfor en av de tre hovedkategoriene *fokuserende, framdrifts* og *endrende handlinger* fra Dragesets (2014) rammeverk. Videre ble det læreren sa plassert innenfor en av de tilhørende underkategoriene i dette rammeverket. Om lærerens handlinger ble plassert innenfor en hovedkategori eller underkategori først varierte. Ofte ble underkategori bestemt først, men der det var tvil om hvilken kategori et utsagn skulle plasseres under ble samtalesekvensen som helhet analysert for å bestemme hvilken av de tre hovedområdene sekvensen bar preg av og deretter ble utsagnet plassert inn i en av de tilhørende underkategoriene.

Tabell 3: Tabellen viser en kategorisering av lærerens handlinger. Tabellen laget basert på Drageset (2014) sin kategorisering av lærerens handlinger. Tabellen er en utvidelse av ***tabell 1*** *i* ***kapittel 2.3****.*

<table>
<tr><th colspan="3">LÆRERENS HANDLINGER</th></tr>
<tr><td colspan="3">Endrende handlinger</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sette til side</td><td>▪ Avvise elevenes forslag eller ideer</td></tr>
<tr><td colspan="2">Foreslå en ny strategi</td><td>▪ Foreslå en ny tilnærming</td></tr>
<tr><td colspan="2">Stille korrigerende spørsmål</td><td>▪ Spørsmål som leder til en ny tilnærming</td></tr>
<tr><td colspan="3">Fremdriftshandlinger</td></tr>
<tr><td colspan="2">Demonstrasjon</td><td>▪ Vise og/eller gjennomføre (deler av) en prosedyre</td></tr>
<tr><td colspan="2">Forenkling</td><td>▪ Gi hint
▪ Legge til eller bryte ned informasjon
▪ Fortelle eleven hva han skal gjøre</td></tr>
<tr><td colspan="2">Lukkede detaljorienterte spørsmål</td><td>▪ Spør etter detaljer
▪ Spør etter steg i en prosedyre</td></tr>
<tr><td colspan="2">Åpne spørsmål</td><td>▪ Spør etter strategier
▪ Spør etter tanker</td></tr>
<tr><td colspan="3">Fokuserende handlinger</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Etterspørre innspill fra elever</td><td>Opplyse om detaljer</td><td>▪ Få eleven til å forklare (fokus på detaljer)</td></tr>
<tr><td>Begrunnelse</td><td>▪ Få eleven til å begrunne svar og metoder</td></tr>
<tr><td>Anvende på liknende problemer</td><td>▪ Få elevene til å bruke kunnskapen på liknende problemer</td></tr>
<tr><td>Etterspørre vurdering fra medelever</td><td>▪ Få elevene til å evaluere medelevers løsninger og svar</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Understreke</td><td>Oppsummere</td><td>▪ Læreren repeterer noe som har blitt sagt
▪ Legge til noe eller tydeliggjøre en løsning</td></tr>
<tr><td>Tydeliggjøre</td><td>▪ Understreke noe som har blitt sagt
▪ Minne om ny og tidligere kunnskap</td></tr>
</table>

I løpet av kodeprosessen observerte jeg at læreren stilte elevene mange spørsmål. Jeg opplevde også at Dragesets (2014) rammeverk ikke var tilstrekkelig for å si noe om hva slags spørsmål læreren stilte. Det ble derfor besluttet å kode spørsmålene læreren stilte ut fra et rammeverk bestående av fire forskjellige spørsmålskategorier (NCTM, 2014). Dette rammeverket ble brukt som et supplement til Drageset (2014) sitt rammeverk for lærerens handlinger. Begge rammeverkene inneholder kategorier som sier noe om lærerens spørsmål, men Drageset (2014) fokuserer mer på handlingen som ligger bak mens NCTM (2014) gir et rammeverk som lar meg analysere spørsmålene dypere. I dette rammeverket skilles det mellom fire ulike spørsmålskategorier. De fire kategoriene det skilles mellom er spørsmål som *samler informasjon*, *undersøkende spørsmål*, spørsmål som *gjør matematikken synlig* og spørsmål som *oppfordrer til refleksjon og begrunnelser*. Disse er grundig presentert i **kapittel 2.3**. De to rammeverkene gir meg mulighet til å skaffe meg et godt bilde av lærerens verbale handlinger og lærerens spørsmål.

I hovedsak ble det læreren sa i forkant av elevenes resonnement mest vektlagt i kodingen, men også utsagn som kom i etterkant har blitt kodet hvis det anses som betydelig for den utvalgte samtalesekvensen. Enkelte samtalesekvenser inneholder også flere argumenter, her har lærerens innspill før, mellom og eventuelt etter argumentene blitt kodet. Alle lærerens sitater i de ni samtalesekvensene ble analysert og kodet. I **kapittel 4** er fire samtalesekvenser og analysen av dem lagt ved for å eksemplifisere funnene som er gjort i denne studien. Disse fire utdragene er valgt ut fordi de i hovedsak inneholder typiske trekk ved de matematiske diskusjonene og kan dermed være med på å gi et godt bilde av hvilke lærerhandlinger som karakteriserer den matematiske diskusjonen mellom denne læreren og hans elever der elevens resonnementer er synliggjort. I tillegg inneholder noen av samtalesekvensene som presenteres i **kapittel 4** særegenheter som ikke kommer like tydelig til utrykk i de andre sekvensene. Typiske trekk er handlinger (koder) som fremkommer i majoriteten av sekvensene som ble analysert, mens særegenhetene er handlinger (koder) som kun kan ses i et fåtall av sekvensene eller ny sammensetning av typiske handlinger (koder). Dermed danner de presenterte samtalesekvensene et bilde av alle lærerens handlinger i de matematiske diskusjonene og er dermed relevante for å kunne besvare denne studiens forskningsspørsmål. I arbeidet med steg 6 og 7 i Powell et al. (2003) sin modell vokste det frem fire sentrale hovedideer om lærerens handlinger i de matematiske diskusjonene, disse fremkommer i **kapittel 5**. Tre av de fire hovedideene kommer som en direkte følge av Drageset (2014) sitt rammeverk som ble brukt i analysen (disse utgjør **kapittel 5.1 – 5.3**), mens den siste hovedideen (se **kapittel 5.4**) illustrerer en lærerhandling som preget alle de matematiske diskusjonene men som ikke tydelig fremkommer i dette rammeverket. I **kapittel 5** blir lærerens handlinger diskuterte for å besvare forskningsspørsmålet. Dette gjøres ved at kodene og de kritiske øyeblikkene ses i sammenheng med hverandre og i lys av teorien.

3.6 Kvalitet i studien

For å kunne si noe om kvaliteten på en kvalitativ studie er det vanlig å se på studien i lys av teori som omfatter reliabilitet og validitet. Disse sier noe om kvaliteten på en studie på to ulike måter. Reliabilitet handler om hvor pålitelige og nøyaktig dataene er, og omfatter hvilke data som brukes, hvordan dataene har blitt samlet inn og hvordan de bearbeides. Relabiliteten kan si noe om hvorvidt resultatene fra studien er konsistente eller om de har oppstått ved en tilfeldighet. Studiens validitet sier noe om relasjonen mellom fenomenet som er undersøkt og studiens data og handler om hvor gode eller hvor relevante dataene er for å besvare forskningsspørsmålet (Bryman, 2012; Christoffersen & Johannessen, 2012).

3.6.1 Studiens reliabilitet

Studiens reliabilitet bør i denne studien ses i lys av metodevalget. Datainnsamlingsmetoden brukt i denne studien er observasjon ved hjelp av videokamera. En svakhet med denne metoden som kan være med på å svekke studiens reliabilitet er det som omtales som «reactive effect». Reactive effect handler om at deltakerne endrer sin oppførsel som følge av at de vet at de blir observert, og at adferden deres dermed betraktes som atypisk. Dersom elevene ikke er vant til det, kan et videokamera være med på å forsterke dette ytterligere (Bryman, 2012). Dette kan gjøre at observasjonene i denne studien ikke gir et korrekt og naturlig bilde av settingen slik man ønsker. I denne studien kan dette innebære at elevene prøver å vise evne til å resonnere uavhengig av lærerens verbale handlinger fordi deres oppfatning er at dette vil hjelpe studien. For å forhindre dette fikk elevene minimalt med informasjon om hva jeg observerte men de ble informert om at studien var avhengig av at de løste problemene, pratet sammen og satte ord på tankene sine. På den måten kan jeg utelukke at elevenes resonnementer kun kommer som et resultat av at de ble observert. Et annet eksempel på «reactive effect» i denne studien kan være at videokameraet potensielt kan virke skremmende slik at elevene i mindre grad en vanlig synliggjør sine resonnementer. Dette kan også være en konsekvens av «reactive effect» som medfører at dataene ikke gir et naturlig bilde av settingen og dermed er med på å svekke studiens reliabilitet.

3.6.2 Studiens validitet

Forskningsspørsmålet omfatter å undersøke hva som preger samtalen mellom en lærer og hans elever der elevenes resonnementer er synliggjort. Det er aspekter ved studien som er med på å styrke og svekke studiens validitet. Den mest hensiktsmessige måten å få et naturlig bilde av en klasseromssituasjon er være tilstede i situasjonen på en eller annen måte. I denne studien valgte jeg derfor å være til stede som observatør og bruke et videokamera som hjelpemiddel. I prosjektet har jeg observert elevene i deres arbeid med problemer og analysert hva læreren sier i de matematiske diskusjonene der elevenes resonnementer blir synliggjort. Observasjonen gir meg mulighet til å se hva elevene gjør, høre hva de tenker, se hva læreren gjør og observere elevenes responser. Dette er noe som hadde vært vanskelig å gjennomføre ved hjelp av en annen metode. Jeg vil derfor hevde at valget om å benytte meg av observasjon som datainnsamlingsmetode er med på å styrke studiens validitet. Bruk av observasjon ved hjelp av videoopptak medførte at jeg valgte å transkribere alle samtalene mellom læreren og elevene. I denne overgangen fra en samtale til transkripsjon kan deler av datamaterialet gå tapt. En samtale består av flere lag og ikke bare av ordene som blir sagt, men også av tonefall, kroppsspråk, blikk, mimikk, hvilke ord det legges trykk på og så videre. Selv om jeg i transkripsjonen forsøkte å få med så mange detaljer som mulig, er det å gi en fullstendig gjengivelse av alle elementer av en samtale utfordrende. Det kan derfor tenkes at validiteten er noe svekket med tanke på at deler av dataene muligens har gått tapt i transkripsjonen. Når det er sagt peker Nilssen (2014) på fordelene ved å gjøre transkripsjonsarbeidet selv. Blant annet at man blir godt kjent med dataene, transkriberingen kan gi ideer til kodingen og hvis man gjør dette arbeidet selv har man fordelen av å kjenne til konteksten og fagfeltet og minsker dermed sjansene for misoppfatninger og feiltolkninger. Det at jeg selv gjennomførte transkripsjonen ga meg kunnskap om flere lag ved samtalen, slik som for eksempel tonefall, enn de som kan leses i transkripsjonen. Dette tok jeg med meg videre inn arbeidet med de transkriberte dataene. Resultatene bygger i hovedsak på analysen av de transkriberte dataene men erfaringene jeg gjorde meg under selve transkripsjonen har også en innvirkning. Dette kan dermed være med på å gi studien større validitet enn den ville hatt dersom noen andre hadde gjennomført transkripsjonen.

Et annet aspekt som kan være med på å styrke studiens validitet er det at deler av analysen har blitt gjennomført av både meg og min veileder. Etter at alle de kritiske hendelsene var identifisert ble disse gjennomgått med veileder for å sikre kvaliteten. Dette medfører at det ikke bare er min forståelse av argumenter som ligger til grunn for resultatene i denne studien. I tillegg ble noen av samtalesekvensene som ble kodet i analysen og som legger grunnlaget for resultatene presentert i **kapittel 4** også kodet av min veileder. Dette innebar at vi begge kodet enkelte samtalesekvenser og sammenliknet denne kodingen i etterkant. Kodingen ble gjennomført ut fra det samme rammeverket og vi var stort sett enige i de fleste kodene. Der vi imidlertid var uenige diskuterte vi oss fram til hvilken kode som var mest passende for de ulike utsagnene. Det at to stykker har gjennomgått datamaterialet og kodet dataene er en kvalitetssikring. Dermed kan dette ses på som noe som styrker studiens validitet.

3.7 Etiske betraktninger

Etikk er et viktig aspekt ved all forskning, men kanskje spesielt viktig der det er mennesker det forskes på. Ved å observere læreren og elevene en klasseromssituasjon får jeg innblikk i deres væremåte og interaksjonene som skjer mellom dem. Det er i hovedsak tre typer hensyn forskeren må ta i forbindelse med sin forskning. Deltakerens rett til selvbestemmelse og autonomi innebærer at deltakelse er frivillig og at deltakeren når som helst kan trekke seg fra studien uten videre begrunnelse. Forskeren er pliktig til å respektere deltakerens privatliv og har et ansvar for å unngå skade slik at deltakeren utsettes for en minst mulig belastning (Christoffersen & Johannessen, 2012). Siden dette prosjektet behandler personopplysninger ble det meldt inn til Norsk senter for forskingsdata AS (NSD) i desember 2019, og i januar 2020 ble studien godkjent. I forbindelse med studien ble det sendt en henvendelse til rektor ved den aktuelle skolen med forespørsel om å drive forskning ved skolen. Alle berørte parter fikk også et informasjonsskriv og et samtykkeskjema (**vedlegg 1** og **vedlegg 2**). Jeg utarbeidet to informasjonsskriv og to samtykkeskjemaer, ett til lærer og ett til elevene. Informasjonsskrivene inneholdt en beskrivelse av hensikten med studien, informasjon om hva deltakelse innebar, hvilke data som skulle samles og deltakernes rettigheter.

Både før, under og etter selve datainnsamlingen ble deltakernes anonymitet ivaretatt etter beste evne. Navn på skole, lærer og alle elever ble byttet ut med pseudonymer slik at det ikke skal være mulig å spore informasjonen tilbake til de berørte parter. Måten deltakernes anonymitet ble ivaretatt på var at jeg bevisst ikke brukte navn i mine observasjoner fra timen. I arbeidet med transkribering og analyse av data fikk hver av deltakerne et nummer, og jeg laget meg mentale koder på elevenes fornavn. Senere ble det opprettet en navneliste som viste sammenheng mellom elevenes kode for fornavn, nummer og deres pseudonym i denne oppgaven. Selv om denne navnelisten ikke inneholdt elevenes virkelige navn ble den oppbevart separat fra øvrige data og vil bli destruert etter prosjektets slutt.

4 Resultater

I dette kapittelet vil resultatene fra datainnsamlingen bli presentert. I **kapittel 4.1** og **kapittel 4.2** blir i alt fire samtalesekvenser presentert og analysert. De fire samtalesekvensene danner til sammen et bilde av hvordan de matematiske diskusjonene utspiller seg der elevenes resonnementer kommer til syne. I samtalesekvensene som presenteres i dette kapittelet er alle sitatene nummerert og det henvises til denne nummereringen videre i oppgaven. Denne henvisningen gjøres ved å skrive nummeret på sitatet i parentes. I tillegg markeres det som anses som elevenes argumenter med fet skrift i samtalesekvensene i dette kapittelet.

Samtalesekvensene som presenteres i **kapittel 4** er hentet fra tre av de fire gruppene som ble observert. Samtalen med den gruppen som har blitt utelatt var mindre detaljert og utfyllende og dette er grunnen til at det ble besluttet å ikke inkludere denne samtalesekvensen direkte i resultatdelen av oppgaven, med det må poengteres at også sekvensen fra denne gruppen har blitt analysert.

4.1 Observasjon 1

I *økt 1* der *observasjon 1* ble gjennomført ble to elevpar observert, en jentegruppe og en guttegruppe. Økta varte 90 minutter og elevene jobbet med *oppgavesett 1* (se **vedlegg 4**) store deler av økta. Ved oppstart hadde læreren 10 minutters repetisjon av stoffet fra forrige time. Økta hadde også noen avbrudd der læreren gjennomgikk deler av problemene i plenum.

I løpet av *økt 1* var læreren innom både jentegruppa og guttegruppa tre ganger. Jeg velger å legge ved en samtalesekvens fra den matematiske diskusjonen med hver av gruppene. Grunnen til at sekvensene som presenteres i **kapittel 4.1.1** og **kapittel 4.1.2** er valgt ut er fordi de illustrer lærerhandlinger som er gjennomgående i majoriteten av de analyserte samtalesekvensene. Med dette menes at de verbale handlingene som finnes i disse samtalesekvensene også kan ses i flere av de andre samtalesekvensene der elevenes resonnementer kommer til syne. Dermed kan man si at samtalesekvensene som presenteres i dette kapittelet inneholder typiske trekk som også finnes i de andre samtalesekvensene der elevenes resonnementer kommer til syne.

4.1.1 Samtalesekvens 1

Denne samtalesekvensen er hentet fra jentegruppen. Elevene Emilie og Ine er ferdige med å løse problemene og jobber derfor videre med oppgaver i boka. Læreren kommer bort for å sjekke hvordan det har gått med dem i arbeid med oppgave 3 i *oppgavesett 1* (se **vedlegg 4**). I forkant av denne situasjonen har elevene strevd med å løse oppgaven. Elevene gjorde tidlig i problemløsningen en feil, noe som medførte følgefeil. Etter at elevene hadde diskutert seg imellom fant de feilen og kom dermed frem til riktig svar på oppgave 3. Under er samtalesekvensen gjengitt:

1. Lærer: Men hvordan i huleste. Hva tenkte dere på den da? (Læreren peker på nederste kulepunktet som beskriver funksjon *s*). (Læreren leser denne delen av oppgaven høyt) «tangentene til grafen s i (lærer leser resten av oppgaven høyt)». Hvordan tenkte dere på den da?
2. Ine: Ehh... Fordi da må begge de ha, da må begge ha negativ.
3. Lærer: Negativ?
4. Ine: Sånn stigningstall. (Ine bruker hendene til å illustrere negativ stigning)
5. Lærer: På?
6. Ine: Tangenten.
7. Lærer: Yes.
8. **Ine: Så ja. Og her er det liksom det at begge hadde negativ (peker på graf b og viser hvor den har negativ stigning). Det tok litt tid for det var b vi hadde satt på første, men så fant vi ut ingen av de andre går jo.**

Analyse av samtalesekvens 1:

Dette utdraget er et godt eksempel på hvordan dialogen mellom læreren og disse to jentene utspiller seg denne økta og kodene i denne sekvensen finnes også i de andre samtalesekvensene mellom læreren og jentegruppa. I utdraget er Ines argument både plausibelt og forankret i matematikken. Man kan argumentere for at plausibiliteten ligger i det at elevene brukte elimineringsmetoden for å komme fram til svaret, dette uttrykker Ine gjennom å si «… ingen av de andre går jo». Basert på elimineringsmetoden fant de altså ut at graf *b* må vise funksjonen *s*. Ine argumenterer for svaret de har funnet bygger på sammenhenger mellom stigningstallet til tangenten og funksjonenes monotoniegenskaper. Ines argument er derfor matematisk forankret fordi hun viser til egenskapen som sier at dersom tangenten i et punkt har negativt stigningstall må funksjonen være synkende i dette punktet. Ine uttrykker også deler av dette argumentet ved å vise på figuren.

Læreren uttrykker interesse for å høre hva elevene har tenkt, gjennom å stille spørsmålet «hvordan tenkte dere på den da?» (1). I Dragesets (2014) rammeverk er *åpent spørsmål* en kategori som sorterer under *fremdriftshandlinger.* Sitatet over kan kategoriseres som en *fremdriftshandling* i form av et *åpent spørsmål*. Her legger ikke læreren noen føringer for hvilken framgangsmåte elevene skulle ha valgt. Ved å bruke NCTM (2014) sitt rammeverk på dette spørsmålet kan man si at læreren her stiller et *undersøkende* spørsmål for å få tak i elevens tanker rundt løsningsmetoden. I denne situasjonen hadde elevene allerede kommet fram til svaret og var ikke avhengig av læreren for å komme videre i prosessen. Likevel bærer samtalen preg av at læreren ifølge Drageset (2014) fører prosessen framover. Dette kan ses i (3) og (5) der læreren stiller flere *lukkede detaljorienterte spørsmål* som har fokus på å *samle informasjon* og etablere fakta.

4.1.2 Samtalesekvens 2

Denne samtalesekvensen er hentet fra pausen i *økt 1*. Simen fra guttegruppa har ikke forstått sammenhengen mellom grafen, fortegnslinjen til grafen og fortegnslinjen til den deriverte, og ber derfor læreren om hjelp i pausen. Jeg har valgt å ta med denne samtalesekvensen på tross av at samtalen kun er mellom Simen og læreren. Samtalen mellom læreren og guttegruppen var generelt sett tydelig dominert av Simen og hans samtale med læreren, derfor anser jeg denne samtalesekvensen som et godt bilde på hvordan samtalen mellom læreren og guttegruppa utspilte seg i *økt 1* og flere av lærens handlinger i denne sekvensen er også typiske for flere av de andre samtalesekvensene.

9. Simen: Men ville de to grafene her vært like hvis du skulle tegnet grafen? (peker på de to fortegnslinjene)

10. Lærer: Ja… (Læreren drar litt på det og tar blyanten for å vise). (Læreren leter etter riktig ord og stotrer litt) Har du noen kontrollspørsmål? Hvordan skal du finne ut om de er like?

11. Simen: Du må tegne da? Eller..

12. Lærer: Ja? (Drar litt på det)

13. Simen: Man må se på ekstremalpunktene kanskje.

14. Lærer: Kan du … Kan fortegnslinjene gi deg noe hint om hvordan grafene ser ut? Du har jo allerede gjort noe her.

15. **Simen: Ja. Den sier noe om … Den første her sier noe om når y-verdien, hvilket fortegn y-verdien har. Og punktene sier noe om hvor nullpunktene er.**

16. Lærer: Riktig. Ser de ut til å være det samme da?

17. Simen: Nei.

18. Lærer: Nei.

19. **Simen: De har forskjellige nullpunkter.**

20. Lærer: De har forskjellige nullpunkter.

Analyse av samtalesekvens 2:

Simen sine argumenter oppfyller de to kravene som er satt for at et argument skal kunne ses på som en del av et kreativt resonnement. I denne samtalesekvensen ser jeg på to argumenter som essensielle for elevens resonnement. Det første argumentet (15) er plausibelt fordi eleven forklarer hvordan en fortegnslinje kan si noe om en graf, dette gjør han ved å se sammenhenger mellom ulike temaer. Her henviser Simen til egenskaper forankret i matematikken som for eksempel at en graf som befinner seg under x-aksen vil ha negativt fortegn. Dermed er argumentet både plausibelt og matematisk forankret. For å argumentere for hvorfor de to grafene ikke vil se like ut argumenterer eleven med at de har forskjellige nullpunkter. Dette argumentet er plausibelt fordi det knyttes til en åpenbar ulikhet som medfører at grafene ikke kan se like ut og dette er igjen matematisk forankret i egenskaper knyttet til ekvivalens og nullpunkter. Disse to argumentene ses på som en del av elevenes resonnement fram til konklusjonen om at grafene ikke ville sett like ut dersom de skulle tegnes.

For å nå konklusjonen om at de to grafene ikke vil se like ut sier læreren ting som driver prosessen framover, eller framdriftshandlinger (Drageset, 2014). Læreren driver her prosessen framover ved å stille flere ulike typer spørsmål som sørger for framdrift, i denne sekvensen stiller læreren spørsmål av typen som *gjør matematikken synlig* (10) og som er *undersøkende* (14) (NCTM, 2014).

I denne samtalesekvensen kan man også se spor av fokuserende handlinger. Læreren oppsummerer ofte det elevene sier ved å gjenta deres svar eller argumenter, og ifølge Drageset (2014) sorterer dette under fokuserende handlinger. I denne samtalesekvensen kan lærerens gjentagelse av elevenes svar ses i (18) og (20). Her gjentar læreren elevenes argument for hvorfor grafene ikke er like, nemlig fordi de har ulike nullpunkter. Et annet eksempel på gjentakelse kan ses i en av samtalesekvensene hentet fra en av de matematiske diskusjonene mellom Ine og læreren. Hele samtalen er ikke gjengitt i denne oppgaven, men et utdrag som illustrer lærerens *oppsummering* er:

21. Ine: Momentanvekstfart og stigningstallet til tangenten.

22. Lærer: … til tangenten ja…

Denne måten å gjenta elevenes svar på er noe læreren gjør til stadighet i sin samtale med elevene og kan ses i flere av samtalesekvensene som har blitt analysert.

4.2 Observasjon 2

I *økt 2* arbeidet elevene med *oppgavesett 2* (se **vedlegg 5**) på små vertikale klistretavler kalt minitavler. Elevene ble tilfeldig delt inn i grupper på tre. Økta varte i 90 minutter og elevene startet rett på oppgaven uten noen repetisjon fra tidligere økter eller gjennomgang av det de trengte i denne timen. Oppgaven elevene skulle arbeide med denne økta handler om optimalisering, elevene har ikke arbeidet med dette tidligere, men har jobbet med derivasjon, stigning og fortegnslinjer og har derfor forutsetninger for å klare å løse problemet.

I *økt 2* ble to grupper tilfeldig plukket ut til å bli observert. I løpet av økta var læreren innom gruppe 1 fire ganger. *Gruppe 1* bestod av Helene, Jacob og Alfred. *Gruppe 2* bestod av Mari, Magnus og Kristian og læreren var innom denne gruppa to ganger i løpet av økta. I **kapittel 4.2.1** og **kapittel 4.2.2** presenteres og analyseres to samtalesekvenser mellom læreren og *gruppe 2*. Grunnen til at det ikke inkluderes en samtalesekvens fra samtalen med *gruppe 1* er fordi funnene som ble gjort hos denne gruppen også ble gjort hos flere andre grupper. Samtalen med denne gruppen var mindre detaljert og utfyllende og dette er grunnen til at det ble besluttet å ikke inkludere denne samtalesekvensen direkte i resultatdelen av oppgaven.

Samtalesekvensen i **kapittel 4.2.1** er valgt ut fordi den av gir et godt bilde på hvordan samtalen mellom læreren og gruppene utspilte seg i *økt 2*. Mange av handlingen i denne sekvensen kan finnes igjen i andre samtalesekvenser, dermed vil denne sekvensen være med på å synliggjøre typiske trekk ved samtalen mellom Dag og hans elever der elevenes resonnementer kommer til syne. Samtalesekvensen som presenteres i **kapittel 4.2.2** er tatt med fordi den skiller seg litt ut fra de andre sekvensene som har blitt presentert. På hvilken måte sekvensen skiller seg fra resten vil presiseres i **kapittel 4.2.2**.

4.2.1 Samtalesekvens 3

Samtalesekvensen under er hentet fra første gang læreren er borte hos Mari, Magnus og Kristian. Elevene har akkurat begynt på oppgaven, og på minitavlen sin har de tegnet en hjelpefigur og skrevet opp uttrykket for volumet av esken som er V(x) = x(50-2x)(40-2x). I det læreren kommer bort til gruppen diskuterer elevene hva formuleringen «finn det største volumet esken kan ha» betyr. Sitatet under er kun et utdrag av samtalesekvensen som har blitt analysert. Her er ikke hele samtalesekvensen lagt ved fordi denne er svert lang og den utelatte delen inneholder ikke noen funn som ikke tidligere er beskrevet.

23. Lærer: … Men Magnus hvis x-en var satt hva er den satt til da?
24. Magnus: Nei det vet vi ikke da. Vi vet jo ikke det. Den er ukjent.
25. Lærer: Den er ukjent.
26. Lærer: Kan du se for deg da noe som gjør at … Men, men hva er volumet da? Her har dere noen tanker om hva volumet er (peker på tavla til elevene der de har skrevet opp uttrykket for volumet) og jeg må si at det der ser veldig logisk ut.
27. Magnus: Ja.
28. Lærer: Går det an for dere å teste ut hva volumet er her? For ulike x liksom?
29. Magnus: Da må man regne ut det da.
30. Magnus: Ulike x?
31. Lærer: Ja. Du sa jo her ... (læreren avbrytes av Mari)
32. **Mari: Åja! Det kan ikke være 25 for da blir den der null (peker på (50-2x)) og det kan ikke være 20 for da blir den der null (peker på (20-2x)) og den der kan ikke være null (peker på x).**
33. Lærer: Skjønner dere det? (henvender seg til de to andre på gruppa)

34. Lærer: Ja ikke sant (bekrefter til Mari det hun har sagt). X kan ikke være 25 (gjentar noe av det Mari akkurat sa mens Mari skriver noe på tavlen).

35. Lærer: Ja kult.

36. Lærer: For hva blir volumet da?

37. Mari: Null

Analyse av samtalesekvens 3:

I samtalesekvensen er argumentet forankret i iboende algebraiske egenskaper i de ulike uttrykkene. Dette knyttes til nullpunktene til uttrykkene og en forforståelse av at sidene til et prisme ikke kan ha negativ verdi. Man kan argumentere for at plausibiliteten i Maris argumenter ligger i det at det kan være gunstig å definere området løsningen befinner seg i, og utelukke de x-verdiene som gir sidene negative verdier.

Samtalen i forkant av Maris argument dreier seg om å finne ut hva «finn det største volumet esken kan ha» betyr. Magnus mener at x er en satt verdi men kan ikke svare på hva denne verdien er satt til. På mange måter har han rett i dette men læreren forsøker å la elevene resonnere seg fram til hvordan de kan finne denne x-verdien. Læreren er tydelig ledende i sine formuleringer og handlingene kan karakteriseres som *fremdriftshandlinger*. Læreren *forenkler* oppgaven gjennom å gi elevene hint om at formelen de har skrevet på tavlen sin er riktig, dette kan ses i (26). Hele sekvensen starter med at læreren stiller et *undersøkende spørsmål* for å få tak i hva elevene har tenkt (23). Magnus virker sikker på at x-verdien her er ukjent, men argumenterer ikke for hvorfor han mener dette. Læreren stiller videre spørsmålet «går det an for dere å teste ut hva volumet er her?» (28). Dette er et spørsmål som *gjør matematikken synlig*. Dette er et ledende spørsmål ved at læreren leder elevene inn i en måte å løse oppgaven på. Gjennom å stille dette spørsmålet gir læreren hint om at elevene bør teste hva volumet er. Siden spørsmålet inneholder et hint kan dette ses på som en form for *forenkling* og er derfor et spørsmål som driver prosessen framover. I denne samtalesekvensen kan man også se at læreren gjentar elevenes argumenter og svar, for eksempel i (25) og (34). Dette er en form for *oppsummering* og karakteriseres som en *fokuserende handling.*

4.2.2 Samtalesekvens 4

Denne samtalesekvensen er også mellom læreren og Mari, Magnus og Kristian. Elevene har kommet godt i gang med oppgaven og har også kommet fram til et svar. Læreren kommer bort og er interessert i hvordan elevene har kommet fram til svaret de har funnet. For å komme fram til svaret har elevene valgt å bruke ABC-formelen, og deretter sjekket hvilken av de to x-verdiene som gir det største volumet.

38. Lærer: Okey, nå må dere forklare hva dere har gjort.
39. Magnus: Vi fant nullpunktene til den deriverte.
40. Lærer: Okey, hvorfor det?
41. Magnus: For å finne ekstremalpunktene til grafen.
42. Lærer: Ja, Ja, riktig, riktig, riktig
43. Magnus: Og så måtte vi finne ut hvilken av dem som var den høyeste og hvilken som var den laveste.
44. Lærer: Og hvordan fant dere det da?
45. Magnus: Vi bare prøvde begge to.
46. Lærer: Åja, dere prøvde verdiene til begge to ja.
47. Magnus: Ja
48. Lærer: Ja, okey.
49. Magnus: Ja eller den ene [x-verdien] går ikke uansett.
50. Lærer: Hvorfor går ikke den ene?
51. Magnus: Fordi den er for høy
52. Lærer: For den er for høy?
53. Magnus: Det blir negativt.
54. Lærer: Er det 22 som er for høy?
55. Magnus: 22 er for høy.
56. **Mari: Fordi at x kan jo ikke være over 20 for da blir den null.**
57. Lærer: Nei, skjønner skjønner.

58. **Mari: Eller den blir negativ og en side kan ikke være negativ.**

Analyse:

Maris to argumenter er plausible og forankret i matematikken fordi hun argumenterer for at en side i en geometrisk figur ikke kan ha en negativ verdi. Plausibiliteten og forankringen ligger i det at Mari ser sammenhenger mellom x-verdien og lengden av sidene.

I denne samtalesekvensen viser elevene refleksjon over svaret. I tillegg bærer denne samtalesekvensen preg av å være mer fokuserende enn andre samtalesekvenser. Kodene som er funnet i denne samtalesekvensen er altså ikke nye, da disse kan finnes igjen i flere av de andre sekvensene. Det som gjør at denne sekvensen skiller seg ut er derimot sammensetningen av lærerhandlingene og forholdet mellom dem. I forkant av Maris argument for hvorfor x=22 ikke kan være en løsning ber læreren elevene om å forklare hva de har tenkt i (38). I denne samtalesekvensen kan en også se at lærere *oppfordrer til refleksjon og begrunnelse* i (40). I denne sekvensen er læreren tydelig åpen for at elevene skal få ta styring og lede diskusjonen dit de ønsker.

I denne sekvensen kommer også lærerens evaluering av elevenes responser tydelig frem. Her ved at læreren sier «: Ja, Ja, riktig, riktig, riktig» (42). Slike evalueringer kommer også frem i flere av de andre samtalesekvensene som har blitt analysert. Se for eksempel samtalesekvens 1; (7) (se **kapittel 4.1.1**), samtalesekvens 2; (16) (se **kapittel 4.1.2**) og samtalesekvens 3; (34) og (35) (se **kapittel 4.2.1**). Dette med evaluering er noe hverken NCTM (2014) eller Drageset (2014) inkluderer i sine rammeverk, men inkluderes i blant annet *The inquiry co-operation model* av Alrø og Skovsmose (2004) (se **kapittel 2.2** og **kapittel 2.3**).

5 Diskusjon

I dette kapittelet drøftes resultatene av analysen i lys av forskningsspørsmålet. Forskningsspørsmålet som skal besvares er; ***Hva kjennetegner en lærers verbale handlinger i de matematiske diskusjonene mellom læreren og elevene der elevenes kreative resonnementer synliggjøres under deres arbeid med problemløsning?***

Under analyseprosessen som er beskrevet i **kapittel 3.5** ble argumenter som både var plausible og matematisk forankret sett på som indikatorer på kreative resonnementer og disse ble karakterisert som kritiske hendelser. Argumentene elevene formidlet i de matematiske diskusjonene med læreren bar ofte preg av å være matematisk forankret gjennom å se sammenhenger. Det å se sammenhenger og å danne koblinger mellom ulike elementer i faget er essensielt for å utvikle elevenes forståelse av matematiske konsepter (Borgen & Manu, 2002). Et eksempel på at elevens argument bygger på sammenhenger i faget er deler av Simens argument (15) fra samtalesekvens 2 (se **kapittel 4.1.2**). Simens argument er; «Ja. Den sier noe om … Den første her sier noe om når y-verdien, hvilket fortegn y-verdien har. Og punktene sier noe om hvor nullpunktene er.» Her knytter Simen fortegnslinjen til grafen til funksjonen ved å henvise til funksjonens y-verdier og nullpunkter og ser dermed sammenhenger mellom ulike representasjonsformer. Denne måten å se sammenhenger på er noe som går igjen i flere av elevenes argumenter og disse sammenhengene er i stor grad med på å gi argumentene matematisk forankring og plausibilitet.

Plausibilitet handler om at noe er holdbart, akseptabelt eller rimelig (Lithner, 2008). Dette handler altså om at det ligger en viss logikk bak strategivalget. I flere av argumentene som ble funnet i analysen av dataene kom plausibiliteten som en følge av forankringen. Der elevene hadde gode matematisk forankrede argumenter var det ikke noen tvil om at strategien som brukes er tilknyttet et logisk argument.

Videre dette kapittelet blir sentrale elementer fra de analyserte samtalesekvensene trukket frem og disse drøftes i lys av fagdidaktiskteori. I kapittelet legges fire hovedideer med tanke på lærerens handlinger i de matematiske diskusjonene frem og elevenes kreative resonnementer vil bli drøftet i lys av disse handlingene.

5.1 Lærerens framdriftshandlinger

Analysen av de matematiske diskusjonene mellom lærer og elever der elevenes kreative resonnementer synliggjøres viser at lærerens verbale handlinger bærer preg av å drive prosessen fremover. Samtlige analyserte samtalesekvenser inneholder én eller flere handlinger som kan kategoriseres som *framdriftshandlinger* (Drageset, 2014). Læreren driver prosessen framover ved å i stor grad stille *lukkede detaljorienterte spørsmål* som *samler informasjon*. Spørsmål som samler informasjon handler ifølge NCTM (2014) om å få elever til å huske fakta og definisjoner eller algoritmer. Slike spørsmål kan ses på som et steg i retning av å nå målet og spørsmålene spør etter detaljer ved at eleven skal fylle inn det som mangler. Gjennom denne typen utspørring får læreren kartlagt elevens kunnskap, men eleven gis i liten grad mulighet til å uttrykke sine egne ideer og sin forståelse når læreren stiller slike spørsmål med ett tydelig svar. Spørsmålene gir inntrykk av at læreren har et mål og en klar oppfatning av hvordan elevene på best mulig måte kan nå dette målet. Slike samtaler der læreren dominerer og i stor grad leder elevene fram til et mål, kan ses på som samtaler som følger et *funneling* mønster (NCTM, 2014; Wood, 1998). I stedet for å være en likeverdig deltaker i dialogen blir læreren dominerende mens elevene gir rask respons på lærerens lukkede spørsmål, hint eller instruksjoner. Siden læreren tydelig leder elevene langs en bestemt vei mot et mål kan man anta at et *funneling* samtalemønster i liten grad legger til rette for at elevenes egne tanker og ideer skal komme til syne. En overvekt av slik kommunikasjon med elevene kan på sikt føre til at elevene oppfatter at det å lære matematikk handler om å komme fram til den fremgangsmåten læreren på forhånd har sett for seg at er mest gunstig (Wood, 1998). En slik oppfatning er trolig lite gunstig for å skape tenkende og selvstendige elever.

En annen fremdriftshandling man kan se i tre av de matematiske diskusjonene er at læreren driver med forenkling. Dette gjøres gjennom å gi elevene hint, eller legge til informasjon slik at problemene skal bli lettere å løse eller gjennom å rett og slett fortelle elevene hva de skal gjøre for å løse oppgavene. Noen ganger innehar ikke eleven den forståelsen eller den kunnskapen som trengs for å løse et problem. Da kan det være til stor hjelp å få hint om hvordan man kan nå en konklusjon. Et hint kan også bidra med å gi elevene en liten dytt i riktig retning. Et godt eksempel på dette kan ses i samtalefrekvens 3. Læreren sier i (26) at «… og jeg må si at dette ser veldig logisk ut.» mens han peker på uttrykket elevene har kommet fram til. Her gir læreren Magnus, Mari og Kristian et tydelig hint om at det de hadde tenkt før han kom bort er et godt sted å starte for å løse problemet. Dette kan være med på drive problemløsningsprosessen framover gjennom å gi en bekreftelse på at dette er riktig måte å løse problemet på.

Fremdriftshandlingene er som nevnt i hovedsak en pådriver for å nå et mål eller en konklusjon, men disse handlingene fremstår også som viktige for synliggjøringen av kreative resonnementer i denne klassen. Et godt eksempel på dette kan ses i **kapittel 4.1.1** der samtalesekvens 1 presenteres. Denne sekvensen har et tydelig preg av lærerens fremdriftshandlinger. Læreren starter samtalesekvensen med å stille et *undersøkende spørsmål* men dette spørsmålet utløser ikke en formidling av elevenes resonnement. Deretter stiller læreren spørsmål som samler informasjon og etablerer fakta. Dette kan ses i (3) og (5) der læreren stiller *lukkede detaljorienterte spørsmål*. Framdriftshandlingene bidrar med navigering i fagstoffet der læreren viser vei. Selv når Ine og Emilie i samtalesekvens 1 har kommet frem til riktig svar er de tydelig avhengig av læreren for å finne argumenter for hvorfor de har kunnet trekke den konklusjonen de har gjort. Denne sekvensen kan indikere at lærerens framdriftshandlinger gjør det enklere for eleven å synliggjøre sitt resonnement i form av plausible og forankrede argumenter ved å bidra med nettopp denne navigeringen i fagstoffet. Det kan tyde på at det for elevene er utfordrende å finne frem til logiske eller plausible argumenter for løsningsmetoden som har blitt brukt på egenhånd. Elevenes resonnementer bærer i mange av samtalesekvensene preg av å være avhengige av læreren for å finne frem til plausible og forankrede argumenter. Ines svar på lærerens undersøkende spørsmål (1) oppfyller i seg selv ikke kravet om forankring. Derimot bidrar svar på de lukkede spørsmålene (4) og (6) med å synliggjøre forankringen. Svarene på de lukkede spørsmålene bør ses i sammenheng med argumentet Ine legger frem (8). Noe av forankringen i dette argumentet er direkte knyttet til Ines svar på de lukkede detaljorienterte spørsmålene fra læreren. Dette fører til at elevenes kreative resonnementer kan anses som stykkvise ved at resonnementet legges frem som flere argumenter som synliggjøres av læreren. De analyserte samtalesekvensene i denne studien peker dermed mot ar disse elevenes synliggjøring av kreative resonnementer er avhengig av lærerens handlinger og kanskje spesielt fremdriftshandlinger.

Resultatene tyder som sagt på at elevenes resonnementer er nokså stykkvise. Med dette menes det at læreren i stor grad er motoren som driver resonnementet framover ved hjelp av *framdriftshandlinger* mens elevene bidrar med argumentene. Det er dermed lite som tyder på at elevene i denne klassen synliggjør sine resonnementer uten lærerens framdriftshandlinger. Hvorvidt dette handler om elevenes manglende resonneringsevne og det faktum at elevene er nokså unge, eller om dette kun handler om at elevene strever med å formidle resonnementene sine muntlig er det ikke mulig å si noe om utfra de dataene som ble samlet inn og de metodene som ble brukt i denne studien.

5.2 Fravær av endrende handlinger

Endrende handlinger er en kategori i Drageset (2014) sitt rammeverk. I følge Drageset (2014) kan endrende handlinger for eksempel være å stille «ja, men…»-spørsmål, avfeiing av elevenes ideer eller å foreslå en ny strategi, og også denne kan ses i sammenheng med funneling. Lærerens endrende handlinger bærer også preg av å ha en klar retning slik funneling har (Wood, 1998). Denne lærerhandlingen er ikke representert i noen av samtalesekvensene som presenteres i **kapittel 4**. Her framkommer det at læreren i liten grad benytter seg av endrende handlinger samtalesekvensene der elevene synliggjør sine kreative resonnementer. Endrende handlinger finnes i de matematiske diskusjonene men de finnes i liten grad i diskusjonene der kreative resonnementer synliggjøres. Dermed kan man argumentere for at fravær av slike handlinger kjennetegner denne lærerens verbale handlinger i de matematiske diskusjonene der kreative resonnementer synliggjøres. I de analyserte sekvensene ble det kun funnet *endrende handlinger* i form av *korrigerende spørsmål* i en av ni sekvenser. Denne samtalesekvensen er ikke lagt ved i sin helhet men den endrende handlingen i denne sekvensen legges ved «Ja det kan du gjøre, men husk at en fortegnslinje. Hva viser den deg?». Dette er det eneste sitatet som er preget av en rent endrende handling som kan ses i sammenheng med elevers synliggjøring av resonnementer. Når det er sagt står denne endrende handlingen i sammenheng med flere fokuserende handlinger som i stor grad preger denne samtalesekvensen. Slik sitatet viser kan læreren lede eleven bort fra deres umiddelbare ideer og over på et annet spor ved hjelp av endrende handlinger. Siden det kun ble funnet én samtalesekvens som inneholdt en endrende handling, har jeg valgt å anse fravær av endrende handlinger som et kjennetegn på lærerens verbale handlinger i de matematiske diskusjonene der elevenes resonnementer ble synliggjort. Det at man ikke kan se endrende handlinger i sekvensene der resonnementer synliggjøres kan peke mot at slike handlinger ikke er nødvendig for synliggjøring av resonnementer. En måte å forklare dette på er at det er utfordrende for elevene å resonnere når det legges føringer av læreren. Når læreren skifter fokusområdet gjennom de endrende handlingene brytes elevenes tankerekke. Lithner (2008) definerer et resonnement som «line of thought» (s. 257) altså en tankerekke. Dersom elevens umiddelbare tankerekke brytes, kan det være vanskeligere for eleven å trekke logiske, valide slutninger uten store mengder veiledning. Dermed blir plausible argumenter mer utilgjengelig for eleven. Analysen av samtalesekvensene peker i retning av at disse lærerhandlingene i liten grad kan ses i direkte sammenheng med elevenes synliggjøring av egne kreative resonnementer. Bergqvist og Lithner (2012) presiserer at resonnementet som forventes av elevene må være realistisk. Dette innebærer blant annet at løsningsmetoden som læreren leder dem inn på gjennom sine endrende handlinger er innenfor elevens rekkevidde. Er den ikke det vil det være utfordrende for eleven å skape et kreativt resonnement og dermed vil det også være få elevresonnementer som synliggjøres.

5.3 Lærerens fokuserende handlinger

I denne studien har lærerens fokuserende handlinger i stor grad fremkommet som spørsmål. Spørsmålene læreren stiller i de matematiske diskusjonene har i denne studien blitt kategorisert ut fra NCTM (2014) sitt rammeverk bestående av spørsmålstypene læreren ofte stiller i matematikktimene. En av spørsmålskategoriene i dette rammeverket er *undersøkende spørsmål*. Læreren stiller undersøkende spørsmål for å få elevene til å forklare hva de har tenkt. Slike spørsmål kan også få elevene til å oppklare deler av en løsningsmetode eller beskrive steg i en løsning. De undersøkende spørsmålene som har blitt identifisert i samtalesekvensene er noe ulike. Disse spørsmålene kan ses i sammenheng med noen av Drageset (2014) sine fokuserende handlinger, og flertallet av samtalesekvensene som har blitt analysert i denne studien inneholder en fokuserende handling i en eller annen form. De undersøkende spørsmålene der læreren får elevene til å begrunne metodevalg og forklare hvorfor de har gjort som de har gjort kan ses på som *begrunnelse* i Drageset (2014) sitt rammeverk. *Opplyse om detaljer* fra Drageset (2014) sitt rammeverk kan ses på som de undersøkende spørsmålene der læreren får elevene til å forklare tankemåter eller fremgangsmåter med et klart fokus på detaljer. Dette kan derfor ses på som en fokuserende handling, der læreren oppfordrer eleven til å begrunne og forklare sine tanker og valg gjennom å stille *undersøkende spørsmål*.

I syv av de ni samtalesekvensene som har blitt analysert ble det funnet fokuserende handlinger i form av undersøkende spørsmål eller spørsmål som gjør matematikken synlig. Ofte startet hele sekvensen med at et undersøkende spørsmål ble stilt. De undersøkende spørsmålene læreren stilte var ofte åpne og lot elevene forklare seg fritt, og lede samtalen dit de ønsket. Eksempler på et slikt undersøkende spørsmål kan ses i samtalesekvens 4 i (38) (se **kapittel 4.2.2**) der læreren sier «Okey, nå må dere forklare hva dere har gjort.». Selv om dette sitatet ikke har direkte utforming som et spørsmål, ber læreren her elevene om å forklare hva de har gjort og dette likner derfor et undersøkende spørsmål. Selv om man kan oppfatte læreren som kommanderende ved å kun lese sitatet, var ikke dette tilfellet. Tonen læreren hadde her var vennlig og ga inntrykk av at dette var noe han lurte på om elevene kunne forklare han og læreren var altså lite kommanderende. Et annet eksempel på et undersøkende spørsmål kan ses i samtalesekvens 1 (se **kapittel 4.1.1**) der læreren spør «… Hvordan tenkte dere på den da?» (1). I begge disse eksemplene ber læreren elevene om å forklare sin egen løsningsmetode. Gjennom å få elevene til å forklare egen tankegang kan læreren bidra slik at elevene får et klarere bilde av egne forklaringer, argumenter, resonnementer og problemløsningsstrategier (Gillies & Haynes, 2011). Her legger ikke læreren noen føringer med tanke på hva han ønsker at elevene skal vektlegge eller si, men lar isteden elevene uttrykke sine selvstendige ideer. Dermed kan man si at dette spørsmålet har en *focusing* inngang (se **kapittel 2.3**). Spørsmålet gir eleven mulighet til å ta den matematiske diskusjonen dit de ønsker. Bergqvist og Lithner (2012) trekker frem viktigheten av at lærerens forventninger og argumenter er i tråd (*aligned*) med elevenes forutsetninger og utgangspunkt. Ved å la elevene ta styringen over diskusjonen gjennom undersøkende spørsmål kan læreren få informasjon om hva eleven tenker og dermed ta utgangspunkt i elevenes egne ideer i diskusjonene. Dette kan dermed forhindre at lærerens forventninger med tanke på resonnement er urealistiske for elevene. Ut fra datamaterialet samlet inn i denne studien er det mye som tyder på at det å stille undersøkende spørsmål kan være et godt grep for å synliggjøre elevers resonnementer og samtalesekvens 1 og samtalesekvens 4 er gode eksempler på dette. Begge disse sekvensene starter med at læreren stiller et undersøkende spørsmål. Dette gjør at elevens ideer og tanker også inviteres inn i samtalen. Dette vises for eksempel samtalesekvens 1, se for eksempel sitat (2) og (8), der Ine trekker inn flere argumenter for hvordan de kom fram til sin konklusjon etter at læreren stiller det undersøkende spørsmålet. Selv om disse sekvensene er inndelinger som har blitt laget av meg og sekvensene egentlig er en del av en større samtale er det ikke noe som tyder på at elevene vil synliggjøre sine resonnementer i forkant av de undersøkende spørsmålene. Derfor kan de undersøkende spørsmålene og elevenes synliggjøring av sine kreative resonnementer ses i sammenheng med hverandre. Fordi jeg ikke kjenner klasser eller Dag spesielt godt vet jeg lite om hvordan de er vant til å jobbe. Det kan derfor tenkes at elevene ikke er vant til å synliggjøre sine resonnementer, og at de derfor ikke gjør dette uoppfordret. De undersøkende spørsmålene gir elevene en indikasjon på at et læreren ønsker å få innblikk i resonnement som har ledet fram til konklusjonen. Fordi flere av sekvensene inneholder slike undersøkende spørsmål kan denne lærerhandlingen se ut til å være et godt grep for å synliggjøre elever resonnementer eller i det minste starte prosessen med å synliggjøre dem. De undersøkende spørsmålene gjør at elevene «tvinges» til å sette ord på sine egne tanker og slike spørsmål kan være en måte læreren kan få innsikt i elevenes resonnementer og tankeprosesser (Boaler & Brodie, 2004). Læreren åpner opp for at elevenes egne synspunkter skal stå i sentrum, samtidig som at de har fokus på veien frem til målet og ikke bare på om svaret er rett eller galt. Det å kommunisere slike holdninger til elevene kan på sikt smitte over på dem og de kan læres opp til at matematikk ikke bare handler om hvilket svar som er riktig. Dette kan derfor også være gunstig for dybdelæringen ved å bidra med å gjøre elevene til selvstendige tenkere som evner å løse problemer på en kreativ, reflektert og effektiv måte.

Spørsmålene der læreren forsøker å få tak i det eleven tenker slik som undersøkende spørsmål eller spørsmål som gjør matematikken synlig, kan også hjelpe elevene med å strukturere egen kunnskap. Dette kan gjøre at elevene i større grad får eierskap til matematikken og sin egen forståelse (Ritchhart et al., 2011). Et eksempel på dette kan ses i samtalesekvens 2 (se **kapittel 4.1.2**). Her starter hele sekvensen med at eleven stiller læreren et spørsmål og læreren responderer på dette spørsmålet ved å stille et spørsmål tilbake til eleven. Læreren spør i (10); «Hvordan kan du finne ut om de er like?». Dette spørsmålet kan karakteriseres som et spørsmål som *gjør matematikken synlig*. Det læreren gjør her er at han stiller et spørsmål som får eleven til å sette ord på kunnskapen sin. Videre i samtalesekvens 2 spør læreren «… Kan fortegnslinjene gi deg noe hint om hvordan grafene ser ut?» (14) noe som medfører at Simen svarer med et plausibelt og forankret argument som henviser til sammenhengen mellom ulike representasjonsformer (15). Dette er presentert i introduksjonen til **kapittel 5** og argumentet kan også ses der. Dette er et eksempel på at eleven allerede hadde all informasjonen han trengte for å nå en konklusjon, men at han trengte litt hjelp med å strukturere denne kunnskapen for å besvare sitt eget spørsmål. Hvorvidt Simen hadde kommet til konkusjonen om at de to grafene ikke blir like på egenhånd, er det umulig å si noe om. Det som imidlertid kan trekkes fram fra denne samtalesekvensen er at læreren brukte spørsmål på en slik måte at elevens kunnskap ble systematisert, og for Simen var dette trolig et bedre utgangspunkt for å komme med en konklusjon og å synliggjøre resonnementet som ledet han dit. I denne samtalesekvensen brukte læreren spørsmål som gjorde matematikken synlig for eleven. På denne måten kan læreren ha åpnet opp for at elevene ser sammenhenger mellom sentrale elementer og de ulike representasjonsformene. Tidligere i denne oppgaven har det blitt diskutert verdien av å kunne se sammenhenger, at dette kan ses i sammenheng med plausibilitet og forankring og at dette er en gjennomgående faktor i elevenes resonnementer. Dette kan være en måte læreren kan hjelpe Simen med å systematisere det han allerede vet. Det å hjelpe elevene med å strukturere kunnskapen sin gjennom denne typen spørsmål kan gi elevene et tydeligere bilde av sammenhenger i faget. Dette kan også hjelpe eleven med å danne koblinger mellom deres forståelse og den mer formelle matematikken (Fuson, Kalchman & Bransford, 2005). Dermed kan dette bidra med å lage skjelettet til resonnementet som fører fram til svaret. Gjennom fokuserende handlinger i form av å stille for eksempel undersøkende spørsmål aktiviserer læreren elevene i diskusjonen gjennom å kreve svar på sine spørsmål. Analysen har avdekket at ved å stille spørsmål som hjelper elevene med å se sammenhenger og begrunne valg kan læreren gjøre plausible og forankrede argumenter tilgjengelig for elevene, og dermed kan dette være en handling som kan virke fremmende på både elevenes resonnementer og synliggjøring av disse.

En av samtalesekvensene som skiller seg litt ut fra de andre sekvensene er samtalesekvens 4 (se **kapittel 4.2.2**). Her stiller læreren færre lukkede detaljorienterte spørsmål og gir færre hint enn det han gjør i en del av de andre samtalene. Denne sekvensen bærer i større grad enn de andre sekvensene preg av å være fokuserende. I dette utdraget blir elevene bedt om å forklare hvordan de fant svaret på problemet i *økt 2.* For å gjøre dette stiller læreren i begynnelsen et undersøkende spørsmål for å få elevene til å greie ut om hva de har tenkt. Deretter stiller læreren en del spørsmål som gjør at elevene må utdype en del av det de sier. I denne samtalen har også læreren ett visst framdriftsfokus men dette kommer til syne på en annen måte. Læreren lar i større grad elevene ta styringen over samtalen, dermed blir læreren mindre styrende enn det han var i flere av de andre samtalene. Kanskje er grunnen til at læreren her er mer åpen for elevenes innspill at han allerede vet at eleven har kommet fram til riktig svar. Dette gjør at læreren i større grad kan «slippe opp» og la elevene ta styringen. Analysen viser at selv om det finnes mange fellestrekk i samtalesekvensene med tanke på lærerens handlinger er det også noen særtrekk i enkelte sekvenser. Jeg anser både de typiske trekkene og særtrekkene som relevante funn for å besvare forskningsspørsmålet. Dette er fordi utvalget studien bygger på er lite, og det er derfor ikke mulig å avgjøre om funnene som kategoriseres som særtrekk i dette datamateriale også ville blitt karakterisert som særtrekk dersom utvalget hadde vært større. Fordi det ligger en usikkerhet rundt dette, har jeg derfor valgt å ta med særtrekkene i drøftingen av lærerens handlinger.

Noe annet som er gjennomgående i de matematiske diskusjonene mellom Dag og elevene der elevenes resonnementer synliggjøres er at læreren gjentar elevenes responser. Slike gjentakelser kan ses i seks av ni analyserte sekvenser. Eksempler på dette kan leses i samtalesekvens 2 i (18), (20) og (22) (se **kapittel 4.1.2**) og i samtalesekvens 3 (se **kapittel 4.2.1**) i (25) og (34). Gjentakelsene av elevens responser kan kategoriseres som *oppsummering* av Drageset (2014) og oppsummering kategoriseres igjen som en *fokuserende handling*. Slike oppsummeringer driver samtalen videre, men i stor grad på elevenes premisser, og kan derfor også ses på som fokuserende handlinger. Dette kan først og fremst virke som en støttende faktor for eleven ved at eleven får en bekreftelse på at deres tanker og ideer er gunstige i denne problemløsningen. Gjentakelser av elevenes responser kjennetegner ikke bare lærerens handlinger i de matematiske diskusjonene der elevers kreative resonnementer synliggjøres men finnes også i diskusjonene der resonnementer ikke blir synliggjort. Derfor er det vanskelig å se noen direkte sammenheng mellom gjentakelsene av elevenes responser og synliggjøring av resonnementer. Når det er sagt viser resultatene av analysen at det at læreren opptrer støttende og gir bekreftelser i hvertfall ikke virker hemmende på elevers synliggjøring av kreative resonnementer. *Oppsummeringer* kan være gunstig for elevenes synliggjøring av resonnementer i form av økt selvtillit og tro på egne evner. Resultatene av analysen i denne studien indikerer at det å være støttende i seg selv ikke er nok for å synliggjøre elevenes kreative resonnementer, men at dette kan være en av flere handlinger som er gunstige med tanke på dette. Dersom læreren gjennom oppsummering klarer å gi elevene tro på egne evner, argumenter og ideer, kan dette være gunstig for elevenes synliggjøring av resonnementer gjennom at de tør å dele sine ideer med lærer og medlever. Dette kan være gunstig for synliggjøring der og da, og også på sikt.

5.4 Lærerens evaluering av elevenes responser

En lærerhandling som ikke ble plukket opp av de to rammeverkene som ble benyttet i analysen av samtalesekvensene er lærerens evaluering av elevenes responser. I **kapittel 3.5** hevder jeg at jeg i denne studien har en abduktiv tilnærming. Dette kommer til syne i dette delkapittelet. Fordi ingen av rammeverkene som ble benyttet i denne studien inneholder en kategori som kan beskrive lærerens evaluering av elevenes responser har jeg besluttet å trekke inn Alrø og Skovsmose (2004) og deres *The inquiry co-operation model* for å dekke også dette funnet. Fordi læreren i samtlige samtalesekvenser evaluerer elevenes responser på en eller annen måte blir også dette sett på som et funn som er relevant for å besvare forskningsspørsmålet.

Det er liten tvil om at læreren spiller en sentral rolle i klasserommet og måten læreren oppmuntrer og støtter elevene sine kan være med å påvirke elevdeltakelsen i en klasse (Gillies & Haynes, 2011). Noe som er gjennomgående i de samtalesekvensene som har blitt analysert i dette prosjektet er at læreren viser stor støtte ovenfor sine elever. Fraivillig et al. (1999)

hevder at dette også er et generelt trekk blant lærere. Dag opptrer støttende ovenfor sine elever gjennom bruk av bekreftelser, dette kommer til syne i samtlige samtalesekvenser og kan ses på som en måte å evaluere elevenes responser. Han har en hyppig bruk av bekreftelser som, «Ja, ikke sant… » i (34) fra samtalesekvens 3 (se **kapittel 4.2.1**) og «ja, ja, riktig, riktig, riktig» i (42) i samtalesekvens 4 (se **kapittel 4.2.2**). Slike bekreftelser kan gi elevene indikasjoner på at de de sier er relevant for problemet som skal løses. I samtalesekvensensene der Dag gir bekreftelser på denne måten ser det ut til at elevene fortsetter argumentasjonen sin slik den var før evalueringen. Fordi elevens utsagn og argumenter ikke ender seg etter slike bekreftelser er det vanskelig å si noe om sammenhengen mellom bekreftelsene og synliggjøringen av de kreative resonnementene basert på de dataene som har blitt analysert i denne studien. Enten kan bekreftelsene ha en positiv innvirkning på synliggjøringen ved å gi økt tro på egne ideer eller så har ikke bekreftelsene noen innvirkning på synliggjøringen i det hele tatt siden elevenes utsagn er nokså uforandret etter bekreftelsene. Bekreftelser av denne typen kan ses på som en måte der læreren evaluerer elevenes responser (Alrø & Skovsmose, 2004) og driver prosessen framover. Siden slike bekreftelser bidrar til å drive prosessen framover kan de ses på som en form for framdriftshandlinger selv om de ikke har noen konkret plass i Drageset (2014) sitt rammeverk. Når det er sagt kan også noen av bekreftelsene også bære preg av å være fokuserende i form av at de kun bygger opp om elevenes egne ideer. Det er derfor vanskelig å gi den en konkret plass i Drageset (2014) sitt rammeverk.

«Supporting learning comes from knowing the students, the situation, and the content and then making decisions that support interaction that productively engages students in moving their ideas forward» (Franke, Kazemi & Battey, 2007, s. 228). Støtten læreren kommer med gjennom bekreftelser kan fungere som en veiledning gjennom elevenes egne resonnementer og kan stimulere elevene til å dele sine ideer. Evaluering av elevenes responser i form av bekreftelser kan ses på som både en fokuserende handling og som en fremdriftshandling (Drageset, 2014). Mange elever har manglende selvtillit på skolen og det å la læreren og medelever få innsyn i det de kan og vet, kan for mange være skremmende. En støttende lærer som gjennom problemløsningsprosessen gir bekreftelser på at man er på rett spor kan for mange elever gjøre det lettere å tørre å bygge videre på egne ideer og å formidle et resonnement verbalt.

Dersom læreren gir positiv respons på elevers bidrag kan dette også ha positiv effekt på klasseromskulturen og bidra til at flere elever i fremtiden tør å komme med sine innspill og resonnementer. For å komme over frykten for å svare feil må læreren bygge opp elevens tillitt til medelever og seg selv som lærer (Cooke & Adams, 1998). Det at elevene føler seg trygge på hverandre og trygge på at læreren er en veileder som vil deres beste er viktig for matematiske diskusjoner og for at elevene skal tørre å la andre til å få innsyn i deres tankeprosesser gjennom deres resonnementer. Derfor er støtten som læreren kommer med helt essensiell for om elevenes resonnementer synliggjøres eller ikke.

6 Konklusjon og implikasjoner

6.1 Konklusjon

I denne studien har lærerens verbale handlinger i matematiske diskusjoner der elevene synliggjør sine kreative resonnementer blitt undersøkt. I studien har kartlagt hva som kjennetegner en lærers verbale handlinger i de matematiske diskusjonene der elevene synliggjør sine kreative resonnementer under deres arbeid med problemløsning.

Resultatene av studien indikerer et fravær av endrende handlinger samt at lærerens handlinger preges av å være både fokuserende og framdriftsrettet. Den fokuserende handlingen *undersøkende spørsmål* er gjennomgående i de matematiske diskusjonene som har blitt analysert i denne studien. Studien indikerer at disse spørsmålene er gunstige for å hjelpe elevene med å se sammenhenger i faget samtidig som at disse åpner opp for elevenes deltakelse i diskusjonene. Studien har avdekket at ved å stille slike spørsmål kan læreren gjøre plausible og forankrede argumenter tilgjengelig for elevene, og dermed kan dette være en handling som kan virke fremmende på både elevenes kreative resonnementer og synliggjøring av disse. Resonnementene som ble synliggjort av elevene i denne studien bærer preg av å være nokså stykkvise og elevene fremstår som avhengig av lærer for å finne og formidle argumenter for løsningsmetoder og ideer. Dette blir sett i sammenheng med at framdriftshandlinger spesielt i form av *lukkede detaljorienterte spørsmål* som fokuserer på å etablere fakta og samle informasjon er et gjennomgående trekk i de matematiske diskusjonene der elevene synliggjør sine kreative resonnementer. Slike spørsmål kan hjelpe eleven med å navigere seg gjennom fagstoffet. Resultatene av denne studien peker mot at flere av elevene i denne klassen er avhengige av veiledning fra lærer for å finne frem til plausible og forankrede argumenter og det konkluderes derfor med at også lærerens fremdriftshandlinger har gunstig effekt på elevenes oppbygning og synliggjøring av egen argumentasjon og dermed også kreative resonnementer.

Evaluering av elevenes responser er også et kjennetegn på denne lærerens verbale handlinger i de matematiske diskusjonene der elevenes kreative resonnementer synliggjøres. Hos denne læreren kan dette i hovedsak ses som rene bekreftelser. Det er vanskelig å konkludere om det er en direkte sammenheng mellom disse handlingene og elevenes synliggjøring av resonnementer men det er nærliggende å tenke seg at evaluering og bekreftelse av elevenes responser spiller en rolle på klasseromskulturen, elevenes selvtillit i faget og dermed også deres synliggjøring av kreative resonnementer.

6.2 Implikasjon og veien videre

Det å kunne resonnere ses på som en grunnleggende komponent innenfor matematisk kompetanse og det er stor enighet om at elever må gis mulighet til å dele tanker og resonnere rundt egne ideer dersom deres matematiske kompetanse skal utvikles (Kilpatrick et al., 2001; NCTM, 2014). Når det er sagt finnes det lite forskning som direkte knytter elevers resonnementer sammen med lærerens handlinger. Derfor vil denne studien være med på å tette et hull i det matematikkdidaktiske forskningsfeltet. Selv om studien ikke har avdekket kausale sammenhenger mellom lærerens handlinger og elevenes resonnementer kan resultatene av studien belyse viktige koblinger.

Det økende fokuset på dybdelæring i alle fag som kommer som en følge av *fagfornyelsen* kan være med på å aktualisere forskningsspørsmålet som har blitt undersøkt. Målet med dybdelæring er å gi elevene kunnskap de kan anvende i problemløsning, lære dem å se sammenhenger og vurdere eget arbeid (Kunnskapsdepartementet, 2016). Dybdelæring er også sterkt knyttet til kompetanseutvikling og dermed også koblet til elevers resonnering (NOU 2015:8). Kunnskap om ulike lærerhandlinger kan dermed også være gunstig for overgangen til det nye læreplanverket som etter planen trer i kraft fra høsten 2020. Denne studien har bidratt med å kartlegge hvilke lærerhandlinger som er til stede i matematiske diskusjoner der elevenes resonnementer synliggjøres og denne kunnskapen kan brukes for å fremme dybdelæring i undervisningen. Slik som det nevnes i **kapittel 1** bygger denne studien på en overbevisning om at lærerens handlinger spiller en sentral rolle i elevers læringsprosess og at disse handlingene også kan spille en rolle for elevers resonnementer. Gjennom studiens analyse og resultater har denne overbevisningen blitt styrket. Selv om studien ikke sier noe om kausale sammenhenger mellom de verbale lærerhandlingene og elevenes synliggjøring av resonnementer kan studien ha en nytteverdi for alle lærere. Dette gjennom å gi lærere økt bevissthet rundt egen undervisningspraksis og verbale handlinger, og kan også bidra med å øke fokuset på elevers kreative matematiske resonnementer.

Studiens utvalg er lite og dette medfører at funnene som er gjort her ikke kan generaliseres til alle lærere og alle matematikkelever, men studien kan bidra med å belyse sentrale koblinger mellom lærerhandlinger og elevers resonnementer og dermed kan den også være et springbrett for videre forskning. Blant annet har analysen av de matematiske diskusjonene avdekket at selv om læreren innledet en samtale med en gruppe på to eller flere elever hadde samtalen en tendens til å være mellom læreren og kun én elev. I et flertall av samtalesekvensene er det kun en av elevene som har en aktiv rolle. Det kunne dermed vært interessant å forske videre på hvordan læreren kan handle for å få i gang en diskusjon i hele gruppen, der elevene i større grad støtter seg på hverandre fremfor lærerens bidrag. Med utgangspunkt i for eksempel Hufferd-Ackles et al. (2004) sitt rammeverk kan man undersøke lærerens rolle for å øke elevdeltakelsen i de matematiske diskusjonene og undersøke hvordan elevenes resonnementer kommer til uttrykk på de ulike nivåene i dette rammeverket. Det at flere elever deltar kan bidra til at elevenes resonneringsevner utvikles ytterligere og at elevene i større grad blir selvstendige problemløsere. I denne studien ble problemer benyttet som et metodisk grep for å legge til rette for elevers resonnementer, men sammenhengen mellom elevers resonnementer og problemløsning har ikke blitt undersøkt. For videre forskning kunne det derfor vært interessant å undersøke ulike undervisningsopplegg eller ulike oppgavetyper og hvordan dette igjen kan påvirke elevenes resonnementer.

Selv om studien har gitt nyttig innsikt med tanke på lærerens verbale handlinger og elevers synliggjøring av kreative resonnementer, er det fremdeles en vei å gå. Vi trenger fremdeles mer kunnskap om elevers resonnementer da dette er en forutsetning for effektiv undervisning (Francisco & Maher, 2011). Siden matematisk kompetanse avhenger av blant annet resonnering og det at dette også trekkes fram som et viktig aspekt ved dybdelæringen indikerer at lærerens handlinger i forbindelse med elevers resonnementer er noe det bør forskes videre på. Jeg håper denne oppgaven kan rette oppmerksomheten mot lærerens verbale handlinger i matematiske diskusjoner der elevers egne resonnementer står sentralt.

Referanser

Alrø, H. & Skovsmose, O. (2004). Dialogic learning in collaborative investigation. *Nordic Studies in Mathematics Education*, (2), 39-62.

Barden, L. M. (1995). Effective Questioning & the Ever-Elusive Higher-Order Question. *The American Biology Teacher, 57*(7), 423-426. https://doi.org/10.2307/4450031

Bergqvist, T. & Lithner, J. (2012). Mathematical reasoning in teachers' presentations. *Journal of Mathematical Behavior, 31*(2), 252-269. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.12.002

Best, M. & Bikner-Ahsbahs, A. (2017). The function concept at the transition to upper secondary school level: tasks for a situation of change. *Mathematics Education, 49*(6), 865-880. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0880-6

Boaler, J. & Brodie, K. (2004). The importance, nature, and impact of teacher questions. *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 774-782).

Borgen, K. L. & Manu, S. S. (2002). What do students really understand? *The Journal of Mathematical Behavior, 21*(2), 151-165. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00115-3

Bryman, A. (2012). *Sosial research methodes* (4. utg.). New York: Oxford Univerity Press.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode i lærerutdanningene* (2. utg.). Oslo: Abstrakt.

Cooke, L. B. & Adams, V. M. (1998). Encouraging "Math Talk" in the Classroom. *Middle School Journal, 29*(5), 35-40. https://doi.org/10.1080/00940771.1998.11495918

Drageset, O. G. (2014). Redirecting, progressing, and focusing actions—a framework for describing how teachers use students' comments to work with mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 85*(2), 281-304. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9515-1

Dubinsky, E. & Wilson, R. T. (2013). High school students' understanding of the function concept. *Journal of Mathematical Behavior, 32*(1), 83-101. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.12.001

Fraivillig, J. L., Murphy, L. A. & Fuson, K. C. (1999). Advancing Children's Mathematical Thinking in Everyday Mathematics Classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 148-170. https://doi.org/10.2307/749608

Francisco, J. M. (2013). Learning in collaborative settings: students building on each other's ideas to promote their mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics, 82*(3), 417-438. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9437-3

Francisco, J. M. & Maher, C. A. (2011). Teachers attending to students' mathematical reasoning: lessons from an after-school research program. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(1), 49-66. https://doi.org/10.1007/s10857-010-9144-x

Franke, M. L., Kazemi, E. & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 1*(1), 225-256.

Fuson, K. C., Kalchman, M. & Bransford, J. D. (2005). Mathematical Understanding: An Introduction. I M. S. Donovan & J. D. Bransford (Red.), *How Students Learn:*

History, Mathematics, and Science in the Classroom (s. 217 - 256). Washington, DC: The National Academies Press. https://doi.org/doi:10.17226/10126

Gagatsis, A. & Shiakalli, M. (2004). Ability to Translate from One Representation of the Concept of Function to Another and Mathematical Problem Solving. *Educational Psychology*, *24*(5), 645-657. https://doi.org/10.1080/0144341042000262953

Gillies, R. & Haynes, M. (2011). Increasing explanatory behaviour, problem-solving, and reasoning within classes using cooperative group work. *An International Journal of the Learning Sciences*, *39*(3), 349-366. https://doi.org/10.1007/s11251-010-9130-9

Gold, R. L. (1958). Roles in Sociological Field Observations. *Social Forces*, *36*(3), 217-223. https://doi.org/10.2307/2573808

Grønmo, L. S. & Hole, A. (2017). *Prioritering og progresjon i skolematematikken* Cappelen Damm Akademisk/NOASP (Nordic Open Access Scholarly Publishing).

Haylock, D. (1997). Recognising mathematical creativity in schoolchildren. *The International Journal on Mathematics Education*, *29*(3), 68-74. https://doi.org/10.1007/s11858-997-0002-y

Hufferd-Ackles, K., Fuson, K. C. & Sherin, M. G. (2004). Describing Levels and Components of a Math-Talk Learning Community. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(2), 81-116. https://doi.org/10.2307/30034933

Imsen, G. (2014). *Elevens verden: innføring i pedagogisk psykologi* (5. utg. utg.). Oslo: Universitetsforl.

Jäder, J., Sidenvall, J. & Sumpter, L. (2017). Students' Mathematical Reasoning and Beliefs in Non-routine Task Solving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(4), 759-776. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9712-3

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Kristensen, O. & Aanensen, S. (2018). Drøfting av polynomfunksjoner på grunnlag av derivasjonsregler. Hentet 10.02.2020 fra https://ndla.no/nb/subjects/subject:33/topic:2:1:165436/topic:2:1:165522/resource:1:178636

Kunnskapsdepartementet. (2016). *Fag - Fordypning - Forståelse: En fornyelse av kunnskapsløftet* (Meld. St. 28 2015-2016). Hentet fra https://www.regjeringen.no/contentassets/e8e1f41732ca4a64b003fca213ae663b/no/pdfs/stm201520160028000dddpdfs.pdf

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 255-276. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2

Lithner, J. (2015). Learning Mathematics by Creative or Imitative Reasoning. *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*, 487-506. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_28

Lithner, J. (2017). Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning. *ZDM*, *49*(6), 937-949. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0867-3

Maher, C. A., Sigley, R., Sullivan, P. & Wilkinson, L. C. (2018). An international perspective on knowledge in teaching mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *51*, 71-79. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.05.002

McCrone, S. S. (2005). The Development of Mathematical Discussions: An Investigation in a Fifth-Grade Classroom. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(2), 111-133. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0702_2

Mercer, N. & Littleton, K. (2007). *Dialogue and the development of children's thinking : a sociocultural approach*. London: Routledge.

Michelsen, C. (2006). Functions: a modelling tool in mathematics and science. *The International Journal on Mathematics Education, 38*(3), 269-280. https://doi.org/10.1007/BF02652810

Mueller, M., Yankelewitz, D. & Maher, C. (2014). Teachers Promoting Student Mathematical Reasoning. *Investigations in Mathematics Learning, 7*(2), 1-20. https://doi.org/10.1080/24727466.2014.11790339

NCTM. (2014). *Principales to Action: Ensuring Mathematical Success for All* Reston, VA: The National Council of Theachers of Mathematics.

Nilssen, V. (2014). *Analyse i kvalitative studier: Den skrivende forskeren*. Oslo: Universitetsforlaget.

NOU 2015:8. *Fremtidens skole: Fornyelse av fag og kompetanser*. Oslo. Hentet fra https://www.regjeringen.no/contentassets/da148fec8c4a4ab88daa8b677a700292/no/pdfs/nou201520150008000dddpdfs.pdf

Park, J. (2015). Is the derivative a function? If so, how do we teach it? *An International Journal, 89*(2), 233-250. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9601-7

Park, J. (2016). Communicational approach to study textbook discourse on the derivative. *Educational Studies in Mathematics, 91*(3), 395-421. https://doi.org/10.1007/BF01273664

Pijls, M. & Dekker, R. (2011). Students discussing their mathematical ideas: the role of the teacher. *Mathematics Education Research Journal, 23*(4), 379-396. https://doi.org/10.1007/s13394-011-0022-3

Polya, G. (1971). *How To Solve It: A New Aspect of Mathematical Method* (bd. 2). Princton, New Jersy: Princton University Press.

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode : en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. utg.). Oslo: Universitetsforl.

Powell, A. B., Francisco, J. M. & Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(4), 405-435. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.002

Ritchhart, R., Church, M. & Morrison, K. (2011). *Making thinking visible : how to promote engagement, understanding and independence for all learners*. San Fransisco, California: Jossey-Bass.

Ross, K. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proofs in school mathematics. *The American Mathematical Monthly, 105*(3), 252-255. https://doi.org/10.2307/2589080

Sahin, A. & Kulm, G. (2008). Sixth grade mathematics teachers' intentions and use of probing, guiding, and factual questions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(3), 221-241. https://doi.org/10.1007/s10857-008-9071-2

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Stein, M. K., Grover, B. W. & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American educational research journal, 33*(2), 455-488. https://doi.org/10.2307/1163292

Store norske leksikon. (2019). Kreativ tenkning. Hentet 17.01.2020 fra https://snl.no/kreativ_tenkning

Thomas, G. (2011). *How to do your case study: a guide for students and researchers*. Los Angeles: Sage.

Ulleberg, I. & Solem, I. H. (2018). Which questions should be asked in classroom talk in mathematics? Presentation and discussion of a questioning model. *Acta Didactica Norge, 12*(1), 1-21. https://doi.org/10.5617/adno.5607

Wood, T. (1998). Alternative Patterns of Communication in Mathematics Classes: Funneling or Focusing? I H. Steinbring, M. G. B. Bussi & A. Sierpinska (Red.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom* (s. 167-178). Reston, Viginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Yin, R. K. (2014). *Case study research : design and methods* (5. utg.). Los Angeles, California: SAGE.

Vedlegg

Vedlegg 1 – Informasjonsskriv og samtykkeerklæring elever

Vil du delta i forskningsprosjektet

" Lærerens rolle for å fremme elevers resonnementer i matematikk"?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke *hvordan læreren kan legge til rette for elevers resonnementer i matematikk*. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Formålet med dette prosjektet er å undersøke hvordan lærerens handlinger, med særlig fokus på bruk av spørsmål, kan være med på fremme elevers muntlige resonnementer ved arbeid med problemer i matematikk. Dette forskningsprosjektet skal utføres i forbindelse med min masteroppgave og forskningsspørsmålet som skal besvares er: *Hvordan kan læreren legge til rette for elevers resonnementer i matematikk?*

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Norges miljø og biovitenskaplige universitet, fakultet for realfag og teknolog – seksjon for lærerutdanningen, og veileder Margrethe Naalsund er ansvarlig for prosjektet

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Du får spørsmål om å delta i dette forskningsprosjektet fordi du er en elev som tar matematikk (1T) i videregående skole. Dette gjør deg godt egnet til å gi svar på mitt forskningsspørsmål.

Hva innebærer det for deg å delta?

I dette forskningsprosjektet ønsker jeg å benytte observasjon som metode. Dette innebærer at jeg er tilstede i en eller flere matematikktimer, der jeg observerer både deg, din klasse og din lærer. Her vil data samles inn ved hjelp av feltnotater og lyd-/videoopptak. Video og/eller lydopptak vil transkriberes og bli lagret elektronisk.

Du kan også bli spurt om du ønsker å delta i et intervju. Det vil bli tatt lydopptak ved hjelp av diktafon av intervjuet. Svarene vil bli transkribert, og lagret elektronisk. Det er helt frivillig å si nei til å delta i intervju og det vil ikke få noen konsekvenser om du ikke ønsker å delta.

Både ditt og skolens navn vil bli anonymisert i masteroppgaven som skal skrives, slik at det ikke på noen måte er mulig å spore dataene tilbake til deg.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Det er jeg, Anne Line Samuelsen og min veileder Margrethe Naalsund som har tilgang til, og kommer til å behandle dataene som samles inn.
- Ditt navn og dine kontaktopplysningene vil jeg erstatte med et pseudonym som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data. Datamaterialet vil bli lagret elektronisk på server tilknyttet behandlingsinstitusjonen. Dataene vil kun være synlige for meg og min veileder.

Du som deltaker vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjonen.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes *30. mai 2021*. Dine personopplysninger vil bli slettet ved prosjektslutt. Grunnen til at prosjektslutt settes til 30. mai 2021 er at dette gir meg mulighet til å skrive noe annet på bakgrunn av datamaterialet.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra *Norges miljø- og biovitenskaplige universitet (NMBU)* har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Norges miljø- og biovitenskaplige universitet, fakultet for realfag og teknologi- seksjon for lærerutdanning ved Margrethe Naalsund på epost (margrethe.naalsund@nmbu.no) eller på telefon: 67231528
- Vårt personvernombud: Hanne Pernille Gulbrandsen på epost (personvernombud@nmbu.no) eller telefon: 91605552
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Margrethe Naalsund
Prosjektansvarlig
(Forsker/veileder)

Anne Line Samuelsen
Student

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjonen om prosjektet *Lærerens rolle for å fremme elevers resonnementer i matematikk* og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i observasjon
- ☐ å delta i intervju
- ☐ at lærer kan gi opplysninger om meg til prosjektet

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, 30. *mai 2021*.

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 2 – informasjonsskriv og samtykkeerklæring lærer

Vil du delta i forskningsprosjektet

"Lærerens rolle for å fremme elevers resonnementer i matematikk"?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke *hvordan læreren kan legge til rette for elevers resonnementer i matematikk.* I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Formålet med dette prosjektet er å undersøke hvordan lærerens handlinger, med særlig fokus på bruk av spørsmål, kan være med på fremme elevers muntlige resonnementer ved arbeid med problemer i matematikk. Dette forskningsprosjektet skal utføres i forbindelse med min masteroppgave og forskningsspørsmålet som skal besvares er: *Hvordan kan læreren legge til rette for elevers resonnementer i matematikk?*

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Norges miljø og biovitenskaplige universitet, fakultet for realfag og teknolog – seksjon for lærerutdanningen, og veileder Margrethe Naalsund er ansvarlig for prosjektet

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Du får spørsmål om å delta i dette forskningsprosjektet fordi du er en matematikklærer (1T) i videregående skole. Dette gjør deg godt egnet til å gi svar på mitt forskningsspørsmål. Du er den eneste læreren som får denne henvendelsen.

Hva innebærer det for deg å delta?

I dette forskningsprosjektet ønsker jeg å benytte observasjon som metode. Dette innebærer at jeg er tilstede i en eller flere av dine undervisningstimer, der jeg observerer både deg og dine elever. Her vil data samles inn ved hjelp av feltnotater og lyd-/videoopptak. Video og/eller lydopptak vil transkriberes og bli lagret elektronisk.

Du kommer også til å delta i flere samtaler og muligens et intervju. Det vil bli gjort notater fra samtalene og det blir gjort lydopptak ved hjelp av diktafon av intervjuet. Svarene vil bli transkribert, og lagret elektronisk.

Både ditt og skolens navn vil bli anonymisert i masteroppgaven som skal skrives, slik at det ikke er mulig å spore dataene tilbake til deg.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Det er jeg, Anne Line Samuelsen og min veileder Margrethe Naalsund som har tilgang til, og kommer til å behandle dataene som samles inn.
- Ditt navn og dine kontaktopplysningene vil jeg erstatte med et pseudonym som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data. Datamaterialet vil bli lagret elektronisk på server tilknyttet behandlingsinstitusjonen. Dataene vil kun være synlige for meg og min veileder.

Du som deltaker vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjonen.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes *30. mai 2021*. Dine personopplysninger vil bli slettet ved prosjektslutt. Grunnen til at prosjektslutt settes til 30. mai 2021 er at dette gir meg mulighet til å skrive noe annet på bakgrunn av datamaterialet.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.
På oppdrag fra *Norges miljø- og biovitenskaplige universitet (NMBU)* har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Norges miljø- og biovitenskaplige universitet, fakultet for realfag og teknologi-seksjon for lærerutdanning ved Margrethe Naalsund på epost (margrethe.naalsund@nmbu.no) eller på telefon: 67231528
- Vårt personvernombud: Hanne Pernille Gulbrandsen på epost (personvernombud@nmbu.no) eller telefon: 91605552
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Margrethe Naalsund
Prosjektansvarlig
(Forsker/veileder)

Anne Line Samuelsen
Student

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjonen om prosjektet *Lærerens rolle for å fremme elevers resonnementer i matematikk* og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i observasjon
- ☐ å delta i intervju
- ☐ at lærer kan gi opplysninger om meg til prosjektet

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, 30. *mai 2021*.

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 3 – Observasjonsskjema

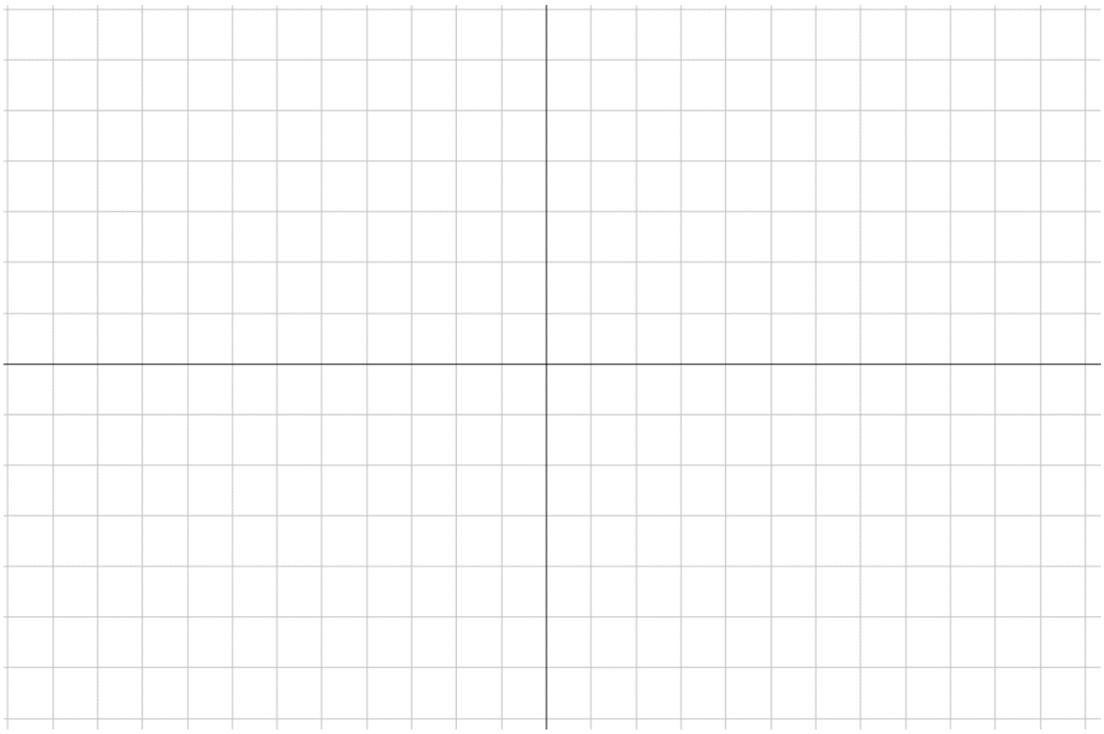
Kommunikasjon mellom læreren og elever		Hva sier elevene til hverandre	Mine tanker …
Hva sier læreren?	Elevens responser		

Vedlegg 4 – Oppgavesett 1

Oppgaver mandag 24/2

Oppgave 1

Tegn en graf med minst ett ekstremalpunkt i koordinatsystemet under. Lag deretter en fortegnslinje til denne grafen og til den deriverte til grafen.



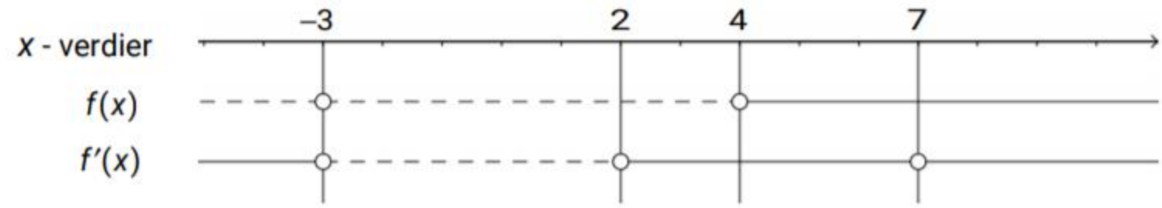
Fortegnslinje til grafen:

Fortegnslinje til den deriverte til grafen:

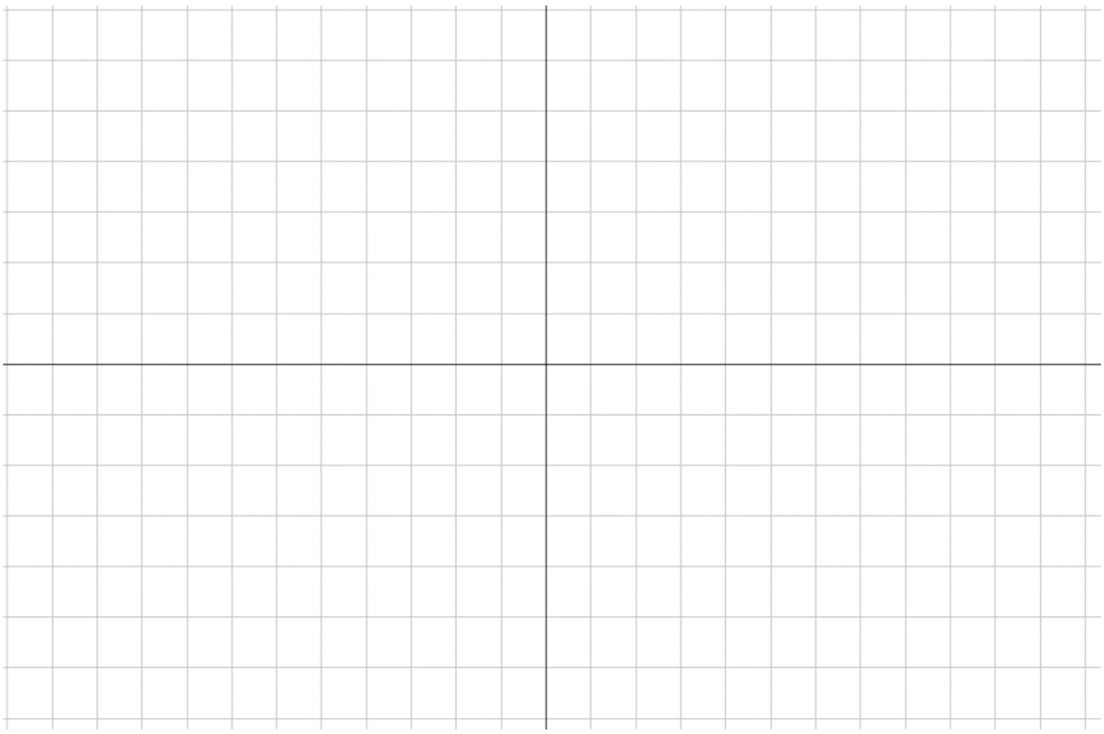
Forklar hvordan dere kan bruke fortegnslinjen til den deriverte til å finne grafens ekstremalpunkter.

Oppgave 2

Gitt en funksjon f. Fortegnet til funksjonsuttrykket $f(x)$ og til den deriverte av funksjonen $f'(x)$ varierer som vist i figuren nedenfor.



Lag en skisse som viser hvordan grafen til f kan se ut.



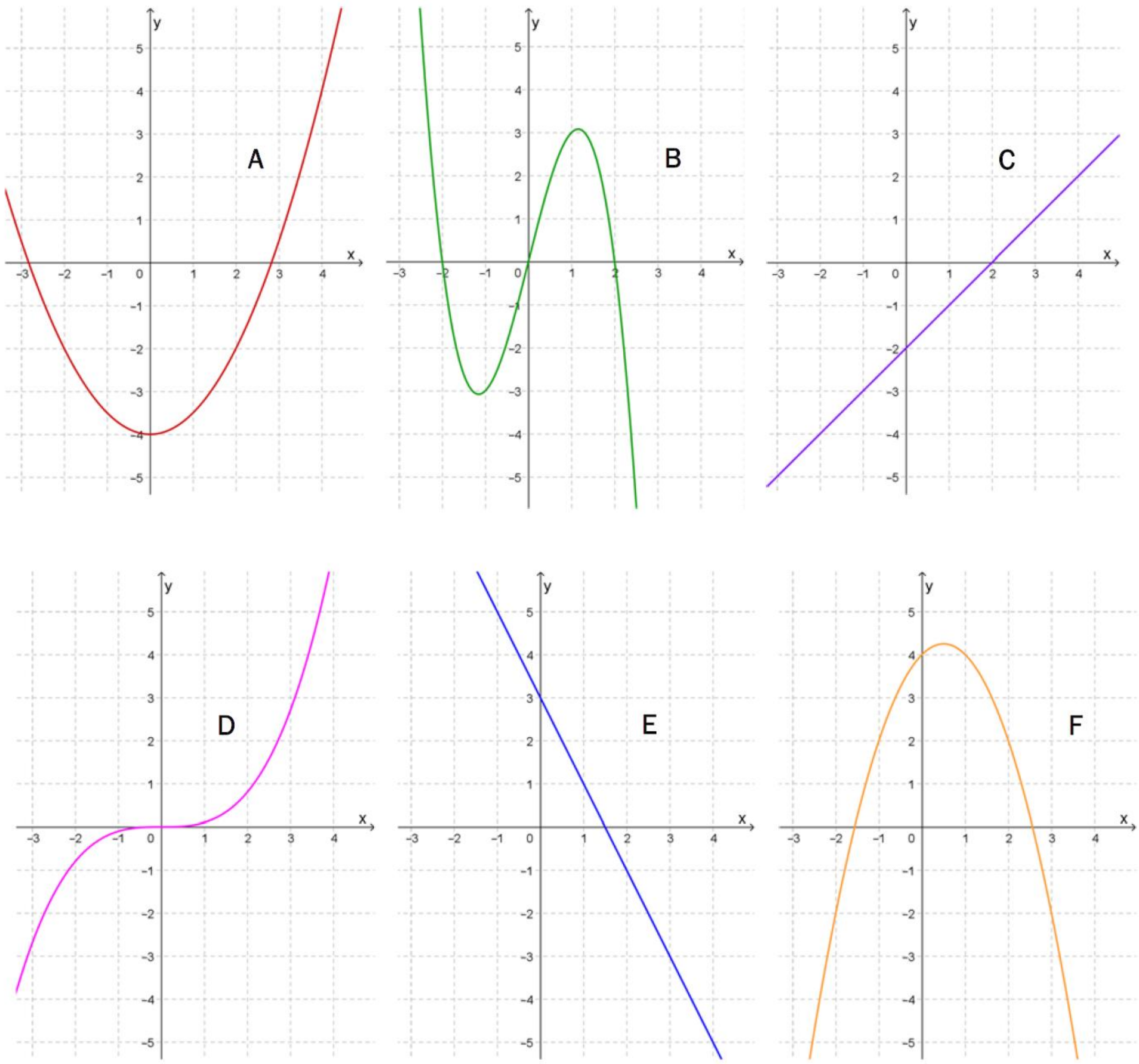
Oppgave 3

Du får vite følgende om fire funksjoner p, q, r og s:

- $p'(0) = 0$ og $p'(-1) < 0$
- $q'(1) = -2$ og $q'(2) = -2$
- Den gjennomsnittlige vekstfarten til r i intervallet $[-2, 0]$ er 3.
- Tangentene til grafen til s i punktene $(-2, s(-2))$ og $(2, s(2))$ har likningene $y = -8x - 16$ og $y = -8x + 16$

Nedenfor ser du seks grafer. Hvilken graf er grafen til p? Hvilken graf er grafen til q?

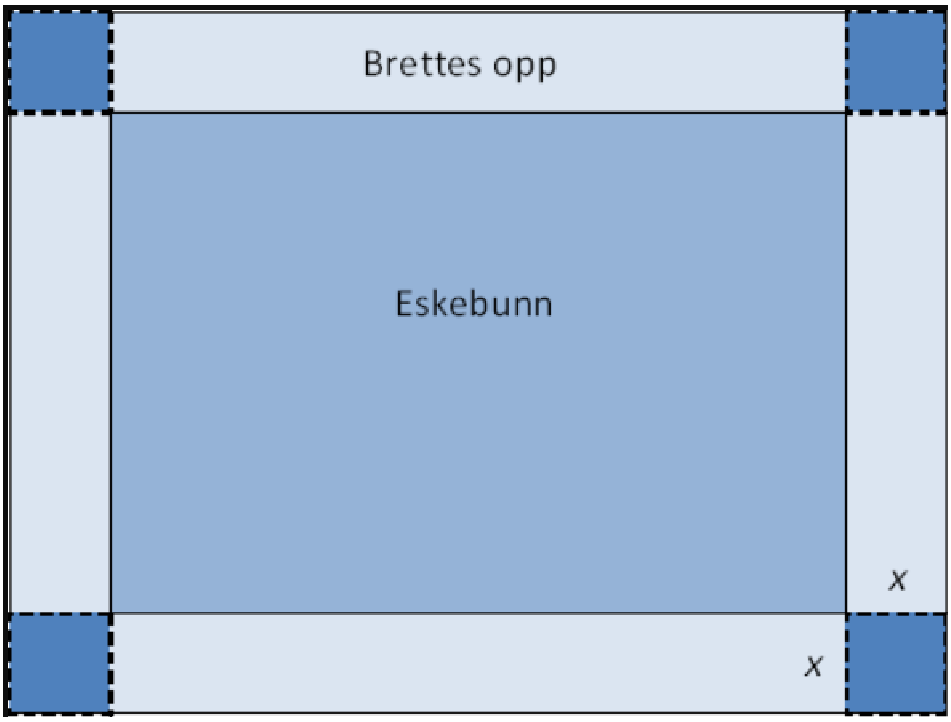
Hvilken graf er grafen til r? Hvilken graf er grafen til s? Husk å begrunne svarene dine.



Vedlegg 5 – Oppgavesett 2

Oppgave torsdag 27/2

Vi skal lage en eske uten lokk av en rektangelformet papplate med sider 50 cm og 40 cm. Vi gjør dette ved å klippe ut et kvadrat med side x i hvert hjørne. Deretter bretter vi opp kantene og får en eske med høyde x. Se figur.



(de mørkeblå kvadratene skal klippes bort)

Finn ut det største volumet esken kan ha.

Norges miljø- og biovitenskapelige universitet
Noregs miljø- og biovitskapelege universitet
Norwegian University of Life Sciences

Postboks 5003
NO-1432 Ås
Norway