Norges miljø- og biovitenskapelige universitet

Masteroppgave 2018 30 stp
Fakultet for realfag og teknologi
Margrethe Naalsund

Utforskende dialog og dybdelæring i algebra

Inquiry, dialogue and deep learning in algebra

Ingvild Melnes Vandås
Lektorutdanning i realfag
Fakultet for realfag og teknologi

FORORD

Jeg vil takke alle som har gjort det mulig for meg å komme i mål med masteroppgaven min.

Først og fremst takk til elever og lærere som ble med i studien, for at dere tok i mot meg med åpne sinn.

Jeg vil takke mamma, pappa og svigermor for utallige timer barnevakt slik at jeg fikk tid til å skrive.

Jeg vil takke min gode mann for støtte og forståelse gjennom arbeidet med masteroppgaven.

Og ikke minst vil jeg takke min fantastiske veileder, Margrethe Naalsund, som gang på gang har fått meg på rett spor. Gjennom gode samtaler, råd og konstruktiv kritikk har du vært en uvurdelig støtte.

Helt til slutt vil jeg takke Emily (2.5 år) og Johanna (1 år) for at dere hjelper meg med å se at det finnes viktigere ting i livet enn en masteroppgave.

Bjørkelangen, mai 2018

Ingvild Melnes Vandås

SAMMENDRAG

Algebra er et utfordrende tema for mange elever. Internasjonale undersøkelser viser at norske elever sliter med algebra, og det er derfor av stor interesse å finne ut av hva som kan gjøres for å bedre algebraundervisningen. Overgangen fra aritmetikk til algebra regnes som spesielt utfordrende. Her møter elevene på mange måter et nytt språk der symbolene får en helt annen mening enn de er vant til. Det er derfor viktig at elevene får tid og mulighet til å knytte algebra til tidligere kunnskap fra aritmetikken. Generalisering blir trukket fram som en måte å gjøre dette på.

Å se sammenhenger mellom nye ideer og tidligere kunnskap og erfaringer, blir regnet som et av hovedprinsippene i dybdelæring. I tillegg handler det om at elevene skal være aktive og delaktige i kunnskapsbyggingen, og det kan knyttes til både utforsking og dialog. Målet med studien min er å belyse hvordan utforskende dialog mellom elever kan bidra til dybdelæring i algebra. Jeg beskriver også hvilken rolle læreren har i dialog med små elevgrupper mens de arbeider utforskende.

For å studere dette har jeg valgt case som forskningstilnærming. Jeg har brukt observasjon med videoopptak for å samle inn data i to 8. klasser som var i starten av algebratemaet. Jeg observerte samtaler i to små elevgrupper mens de arbeidet i en utforskende setting med generaliseringsoppgaver. De sentrale delene av datamateriale ble transkribert og analysert.

Funnene tyder på at elevene bruker ulike generaliseringsstrategier etter som de ser et behov for det. Begge gruppene fant et generelt uttrykk for generaliseringen som de relaterte til oppgavens kontekst. I utforskingsprosessen der de sammen undrer seg, argumenterer for og identifiserer ulike løsningsstrategier, vises tegn til dialog. Dialog gjør at elevene bygger på hverandres innspill og finner ut av oppgavene i fellesskap. Det muliggjør at også elever som kanskje ikke ville klart oppgavene på egen hånd, nå får en mulighet til å bidra. Jeg går nærmere inn på sosiale og emosjonelle sider ved læringen ved å se på Jakob som et eksempel på hvordan selvtillit og holdninger i matematikk kan endre seg når han får oppleve eierskap og mestring. Til slutt viser funnene mine noen fellestrekk i dialogen mellom de små elevgruppene og lærer. Læreren har blant annet en viktig rolle når det kommer til å få fram elevenes tanker og forklaringer, utfordre elevene til å tenke på en annen måte og i evaluering av svar og løsningsstrategier.

Utforskende dialog bidro i min studie til både faglige, sosiale og emosjonelle sider ved elevenes arbeid med generalisering. Alle disse aspektene kan knyttes til dybdelæring i algebra.

Sosiale og emosjonelle aspekter er antakelig også viktig når det kommer til å sette sammen grupper med tanke på å fremme dialog.

ABSTRACT

Algebra is a challenging subject for many students. International studies show that norwegian students are struggling with algebra, therefore it is of huge interest to find out what can be done to improve teaching in algebra. The transition from arithmetic to algebra is seen as especially challenging. In many ways students meet a new language here, where the symbols have a different meaning than they are used to. Therefore it is important that the students get plenty of time and opportunities to draw connections between algebra and prior knowledge of arithmetic. Generalization is seen as one way of doing so.

To see connections between new ideas and prior knowledge and experience, is counted as a main principle of deep learning. Deep learning is also about the students being active and taking part in building of knowledge. This is connected to both inquiry and dialogue. The aim of my study is to shed light on how dialogue (inquiry cooperation) between students can contribute to deep learning in algebra. I am also looking into the role of the teacher in dialogue between teacher and small student groups while they are working on inquiry based tasks.

To study this I have chosen a case study approach. I have used observation and video recording to collect data from two grade 8 classes, both in the start of algebra instruction. I observed conversations in two student groups while they worked on generalization activities through a process of inquiry. The significant parts of the data where transcribed and analyzed.

My findings indicate that the students used different generalization strategies because their need for it developed through the patterning activities. Both groups found a general expression for the generalization, related to the context of the problem situation. In the process of inquiry, where together they explore, reason and identify different solution strategies, they show signs of dialogue. Dialogue makes the students build upon each other's ideas and together they manage to solve the problems. Students who might not have been able to solve them on their own, thereby get an opportunity to take part. I take a closer look at social and emotional aspects of learning by looking at the case of Jakob, he is an example of how self-confidence and attitude towards mathematics can change when he experience ownership and mastering. Finally, my findings show a few commonalities in the dialogue between teacher and small student groups. The teacher has an important role when it comes to bringing out the students ideas and explanations, challenge students' thinking and evaluating solutions and strategies.

In my study, inquiry and dialogue contributed to both mathematical, social and emotional aspects of the students generalization process. All of these aspects can be connected to deep learning in algebra.

Social and emotional aspects are probably also of importance when it comes to making student groups that engage in dialogue.

INNHOLD

1. INNLEDNING

Helt siden Norge ble med i internasjonale undersøkelser som TIMSS og PISA, som kartlegger elevers ferdigheter i basisfag, har det med jevne mellomrom vært et stort fokus i media på hvor dårlige vi er i realfag, særlig matematikk. Regjering etter regjering lover satsing og bedring, men de store resultatene uteblir tilsynelatende. Hvorfor sliter så mange norske elever med matematikk? Og hva kan jeg som lektor gjøre for å bedre matematikkundervisningen for *mine* elever? Matematikksenteret (Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen) i Norge har utviklet sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk. De har blant annet trukket frem utforskende arbeidsmåter og diskusjon som noe det er viktig å satse på (Nosrati & Wæge, 2015).

Tunstad (2012) hevder at utforskende arbeidsmåter er en effektiv undervisningsmetode i matematikk, men at den brukes lite. Utforskende arbeidsmåter har lengre tradisjoner i naturfag, men i matematikk er dette en relativt ny undervisningsmetode, som først har fått fotfeste de siste tiårene (Artigue & Blomhøj, 2013). Utforskende arbeidsmåter går veldig kort ut på at elevene selv utforsker matematiske problemer for å finne mønstre og systemer, og diskuterer tanker og løsningsstrategier med hverandre (Nosrati & Wæge, 2015). En oppsummerende diskusjonsdel i slutten av timen skal gjøre elevene oppmerksomme på hvordan ulike løsninger henger sammen og hvordan de er relatert til læringsmålene for timen.

Utforskende arbeidsmåter og matematiske samtaler henger derfor nøye sammen. Dette er et annet område i matematikkundervisningen som er altfor lite utnyttet. Ett eksempel ser vi i TIMSS-undersøkelsen fra 2007, der ble elever og lærere spurt om hvordan de oppfattet matematikkundervisningen. Det ble funnet at det stort sett var tradisjonelle undervisningsformer som dominerte i norsk skole, med lærerstyrt helklasseundervisning og en ensidig vekt på individuelle arbeidsmåter og oppgaveløsing. Blant annet ble det å diskutere og reflektere rundt løsningsstrategier og svar mindre vektlagt i Norge enn det internasjonale gjennomsnittet (Grønmo & Onstad, 2009).

Muntlige ferdigheter, som blant annet innebærer å drøfte matematiske problemer, løsninger og strategier, blir sett på som en viktig del av kompetanse i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2013). Det jobbes derfor for å snu trenden vi har sett tidligere. I ARK&APP-studien som ble gjennomført fra 2013 til 2016, oppga lærerne at det fortsatt brukes mye tid på tavleundervisning og individuell oppgaveløsning. Men det ble observert at helklasseundervisningen i algebra på barne- og ungdomstrinnet i stor grad var preget av dialog mellom lærer og elever. Læreren introduserte nye begreper med forklaringer og eksempler, men elevene kom med gode innspill som bidro til å styre samtalen (Gilje et al., 2016).

I disse dager gjøres det en stor jobb med å fornye læreplanene i alle fag. Kjerneelementer i matematikk skal si noe om hva som er det viktigste i faget, både kunnskapsområder, metoder, begreper og tenkemåter. I siste utkast til kjerneelementer i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2018), handler et kjerneelement om utforskning og problemløsing. Andre kjerneelementer handler om resonnering og argumentasjon, samt kommunikasjon. Dette kommer dermed tydeligere inn i læreplanen, og kanskje vi vil se en endring der både utforskning og matematiske samtaler får et mye større fokus ute i klasserommene i årene framover.

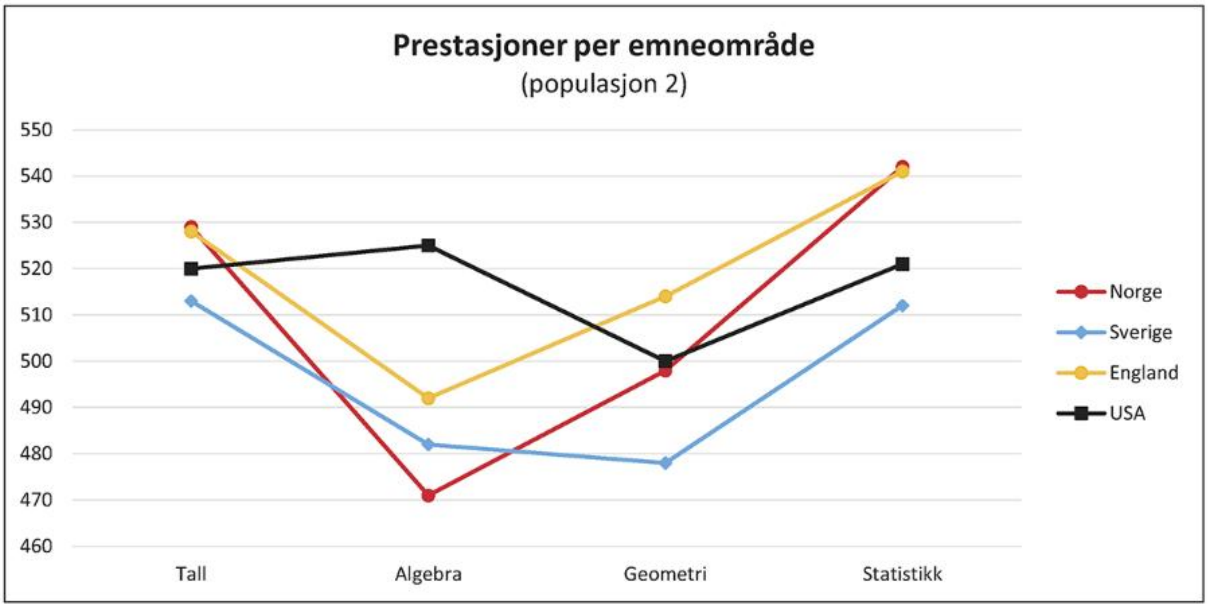
Ved Universitet i Agder har didaktikere i prosjektet *Bedre matematikkundervisning* samarbeidet med lærere i ulike skoler og barnehager om å utvikle læringsfellesskap i matematikk. De har fokus på det de kaller inquiry, som de definerer som en undrende og undersøkende holdning, ikke nødvendigvis en spesiell metode (Carlsen & Fuglestad, 2010). Didaktikere og lærere møtes i inquiry-fellesskap for å sammen utforske og utvikle inquiry-baserte aktiviteter og opplegg de kan ta med seg tilbake til klasserommene. Slike læringsfellesskap eller nettverk er også en viktig del av den pågående nasjonale satsningen med Realfagskommuner, som er en del av regjeringens realfagsstrategi. Der er undersøkende matematikkundervisning er et av fokusområdene (Matematikksenteret, u.å.). Vi kan derfor håpefullt anta at utforskende arbeidsmåter er på vei ut i norske matematikklasserom.

Jeg har valgt å se på utforskende arbeidsmåter og matematiske diskusjoner i en sammenheng, siden begge deler virker som uutnyttede ressurser i den norske skolen. Det har blitt skrevet en god del om den viktige helklassediskusjonen, både i forhold til utforskende arbeidsmåter og generelt i matematikk. Det har vært fokus på hvordan lærere kan få i gang en god dialog med elevene, og utnytte elevenes framgangsmåter og løsninger (F.eks. Nathan & Knuth, 2003; Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008).

Det har også blitt skrevet mye om diskusjon mellom elever i matematikk, og hvordan elever lærer gjennom å kommunisere. Dette har tradisjoner helt tilbake til Vygotsky. (F.eks. McCrone, 2005; Mercer & Sams, 2006; Sfard & Kieran, 2001). Et viktig poeng er at elevene må lære å kommunisere for at samtalen skal gi noen læringseffekt. De må lære å lytte til hverandre og vurdere det den andre sier, og de må forklare og begrunne sine ideer slik at andre forstår.

Det er derimot ikke så mye litteratur som knytter elevenes samtaler i par eller små grupper sammen med utforskende arbeidsmåter. Alrø og Skovsmose (2004b) har sett på dialog og utforskning i samarbeid mellom lærer og elever, og ut fra dette funnet ulike dialogiske handlinger som kjennetegner et utforskende samarbeid. De har også funnet igjen disse dialogiske handlinger i samtaler mellom elever i små grupper. Alrø og Skovsmose er mest opptatt av at læring med dialogiske kvaliteter fremmer «critical learning» i matematikk. Det vil si en matematikkopplæring som ikke bare lærer elevene å forstå matematiske konsepter, men som også skal lære dem om deltakelse i demokrati og samfunn. De snakker altså på et mer overordnet nivå om dialogens fordeler. Jeg har derimot valgt å studere nærmere hvordan dialog i små elevgrupper i en utforskende sammenheng, kan bidra til dybdelæring i et spesifikt fagområde, nærmere bestemt algebra. Jeg vil også se hvilken rolle læreren har i dialog med disse små elevgruppene mens de jobber med utforskende oppgaver.

Dybdelæring er et nytt begrep i den norske skoledebatten. Det ble kjent gjennom arbeidet til Ludvigsen-utvalget, et utvalg som fra 2013 til 2015 hadde som oppgave å utrede hva elevene vil ha behov for å lære i fremtidens skole. En av anbefalingene deres var at elevene skulle lære mer i dybden, det vil blant annet si et større fokus på forståelse og sammenhenger slik at elevenes kunnskap kan anvendes i nye situasjoner (NOU 2014:7). Dybdelæring gjelder for alle fag, men kanskje er det særlig aktuelt for et tema som algebra? Algebra er et tema som mange norske elever sliter med å få til. Resultatene fra den nyeste TIMSS-undersøkelsen i 2015 viser at norske elever på 9.trinn er middels gode i matematikk (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016). De gjør det bra på flere emneområder, særlig tallforståelse og statistikk, men det er spesielt dårlige resultater innenfor emneområdet algebra som trekker ned. Figur 1 viser norske elevers gjennomsnittsskår i de ulike emneområdene sammenlignet med de valgte referanselandene.



Figur 1 Prestasjoner per emneområde i TIMSS 2015 for elever på 9.trinn. Kilde: Bergem et al. (2016)

Figur 1 viser blant annet at det er forskjell på hvordan norske elever presterer i algebra i forhold til de valgte referanselandene, og den største forskjellen finner vi mellom Norge og USA. Bergem et al. (2016) mener at en så betydelig forskjell indikerer at algebra prioriteres ulikt i den norske og amerikanske skolen. TIMSS-undersøkelsene viser også utvikling over tid, og norske elever har totalt sett hatt en framgang siden 2003. Men hvis vi ser på trendene innenfor de ulike emneområdene, skiller algebra seg igjen ut ved å være det eneste området uten signifikant framgang.

Vi kan altså fastslå at algebra er et problemområde i norsk matematikkundervisning. Det er bekymringsfullt sett ut fra den rollen algebra spiller som grunnlag for videre utdanning i matematikk og andre realfag. Det er derfor av stor betydning, også samfunnsmessig, å rette fokus mot dette området i matematikkundervisningen.

Jeg har funnet lite litteratur som handler direkte om bruken av utforskende arbeidsmåter i algebra. Men mange studier innen algebra-feltet baserer seg på problemløsing og diskusjon, og dette kan jo knyttes til utforskende arbeidsmåter. Når Kieran, Pang, Schiffer og Ng (2016) oppsummerer forskning på tidlig algebra, skriver de også litt om hvordan et klasserom i denne tradisjonen bør være. De fremhever at elevene må få se etter mønstre, og de bør forklare hvordan de tenker og vurdere de andres ideer, og sammen bygge en komplett løsning. Det vil derfor være nyttig å studere algebraundervisning nærmere, særlig i forhold til et fokus på utforskende arbeidsmåter og dialog. Målet er at min studie kan være et lite bidrag til en pågående debatt om hvordan man kan bedre algebraundervisningen i Norge. I avsnitt **2.2 Algebra** vil jeg gå nærmere inn på mulige årsaker til at algebra er et vanskelig fagområde for elevene, og hva forskning sier vi bør fokusere på for å lette den tradisjonelle overgangen fra aritmetikk til algebra.

Jeg har valgt å studere to 8.klasser i min studie. Grunnen til det er at hovedtyngden av algebraundervisningen starter her. Det er i dag et økende fokus på algebra også i barneskolen, og elevene skal etter 7.årstrinn kunne utforske geometriske mønstre og tallmønstre og løse enkle likninger (Utdanningsdirektoratet, 2013). Men fortsatt er det på ungdomsskolen elevene skal lære å behandle algebraiske uttrykk og mer kompliserte likninger (ibid), og alle reglene det innebærer.

Forskningsspørsmålene jeg har kommet fram til for masteroppgaven min er

> «Hvordan kan utforskende dialog mellom elever bidra til dybdelæring i algebra? Og hva er lærerens rolle i dialog med små elevgrupper?»

I de to neste kapitlene vil jeg beskrive studiens teoretiske grunnlag. I kapittel **2 Dybdelæring og algebra** utdypes hva som menes med dybdelæring. Deretter vil jeg knytte dette til algebra gjennom å belyse overgangen fra aritmetikk til algebra. Kapittel **3 Utforskende arbeidsmåter og dialog** tar for seg fordeler med en utforskende arbeidsmåte, med et spesielt fokus på sosiale og emosjonelle sider ved læringen. Utforskende arbeidsmåter knyttes til kreativt resonnement og dialog, og jeg gir en grundig beskrivelse av en modell som er utgangspunkt for mitt analytiske rammeverk for dialog.

Kapittel **4 Metode** gir begrunnelser for metodiske valg som er tatt for å svare på forskningsspørsmålene mine.

I kapittel **5 Resultater** presenterer jeg utdrag fra datamaterialet mitt, sammen med analyser gjort på bakgrunn av mitt analytiske rammeverk. Dette drøftes videre i kapittel **6 Diskusjon,** i lys av teorien som er beskrevet i kapittel 2 og 3.

Til slutt vil jeg oppsummere mine funn i kapittel **7 Konklusjon**, og diskutere implikasjoner for undervisning og videre forskning.

2. DYBDELÆRING OG ALGEBRA

I dette kapittelet vil jeg utdype hva som ligger i begrepet dybdelæring. Deretter vil jeg presentere noen teorier om hvorfor algebra er vanskelig for elevene, jeg vil se dette i sammenheng med teorier om forståelse i matematikk. Jeg vil gå nærmere inn på feltet «early algebra» og presentere det teoretiske grunnlaget for hvorfor generaliseringsoppgaver, der elevene skal gjenkjenne ulike geometriske mønstre, kan være en god måte å knytte algebra til tidligere kunnskap. Til slutt vil jeg utdype ulike generaliseringsstrategier som elever bruker i arbeidet med mønsteroppgaver.

2.1 DYBDELÆRING

Arbeidet til Ludvigsen-utvalget resulterte i to offentlige utredninger, NOU 2014:7 *Elevenes læring i fremtidens skole – Et kunnskapsgrunnlag* og NOU 2015:8 *Fremtidens skole – Fornyelse av fag og kompetanser.* Utredningene danner grunnlag for regjeringens arbeid med fagfornyelsen, der Kunnskapsløftet skal fornyes og nye læreplaner skal utvikles.

Dybdelæring ble et viktig begrep i disse utredningene. Utvalget skriver at dybdelæring er avgjørende for elevene når de senere skal fungere godt som arbeidstakere og selvstendige samfunnsborgere i et mer komplekst samfunn (NOU 2014:7, s. 10). Det blir enda viktigere i fremtiden at opplæringen gir et godt grunnlag for den enkelte til å kunne tilegne seg nye kompetanser gjennom hele livet. Hensikten er altså å forberede elevene på livslang læring. Men hva innebærer dybdelæring, og hvordan sørger man for at elevene får lære på denne måten?

> «Dybdelæring vil si at elevene utvikler forståelse av begreper og sammenhenger innenfor et fagområde. Det innebærer å knytte nye ideer til allerede kjente begreper og prinsipper, slik at ny forståelse kan brukes til problemløsing i nye og ukjente sammenhenger.» (NOU 2014:7, s. 10)

Dybdelæring handler altså om forståelse og å se sammenhenger. I avsnitt **2.2 Hva er algebra?** vil jeg forklare hva som ligger i forståelse i matematikk og knytte det spesielt til algebra som er fagområdet for min studie.

Dybdelæring står i kontrast til overflatelæring, der vekten ligger på innlæring av faktakunnskap uten at elevene setter kunnskapen i en sammenheng. Se tabell 1 for en sammenligning mellom de to måtene å lære på.

Dybdelæring	**Overflatelæring**
Elever relaterer nye ideer og begreper til tidligere kunnskap og erfaringer.	Elever jobber med nytt lærestoff uten å relatere det til hva de kan fra før.
Elever organiserer egen kunnskap i begrepssystemer som henger sammen.	Elever behandler lærestoff som atskilte kunnskapselementer.
Elever ser etter mønstre og underliggende prinsipper.	Elever memorerer fakta og utfører prosedyrer uten å forstå hvordan eller hvorfor.
Elever vurderer nye ideer og knytter dem til konklusjoner.	Elever har vanskelig for å forstå nye ideer som er forskjellige fra dem de har møtt i læreboka.
Elever forstår hvordan kunnskap blir til gjennom dialog og vurderer logikken i et argument kritisk.	Elever behandler fakta og prosedyrer som statisk kunnskap, overført fra en allvitende autoritet.
Elever reflekterer over sin egen forståelse og sin egen læringsprosess.	Elever memorerer uten å reflektere over formålet eller over egne læringsstrategier.

Tabell 1 Dybdelæring versus overflatelæring. Kilde: NOU 2014:7 (2014, s. 36) (Hentet og oversatt fra Sawyer 2006)

Dybdelæring handler også om å se etter mønstre og underliggende prinsipper i motsetning til å memorere fakta og utføre prosedyrer uten å forstå hvorfor. Dette kan knyttes til elevenes arbeidsmåter. I avsnitt **3.1 Utforskende arbeidsmåter** vil jeg beskrive hvordan nettopp utforsking handler om at elevene skal oppdage løsningsmetoder, nye ideer og prinsipper selv, i motsetning til tradisjonell undervisning der memorering av regler og imitering av eksempler har stor plass.

I følge tabell 1 innebærer dybdelæring at kunnskap blir til gjennom dialog. Dette er et viktig prinsipp også i utforskende arbeidsmåter, at elevenes ulike løsningsforslag og forklaringer danner et grunnlag for kunnskapsbyggingen. I avsnitt **3.3.2 Dialog** vil jeg gå grundig inn på hva som kjennetegner dialog i en utforskende sammenheng, både mellom elever og mellom lærer og elever.

2.2 HVA ER ALGEBRA? OG HVORFOR ER DET SÅ VANSKELIG Å FORSTÅ?

Vi har tidligere sett at algebra er et problemområde i norsk skole. Siden algebra spiller en så sentral rolle i matematikken, er det viktig å fokusere på hvordan vi kan bedre algebraundervisningen. Star og Rittle-Johnson (2009) trekker imidlertid fram noen utfordringer når det gjelder dette. For det første er det ingen absolutt enighet blant lærere og forskere om hva algebra er. Er det i hovedsak «bokstavregning», manipulering av uttrykk med symboler eller likninger? Eller er det sammenhenger mellom størrelser, deriblant funksjoner? Eller å finne og uttrykke tallmønstre?

Et nøkkelord som går igjen i internasjonal algebraforskning, er generalisering. For eksempel kaller Küchemann (1981) algebra for generalisert aritmetikk. Generalisering er også det som opptar Kaput (2008) når han definerer algebra og algebraisk resonnement:

> «The heart of algebraic reasoning is comprised of complex symbolization processes that serve purposeful generalization and reasoning with generalizations" (s. 8).

Kaput (2008) er opptatt av at symbolene vi møter i algebra skal brukes med en hensikt, nemlig å uttrykke og resonnere med generaliseringer. Han er også opptatt av ulike innfallsvinkler til generalisering. Det kan være fra aritmetikk, fra egenskaper til tall og størrelser, mønsteraktiviteter, å uttrykke systematisk variasjon mellom størrelser (funksjoner) og modellering.

En annen utfordring når det gjelder algebraundervisning, er at det ikke er enighet om hvilke forkunnskaper som må være på plass hos elevene for at de skal forstå algebra, eller når temaet bør introduseres (Star & Rittle-Johnson, 2009). Nyere forskning antyder at yngre elever er overraskende kapable til å forstå algebraiske konsepter som man tidligere trodde de ikke hadde forutsetninger for å klare (Carraher, Schliemann, Brizuela & Earnest, 2006).

Det man imidlertid er enige om, er at overgangen fra aritmetikk til algebra er spesielt utfordrende for elever. Her møter de gjerne symboler og abstraksjoner for første gang. Elevene er vant til å gjøre beregninger med kjente tall i aritmetikken, i algebra må de resonnere rundt ukjente og variable størrelser. I tillegg er det forskjeller i hvordan man skal tolke bokstaver, symboler, uttrykk og likhetstegnet (Van Amerom, 2003). Bokstaver og symboler i aritmetikken er ofte benevninger (som m for meter), eller de står for et objekt eller en spesifikk størrelse (som A for areal). I algebra derimot er bokstaver ofte variabler.

Likhetstegnet i aritmetikken annonserer et svar, mens i algebra betyr det ekvivalens. Det algebraiske «språket» kan derfor være vanskelig å forstå i starten.

Herscovics og Linchevski (1994) har i sin studie funnet et kognitivt "gap" mellom aritmetikk og algebra; elevenes manglende evne til å gjøre operasjoner med/på den ukjente. De sier at det virker som mange lærere ikke forstår de kognitive utfordringene elevene har når de skal lære algebra. Mange elever får ikke god nok tid til å konstruere en intuitiv basis til algebra eller å knytte det til tidligere kunnskap. Dermed klarer de ikke forstå meningen bak de nye symbolene, og ender opp med å gjøre meningsløse operasjoner med symboler de ikke forstår. Og uten forståelse blir algebra fort et tema med mange regler og prosedyrer å pugge. I tillegg vil problemer med aritmetikk, som regnerekkefølge, forsterke seg når de skal lære algebra – det blir en kognitiv hindring.

Det er altså mange utfordringer med algebraundervisningen. Og det kan altså se ut som om overflatelæring og manglende forståelse er et problem. Hvordan kan vi få elevene til å utvikle en god forståelse for algebra, både for tenkemåten og de nye symbolene? For å svare på dette, må jeg først avklare hva som menes med forståelse.

I matematikk snakker vi gjerne om to typer; relasjonell forståelse og instrumentell forståelse. Skemp (1976) beskriver instrumentell forståelse som å kunne bruke regler og formler for å få et riktig svar, men uten nødvendigvis å forstå hvordan det henger sammen. Relasjonell forståelse handler derimot om å vite både hva man skal gjøre og hvorfor. Skemp skriver videre at relasjonell forståelse betyr å se sammenhenger mellom regler og prinsipper. Det har den fordelen at det er lettere å huske når det først er lært, og det kan lettere overføres til nye situasjoner. Dette er viktige prinsipper også i dybdelæring.

Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) har fokusert mer på sammenhengen enn motsetningene mellom de to typene forståelse. I sin modell om matematisk kompetanse, som består av fem komponenter, beskrives konseptuell forståelse og prosedyreferdigheter. Disse kan sammenlignes med relasjonell og instrumentell forståelse, men Kilpatrick et al. er opptatt av at komponentene må utvikles parallelt hos elevene, de henger nøye sammen og er avhengig av hverandre. Å kunne utføre prosedyrer effektivt og fleksibelt kan være en støtte til å utvikle den dypere forståelsen, og en hjelp til å generalisere og se sammenhenger.

Både Skemp (1976) og Kilpatrick et al. (2001) er enige om at det på sikt lønner seg å satse på at elevene får en dypere relasjonell eller konseptuell forståelse av regler og konsepter. Og når vi snakker om dybdelæring i algebra, er det denne type forståelse jeg velger å legge vekt på.

2.3 OVERGANGEN FRA ARITMETIKK TIL ALGEBRA

Det er en voksende enighet om at vi må tenke nytt når det gjelder algebra i skolen. «Early algebra» har blitt et stort forskningsfelt de siste tiårene, det finnes mye litteratur på dette fra slutten av 1980-tallet og utover. Kieran et al. (2016) oppsummerer mye av forskningen på «early algebra»-området så langt. De trekker fram generalisering, både ut i fra numeriske og geometriske mønstre, som et av fokusområdene i litteraturen. Generalisering er viktig for elevenes tidlige algebraiske tenking, og matematiske sammenhenger mellom tall og størrelser, mønstre og strukturer fra aritmetikken regnes som grunnlaget for dette. Det er mange enige om.

> "Building generalizations from arithmetic and quantitative reasoning is taken by many educators and researchers as the primary route into algebra" (Kaput, 2008, s. 11):

I siste utkast til de nye kjerneelementene i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2018), er abstraksjon og generalisering et eget punkt. I dette ligger det at elevene skal få utforske med tall, utregninger og figurer for å finne sammenhenger og deretter formalisere ved bruk av algebra og hensiktsmessige representasjoner. Algebraisk tenkning er en viktig framgangsmåte og forutsetning for abstraksjon og generalisering.

Det er altså liten tvil om at generalisering og algebraisk tenkning henger nøye sammen, og at dette er en måte å introdusere algebra som gjøre at elevene får bruke kunnskap de allerede har fra aritmetikken. Å se sammenhenger er et hovedprinsipp i dybdelæring, og dette må elevene få hjelp til. Ny kunnskap må settes inn i en større sammenheng, det må knyttes til elevenes tidligere kunnskap og erfaringer (NOU 2014:7, s. 33-34).

Et omdiskutert spørsmål innen «early algebra» er *når* symboler og variabler skal introduseres. På den ene siden blir det hevdet at elevene bør få tid til uttrykke algebraiske resonnement med egne ord, at dette er bedre for elevenes algebraiske forståelse, og at symboler ikke tilfører noe i denne sammenhengen (Kieran et al., 2016).

På den andre siden mener mange at elevene bør øve seg på å bruke symboler og bli vant til dette helt fra starten av. For eksempel har Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens og Murphy Gardiner (2015) sett på 1.klassinger og deres forståelse og bruk av variabler. Elevene var villige til å la en bokstav står for et ubestemt tall. De oppdaget også at i intervjuene om en variabel størrelse der det ikke var innført variabelnotasjon, søkte elevene etter en spesifikk verdi. Det gjorde de derimot ikke (i like stor grad) etter at variabelnotasjon var innført. Brizuela et al. (2015) mener derfor at innføring av variabelnotasjonen kan fasilitere refleksjoner rundt ubestemte mengder, og utvikler bruken av variabler samtidig som den konseptuelle forståelsen av dem. Ved å innføre det gradvis fra tidlig alder vil det bli en del av barnas matematiske språk.

"Early algebra"-feltet har fokus på elever fra 6 til 12 år. Det er en økende bevissthet rundt tidlig algebra også her i Norge, og vi ser satsing på dette i barneskoler. Dette er ikke fokuset i min oppgave, men litteraturen på dette området gir likevel viktige poenger å ta med seg når jeg skal tenke på hva som er viktig i starten av algebratemaet i en 8.klasse. Ut fra litteraturen jeg nå har lest på dette området, virker generaliseringsoppgaver som en god måte å knytte algebra til tidligere kunnskap. I tillegg får elevene se at variabler og symboler brukes av en hensikt.

2.4 GENERALISERINGSSTRATEGIER VED MØNSTERAKTIVITETER

Lannin (2005) har sett på generalisering blant elever i en 6.klasse. Han har undersøkt elevenes resonnementer i arbeid med det han kaller «patterning activities», mønsteraktiviteter. Elevene skulle typisk finne den avhengige variabelen etter som den uavhengige variabelen økte (for eksempel antall fyrstikker som trengs for å lage en rute, to ruter, tre ruter osv.). Til slutt skulle de bruke mønsteret de fant til å komme fram til en generell formel for denne sammenhengen, og begrunne den.

Lannin (2005) refererer blant annet til retningslinjer fra både USA, Storbritannia og Australia som anbefaler oppgaver med å generalisere mønstre som en måte å innføre algebraiske konsepter, gjerne på barneskolen. Han hevder videre at fordelen med denne type generalisering, er at den gir en kontekst som kan støtte elevenes forståelse av symbolske representasjoner, samtidig som den gir en link til elevenes tidligere kunnskap i aritmetikk.

Elever bruker ulike strategier når de generaliserer mønstre. I sin studie undersøkte Lannin (2005) de ulike strategiene som ble brukt, og elevenes forklaringer og begrunnelser. Han beskriver fem ulike generaliseringsstrategier, se tabell 2. Det finnes andre måter å se etter generaliseringsstrategier på, det kommer litt an på hva slags generaliseringsoppgaver elevene er blitt gitt. Lannin sine strategier passet godt til oppgavene jeg brukte i mine undervisningsopplegg.

Strategi	***Beskrivelse***
Telle	Tegne en figur eller lage en modell som representerer situasjonen, for så å telle det man ønsker å finne ut.
Rekursiv	Bygge på tidligere trinn i sekvensen for å bestemme det neste.
Helobjekt	Bruke en liten enhet til å lage en større enhet ved multiplisering. Med eller uten en passende justering for over-telling.
Gjette og sjekke	Gjette en regel uten å tenke på hvorfor den kan virke. Dette innebærer vanligvis å eksperimentere med ulike operasjoner og tall oppgitt i oppgaven.
Kontekstuell	Konstruere en regel basert på informasjonen i situasjonen, og relatere den til en måte å telle på.

Tabell 2 Generalseringsstrategier. Kilde: Lannin (2005), min oversettelse.

Telling og den rekursive strategien blir regnet som ikke-eksplisitte. Disse kan ikke brukes til å regne ut den avhengige variabelen direkte, de baserer seg på informasjon fra det forrige trinnet i sekvensen, og blir derfor vanskelige å bruke når man kommer et stykke utover i sekvensen. Et eksempel på den rekursive strategien er å legge til tre fyrstikker for å lage en ny rute i en rad med ruter bortover. Den rekursive strategien kan kanskje ikke brukes i utregninger, men den gir viktig informasjon om mønsteret som størrelsene vokser etter.

Helobjekt, gjette og sjekke og den kontekstuelle strategien blir regnet som eksplisitte, det vil si at de kan brukes til å regne ut den avhengige variabelen gitt en vilkårlig verdi av den uavhengige variabelen (Lannin, 2005). Men av disse er det bare den kontekstuelle strategien som alltid gir en link til oppgavesituasjonen. Gjette og sjekke-strategien innebærer vanligvis å sjekke at regelen stemmer for bare en eller noen få tilfeller, uten å begrunne hvorfor den kan gjelde for alle tilfeller. Dette er en strategi som ikke fører til algebra, fordi man ikke ser det generelle i oppgaven (Radford, 2010).

Helobjekt-strategien kan gi en link til oppgavekonteksten, men Stacey (1989) som også har studert elevers bruk av denne strategien, skriver at den ofte blir brukt feil. Helobjekt-strategien innebærer for eksempel å doble antall synlige sider når man dobler antall terninger som er plassert oppå hverandre. Men for at den skal gi riktig svar, må elevene forstå hvordan de skal justere svaret slik at det passer til situasjonen. For eksempel blir en synlig side borte når man plasserer nye terninger oppå de man har fra før, slik at etter å ha doblet antall synlige sider må man trekke fra en.

Det er den kontekstuelle strategien, der elevene baserer seg på de matematiske sammenhengene i oppgavesituasjonen, man egentlig ønsker at elevene skal bruke når de generaliserer. Lannin (2005) skriver:

> «When justifying an algebraic model, an argument is viewed as acceptable when it connects the generalization to a general relation that exists in the problem context. This type of justification is often connected to a geometric scheme that is generated based on a visual conceptualization of the situation. … This type of justification is valued because it explains rather than simply convinces, describing a relation that can be observed across all cases that exists in the situation.” (s.235)

Et argument for en generalisering bør altså beskrive eller forklare en generell sammenheng som vi kan observere for alle tilfeller i oppgavesituasjonen.

Når vi bruker generalisering som en inngang til algebra, er det et viktig poeng at elevene uttrykker den kontekstuelle sammenhengen med symboler. Radford (2010) mener at vi kun kan snakke om algebraisk generalisering hvis det krystalliserer seg et generalisert objekt i en regel som gir et uttrykk for et vilkårlig tilfelle av sekvensen. Elevene skal altså gå fra å oppdage det generelle og se et mønster, til å uttrykke dette symbolsk slik at det gjelder for alle tilfeller av sekvensen, og dette uttrykket blir et objekt som kan manipuleres videre. Symboler handler ikke bare om å si det samme med et annet språk, det handler om å få tilgang til en dypere bevissthet, i følge Radford.

Lannin (2005) fant at elevene generelt var flinke til å komme med passende generaliseringer og begrunne dem eller gi eksempler i helklassediskusjoner. I diskusjoner i små grupper derimot, kom elevene sjelden med begrunnelser for generaliseringene. Skal man gi elevene generaliseringsoppgaver, er en oppsummerende helklassediskusjon derfor sterkt anbefalt, mener han. På den måten blir elevenes ulike strategier og begrunnelser brakt fram og gyldigheten kan vurderes av alle.

Her kommer utforskende arbeidsmåter inn. Denne arbeidsmåten ivaretar både utforsking i små grupper og en helklassediskusjon der elevene får reflektere rundt ulike generaliseringsstrategier. Det nye kjerneelementet i matematikk som handler om abstraksjon og generalisering, nevner også viktigheten av at elevene får oppdage sammenhengene og strukturene selv og ikke blir presentert for en ferdig løsning. Dette foregår gjennom utforsking (Utdanningsdirektoratet, 2018).

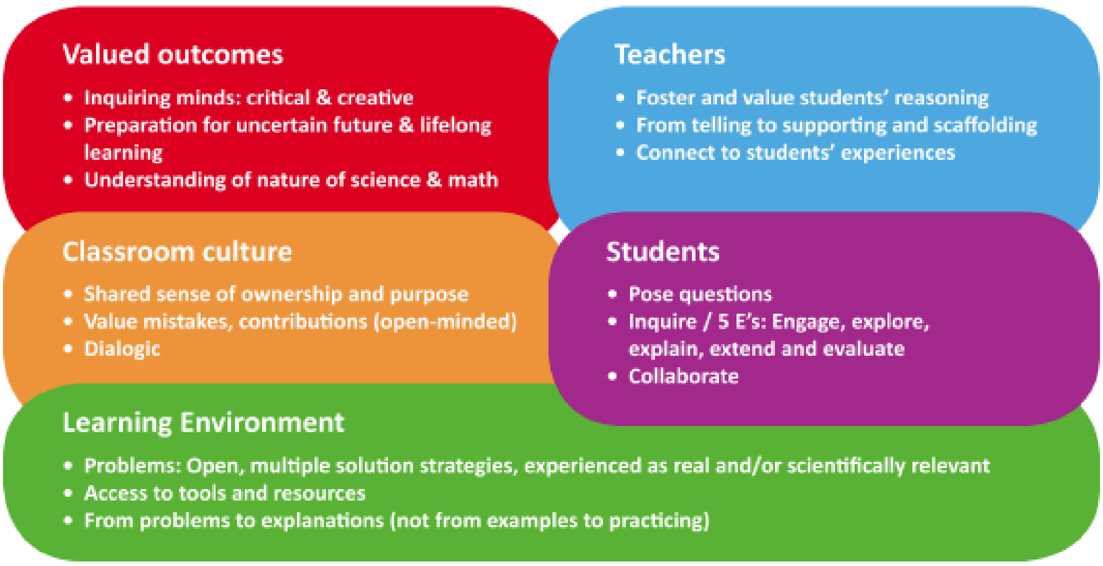
3. UTFORSKENDE ARBEIDSMÅTER OG DIALOG

Jeg vil i dette kapittelet utdype hva utforskende arbeidsmåter er, og hvorfor dette er en interessant undervisningsmetode i matematikk generelt, og særlig i forhold til algebra og generalisering. Jeg vil beskrive hva forskning sier om effekten av denne arbeidsmåten, og spesielt utdype hvordan den knyttes til utviklingen av ulike sosiale og emosjonelle kompetanser. Jeg vil knytte utforskende arbeidsmåter til andre matematikkdidaktiske teorier, blant annet om kreativt resonnement og dialog. Til slutt vil jeg beskrive Alrø og Skovsmose (2004b) sin modell for dialog, eller utforskende samarbeid som de også kaller det. Denne modellen er utgangspunkt for mitt analytiske rammeverk for dialog.

3.1 HVORFOR UTFORSKENDE ARBEIDSMÅTER?

I en tradisjonell oppfatning av undervisning og læring er det læreren som står i sentrum og deler av sin kunnskap. Elevene er passive tilhørere, følger instrukser, lærer seg fakta og øver på prosedyrer gjennom rutineoppgaver. Utforskende arbeidsmåter står som en motsetning til dette. Det er et perspektiv på læring der elevene skal være aktive deltakere i sin egen læring (Maass, Reitz-Koncebovski & Billy, 2013).

PRIMAS (Promoting Inquiry in mathematics and science across Europe) er et EU-finansiert prosjekt som har som mål å fremme utforskende arbeidsmåter i realfag. De har samlet noen hovedpunkter om hva som ligger i utforskende arbeidsmåter, eller inquiry based learning (IBL), se figur 2. Jeg vil gi en kort forklaring av de ulike aspektene i figuren.



Figur 2 PRIMAS' multifasetterte forståelse av IBL. Kilde: Maass et al. (2013)

Utforskende arbeidsmåter er *elev-sentrerte*, og elevene er aktive og engasjerte gjennom blant annet å stille spørsmål, ta avgjørelser og designe egne eksperimenter, lage hypoteser og utforske løsningsstrategier. De diskuterer og evaluerer resultater, og samarbeid spiller en viktig rolle (Maass et al., 2013). Teori på «early algebra»-området fremhever også at elevene gjennom diskusjoner bør få forklare egen tankegang og vurdere andres ideer. Gjennom å bygge på hverandres forklaringer, dannes det til sammen en komplett ide eller løsning (Kieran et al., 2016).

Læreren får også en annen rolle enn å være formidler av kunnskap. Som figur 2 viser, skal læreren støtte elevene i deres utforskning og læring. Det er flere momenter som er viktige her, blant annet å fremme og utnytte elevenes egne forklaringer og bidrag, samt å knytte lærestoffet til elevenes oppdagelser og erfaringer. Graden av støtte og tilrettelegging under elevenes utforskning er et annet viktig moment.

Klasseromskultur og læringsmiljø blir også annerledes enn i tradisjonelle klasserom. Det vil oftere være en dialog mellom lærer og elever gjennom hele læringsprosessen, og en oppfatning av delt eierskap til det som læres. Dette er viktig også i dybdelæring. Alle bidrag skal verdsettes, også de som er feil, det er mye å lære av disse også. Undervisningen går gjerne fra problemløsing til forklaringer i en helklassediskusjon, i stedet for den tradisjonelle måten med forklaring og eksempler og påfølgende oppgaveløsing. Og problemene som benyttes er gjerne åpne, med muligheter for å benytte ulike løsningsstrategier. Ideelt sett er de også knyttet til dagligliv eller noe som er vitenskapelig relevant.

Det man ønsker å oppnå med denne undervisningsmetoden (se figur 2), i tillegg til at elevene når læringsmålene i faget, er at de utvikler utforskende «habits of mind». Kreativitet og kritisk tenkning, selvstendighet og evne til å diskutere og kommunisere resultater, er alle egenskaper som blir sett på som viktige i et langsiktig perspektiv, og et overordnet mål med utdanningen er å forberede elevene på en usikker fremtid og for livslang læring (Maass et al., 2013). I tillegg trengs det naturvitenskapelig kompetanse i tiden fremover, og utforskende arbeidsmåter kan gi elevene bedre innsikt og forståelse av realfag og naturvitenskapelig arbeid, og fremme motivasjon og interesse for fagene.

Bruder og Prescott (2013) har undersøkt hva nyere forskning sier om effekten av IBL i matematikk og naturfag. De skiller mellom strukturert utforskning, guidet utforskning og åpen utforskning, avhengig av hvor mye læreren styrer prosessen. Litt enkelt kan vi si at i strukturert utforskning bestemmer læreren oppgaven eller problemet som elevene må løse, samt gir dem metodene og materialene de trenger for å løse det. Under guidet utforskning bestemmer læreren oppgaven og gir elevene nødvendig materiale, men de må selv finne løsningsstrategier og metoder. Åpen utforskning vil si at elevene også lager spørsmålene de ønsker å finne svar på selv, i tillegg til metoder og materialer de vil bruke (Bruder & Prescott, 2013). Både kortvarige og lengre forskningsprosjekter er inkludert i studien, fra klassenivå til skolenivå, i flere ulike fag, og med elever fra ulike bakgrunner. Den favner altså ganske vidt, og viser som ventet til noe sprikende resultater som kan være vanskelige å sammenligne. De kan allikevel konkludere med at de fleste IBL-prosjekter viser positive effekter for elevene. En del av dette går på faglig utvikling, men enda oftere gjelder de positive resultatene selve «prosessen». I dette ligger det at mange elever ble mer kreative i løsningsforslagene sine, fikk økte problemløsingsferdigheter og bedre evner til å argumentere og begrunne løsningene sine. I tillegg indikerer studien at utforskende arbeidsmåter bedrer elevenes holdninger og motivasjon i faget. Dette gjaldt alle elever, både på ulikt nivå, ulike klassetrinn og med ulik bakgrunn. Utforskende arbeidsmåter har altså andre kvaliteter enn det rent faglige, det bidrar også til utviklingen av andre sider ved læringen. Dette vil jeg utdype i avsnitt **3.2 Sosiale og emosjonelle sider ved læringen**.

Studien viser også at guidet utforskning, der læreren forsiktig styrer elevene mot de riktige oppdagelsene gjennom passe mengde hjelp, lytting, hint og spørsmål som oppfordrer elevene til å tenke videre, gir de beste resultatene (Bruder & Prescott, 2013). Både når det gjelder faglig utvikling og «prosess».

Både hva elevene skal lære, undervisningsopplegget, tid, lærerens og elevenes personligheter og forutsetninger vil påvirke utfallet av en utforskende undervisningssituasjon. Bruder og Prescott (2013) trekker særlig fram dette med elevenes forutsetninger. Flere av studiene de har undersøkt viser at elever med liten forforståelse i et emne, har bedre faglig utbytte av å lære på andre, mer lærer-styrte måter. De peker på at elevene må ha noen grunnleggende ferdigheter når det gjelder å identifisere og løse problemer hvis de skal ha utbytte av å arbeide utforskende. Dette er kognitivt krevende prosesser. Det er viktig å tenke over at alle elever kanskje ikke har disse ferdighetene i utgangspunktet, men de kan læres og trenes opp. Andre studier har derimot vist at det er de svakeste elevene som har mest å hente på å jobbe med matematikkoppgaver der de må finne løsningsstrategien selv (Lithner, 2017).

Det er ikke slik at utforskende arbeidsmåter er den undervisningsmetoden som er best egnet for absolutt alle fagområder eller regler som skal læres. Vi har lærer-sentrert undervisning på den ene enden av skalaen og elev-sentrert på den andre, og optimale strategier for læringen befinner seg sannsynligvis et sted langs et kontinuum med disse ytterpunktene, avhengig av læringsmål, lærerens styrke og elevenes kompetanser og behov (Bruder & Prescott, 2013). Elevene trenger også fortsatt mengdetrening i å løse oppgaver for å utvikle prosedyreferdigheter. En kombinasjon av ulike arbeidsmåter er nok derfor den beste løsningen hvis man ser hele matematikk- eller algebraundervisningen under ett. Som nevnt har utforskende arbeidsmåter også andre positive effekter for elevene enn den rent faglige utviklingen, og dette er verdt å huske på.

3.2 SOSIALE OG EMOSJONELLE SIDER VED LÆRINGEN

Utforskende arbeidsmåter viser som tidligere nevnt en stor fordel når det gjelder utviklingen av sosiale og emosjonelle kompetanser som blant annet kreativitet, evner til å argumentere og begrunne løsningene sine, og holdninger og motivasjon i faget. Sosial og emosjonell læring bidrar til at elevene utvikler ferdigheter og holdninger som påvirker læringsresultater i positiv retning. Ludvigsen-utvalget er opptatt av at elevenes kompetanse utvikles i et samspill mellom faglige, sosiale og emosjonelle sider ved læringen (NOU 2014:7, s. 8), dette kaller de det brede kompetansebegrepet.

Det er bred enighet om at det ikke holder å bare fokusere på det matematiske innholdet for å gjøre elevene gode i matematikk. I Kilpatrick et al. (2001) sin velkjente modell er det fem komponenter som alle er nødvendige for å utvikle matematisk kompetanse. Komponentene er sammenflettet, og utvikles samtidig. Den ene av disse, «productive disposition», handler om engasjement og motivasjon, at elevene ser på matematikk som nyttig og verdifullt, og deres egen tro på at de kan lære, forstå og bruke matematikk. Dette er viktig for at elevene også skal utvikle de andre komponentene i modellen som handler om forståelse, utføre prosedyrer, løse problemer og resonnere.

Schoenfeld (2017) har utviklet et rammeverk for å studere elevenes muligheter til å oppnå en dypere forståelse av det matematiske innholdet, teaching for robust understanding (TRU). Mange av prinsippene her kan knyttes til dybdelæring, blant annet fokuset på forståelse og sammenhenger, at elevene skal forklare og begrunne, bygge på hverandres ideer og at læreren bygger videre på elevenes ideer. TRU-rammeverket har fem dimensjoner, som alle er viktige for å gi elevene gode muligheter til å oppnå en «robust» forståelse. Her vil jeg trekke fram dimensjonen «agency, ownership and identity».

Schoenfeld (2017) mener altså at en læringssituasjon som skal fremme elevenes dype forståelse, bør inneholde muligheter til å utvikle

- Agency: Dette handler om engasjement, holdning og vilje til å delta.
- Ownership: Dette handler om elevenes eierskap til innholdet.
- Identity: Dette handler om en positiv identitet som «thinkers and learners» i matematikk.

Jeg vil på bakgrunn av dette hevde at sosiale og emosjonelle sider ved læringen, som engasjement og holdninger, tro på egen læring og mestring, matematiske samtaler og opplevelse av eierskap, er nødvendig for elevenes dybdelæring i matematikk.

Neste spørsmål er dermed hvordan vi legger til rette for sosial og emosjonell læring i matematikk. Schoenfeld (2017) hevder at elevene oppnår mye blant annet gjennom å bidra til samtaler om matematiske ideer og bygge på hverandres ideer. Utforskende arbeidsmåter og dialog er derfor nærliggende å tenke på. Kjersti Wæge (2007) har i sitt doktorgradsarbeid sett på sammenhengen mellom elevers motivasjon og utforskende arbeidsmåter. Hun skriver blant annet at motivasjon er nært knyttet til et fokus på læring og forståelse fremfor å få riktig svar, og til elevers følelser og selvtillit i matematikk, særlig følelse av kompetanse, eierskap og glede over å jobbe med faget. Hun har funnet tre faktorer ved utforskende arbeidsmåter som ser ut til å påvirke elevenes følelser i positiv retning. Den ene er undervisningsoppleggene i seg selv, med åpne oppgaver, problemløsingsoppgaver, oppgaver med praktisk vinkling og konkreter etc. Den andre faktoren er at det legges til rette for samarbeid og diskusjon elevene i mellom, og den tredje at elevene får mulighet til å finne egne løsningsstrategier. Disse tre faktorene, som vi finner i utforskende arbeidsmåter, vil altså bidra til sosiale og emosjonelle sider ved læringen.

Wæge (2007) beskriver selvtillit i matematikk som sammensatt av elevens selvbilde (self-concept) og forventning om mestring (self-efficacy). I dette ligger det spørsmål om eleven har en oppfatning av at han er god i matematikk, hvor vanskelig han syns det er å lære noe nytt, om han er villig til å gå i gang med nye oppgaver, hvor mye han anstrenger seg for å få de til, og om eleven er stolt når han mestrer matematikkoppgaver.

3.3 IBL KNYTTET TIL MATEMATIKKDIDAKTISKE TEORIER

Artigue og Blomhøj (2013) trekker linjene tilbake til John Dewey (1859-1952) når de snakker om de teoretiske røttene til utforskende arbeidsmåter. Dewey utviklet begrepet reflekterende utforskning, og så dette som grunnlaget for læring. Elevene skulle lære gjennom erfaringer, og bruke eksisterende kunnskap til å utforske det ukjente. Læreren skulle guide elevenes erfaringer og refleksjoner slik at læringspotensialet i situasjonene ble utnyttet og elevenes kunnskaper gradvis ble bygget opp. Utforskningen skulle gjerne ta utgangspunkt i dagligdagse situasjoner eller profesjonell praksis, og i tillegg bidra til å utvikle en utforskende tenkemåte samt demokrati hos elevene. Alt dette er prinsipper som står sterkt i skolen i dag, og en grunn til at Dewey nå blir sett på med ny interesse (Artigue & Blomhøj, 2013).

Artigue og Blomhøj (2013) forsøker å knytte IBL til eksisterende teoretiske rammeverk i matematikkdidaktikken. Blant annet kan IBL sees i sammenheng med problemløsing, som har stått i sterk tradisjon siden Polya's berømte How to Solve It (1945). Der møter elevene et utfordrende «problem» som de må bruke egne strategier for å løse. Problemløsingskompetanse og tilhørende refleksjon rundt metoder og løsningsstrategier, kan sees i sammenheng både med Deweys reflekterende utforskning og hvordan elevene jobber i IBL.

Andre matematikkdidaktiske teorier IBL kan knyttes til, handler blant annet om didaktiske situasjoner og dialog. Disse vil jeg nå gå nærmere inn på, fordi det er i denne retningen jeg har valgt å fokusere forskningsspørsmålet mitt.

3.3.1 DIDAKTISKE SITUASJONER OG KREATIVT RESONNEMENT

En teori som fikk fotfeste i matematikkdidaktikken på 1970-tallet, omhandler det som kalles didaktiske situasjoner (TDS). Her var man opptatt av at det skulle være en optimal løsning på de matematiske problemene som elevene møter. Denne optimale løsningen peker på det som er målet at elevene sitter igjen med av matematisk kunnskap (Artigue & Blomhøj, 2013). Gjennom et passende miljø og didaktiske situasjoner der elevene får erfare ulike løsningsstrategier og ideer, og får støtte til å gjøre nødvendige tilpasninger, skal elevene (i samarbeid) bygge denne kunnskapen. Dette resonnerer godt med hvordan IBL kan brukes i matematikk, selv om mange er opptatt av at problemene bør være mer åpne. Ufullstendige eller gale resonnementer blir ikke regnet som feil, men er ofte nødvendige trinn i en læringsprosess. Lærerens jobb er ideelt sett å skape situasjoner og oppgaver der elevene selv oppdager hvordan de skal overkomme slike hindringer og dermed ser nødvendigheten av å utvikle matematiske konsepter (Lithner, 2008).

I TDS er man opptatt av at elevene må ta ansvaret for å løse et problem, eller en del av det, de må akseptere det som sitt eget. Deretter skal de finne en løsning på problemet uten at læreren blander seg inn og forteller hvordan det skal gjøres. Dette kalles en adidaktisk situasjon. Læreren har selvfølgelig ansvaret for å hjelpe elever som ikke får det til på egen hånd, men å fortelle elevene hvilken algoritme de skal bruke for eksempel, virker mot sin hensikt (Lithner, 2008). Da slipper elevene å ta ansvaret for å løse problemet, og vil heller ikke utvikle problemløsingskompetanse.

Johan Lithner bruker TDS som et grunnlag for sine teorier om imitativt og kreativt resonnement. Han legger særlig vekt på at elevene skal få konstruere kunnskap, som et alternativ til å imitere algoritmer presentert av læreren eller læreboka (Lithner, 2008). Det er en altså en sterk link mellom utforskende arbeidsmåter og kreativt resonnement.

Kreativt resonnement (creative mathemaatical reasoning, CMR) er enkelt definert som et *nytt eller gjenoppdaget* resonnement (tankerekke) som er begrunnet med *matematisk forankrede argumenter* (Lithner, 2008). Argumentene støtter logikken i resonnementet, strategivalg og -implementering og dermed konstruksjonen av ny kunnskap. Lithner (2017) hevder at elever som lærer gjennom kreativt resonnement, utvikler bedre problemløsingskompetanse og matematisk forståelse, som innebærer både det han kaller «task-solving understanding» og «task-solving fluency». Dette kan sammenlignes med Kilpatrick et al.s (2001) konseptuelle forståelse og prosedyreferdigheter, selv om Lithner knytter forståelsen til oppgaveløsing, og hvorfor en løsningsmetode passer for en gitt oppgave, og ikke til større matematiske konsepter.

Lithner (2017) er mest opptatt av å designe *oppgaver* som fremmer kreativt resonnement, CMR-oppgaver. Dette er oppgaver der elevene selv må finne en løsningsmetode, og det må være innen rekkevidde for dem å begrunne løsningen med matematisk forankrede argumenter. Han skriver lite om det sosiale som skjer i et klasserom, interaksjoner mellom elever og lærer. Han nevner så vidt at kommunikasjonsferdigheter er et av områdene hvor man bør se om CMR har en effekt.

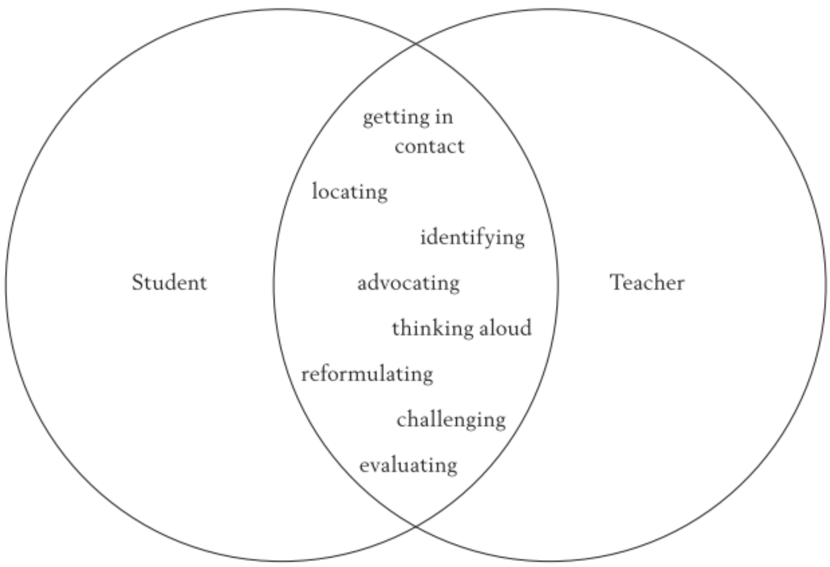
3.3.2 Dialog

I følge Artigue og Blomhøj (2013) var Dewey spesielt opptatt av interaksjonen mellom lærer og elever, og mellom elevene selv, i utforskningsprosessen. Av nyere teorier nevner de Alrø og Skovsmose med sin inquiry-cooperation modell. Alrø og Skovsmose (2004a) ser på dialog som en del av en utforskningsprosess, og som den måten man kan ta eierskap i prosessen.

> «The inquiry process of the students can be seen as learning by doing and talking. They co-operate by means of action and reflection, and as they participate in collaborative work they have to verbalise what they do and think. They have explicitly to co-reflect» (s. 46).

Alrø og Skovsmose (2004b) har observert kommunikasjon mellom lærer og elever i en utforskende setting, og kommet fram til åtte kjennetegn på dialog, eller dialogiske handlinger. Disse har de samlet i sin «inquiry-cooperation»-modell, se figur 3. Senere knyttet de modellen også til samtaler mellom elever når de var i en utforskende samarbeidsprosess.

Elementene i modellen oppstår ikke i en lineær rekkefølge, og det er ingen faste grenser mellom dem. Man kan se dem oppstå og repeteres i ulike kombinasjoner, og de representerer aspekter av den samme utforskningsprosessen (Alrø & Skovsmose, 2004b). Jeg vil beskrive de ulike elementene i modellen. Jeg vil også knytte noen av dem til Lithners (2008) teori om kreativt resonnement. Kjennetegnene han beskriver for kreativt resonnement, særlig med tanke på argumenter, kan bli synlige i en dialog mellom elever.



Figur 3: The inquiry-cooperation model. Kilde: Alrø og Skovsmose (2004a)

Komme i kontakt

Å komme i kontakt er en forutsetning for å kunne samarbeide. Det betyr å være til stede i samtalen, være oppmerksom på det den andre sier, å vise gjensidig respekt og ansvar. Det må etableres en positiv relasjon for at deltakerne skal være klare for samarbeid og utforskning. Den må opprettholdes og reetableres. Kontakt kan også sees gjennom gjensidig bekreftelse og støtte, og gjennom godt humør og latter.

Lokalisere

Å lokalisere betyr å finne ut noe man ikke visste eller var klar over fra før. Gjennom utforskende spørsmål, åpenhet og undring lokaliseres nye perspektiver. I en samarbeidsprosess vil det si å gjøre egne perspektiver synlige for hverandre, utforske muligheter og forslag, og prøve dem ut i fellesskap. Så blir man enige om å beholde dem eller avvise dem. Samtalen preges av «hva hvis»-spørsmål, og når de stilles av elevene selv, indikerer de også elevenes eierskap til utforskningsprosessen.

Det første kriteriet for kreativt resonnement handler om at resonnementet skal være nytt (eller gjenoppdaget) for elevene (Lithner, 2008). Det skal ikke være en ren gjentakelse av noe læreren har sagt eller eksempler de har sett. Dette kan knyttes tett opp til det å lokalisere nye perspektiver, utforske og teste ut forslag. Og når vi snakker om dialog, er poenget at dette gjøres i fellesskap.

Identifisere

Lokalisering kan føre til identifisering av matematiske ideer, prinsipper eller algoritmer. Et «hva hvis»- spørsmål kan naturlig følges av «hvorfor»-spørsmål, og det kan igjen knyttes til en identifiseringsprosess der matematiske ideer får vokse fram. «Hvorfor»-spørsmål fører til forklaringer og begrunnelser. Begrunnelsene blir ikke alltid uttrykt direkte, men kan noen ganger sees som en delt oppfatning av om ting er riktige eller ikke.

Argumentere

I en prosess med utforskende samarbeid, vil argumentere bety mer enn å overbevise den andre. Det betyr å si det man mener og samtidig være villig til å undersøke sine egne perspektiver og egen forståelse. Hensikten er i denne sammenhengen en felles utforskning av et emne for å klargjøre hva det innebærer, en slags kollektiv refleksjon, og det er dette som driver en utforskningsprosess. I en slik prosess kan være fordel å argumentere for flere alternative ideer.

Lithner (2008) er opptatt av argumenter når han beskriver sin teori om kreativt resonnement. For å kalle et resonnement kreativt, må strategivalg eller –implementering støttes av argumenter, og at argumentene skal være matematisk forankret. Dialog er en måte å få fram elevenes argumenter.

Lithner (2008) deler argumenter i to kategorier. Et argument kan være *predikativt*. Det innebærer for eksempel hvorfor egenskaper i oppgaven har visse konsekvenser. Det kan knyttes til utforskning og si noe om hvorfor noen av utfallene er nyttige, og hvorfor noen tilnærminger bedre leder mot en løsning. Argumenter kan også være *verifiserende*. Dette er for eksempel metakognitive argumenter om hvorfor det stemmer eller om strategien må endres, eller forklaringer på hvorfor en løsning er nådd.

Tenke høyt

Å tenke høyt betyr å uttrykke tanker, ideer og følelser gjennom utforskningsprosessen. På denne måten blir perspektiver tilgjengelig for andre og kan bli til ressurser i utforskningen. Det kan også være i form av skisser, figurer og diagrammer.

Reformulere

Å reformulere betyr å repetere det som blir sagt, kanskje med litt andre ord eller et annet tonefall, eller at man legger noe til. Reformulering har mange funksjoner. Det er en viktig del av aktiv lytting, og kan brukes som en bekreftelse på at man har hørt hva den andre sier, aksept for det som ble foreslått, og en måte å opprettholde kollektivt ansvar og kontakt. På den måten kan deltakerne se om de har en felles forståelse. Reformulering kan også brukes som en invitasjon til ytterligere refleksjon, og til presisering både når det gjelder å lokalisere, identifisere og argumentere. Reformulering kan også innebære å fullføre hverandres uttalelser.

Utfordre

Å utfordre betyr å stille spørsmål ved etablert kunnskap eller perspektiver. Det er nært knyttet til «hva hvis»-spørsmål og lokalisering av alternative perspektiver, begge deler kan være en invitasjon til å undersøke nye muligheter. En utfordring er bare vellykket når den blir fulgt opp, da kan den bli et «turning point» i utforskningen.

Evaluere

En evaluering kan ta mange former. For eksempel som positiv eller negativ tilbakemelding, råd, konstruktiv kritikk, bekreftelse og støtte, oppretting av feil etc. Evalueringen kan gjøres av andre, for eksempel læreren, eller en selv. I en evaluering bringes den emosjonelle og den kunnskapsbaserte delen av en utforskningsprosess sammen, evalueringen kan fortelle oss noe om elevenes holdninger.

Noen av elementene i modellen får et litt annet innhold når det er snakk om dialog mellom elever og lærer. Dette vil jeg beskrive under. I tillegg er det mange som har skrevet om hvordan læreren kan få i stand gode samtaler med elevene, og jeg vil knytte de dialogiske handlingene til noen av disse «tipsene».

Med ***kontakt*** menes det at lærer og elever er innstilt på samarbeid. Et viktig prinsipp som går igjen i både utforskende arbeidsmåter og dybdelæring, er at læring skjer i dialog mellom elever og lærere. Læreren skal ikke øse sin kunnskap ut over elevene, men verdsette og bygge videre på elevenes forslag. Læreren må derfor aktivt ***lokalisere*** elevenes tanker, ideer og perspektiver. Dette gjøres gjennom spørsmål som oppfordrer elevene til å forklare hvordan de tenker. ***Identifisering*** av matematiske prinsipper eller algoritmer bør skje i samarbeidet mellom lærer og elever. Det holder ikke at læreren for eksempel forteller elevene hvordan de skal løse en oppgave, de må få oppdage det selv. Dette er viktig både i utforskende arbeidsmåter og i forhold til kreativt resonnement. Men her må vi også nevne viktigheten av støtte. Elevene må bli guidet på riktig måte slik at de får muligheten til å oppdage prinsipper selv (Artigue og Blomhøj,2013; Lithner, 2017).

Både elever og lærer kan ***argumentere*** og ***tenke høyt***, men det er som sagt viktig at læreren oppfordrer elevene til dette. Læreren vil ofte ***reformulere*** elevenes innspill. Læreren kan på denne måten sjekke om han har forstått eleven rett, og han kan rette oppmerksomheten mot det han vil elevene skal fokusere på. Det er med på å avklare elevenes tanker (Chapin, O'Connor & Anderson, 2009). Reformulering kan også brukes av elevene for å sjekke om de har forstått læreren rett. Læreren kan gjerne ***utfordre*** elevene til å tenke videre eller undersøke alternative perspektiver. Hvis elevene følger opp utfordringen, kan det bli et «turning point» i utforskningsprosessen og kanskje lede til nye oppdagelser.

Evaluering kan ta mange former også mellom lærer og elever. Elevene søker ofte tilbakemelding på om svaret deres er rett eller galt, men i en utforskende setting der man skal oppfordre elevene til å forklare og begrunne svarene sine er ikke dette nødvendigvis den beste måten for evaluering. Elevene bør oppfordres til å evaluere seg selv, både når det gjelder resultater og læringsprosess. von Renesse og Ecke (2015) mener også at utforskende arbeidsmåter i matematikk kan innebære en ny og ukomfortabel situasjon for elevene, og ofte er det like viktig med emosjonell støtte og bekreftelse. Dette kan oppnås ved at læreren viser at han verdsetter elevenes svar, han har tro på at elevene kan få det til og roser dem for innsats og utholdenhet.

Dialogisk læring defineres som læring som skjer gjennom utforskende samarbeid, og det er en læringsprosess som er rik på ulike dialogiske handlinger, i ulike kombinasjoner. IC-modellen er altså en indikator på dialogisk læring. Dialogisk læring kan bare oppstå i et utforskende læringsmiljø, og det ser ut til å ha en stor påvirkning for mulighetene til å komme fram til ny innsikt sammen. Når dialog var midlertidig fraværende, eller erstattet med for eksempel gjetting eller å insistere på sitt syn, virket det som elevene sto fast i oppgaven.

Alrø og Skovsmose (2004a) hevder at dialogisk læring, med sine utforskende og reflekterende kvaliteter, er viktig for å støtte kritisk læring i matematikk. Dette blir sett på som viktig for å utdanne individer som kan delta på en god måte i demokrati og samfunn, og er helt i tråd med prinsipper for IBL.

En annen, mer konkret effekt av å la elevene få trening i dialog, er at de blir flinkere til å bruke språket effektivt som et verktøy i å løse problemer sammen (Mercer & Sams, 2006). Det vil også bedre deres individuelle læring og konseptuelle forståelse i matematikk.

4. Metode

For å besvare forskningsspørsmålene mine har jeg valgt en kvalitativ metode, og i dette kapittelet vil jeg beskrive hvorfor casestudie er en tilnærming som passer mine forskningsspørsmål. Jeg vil deretter gi en beskrivelse av undervisningsoppleggene og oppgavene som ble brukt, og begrunne disse ut i fra teori. Jeg vil diskutere utvelgelsen av elever, og observasjon som metode for datainnsamling. Til slutt vil jeg beskrive hvordan jeg har analysert datamaterialet mitt.

4.1 Case som forskningstilnærming

Forskning i skolen benytter seg stort sett av samfunnsvitenskapelige forskningsmetoder. Vi vil ha informasjon om den sosiale virkeligheten vi finner i skolen, en hverdagsvirkelighet full av samhandling mellom mennesker (Christoffersen & Johannessen, 2012). I min studie ønsker jeg å beskrive en sosial læringssituasjon, og se på de samtalene som oppstår mellom elever når de jobber på en utforskende måte. Jeg vil finne mening og tolke det elevene sier og gjør, derfor kan kvalitative metoder passe godt (Denzin & Lincoln, 2000).

Jeg har valgt casestudie som forskningsdesign. I følge Eilertsen (2013) er casestudiers viktigste fortrinn en situasjonsbestemt eller kontekstuell forståelse av det som undersøkes. En casestudie er en empirisk undersøkelse som utforsker et fenomen i dybden og i sin virkelighetsnære kontekst. Når jeg vil undersøke samtaler mellom elever, så er dette i en kontekst der elevene arbeider utforskende, og det er en del av algebraundervisningen i en gjennomsnittlig norsk 8.klasse der elevene har ulike bakgrunner, forutsetninger og faglig nivå. Alt dette er viktig for å forstå og diskutere det som skjer. Casestudier knyttet til utvikling og utprøving, som for eksempel utforskende arbeidsmåter i algebraundervisning, har særlig potensial til å bidra til forståelse av både det aktuelle tiltaket samt de kontekstuelle rammene de inngår i (Eilertsen, 2013).

En casestudie består av et «subjekt» - enheten man studerer, og et analytisk rammeverk (Thomas, 2011). Det holder ikke bare med en ren beskrivelse av subjektet, vi trenger et teoretisk fokus for å kunne tolke det som skjer. Det er først da casen blir interessant, og kan si noe om hva som er spesielt med denne saken i forhold til andre saker, hva som er fokus og budskap. Jeg vil beskrive mitt analytiske rammeverk i avsnitt **4.5 Fremgangsmåte for analyse**.

4.2 DESIGN AV OPPGAVER OG UNDERVISNINGSOPPLEGG

Som beskrevet i avsnitt **2.3 Overgangen fra aritmetikk til algebra**, mener mange at generalisering er en god introduksjon til algebra (ulike kilder fra algebrakapitlet), og jeg ville derfor gjerne lage et utforskende undervisningsopplegg rundt dette. Det finnes ulike innfallsvinkler til generalisering, men noe av det mest konkrete for elevene er å jobbe med generalisering av mønstre ved hjelp av figurer. Lannin (2005) kaller det «patterning activities». På norsk kaller vi det gjerne figurtall. Figurtall er tallrekker som forandrer seg etter et bestemt mønster, og som kan representeres geometrisk (Karlsen, 2014).

En typisk figurtalloppgave har en kontekst, en eller annen figur, som vokser etter et bestemt mønster. Elevene skal finne denne sammenhengen og lage en regel. Regelen skal kunne brukes til å regne ut et hvilket som helst tilfelle av mønsteret (Lannin, 2005). I denne sammenhengen, der generaliseringsoppgaver brukes som introduksjon til temaet algebra, er det viktig at elevene får jobbe litt med å uttrykke regelen som et regneuttrykk eller formel med en variabel. På den måten blir de kanskje bevisst at regneuttrykk og variabler har en hensikt, det er noe som viser en matematisk sammenheng. Det er ikke bare tilfeldige tall og bokstaver som skal gjøres om, slik mange «tradisjonelle» algebraoppgaver er.

Det blir også vektlagt, blant annet i de nye kjerneelementene i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2018) at elevene selv må få utforske mønsteret og sammenhengene i generaliseringsoppgaver. Utforskende arbeidsmåter er derfor rammen for oppleggene mine, og jeg vil begrunne dem spesielt i Lithner (2017) sin teori om kreativt resonnement. Med oppgaver som fremmer kreativt resonnement, CMR-oppgaver, skal elevene finne en løsningsmetode selv og de skal være i stand til å begrunne denne med matematisk forankrede argumenter. De skal ikke bli fortalt hvordan oppgaven skal løses, hverken av lærer, medelever eller eksempler, som det ofte er tilfelle i mer tradisjonell matematikkundervisning. Sidenvall, Lithner og Jäder (2015) har undersøkt elever i videregående skole som løser oppgaver fra læreboka. De fant at når elever i tradisjonelle klasserom jobber sammen, involverer det vanligvis å kopiere hverandres løsning. Samarbeidet og samtalene som oppstod under denne type arbeid førte ikke nødvendigvis til matematiske forankrede resonnementer og dypere læring.

Generaliseringsoppgavene bør altså gis i en ramme som oppfordrer til både utforsking, kreativt resonnement og dialog. Oppgavene bør være utfordrende nok til at elevene må strekke seg og prestere like over sitt eksisterende nivå, på den måten får de gradvis utvikle forståelse og får mulighet til dybdelæring (Schoenfeld, 2017).

I forkant hadde jeg et par samtaler med lærerne på det aktuelle klassetrinnet, for å høre hva de tenkte om oppstarten av temaet algebra. De ville gjerne ha en uke med algebra først, før vi brukte mine opplegg. Da fikk de gått gjennom noen grunnleggende prinsipper, som hva variabler er, hvorfor vi bruker bokstaver i et regneuttrykk, at vi kan sette inn ulike tall for variablene i et uttrykk osv. Men de var enige i at deretter var det fint å bruke ulike generaliseringsoppgaver. Jeg lagde forslag til noen undervisningsopplegg, og to oppgaver ble valgt ut. De vil jeg presentere her.

TERNINGOPPGAVEN

Den ene oppgaven handlet om terninger som skulle stables oppå hverandre. Elevene skulle finne ut hvor mange synlige sider (terningflater) terningtårnet hadde etter hvert som det vokste. Denne oppgaven ble hentet fra læreboka deres, Nummer 8 (Hole, Jensen, Tellefsen & Wallace, 2014), og justert litt. Jeg har også sett på oppgavene til Lannin (2005), og brukt noen av de samme tallene i mine spørsmål.

Oppgave: Stable terninger

Dere får noen terninger som dere kan bruke som støtte til å svare på de første spørsmålene.

Forklar for hverandre hvordan dere tenker. Bruk arket til å kladde/lage figurer/skrive forklaring osv.

a) *Hvor mange sider er synlige når vi stabler 3 terninger oppå hverandre? Forklar for hverandre.*
b) *Hvor mange sider er synlige når vi stabler 4 terninger oppå hverandre? Forklar for hverandre.*
c) *Hvor mange sider er synlige når vi stabler 5 terninger oppå hverandre? Forklar for hverandre.*
d) *Hvor mange sider er synlige når vi stabler 10 terninger oppå hverandre? Forklar for hverandre.*
e) *Hvor mange sider er synlige når vi stabler 20 terninger oppå hverandre? Forklar for hverandre.*
f) *Hvor mange sider er synlige hvis vi har* n *terninger? Kan dere finne et regneuttrykk eller formel for dette? Forklar hvordan dere tenker.*
g) *Hvor mange terninger har du hvis 121 sider er synlige? Forklar hvordan dere tenker.*

Målet med generaliseringsoppgaver er at elevene skal komme fram til et generelt uttrykk for sammenhengen mellom for eksempel antall terninger og antall synlige sider som her. Lithner (2017) hevder at det er bedre med flere små steg slik at elevene blir ledet mot det man vil de skal oppdage, enn ett stort som kan være vanskelig å fatte for elevene. Forskning viser også at guidet utforskning gir best resultater (Bruder & Prescott, 2013). For å lede elevene på riktig vei slik at de oppdaget et mønster som de deretter kunne bruke til å generalisere, valgte jeg å ha deloppgaver som gradvis spurte etter flere terninger. Jeg begynte med tre terninger (en og to terninger ble vist som eksempler i felles introduksjon til oppgaven), og økte til fire og fem terninger slik at elevene skulle oppdage hvor mange synlige sider det økte med for hver gang. Deretter 10 og 20 terninger, før jeg spurte om et regneuttrykk for *n* terninger. Jeg introduserte da elevene for et symbol, *n*, fordi det kan fasilitere elevenes refleksjoner rundt ukjente størrelser (Carraher et al., 2006).

Elevene skulle jobbe sammen i par (begrunnelse for at elevene ble organisert i par kommer jeg inn på i avsnitt 4.3 Utvelgelse av klasse og elever). Hvert par fikk utdelt fem terninger. Dette ble gjort for at elevene skulle kunne fysisk telle antall sider i de første deloppgavene. Noen elever ville kanskje se med en gang at det økte med fire synlige sider for hver terning, mens andre kanskje ville trenge terningene for å sjekke at det de trodde stemte. Andre elever igjen ville kanskje ha problemer med å finne noen svar hvis de ikke fikk telle, men da fikk disse elevene i hvert fall mulighet til å svare på de første deloppgavene. Når elevene kom til 10 og 20 terninger, måtte de se for seg hvordan det ble. Jeg ville ikke at telling skulle være en mulig strategi for alle deloppgavene, derfor fikk de ikke mer enn fem terninger.

Deloppgave g) er hentet fra Lannin(2005). Her er spørsmålet snudd, vi vet antall sider og skal finne antall terninger. Lannin begrunnet ikke denne oppgaven spesielt, men jeg tok den med for å bruke den som en sjekk på om elevene klarer å tenke motsatt vei. Dette vil i så fall antyde en kontekstuell forståelse, eller en evne til å overføre det de har lært til en ny situasjon.

Elevene blir hele tiden oppfordret til å forklare for hverandre hvordan de tenker. I tillegg er det ingen kjent løsningsmetode for elevene. De må utforske løsningsstrategier selv. Jeg vil derfor hevde at dette er en oppgave som oppfordrer til utforsking og dialog.

Fyrstikkoppgaven

Den andre oppgaven handlet om fyrstikker/ispinner som de skulle bruke til å lage økende antall ruter i en rad bortover, både Lannin (2005) og Lithner (2017) har lignende eksempler i sine artikler.

Jeg skrev først oppgaven med fyrstikker, men i et planleggingsmøte med lærerne endret jeg oppgaveteksten til ispinner fordi de hadde en stor pose de kunne bruke i gjennomføringen av opplegget. Da jeg kom til timen for gjennomføring hadde læreren likevel funnet fram fyrstikker. Derfor brukes fyrstikker og ispinner litt om hverandre i teksten, både her og i resultatkapittelet.

Oppgave: Ruter med ispinner

Dere får noen ispinner som dere kan bruke som støtte til å svare på de første spørsmålene.

Forklar for hverandre hvordan dere tenker. Bruk arket til å kladde/lage figurer/skrive forklaring osv.

a) *Hvor mange ispinner trengs det for å lage 4 ruter? Forklar for hverandre.*
b) *Hvor mange ispinner trengs det for å lage 5 ruter? Forklar for hverandre.*
c) *Hvor mange ispinner trengs det for å lage 10 ruter? Forklar for hverandre.*
d) *Hvor mange ispinner trengs det for å lage 50 ruter? Forklar for hverandre.*
e) *Hvor mange ispinner trenger du for å lage* n *ruter? Kan dere finne et regneuttrykk eller formel for dette? Forklar hvordan dere tenker.*
f) *Hvor mange ruter får du hvis du har 193 ispinner? Forklar hvordan dere tenker.*

Ordlyden i denne oppgaven ligner på den andre, og flere av begrunnelsene for valg som er tatt er de samme, derfor gjentar jeg ikke alt her. Elevene starter her med fire ruter, både to og tre ruter ble vist som eksempler på oppgavearket. Elevene fikk utdelt nok fyrstikker til fem ruter, og etter dette var det meningen at de måtte bruke andre strategier enn telling. Men jeg tenkte ikke på at det var ganske lett å tegne opp figurer på arket, og noen av elevene brukte i hvert fall dette til å sjekke at svarene de tenkte på var riktige.

Deloppgave f) er også inspirert av Lannin (2005), og ble tatt med som en sjekk på om elevene klarte å bruke det de har lært og tenke motsatt vei. Og elevene ble også her oppfordret til å forklare for hverandre hvordan de tenker.

Lærerne synes elevene burde starte med terningoppgaven, og deretter få fyrstikkoppgaven. De mente det virket lettest for elevene. De var også vant til å koordinere slik at de hadde ganske likt opplegg i de to klassene til enhver tid. Vi ble derfor enige om at begge klassene brukte terningoppgaven den første dagen da jeg filmet i den ene klassen. Og så brukte begge klassene fyrstikkoppgaven den andre dagen da jeg filmet i den andre klassen. Men oppgavene er såpass like i ordlyd at jeg syntes ikke det gjorde noe. De kan få fram de samme generaliseringsstrategiene, og begge oppfordrer til utforsking og dialog.

Elevene fikk hvert sitt oppgaveark, slik at alle skulle delta og skrive litt. Jeg snakket også med lærerne om hva som menes med utforskende arbeidsmåter, og at det var viktig å få fram elevenes egne tanker og framgangsmåter. De fikk et ark med tips til spørsmål de kunne stille elevene mens de jobbet i par med oppgaven, og hvordan de skulle få i gang en god helklassediskusjon etterpå (se vedlegg 1). Ellers la jeg ingen store føringer for verken oppstart og introduksjon av oppgaven eller oppsummering/helklassediskusjon til slutt. Jeg ville at lærerne skulle gjøre dette på sin måte, slik at det ble en naturlig setting for elevene. Dermed ville min «inngripen» bli så liten som mulig, og både lærere og elever ville forhåpentligvis snakke sammen på en naturlig og uanstrengt måte. Jeg synes dette var viktig når jeg skulle observere samtaler i klasserommet.

4.3 UTVELGELSE AV KLASSER OG ELEVER

Jeg har fulgt to 8.klasser ved en ungdomsskole i Akershus. Jeg ville gjerne ha 8.klasse, siden det er her algebraundervisningen starter for alvor. Og oppstarten av algebratemaet deres passet godt med min tidsplan. Tanken var også at kunne være fint å bygge videre på disse generaliseringsoppgavene i algebraundervisningen, noe lærerne også uttrykte at de ville gjøre.

Vi diskuterte hvordan elevene skulle organiseres, de hadde tidligere brukt både hele klasser og nivådelte grupper på tvers av klassene. Mitt ønske var at elevene satt i par, gjerne med noen som var på omtrent samme nivå. Tre eller flere elever gir mulighet for at noen utelates fra dialogen. Men med to på samme nivå håpet jeg det var størst sjanse for at elevene fant ut av ting sammen og støttet hverandres læring uten at den ene overkjørte den andre (Rabel & Wooldridge, 2013). Samtidig tenkte vi at det kunne være fint med elever på ulikt nivå når man skal ha helklassediskusjon til slutt, kanskje det da kan komme fram ulike synspunkter. Vi ble derfor enige om å ha elevene i sine vanlige klasser, men at de skulle få en fast læringspartner på samme nivå, og plasseres i par i klasserommet.

Noe av det viktigste for å få datamateriale om dialog, er at elevene faktisk snakker sammen. Jeg fikk hjelp fra lærerne til å velge ut elevpar som ikke skulle være for stille. Siden dette er en oppgave uten noe spesielt fokus på hverken høytpresterende eller lavtpresterende elever, ville jeg også unngå de elevene med best resultater og de med svakest resultater i matematikk, og heller se på de som fordelte seg rundt et middels nivå. Jeg vil gi en kort beskrivelse av klassene og elevene slik jeg oppfattet dem og ut fra informasjon jeg fikk fra lærerne.

I den ene klassen var det 26 elever. Det var en ganske urolig og høylytt klasse, men i matematikk hadde de to lærere til rådighet og jeg opplevde at de fleste jobbet godt. Det var en jevn fordeling av elever på ulike nivåer. Lærerne oppfordret stadig elevene til å forklare hvordan de tenkte, både i samtaler med elevpar og i hel klasse, og de fremhevet elevenes ulike løsningsmåter. I denne klassen observerte jeg to par. Det ene paret, **Ida** og **Anna,** var rolige og pliktoppfyllende, og jobbet vanligvis godt i mattetimene. Begge var på et middels nivå i matte, men nærmere det nedre sjiktet av middels. Selv om de ikke kunne vise til de beste resultatene, ga de sjelden opp, og var opptatt av å gjøre sitt beste.

Det andre paret i denne klassen, en gutt og ei jente, var også på ganske likt nivå i matematikk. Likevel fungerte de ikke godt sammen. Den ene overkjørte den andre, og de fikk aldri den gode kontakten som trengs i en dialog. Jeg har derfor valgt å utelate samtalen deres fra resultatene (se også avsnitt 4.5 angående analyseprosessen som førte til dette valget), og heller fokusere på hva som kan skje i situasjoner der elevene har en god dialog.

Den andre klassen var på samme størrelse, men her var det mange elever som presterte høyt i matematikk, og det var mange i den andre enden av skalaen. Ofte var flere av disse ute av klassen med egne undervisningsgrupper. Denne klassen hadde også to lærere til rådighet, men i den timen jeg observerte, var bare den ene til stede. I denne klassen jeg filmet ble ikke utvalget av elever som jeg hadde tenkt. Jeg hadde snakket med den ene læreren på forhånd om hvilke elever som kunne passe, med tanke på nivå og at de skulle snakke greit sammen. Men når dagen kom, var ikke denne læreren til stede. Og på grunn av sykdom og manglende samtykkeskjema fra noen av elevene, fikk jeg ikke filmet de jeg hadde planlagt. Jeg endte opp (mer eller mindre tilfeldig) med å filme en gruppe på tre elever. Disse tre var i tillegg på ulike nivåer i matte. Denne gruppen ga meg likevel interessante resultater som jeg kanskje ikke hadde fått dersom elevene hadde vært på samme nivå. Elever på et svakt nivå som samarbeider med elever på et høyt nivå, er de som kanskje har mest å hente på samarbeid (Rabel & Wooldridge, 2013).

Emma var stille og forsiktig. Hun hadde ganske gode resultater i matematikk, men overkjørte på ingen måte de andre i gruppa. Hun kunne nesten virke litt usikker på egne resultater i blant, og dobbeltsjekket ofte. Hun var veldig inkluderende, særlig overfor Jakob. Hun tok de andres innspill på alvor, og var opptatt av å vise og forklare. **Jakob** hadde svake resultater i matematikk, og hadde ikke helt troen på sine egne ferdigheter. Jeg har bare sett han jobbe i gruppa, ikke på egen hånd, og der fremstod han som en glad og livlig gutt. Han kom stadig med innspill og ville gjerne bidra, selv om han ofte viste mistro til egne forslag. **Leo** var på middels nivå i matematikk. I gruppa var han stille og hørte mest på de andre.

4.4 OBSERVASJON

Observasjon egner seg godt når man ønsker direkte tilgang til det man undersøker (Christoffersen & Johannessen, 2012). For eksempel samhandling og samtaler mellom elever i klasserommet som jeg ønsker å se på. Å være til stede i en slik setting er den eneste måten å få kunnskap om hva som faktisk skjer. Observasjon gir informasjon på flere nivåer, både om det som observeres direkte, og om forskerens fortolkning av å være i settingen. Forskeren vil alltid komme med sitt perspektiv (som påvirkes av kjønn, alder, klasse, etnisitet, kultur, verdier, tanker, kunnskap, erfaring etc.), og vil møte verden med dette (Denzin & Lincoln, 2000). Det finnes ingen objektive observasjoner, all forskning er tolkende, guidet av et sett med tanker og verdier om hvordan verden bør forstås og studeres. Dette gjelder også meg som observatør, og det er viktig å ikke glemme.

Jeg deltok ikke i undervisningen, da det ville blitt vanskelig både å undervise og observere på samme tid. I tillegg unngår jeg noen «researcher bias» der mitt perspektiv påvirker det som skjer. Jeg kan derfor betegnes som en ikke-deltakende observatør (Christoffersen & Johannessen, 2012). Det betyr ikke at jeg ikke påvirket det som skjedde i klasserommet. Jeg var innom klassene en gang før jeg skulle observere, slik at elevene skulle bli vant til meg. Jeg fortalte litt om meg selv og prosjektet mitt, og at jeg skulle komme tilbake og filme noen av dem, slik at de var forberedt på hva som skulle skje. Elevene virket avslappet i forhold til videokameraet, likevel er det sannsynlig at det påvirker elevenes samtaler og interaksjon noe.

Valg av setting for observasjonen er viktig (Christoffersen & Johannessen, 2012). Det kan være snakk om den *fysiske settingen,* som et klasseroms utforming og organisering. Men også *menneskelig setting,* som organisering og inndeling av elevene, ulike kjennetegn på de som observeres (kjønn, klasse etc.). Min studie foregikk i et gjennomsnittlig norsk klasserom, i en 8. klasse med både gutter og jenter på alle faglige nivåer. Elevene ble organisert i par, som begrunnet tidligere.

Du har også den *interaktive settingen*, det vil si samhandlinger som forekommer i settingen. I tillegg kommer *programsettingen*, som pedagogisk plattform, pensum og organisering av undervisningen. Elevene jobbet på en utforskende måte med generaliseringsoppgaver, det ble lagt til rette for dialog, og elevene ble oppfordret til å forklare for hverandre hvordan de tenkte. Alt dette er begrunnet i teori om overgangen fra aritmetikk til algebra, og det å legge til rette for dybdelæring.

Man må også ta et valg om observasjonen skal foregå i en naturlig eller arrangert setting (Christoffersen & Johannessen, 2012). Jeg mener studien min kommer nærmest en *naturlig setting*. Jeg har observert samtaler mellom elever slik de oppstår i et vanlig klasserom. Jeg har ikke lagt føringer for hvordan elevene skal oppføre seg og snakke sammen, de er kun blitt oppfordret til å forklare for hverandre hvordan de tenker. Lærerne ble bedt om å gjøre undervisningsopplegget til sitt eget, og forklare ting på sin måte. De ble også oppfordret til å gå innom elevparene som ble filmet, og snakke med dem som de ville ha gjort ellers. Jeg hadde på forhånd gitt dem noen tips til spørsmål det kunne være lurt å stille elevene. Fordelen med en naturlig setting er å se hvordan utforskende arbeidsmåter og dialog fungerer i en ekte undervisningssituasjon, og hvilke tegn på dybdelæring det får fram. Læring foregår i et sosialt fellesskap i klasserommet, og jeg synes det er en fordel at den interaksjonen som oppstår, og som er grunnlaget for mine data, er så uanstrengt og naturlig som mulig.

Jeg har brukt videoopptak for å dokumentere det som skjer i klasserommet. Video er et viktig instrument for å samle data i form av både lyd og bilde (Powell, Francisco & Maher, 2003). Det kan fange rike og komplekse interaksjoner, både tale og ikke-verbale handlinger, på en helt annen måte enn man klarer på egen hånd. Og det er selvfølgelig en stor fordel å kunne gå tilbake og se episoder igjen og igjen. Jeg filmet elevene mens de jobbet i par eller små grupper med generaliseringsoppgaver, også når lærerne kom innom. Jeg filmet også helklassediskusjonene til slutt i begge timene, i tilfelle noen fra elevgruppene jeg observerte sa noe som kunne belyse dialogen dem imellom. Det gjorde de imidlertid ikke, og dette videomateriale er ikke med i analysen.

4.5 FRAMGANGSMÅTE FOR ANALYSE

Jeg har tatt utgangspunkt i Powell et al. (2003) sin fremgangsmåte for analyse av videomateriale. Den består av sju faser som påvirker hverandre og ikke nødvendigvis er lineære.

1. Se oppmerksomt på videomaterialet
2. Beskrive videomaterialet
3. Identifisere kritiske øyeblikk
4. Transkribere
5. Kode
6. Konstruere en storyline
7. Komponere et narrativ

Jeg transkriberte alle delene av samtalene som var relevante for oppgaveløsing, det vil si der de prøver å løse oppgaven eller snakker om hva de har gjort. Jeg tok for meg deloppgave for deloppgave, og gikk nøye gjennom for å kode ihht IC-modellen. Jeg oppdaget fort at det ikke var så lett å kategorisere utdrag fra samtalene etter denne modellen. Som Alrø og Skovsmose (2004b) selv skriver, er det ikke meningen at elementene i modellen skal være kategorier med klare skiller. Elementene viser heller ulike aspekter ved den samme samtalen. Dette gjorde kodingen vanskelig, og jeg valgte derfor å ikke bruke alle elementene fra IC-modellen. Jeg valgte for det første å ikke se etter *tenke høyt* og *reformulering*, da disse elementene gjerne brukes i sammenheng med mange av de andre elementene, og det var vanskelig å knytte dem til tydelige kategorier. Jeg valgte også å se etter *kontakt* i en egen kodingsrunde, da dette ligger til grunn for dialog, og må være til stede sammen med de andre elementene for å kalle dem dialogiske handlinger. Til slutt valgte jeg å slå sammen *lokalisere* og *utfordre*, da disse har en del fellestrekk, som jeg beskriver under. Jeg har prøvd å lage tydeligere skiller mellom de resterende elementene, og jeg vil gi en beskrivelse av hva jeg legger i de ulike kategoriene. Tabell 4 viser en oversikt over kodingsprosessen min.

Koding 1 **Kontakt**	Koding 2 **Dialogisk handling**	Koding 3 **Generaliseringsstrategi**
Kontakt	Lete	Telle
	Identifisere	Rekursiv
	Argumentere	Hel-objekt
	Evaluere	Gjette og sjekke
		Kontekstuell
Ikke kontakt		

Tabell 4 Kodesystemet jeg har brukt

Kontakt

Kontakt må være til stede for at elevene skal kunne samarbeide under utforskningsprosessen (Alrø & Skovsmose, 2004a). Det er en forutsetning for at de andre elementene fra IC-modellen skal gjelde som dialogiske handlinger. Det handler om blant annet gjensidig oppmerksomhet, respekt, ansvar, bekreftelse og støtte.

Jeg har derfor vurdert om kontakt ligger til grunn i alle episodene av samtalene. Dette ble gjort som første runde av kodingsprosessen, og alle episodene ble kodet som enten kontakt eller ikke kontakt. I de episodene der det er kontakt mellom elevene, gikk jeg videre og kodet etter fire utvalgte kategorier, hentet fra IC-modellen.

Lete

Utforskende spørsmål, åpenhet og undring hører til det Alrø og Skovsmose (2004a) kaller lokalisering. Elevene møter en ny oppgave eller utfordring, og utforsker måter å løse dem på. De leter etter en løsningsstrategi, og prøver ut ting i fellesskap. I en dialog mellom lærer og elever, kan læreren også lokalisere elevenes tanker, ideer og forståelse, i den hensikt å bygge videre på disse.

Å utfordre til å tenke nytt, og undersøke nye eller alternative løsningsmetoder er beslektet med det å lokalisere. Jeg har derfor valgt å slå sammen disse til en kategori jeg kaller ***lete***. Ofte er det læreren som utfordrer elevene til å tenke på en litt annen måte.

Identifisere

I denne kategorien kommer identifisering av matematiske ideer, prinsipper eller algoritmer. Her legger jeg alle utsagn der elevene oppdager noe; matematiske sammenhenger eller hvordan de skal regne ut et svar for eksempel.

Argumentere

Argumentere betyr å si det man mener, men (i en utforskende sammenheng) samtidig være villig til å undersøke sine egne perspektiver og egen forståelse. I denne kategorien legger jeg alle forklaringer og argumenter («Fordi…») som elevene kommer med etter at de har identifisert en sammenheng eller algoritme. I noen tilfeller kommer argumentene i utsagnet rett før identifiseringen, som forklaringer som direkte leder fram til en oppdagelse. Disse er også med i denne kategorien. Argumenter kan være predikative eller verifiserende (Lithner, 2008), men jeg har ikke sett etter dette når jeg har kodet.

Evaluere

I denne kategorien kommer alle slags tanker om hvordan elevene har jobbet og løst oppgavene. Det kan være om de tror noe er rett eller galt, eller om prosessen. Og det kan være fra elevene selv eller lærer.

Generaliseringsstrategier

I tredje runde kodet jeg datamateriale ut fra hvilke generaliseringsstrategier elevene bruker når de løser oppgavene. Jeg forklarte disse strategiene i avsnitt **2.4 Generaliserings-strategier ved mønsteraktiviteter**, og gjentar derfor bare tabellen her.

Strategi	***Beskrivelse***
Telle	Tegne en figur eller lage en modell som representerer situasjonen, for så å telle det man ønsker å finne ut.
Rekursiv	Bygge på tidligere trinn i sekvensen for å bestemme det neste. For eksempel å legge til tre fyrstikker for å lage en ny rute i sekvensen.
Helobjekt	Bruke en liten enhet til å lage en større enhet ved multiplisering. For eksempel doble antall synlige sider når man dobler antall terninger. Med eller uten en passende justering for over-telling.
Gjette og sjekke	Gjette en regel uten å tenke på hvorfor den kan virke. Dette innebærer vanligvis å eksperimentere med ulike operasjoner og tall oppgitt i oppgaven.
Kontekstuell	Konstruere en regel basert på informasjonen i situasjonen, og relatere den til en måte å telle på.

Tabell 5 Generaliseringsstrategier. Kilde: Lannin (2005), min oversettelse og eksempler.

Lannin (2005) er opptatt av at generaliseringsstrategiene må sees i sammenheng med begrunnelsene som gis. Det er derfor interessant å se på elevenes *argumenter* for å bruke de ulike strategiene. Samtidig kan *lete* og *identifisere*-kategoriene (under dialogiske handlinger) si noe om prosessen med å komme fram til de ulike strategiene.

Etter å ha kodet alle transkriptene, valgte jeg ut noen utdrag som jeg analyserer nærmere i kapittel **5 Resultater.** Jeg har valgt ut disse fordi de viser eksempler på og belyser ulike sider ved dialog.

Utdrag 1 og 2 er valgt ut fordi de viser den gode kontakten mellom Ida og Anna, og er rike på dialogiske handlinger.

Utdrag 3 og 4 er valgt fordi de viser hvordan elevene kom fram til det generelle uttrykket, et viktig steg i generaliseringen. Og forklaringer og argumenter rundt dette er viktig for å kunne svare på hvordan dialog bidrar til generalisering.

I utdrag 3 ser vi i tillegg eksempel på dialog mellom lærer og elever, det er derfor viktig for å belyse forskningsspørsmålet mitt om lærerens rolle i dialog med små elevgrupper. Utdrag 6 er også valgt ut fordi det viser dialog mellom lærer og elevgruppen.

Utdrag 5 er valgt ut fordi det viser et godt eksempel på evaluering som dialogisk handling. I tillegg er det med på å gi et større bilde av hvordan Jakobs følelser og holdninger utvikler seg i arbeidet med oppgaven.

5. Resultater

5.1 Ida og Anna – terningoppgaven

I økten der Ida og Anna ble filmet, jobbet de med terningoppgaven. De skulle finne antall synlige sider etter hvert som terninger ble stablet oppå hverandre. Jeg vil gi en beskrivelse av arbeidet deres med å løse oppgaven, generaliseringsstragier de bruker, og dialogen underveis. Jeg vil komme med utdrag fra samtalen deres som viser eksempler på ulike dialogiske handlinger.

I den første deloppgaven skal de finne antall synlige sider når tre terninger er stablet oppå hverandre. De har akkurat sett eksempler med en og to terninger som læreren og andre elever har demonstrert, og de teller antall sider på samme måte som i disse eksemplene.

UTDRAG 1:

Anna: Hvor mange sider er synlige når vi stabler tre terninger oppå hverandre?

Ida: Det blir vel det samme som de sa i sta det, når vi hadde to?

Anna: Ja, blir det ikke det da? [Teller på terningene.] Bare en, to, tre, …, 13?

Ida: Ja.

Anna: Fordi hvis vi ikke løfter de [terningene] opp vet du.

Ida: Mm. Det blir jo liksom en [side] som blir borte og så ja… Skal vi skrive bare 13 da eller?

Ida og Anna kommer raskt i ***kontakt***, og den gode tonen holdes gjennom hele oppgaven. Dette første utdraget har jeg valgt fordi det er et godt eksempel på relasjonen mellom dem. Samtalen er preget av åpenhet og en spørrende holdning, og de er opptatt av å lytte til hverandre og søker bekreftelse hos hverandre. Dette ser vi tydelig gjennom spørsmål som «Ja, blir det ikke det da?» og «Skal vi bare skrive 13 da eller?». Ved å uttrykke tankene sine som spørsmål, i stedet for påstander, inviterer de hverandre til å bidra i utforskning av oppgaven. De er klare for å løse dette sammen.

Utforskende spørsmål, åpenhet og undring som vi ser i første del av utdraget, er også del av en ***leteprosess***. I fellesskap prøver de ut strategien med å telle antall sider de ser, på samme måte som det ble gjort i eksempler på tavla, og de blir enige om at de kommer til 13. Det kan virke banalt at det å telle synlige sider er en strategi som må utforskes på denne måten, men for disse jentene virket det viktig å slå fast hvordan man skulle telle. Lithner (2017) presiserer også at CMR-oppgaver også kan innebære elementære resonnementer. Annas ***argument*** «Fordi hvis vi ikke løfter opp terningene» blir brukt for å verifisere at det stemmer med 13 synlige sider så lenge de ikke teller med de sidene som er «gjemt» av andre terninger.

De er opptatt av å forklare at terningene *ikke* kan løftes opp, og dermed blir en side borte når du setter en ny terning oppå. Dette med tellemåten, og at den øverste siden blir borte når du setter en ny terning oppå, blir for dem et viktig prinsipp som de ***identifiserer*** i siste del av utdraget. De bruker lang tid på å skrive ned dette som en forklaring på oppgavearket sitt, og søker også bekreftelse fra lærer på om de forklarer det på en riktig måte.

Ida og Anna bruker ***telling*** som strategi for å finne antall synlige sider. Dette var første deloppgave, og man kan ikke forvente at de har oppdaget noe mønster enda for hvordan antall sider øker med antall terninger. Med kun tre terninger var det heller ingen stor oppgave å telle. Men allerede fra neste deloppgave, der de skal finne antall synlige sider med fire terninger oppå hverandre, kan vi se at de begynner å lete etter en annen måte å finne svaret på. De oppdager da den ***rekursive*** strategien; de ser et mønster der man kan legge til fire hver gang man setter på en ny terning. Dette er starten på å oppdage en matematisk sammenheng som igjen kan lede til generalisering.

For å finne antall synlige sider ved fem terninger, velger de også den rekursive strategien. Men på neste deloppgave igjen, skal de gå fra fem til ti terninger. Da oppdager de enda en ny generaliseringsstrategi, og jeg har valgt å trekke fram denne samtalen fordi den er rik på dialogiske handlinger.

<u>UTDRAG 2:</u>

> *Anna:* Hvor mange sider er synlige når vi stabler 10 terninger oppå hverandre? Vi trenger litt flere [terninger]. [Rekker opp hånda, får etter hvert svar fra lærer at de skal se for seg hva som skjer.] Da blir det jo 21 pluss 21, det blir 42.
>
> *Ida*: 42?
>
> *Anna*: Ja, for hvis det er fem [terninger] til. Nei. [Ser usikker ut.]
>
> *Ida*: Men sånn vi har hatt nå så har det ikke gått an å dele på to. Og 21 går ikke an å dele på to, men 42 går jo an å dele på to.
>
> *Anna*: Da må vi ta bort den ene sida da vet du. Da blir det jo…
>
> *Ida*: Da blir det 41.
>
> *Anna*: Mm.

Ida: Blir ikke det mer riktig da? Jo, 41.

Anna: Jo.

Vi kan også i dette utdraget se den gode ***kontakten*** mellom Ida og Anna. De lytter til hverandre og bygger videre på det den andre sier. Det er tydelig at de løser dette i fellesskap.

Anna foreslår å doble antall synlige sider når de dobler antall terninger fra fem til ti. Dette er en strategi som Lannin (2005) kaller ***helobjekt***. Det er enklere å gå direkte fra fem til ti terninger ved hjelp av multiplikasjon, enn å måtte legge til fire nye sider fem ganger. Etter som antall terninger øker, oppdager de altså at det trengs mer hensiktsmessige løsningsstrategier. Dette er en oppdagelse som kan støtte en generaliseringsprosess, elevene ser at det er et behov.

De tester altså strategien med å doble, de ***leter*** etter en løsningsmetode som gir mening for dem. Ida mistenker at det er noe som ikke stemmer helt. Hun har sett et mønster der alle svarene hittil ikke har gått an å dele på to (de har vært oddetall), og ***argumenterer*** for at 42 ikke kan være helt riktig siden det kan deles på to (det er et partall): «Men sånn vi har hatt nå så har det ikke gått an å dele på to. Og 21 går ikke an å dele på to, men 42 går jo an å dele på to». Argumentet hennes er ikke uttrykt som et aktivt forsøk på å overbevise Anna. I stedet sier Ida sin mening på en måte som åpner opp for videre utforskning av emnet, og for at Anna skal komme med en respons. Dette er helt i tråd med hvordan Alrø og Skovsmose (2004b) mener at et argument bør være i en setting med utforskende samarbeid.

Anna skjønner da at de må trekke fra en side for at det skal bli riktig. Når nye terninger blir plassert oppå terningene de har fra før, vil den øverste siden ikke være synlig lenger, akkurat som de var opptatt av tidligere. Ida er med på dette med en gang, og de er enige om at svaret må bli 41. Sammen har de ***identifisert*** en løsningsmetode, en algoritme for hvordan de skal finne antall synlige sider når antall terninger dobles. Til slutt ***evaluerer*** de svaret de har fått, de har en felles oppfatning av at svaret virker logisk. Algoritmen de fant i denne deloppgaven, der de først dobler antall sider og så trekker fra en, bruker de uten problemer i neste deloppgave der de går fra ti til 20 terninger.

Det siste utdraget fra Ida og Anna, er hentet fra deloppgaven der de skal finne et uttrykk for antall synlige sider ved n terninger. Ida skjønner fort at n betyr at vi ikke vet hvor mange terninger vi har, og da vet vi heller ikke hvor mange synlige sider vi har. De skal altså ikke komme fram til et tall-svar, men finne et uttrykk som sier noe om sammenhengen mellom terninger og sider, og hun finner et uttrykk som passer. Hun prøver å forklare for Anna hvordan hun tenker, men Anna er ikke helt med.

UTDRAG 3:

Anna: Ja. Jeg skjønte ikke helt jeg da men…

Ida: Ja, at vi bare ganger, siden vi har fire sider.

Anna: Ja.

Ida: Og så har vi n. Det er liksom vi vet ikke hvor mange vi har.

Anna: Fire ganger n.

Ida: Så da ganger vi det [sidene] med n. [Anna nikker.] Og så plusser vi det med en, som er toppen. Siden da vet vi ikke hva som er svaret, siden vi har n.

Anna: Ja

Ida: Nå prøvde jeg å være smart her. [Begge ler.]

…

Anna har fortsatt ikke helt forstått uttrykket, og de får hjelp av lærer.

…

Lærer: Kan du forklare for Anna hva du har tenkt?

Ida: Ja men jeg prøvde, men ho skjønte ikke hva jeg mente. Det jeg mente var jo at siden vi vet jo ikke hva n er…

Lærer: Nei.

Ida: Så da ganger vi det [n] med sidene, som er fire.

Lærer: Mm.

Ida: Så fire ganger n. Og så plusser du med toppen, som er en. Og da vet man fortsatt ikke hvor mange man har, men liksom…

Anna: Åja.

Lærer: Så n står for terninger. [Anna nikker.] Og hvis du har èn terning, så kan du sette inn èn der ikke sant? [Peker på uttrykket. Anna nikker.] Hvordan blir det da, hvis du regner ut det?

Anna: Fem.

Lærer: Ja. Stemmer det med den? [Peker på terningen.]

Anna: Ja. Åja…

Lærer: Hvis du prøver med to da? [Setter en terning til oppå.] Stemmer det nå?

Anna: Fire ganger to pluss en.

Lærer: Og det blir?

Anna: Ni.

Lærer: Stemmer det?

Anna: Ja.

Lærer: Ja. Da er det mye som tyder på at det kan stemme. Skjønte du hva Ida tenkte?

Anna: Ja, jeg gjorde det nå.

Ida og Anna er fortsatt i ***kontakt***. De har en gjensidig respekt, og tar på alvor at Anna ikke forstår uttrykket som Ida har funnet. Ida forklarer gjentatte ganger, og forklaringer på hvorfor en løsning er nådd blir av Lithner(2008) regnet som verifiserende ***argumenter***. De spør læreren om hjelp når Anna fortsatt ikke forstår, og de gir seg ikke før hun sier at hun skjønner hva Ida tenkte. Det vitner om at de begge føler et delt eierskap i arbeidet med oppgaven. Humor er også med på å opprettholde en god kontakt.

Læreren ber Ida forklare for Anna hvordan hun tenker. På den måten ***leter*** han etter Idas tanker og perspektiver. Han verdsetter hennes forklaring, og bygger videre på den, i stedet for å begynne å forklare selv. Dette er noe av essensen i en lærers rolle når det kommer til utforskende arbeidsmåter og dialog.

Læreren utfordrer så Anna til å tenke på en annen måte når han ber henne sette inn 1 for n i uttrykket og regne ut, sammen ***leter*** de etter en alternativ forklaring. Ved å sette inn 1 for n i uttrykket, kan de sjekke om den gir riktig antall sider for en terning. Og på samme måte for to terninger. Det virker som det går et lys opp for Anna når hun ser dette, og til slutt sier hun at hun skjønner hva Ida tenker. Samtalen her er mer «quizzende» enn utforskende, det vil si at læreren vet svaret og Anna «gjetter» hva læreren tenker på. Men hensikten er å få Anna til å oppdage disse eksemplene på at uttrykket stemmer, og det kan se ut som dette er viktig for at hun skal forstå. Læreren ***evaluerer*** også arbeidet deres når han oppsummerer med å si at det er mye som tyder på at det stemmer.

Generaliseringsstrategien de bruker her er ***kontekstuell***. Ida forklarer uttrykket ut fra oppgavesituasjonen, og relaterer den til en måte å telle på; man har fire synlige sider for hver terning oppover pluss en synlig side helt på toppen. Når de fikk spørsmål om å finne et generelt uttrykk, oppdaget de altså at de måtte begrunne dette kontekstuelt.

OPPSUMMERING IDA OG ANNA:

Utdragene fra Ida og Anna viser solide tegn på dialog. De er i kontakt det meste av tiden. De lytter til hverandre, støtter hverandre og bygger videre på det den andre sier. De leter etter løsningsstrategier, utforsker, undrer seg og tester dem ut i fellesskap. De identifiserer matematiske sammenhenger og algoritmer. Og de forklarer for hverandre, og argumenterer for ideene sine. I tillegg ser vi noe evaluering. Det er altså rik og variert bruk av dialogiske handlinger. Dialogen mellom Ida og Anna er viktig for utforsknings- og læringsprosessen deres. Dette vil jeg diskutere nærmere i avsnitt **6.1 Dialogisk læring og generalisering**.

Når det gjelder generaliseringsstrategier, starter Ida og Anna med å telle antall synlige sider ved tre terninger. Ved fire og fem terninger bruker de en rekursiv strategi, de legger til fire sider. Når de går fra fem til ti terninger, ser de at denne strategien ikke er hensiktsmessig lenger, og de finner en algoritme for finne antall synlige sider når de dobler antall terninger. Denne bruker de også når de går fra ti til 20 terninger. Deretter skal de finne et uttrykk for antall synlige sider ved *n* terninger. Ida bruker en kontekstuell strategi for å komme fram til uttrykket 4n+1. Etter gjentatt forklaring fra Ida, og med hjelp fra lærer, forstår også Anna dette uttrykket. Jeg vil også diskutere bruken av ulike generaliseringsstrategier nærmere i avsnitt **6.1 Dialogisk læring og generalisering.**

Når det gjelder lærerens rolle i interaksjonen med Ida og Anna, ser vi at han er opptatt av å få fram Idas tanker og begrunnelser. Han utfordrer også Anna til å tenke på en litt annen måte når det gjelder uttrykket, og det ser ut som om dette er viktig for at hun skal forstå. Jeg vil ta opp lærerens rolle i avsnitt **6.3 Lærerens rolle i dialog med små elevgrupper**.

5.2 EMMA, JAKOB OG LEO – FYRSTIKKOPPGAVEN

I økten der Emma, Jakob og Leo ble filmet, jobbet de med fyrstikkoppgaven. De skulle bruke fyrstikker til å lage ruter i en rekke bortover, med økende lengde. Også her vil jeg gi en beskrivelse av arbeidet deres med å løse oppgaven og generaliseringsstrategier de bruker. Men siden jeg gikk grundig gjennom eksempler på dialogiske handlinger i samtalen til Ida og

Anna, vil utdragene her ha større fokus på det som er spesielt med denne samtalen – nemlig Jakobs bidrag og selvtillit.

Emma og Jakob har en god kontakt gjennom stort sett hele oppgaven. De lytter til hverandre, er til stede, og begge bidrar til å løse oppgavene. Leo henger derimot ikke alltid med. Han følger som regel med på det de andre gjør, men kommer ikke med så mange innspill selv. Dette til tross for at Leo blir regnet for å være på middels nivå i matte, mens Jakob stort sett får veldig svake resultater.

Gruppen starter med å telle antall fyrstikker som trengs for å lage fire ruter. Deretter bruker de en rekursiv strategi, de legger til tre fyrstikker for å finne antallet ved fem ruter. Fra fem til ti ruter dobler de antall fyrstikker, og de ganger opp fra ti til 50 ruter. Dette er begge eksempler på helobjekt-strategier (Lannin, 2005). De har en forståelse for at de må justere antallet fyrstikker etter å ha ganget opp, slik at ikke svaret blir for høyt. Dette gjelder i hvert fall Emma, men det blir ikke helt riktig justering på 50 ruter. Men de tegner alltid figur som de bruker til å telle og sjekke at de har fått riktig svar.

Jakob kommer med mange forslag hele veien, men de virker ikke alltid så gjennomtenkte, og er som regel uten begrunnelser eller argumenter. Han viser ikke helt tro på seg selv, og trekker flere ganger tilbake forslaget sitt. Men Emma er flink til å gi respons på det han sier. Hun sier for eksempel «Ja, sikkert, men så må vi…», og bekrefter på den måten at han er på riktig spor. Hun bygger ofte videre på den han sier, og forklarer hvorfor ting ikke stemmer helt. Dette er nok med på å bygge opp selvtilliten hans slik at han fortsetter å komme med forslag.

Vi hopper inn i samtalen når de skal finne uttrykket for antall fyrstikker ved *n* ruter.

<u>UTDRAG 4:</u>

> *Jakob*: Jeg kan ikke sånne formler jeg.
>
> *Emma*: Ja men hvis du har sånn her. [Legger ut fyrstikker først til en rute, så en til.] Hva er det som skjer for hver gang du legger på en rute?
>
> *Jakob*: Det blir lagt på tre [fyrstikker].
>
> *Emma*: Ja.
>
> …
>
> *Jakob*: Er n ruter tre da?
>
> *Emma*: Hæ?

Jakob: Jeg vet ikke jeg…

Emma: n ruter er lik tre...? [Hun legger på tre fyrstikker til og teller. Så enda tre og teller.] Ja, det øker med tre hver gang.

Jakob: Mm. Så jeg vet ikke om n ruter er tre. [Emma leser oppgaven på nytt.]

Jakob: Da er det jo tre da, for at da…

Emma: Ja, men det er fire på en da. Du starter med fire og så legger du på tre. Jeg vet ikke jeg…

…

Jakob: Men da er n tre da?

Emma: Ja, ehh…

Jakob: Okei, så da må vi ta.. Da trenger vi…

Emma: Så må du plusse på en.

Jakob: Fire.

Emma: Nei, du må ha liksom… Ganger tre pluss en.

Jakob: Åja, n ganger tre pluss en, blir det sånn?

Emma: Hva var det du sa?

Jakob: n ganger tre pluss en. Skal vi skrive det?

Emma: [Nikker. Teller fyrstikker til to ruter.] For det [antall fyrstikker på figuren] er sju. Det [uttrykket] blir to ganger tre er seks, pluss en er sju. Så vi skriver det du sa.

Emma og Jakob er i ***kontakt***, det er de som finner ut av denne oppgaven sammen. Leo deltar ikke her. Vi kan se at Emma og Jakob har litt ulike roller i utforskningen av oppgaven, grunnet at de er på ulikt nivå. Jakob kommer med forslag, men vi skjønner at han ikke har den helt store forståelsen for hva variabelen *n* betyr når han insisterer på at «n er tre». Emma vurderer forlagene hans, og prøver å få dem på riktig spor.

Emma og Jakob undrer seg og utforsker sammen hva som skjer for hver gang de legger på en ny rute, og hvilken sammenheng dette kan ha til *n*. De ***leter*** dermed etter ulike perspektiver. Til slutt ***identifiserer*** de en formel som ser ut til å stemme, Jakob foreslår «n ganger tre pluss en». Emma tester den ut for to ruter, og verifiserer at antall fyrstikker stemmer med figuren. Hun ***argumenterer*** for at de beholder formelen: «For det er sju. Det blir to ganger tre er seks, pluss en er sju. Så vi skriver det du sa.»

Generaliseringsstrategien de bruker for å finne formelen er ***kontekstuell***. Emma spør helt i starten hva som skjer for hver gang de legger på fyrstikker til en ny rute, og det er dette som er utgangspunktet deres. Antall fyrstikker øker med tre for hver gang, og de prøver å finne et uttrykk som kan beskrive denne sammenhengen.

Et interessant aspekt ved denne samtalen, er det som skjer med Jakob. Han starter med å si at han ikke kan «sånne formler». Han har svake prestasjoner i matte, og som nevnt skinner det gjennom at han har en begrenset forståelse. Likevel er det han som først uttrykker formelen i sin helhet, og det er han som får æren av å ha funnet den. Det kan se ut som dette gjør en stor forskjell for hans selvtillit i matte i denne situasjonen, noe jeg vil vise i de neste utdragene. Jakob hadde ganske sikkert ikke klart dette på egen hånd. Det er i samarbeidet og dialogen med Emma at han får denne muligheten.

Når de går i gang med neste deloppgave, uttrykker Jakob en helt annen holdning til sitt eget bidrag i arbeidet med oppgaven. De skal finne antall ruter hvis de har 193 fyrstikker, altså tenke motsatt vei.

UTDRAG 5:

> *Jakob:* For å gjøre det der så tar vi 193… Først og så deler vi på tre, og så plusser vi på fire?
>
> *Emma*: [Nikker.] Vi kan se hvor mye det blir da. [Regner på kalkulatoren.]
>
> *Jakob*: Jeg er flink ass. Jeg føler at jeg gjør noe.
>
> *Leo*: Det er bra. Du gjør mer enn meg.

Jakob kommer med et forslag til hvordan de skal regne ut svaret på oppgaven. Det er ikke helt riktig, men Emma tar som vanlig forslaget hans på alvor. Hun regner først ut 193:3 på kalkulatoren for å se hva det blir. Mens hun holder på med dette, ***evaluerer*** Jakob og Leo sin egen innsats. Jakob føler virkelig at han bidrar. Han er tydelig stolt og glad over å få til noe i mattetimen. Leo sliter derimot litt med å henge med denne timen. (Det kan være flere grunner til det. Gruppesammensetning, uvant arbeidsmåte osv.)

Læreren kommer innom for å høre hvordan det går, og ser at de har kommet fram til en formel.

UTDRAG 6:

Lærer: Hvordan kom dere fram til den? [Formelen]

Jakob: Jeg kom fram…

Leo: Jakob sa et eller annet.

Lærer: Jakob sa et eller annet?

Jakob: Er det [formelen] riktig?

Lærer: Men hvordan kom du fram til det?

Jakob: Jeg er ikke helt sikker.

Lærer: Du er ikke helt sikker?

Jakob: Jeg tenkte… Fordi at det er jo… Det blir jo tre. Sånn at det er først fire og så tre. Da tenkte vi at da er det…sånn.

Lærer: Men er dere sikre på at det tells for alle [n]? Den formelen der? Figurnummer 8 for eksempel da? Hvor mange fyrstikker er det i den?

Jakob: Tre? Er det ikke det da?

Emma: [Teller på figuren de har tegnet på arket.] 25.

Lærer: Stemmer det da med den formelen der?

Jakob: Nei, sikkert ikke.

Emma: 8 ganger tre er 24, pluss en er 25.

Lærer. Okei. Tells det hvis det er figurnummer 50?

Emma: [Peker på oppgaven de har gjort på arket.] Ja.

Jakob: Jeg er flink da. [De smiler og ler.]

Her ser vi at det er Jakob som får æren av å ha kommet fram til formelen. Læreren ***leter*** etter Jakobs tanker om formelen, og hvordan han kom fram til den. Jakob prøver å gi en forklaring, og prøver seg på et ***argument*** med at de først hadde fire fyrstikker og deretter la de til tre, men det skinner nok gjennom at han ikke har den fulle forståelsen. Læreren utfordrer dem på om de er sikre på at den gjelder for alle *n*, og ***leter*** dermed etter ytterligere argumenter for at formelen stemmer. Vi ser at Jakob ikke forstår hva læreren spør om. Han tør heller ikke helt tro at formelen kan stemme: «Nei, sikkert ikke». Når Emma så bekrefter at den stemmer for både 8 ruter og 50 ruter, innser han at den faktisk er riktig og blir kjempeglad. Han ***evaluerer*** igjen sin egen innsats, og det virker som han er stolt over det han har fått til. Alle smiler og ler, inkludert læreren, og det kan virke som de er oppriktig glad på Jakobs vegne. Dette vitner også om den gode ***kontakten*** dem imellom.

OPPSUMMERING EMMA, JAKOB OG LEO:

Vi ser tegn på dialog mellom Emma og Jakob. De har god kontakt hele veien, og begge er engasjert i å løse oppgaven sammen. Leo er med noen ganger, men han detter ofte ut av samtalen. Emma og Jakob leter etter løsningsstrategier i fellesskap; ofte kommer Jakob med mange forslag og Emma bygger videre på dette og får dem på rett spor. Jakob klarer, med stor hjelp fra Emma, å identifisere en formel eller et uttrykk for antall fyrstikker ved *n* ruter. Det kan virke som dette har stor betydning for hans selvfølelse i matematikk. Han evaluerer sin egen innsats flere ganger, og vi kan se en mer positiv tendens etter at han har fått til generaliseringsoppgaven. Jeg vil diskutere dette nærmere i lys av dialog og utforskende arbeidsmåter i avsnitt **6.2 Sosiale og emosjonelle sider ved læring**.

Når det gjelder generaliseringsstrategier, viser de et lignende mønster som Ida og Anna. De starter med å telle, og går så over til en rekursiv strategi med å legge til tre fyrstikker for en ny rute. Deretter bruker de helobjekt-strategier, de både dobler (fra fem til ti ruter) og ganger med fem (fra ti til 50 ruter). Dette skjer før utdragene begynner. Når de finner det generelle uttrykket for antall fyrstikker ved *n* ruter, er strategien kontekstuell. Bruken av generaliseringsstrategier vil bli diskutert i avsnitt **6.1 Dialogisk læring og generalisering**.

6. DISKUSJON

I dette kapittelet vil jeg drøfte resultatene i lys av det teoretiske rammeverket for oppgaven, for å prøve og gi et svar på forskningsspørsmålene mine:

Hvordan kan utforskende dialog mellom elever bidra til dybdelæring i algebra? Og hva er lærerens rolle i dialog med små elevgrupper?

Først vil jeg ta for meg generaliseringsprosessene som vi ser i elevenes arbeid med to mønsteroppgaver. Jeg vil diskutere hvordan dialogisk læring, også kalt utforskende samarbeid, bidrar til disse. Deretter vil jeg se nærmere på Jakobs tilfelle, og drøfte hvordan sosiale og emosjonelle sider ved læringen blir støttet av utforskende arbeidsmåter og dialog. Til slutt vil jeg utdype noen fellestrekk som mine observasjoner har vist ved lærernes dialog med elevene.

6.1 DIALOGISK LÆRING OG GENERALISERING

Dialogiske læringsprosesser tar plass når vi kan observere en rik variasjon av dialogiske handlinger, i følge Alrø og Skovsmose (2004a). Dette har vi sett eksempler på mellom Ida og Anna, og mellom Emma og Jakob. Dialogisk læring blir definert som utforskende samarbeid, slik læring kan vi bare finne i utforskende settinger. Læring basert på dialog har visse kvaliteter som vi ikke finner andre steder, det handler blant annet om elevenes medvirkning til det som læres, refleksjon og kritisk tenking. Det påvirker i stor grad mulighetene elevene har til å lære noe *sammen*. Jeg vil her se på elevenes arbeid med generalisering, og komme med eksempler på hvordan dialog og utforskning har påvirket arbeidet deres.

Begge elevgruppene viser det samme mønster når det kommer til generaliseringsstrategier. De starter med å telle. Det er som forventet, siden det er den første deloppgaven og det er tidlig å oppdage noe mønster. Det er heller ingen stor jobb å telle synlige sider for tre terninger eller antall fyrstikker for fire ruter, som oppgavene spurte etter. Det er derfor forståelig at telling var den enkleste strategien for elevene i dette tilfellet. Ida og Anna brukte tid på å identifisere en felles forståelse av hvordan de skulle telle sidene på terningene (utdrag 1), dette gjorde de gjennom dialogiske kjennetegn som undring, åpenhet og argumentasjon.

Fra neste deloppgave har begge gruppene oppdaget et mønster, og de bruker da en rekursiv strategi. Ida oppdager fort at de kan legge til fire sider, og Anna er med på dette så snart hun har telt og sjekket at det stemmer. Emma, Jakob og Leo ser også raskt at de kan legge til tre fyrstikker for å finne den neste figuren i rekka. Så fort de har sett dette mønsteret, er dette en enklere og raskere metode enn å telle alle sidene eller fyrstikkene på nytt. Å oppdage et mønster for hvordan to variabler øker i forhold til hverandre, er begynnelsen på en generaliseringsprosess (Radford, 2010).

Når gruppene skal gå fra fem til ti, henholdsvis terninger og ruter, er begge raskt ute med å foreslå en ny strategi. De ser umiddelbart at det er lettere å doble enn å bruke den rekursive strategien gjentatte ganger. Å doble er en del av helobjekt-kategorien til Lannin (2005), de bruker en liten enhet som de allerede kjenner til å lage en større enhet ved multiplisering. Begge gruppene finner også ut at de må justere antallet slik at de ikke teller en side eller fyrstikk for mye. Dette er noe de finner ut i fellesskap. Emmas gruppe tegner figur og teller for å sjekke, og oppdager på den måten at de må trekke fra en. Men Emma forstår likevel med en gang hvorfor det er sånn, og forklarer og argumenterer for de andre. Det er særlig tydelig hos Ida og Anna (utdrag 2) at de bygger på hverandres innspill, gjennom felles utforsking og argumentasjon, for til slutt å identifisere en løsningsstrategi som de er enige om virker sannsynlig. Ida og Anna bruker deretter, uten problemer, samme strategi for å doble fra ti til 20 terninger. Dette kan stemme med Lithner (2017) sin teori om å utvikle løsningsstrategiene selv framfor å kopiere eksempler. CMR-oppgaver øker ikke bare elevenes forståelse, men også deres evne til å løse oppgaver effektivt og nøyaktig.

Etter som antall terninger øker, oppdager elevene altså at det trengs mer hensiktsmessige løsningsstrategier. Dette er ikke noe de funderer over, det skjer helt automatisk. De oppdager et behov for en ny løsningsstrategi, og bruker kunnskap de har fra før, fra aritmetikken, til å finne ut av det. Å knytte nye ideer til kunnskaper og ferdigheter elevene har fra før, og overføre det de har lært fra en situasjon til en annen, er viktige prinsipper i dybdelæring (NOU 2014:7, s. 10). Her får elevene denne muligheten, og det skjer gjennom utforsking og dialog. Også teori om «early algebra» fremhever hvor viktig det er at algebra blir knyttet til prinsipper elevene kjenner fra aritmetikken (bl.a.Kieran et al., 2016). Gjennom å utforske mønstre og bruke regneferdigheter til å lage sine egne løsningsstrategier, blir algebraisk tenking knyttet til tidligere kunnskap.

Generaliseringsoppgavenes «høydepunkt» er når elevene skal finne et generelt uttrykk for henholdsvis antall synlige sider ved *n* terninger og antall fyrstikker ved *n* ruter. Begge gruppene klarer dette ved hjelp av en kontekstuell strategi. De finner en regel basert på informasjonen som er gitt av situasjonen, og som er relatert til mønsteret de allerede har funnet angående hvor mange som legges til for hver gang. I utdrag 3 ser vi at Ida har funnet et uttrykk, og hun prøver å forklare det (argumentere) slik at Anna forstår. De får også hjelp fra lærer, og de gir seg ikke før Anna sier at hun også forstår. I utdrag 4 ser vi at Emma hjelper Jakob på vei mot det riktige uttrykket. Poenget er at både Anna og Jakob gjennom dialog får mulighet til å være med på generaliseringstanken, og det er stor sannsynlighet for at de ikke hadde klart dette på egen hånd. Undervisning bør legge til rette for at alle elever får mulighet til å engasjere seg i det matematiske innholdet (Schoenfeld, 2017)

I følge Lannin (2005) er det bare den kontekstuelle strategien vil alltid gi en link til oppgavesituasjonen. Det er hit man ønsker at elevene skal komme når de generaliserer; at de har en forståelse for de generelle matematiske sammenhengene som finnes i oppgavesituasjonen, gjerne synliggjort gjennom figurer eller konkreter. Begge gruppene i min studie mestrer dette når de skal lage et generelt uttrykk. Men de bruker ikke den kontekstuelle strategien før de må. Underveis i oppgaven bruker de ulike strategier etter hvert som de ser et behov. De bruker antakelig den strategien de til enhver tid synes virker som den enkleste. Stacey (1989) har i sin studie beskrevet noe lignende. Elevene skiftet strategier i løpet av en generaliseringsoppgave etter som de oppdaget at den ene ikke førte fram. Men Stacey bruker ordet inconsistency når hun beskriver dette, elevene er ikke konsekvente i sin strategibruk, og hun kobler det til en mangel på kritisk tenkning. Jeg mener at dette blir et feil fokus. Vi kan ikke forvente at elevene skal holde seg til en spesiell strategi (som læreren har i tankene) hvis det finnes andre som er enklere for dem. Det er jo dette utforsking, dialog og dybdelæring i bunn og grunn handler om, at elevene skal ta eierskap i matematikken og vi lærere skal anerkjenne deres løsningsmetoder, bygge videre på dem og hjelpe dem til å se sammenhenger. Det trenger altså ikke være mangel på forståelse eller kritisk tenkning som gjør at de ikke tar i bruk den kontekstuelle generaliseringsstrategien med en gang. De har bare ikke sett behovet enda.

Min neste tanke er utformingen av oppgavene. Jeg tok utgangspunkt i Lannins (2005) oppsett med økende antall terninger eller ruter, og ulike tall som han har brukt i sine oppgaver. I terningoppgaven går det fra fem til ti, og så til 20 terninger. Mens i fyrstikkoppgaven går det fra fem til ti, og så til 50 ruter. Jeg valgte å bruke disse fordi jeg tenkte at runde tall var enkle å regne med. Men sett i ettertid, er det tall som kanskje oppfordrer elevene til å bruke en helobjekt-strategi der de multipliserer opp. Hvis det er et poeng å få elevene til å tenke kontekstuelt, bør oppgavene oppfordre til det. Derfor hadde det kanskje vært mer interessant å be dem finne antall synlige sider ved for eksempel 12 terninger, eller antall fyrstikker ved 17 ruter. Da kunne man kanskje sett om elevene klarte å bruke den kontekstuelle strategien før de direkte ble bedt om å lage et generelt uttrykk.

Til slutt i dette avsnittet vil jeg diskutere elevenes bruk av argumenter. Elevene var generelt flinke til å begrunne generaliseringsstrategiene sine i små grupper, i motsetning til i Lannins (2005) studie. Identifiseringen av løsningsstrategier eller matematiske prinsipper blir som regel fulgt opp av matematisk forankrede argumenter. Dette ville jeg også forvente å se etter som dette kan klassifiseres som CMR-oppgaver som oppfordrer til kreativt resonnement. For eksempel sier Ida etter at Anna har foreslått å doble antall synlige sider (utdrag 2): «Men sånn vi har hatt nå så har det ikke gått an å dele på to. Og 21 går ikke an å dele på to, men 42 går jo an å dele på to». Dette er et verifiserende argument (Lithner, 2008), som forteller at Annas opprinnelige forslag ikke stemmer helt og må justeres. Og det er forankret i matematiske prinsipper om partall og oddetall. Dialogen gjør elevenes argumenter synlige, både for meg som observatør og ikke minst for hverandre. Elevene må lytte til og ta stilling til hverandres argumenter.

Et av de nye kjerneelementene i matematikk handler om resonnering og argumentasjon (Utdanningsdirektoratet, 2018). Dette innebærer blant annet at elevene må kunne følge og vurdere matematiske resonnementer, og lære å utforme sine egne resonnementer både for å løse problemer og for å argumentere for framgangsmåter og løsninger. Utforskende dialog legger til rette for dette.

Teori på «early algebra»-feltet legger vekt på at elevene må få forklare algebraiske resonnement med egne ord, i tillegg til at innføring av symboler kan fasilitere refleksjoner rundt ubestemte mengder (Carraher et al., 2006). Vi ser for eksempel i Idas argumenter for det generelle uttrykket hun har funnet (utdrag 3), at det er tegn til refleksjoner om hva *n* betyr:

> «Og så har vi *n*. Det er liksom vi vet ikke hvor mange [terninger] vi har. […] Så da ganger vi det [sidene] med *n*. Og så plusser vi det med en, som er toppen. Siden da vet vi ikke hva som er svaret, siden vi har *n*.»

Her viser Ida en forståelse av at *n* er en ubestemt mengde. De vet ikke hvor mange terninger de har, og da skjønner hun at de heller ikke kan få et tallsvar på hvor mange synlige sider det er. Hun har funnet et uttrykk som viser sammenhengen mellom antall terninger og synlige sider uansett hva *n* måtte være. Dette er viktige skritt på veien som leder fra generalisering til algebra (Radford, 2010).

OPPSUMMERING – DIALOGISK LÆRING OG GENERALISERING

Generalisering er som nevnt en måte å knytte algebra til tidligere kunnskap fra aritmetikken, og dette er et viktig prinsipp når vi snakker om dybdelæring i algebra. Mine resultater kan antyde at elevene bruker ulike generaliseringsstrategier etter som de ser et behov i løpet av oppgaven, begge gruppene viste samme mønster i bruk av ulike strategier. Men når de skulle finne det generelle uttrykket, brukte begge en kontekstuell strategi, som knytter generaliseringen til konteksten i oppgaven.

Utforskende dialog bidrar til at elevene løser oppgaven i fellesskap. Sammen utforsker de framgangsmåter, forklarer og argumenterer, og identifiserer løsningsstrategier. Argumentene elevene bruker er stort sett matematisk forankret.

6.2 «JEG ER FLINK ASS. JEG FØLER AT JEG GJØR NOE.» – SOSIALE OG EMOSJONELLE SIDER VED LÆRINGEN

I avsnitt 5.2 så vi hvordan Jakob fikk oppleve glede og mestring i matematikk. På hvilken måte bidro dialog og utforskende arbeidsmåter til dette? Og hva har det å si for hans dybdelæring? Jeg vil trekke fram noen aspekter, og diskutere dem i forhold til teori som omhandler det brede kompetansebegrepet.

Jakob opplevde at forslagene hans ble tatt på alvor av Emma, selv om de ikke alltid var helt riktige. Han opplevde at han bidro til at oppgavene ble løst, han fikk opplevde at den generelle formelen ble regnet som hans, og den ble anerkjent som riktig av både andre elever og læreren. Dette kan knyttes til ***eierskap***, som er en viktig del av TRU-rammeverkets dimensjoner for å gi elevene mulighet til en dypere forståelse (Schoenfeld, 2017). Wæge (2007) fant i sin studie at eierskap, gjennom at elevene fikk utvikle egne løsningsstrategier, og at disse ble anerkjent av læreren, hadde betydning for elevenes opplevelse av forståelse og læring. Og det er nettopp gjennom utforskende dialog at Jakob får denne muligheten.

Dialogen med Emma viser en god kontakt dem imellom, Emma er opptatt av å lytte til Jakobs ideer, bygge videre på disse og få han med på sine ideer. Jakob er heldig med samarbeidspartner, det er antakelig ikke alle som hadde fått fram de samme sidene av Jakob som vi ser her. Et viktig poeng når vi snakker om dialog og samarbeid, er at elevene trenger sosiale ferdigheter som å ***kommunisere og samhandle*** med andre. Men da trenger de også situasjoner der de får øve disse ferdighetene. Forskning på effektene ved utforskende arbeidsmåter viser nettopp en positiv effekt på kommunikasjon og sosiale ferdigheter (Bruder & Prescott, 2013). Wæge (2007) fant også at samarbeid i utforskende situasjoner bidro til økt motivasjon og følelse av læring hos elevene.

Studier indikerer også at utforskende arbeidsmåter bedrer elevenes ***holdninger og motivasjon*** i faget Bruder & Prescott, 2013; Wæge, 2007). Dette er emosjonelle sider som handler om vilje til å engasjere seg og gå i gang med en oppgave, og ha tro på at man får det til. Jakob viser gjennom hele oppgaven en vilje til å engasjere seg, han kommer stadig med forslag og ideer. Jeg har ikke observert Jakob i en mer «tradisjonell» mattetime, med fokus på individuell oppgaveløsning, men hans svake resultater fra skriftlige, individuelle prøver kan jo antyde at dette er en arbeidsmåte som ikke er til hans fordel. Når han får samarbeide og diskutere med andre, viser han engasjement.

Samtidig som Jakob viser engasjement og kommer med forlag, viser han også at han ikke alltid har så stor tro på at forslagene kan være riktige. Det at Emma tar forslagene hans på alvor, er nok en grunn til at han fortsetter å komme med innspill. Men til og med etter at Emma har anerkjent formelen han foreslo, har han ikke helt troen på at den kan stemme når læreren spør. Når det så viser seg at formelen er riktig, blir han tydelig stolt og glad. Dette er med på å bygge opp selvtilliten hans i matematikk, følelse av mestring gir økt ***tro på egne ferdigheter***. Vi får et innblikk i Jakobs følelser og holdninger gjennom evalueringene han gir. I en evaluering bringes den emosjonelle og den faglige delen av en utforskningsprosess sammen, i følge Alrø og Skovsmose (2004b), og vi ser nettopp en mer positiv holdning til egne ferdigheter når Jakob går fra å si «Jeg kan ikke..» til «Jeg er flink».

Kilpatrick et al. (2001) er opptatt av at elevenes engasjement og tro på egen læring (productive disposition) henger sammen med de andre komponentene for å utvikle matematisk kompetanse; forståelse, prosedyreferdigheter, løse problemer og resonnere. Engasjement henger sammen med å utvikle forståelse. Men vi kan også se på sammenhengen mellom problemløsingskompetanse (strategic competence) og engasjement. Når elevene utvikler problemløsingskompetanse gjennom for eksempel utforskende arbeidsmåter, vil holdningene og tankene om sin egen læring i matematikk bli mer positive. Dette stemmer med forskningsresultater (Bruder & Prescott, 2013; Wæge, 2007) og det kan knyttes til Schoenfeld

(2017) sitt TRU-rammeverk der han er opptatt av at elevene må få utvikle en positiv identitet som «thinkers and learners» i matematikk.

Oppsummering – sosiale og emosjonelle sider

I denne undervisningsøkta fikk Jakob oppleve glede og mestring. Det henger sammen med en opplevelse av eierskap til matematiske ideer og løsninger, noe som ble muliggjort gjennom dialog og samarbeid. Vi kan antyde en økt selvtillit i matematikk hos Jakob i løpet av arbeidet deres med oppgaven, og en mer positiv holdning til egne ferdigheter og egen læring.

Utforskende arbeidsmåter og dialog vil altså bidra til sosiale og emosjonelle sider av læringen, som igjen kan knyttes til læring og forståelse. Det viser forskning, og det ser vi et godt eksempel på her med Jakob.

6.3 Lærerens rolle i dialog med små elevgrupper

Jeg vil her peke på noen fellestrekk ved de to utdragene (utdrag 3 og utdrag 6) som viser elevene i samtale eller dialog med lærer. Jeg vil diskutere disse i lys av teori om både dialog, utforskende arbeidsmåter og dybdelæring.

I utdrag 3 er læreren i samtale med Ida og Anna. I første del av samtalen er han opptatt av Idas forklaring, han lokaliserer hennes perspektiv på det generelle uttrykket. Ida forklarer og argumenterer. Alle tre er i kontakt, de er på bølgelengde og interessert i å løse oppgaven sammen. De er i dialog. Når Emma, Jakob og Leo får besøk av læreren i utdrag 6, opprettes det også kontakt. Læreren prøver også her å lokalisere Jakobs tanker om det generelle utrykket de har funnet, og Jakob prøver å gi en forklaring. Vi ser tegn på dialog.

Ett av hovedpoengene med både utforskende arbeidsmåter og dybdelæring er som tidligere nevnt at læring skjer i dialog mellom elever og lærere, og læreren må verdsette og bygge videre på elevenes forklaringer. Vi ser at lærerne i denne studien er opptatt av å ***få fram elevenes tanker og begrunnelser***.

Etter at Ida og Jakob har gitt sine forklaringer, ser vi også et fellestrekk hos lærerne. De ***utfordrer elevene***. I dialogen med Ida og Anna, har Anna problemer med å forstå Idas forklaring om det generelle uttrykket. Læreren utfordrer Anna til å tenke på en annen måte når han ber henne sette inn 1 for n i uttrykket og regne ut. Og det kan se ut som dette nye perspektivet var viktig for Annas forståelse. Læreren som er i dialog med Emma, Jakob og

Leo utfordrer også elevene når hun spør om de er sikre på at formelen gjelder for alle *n*. Begge lærerne ber elevene sjekke om formelen gjelder for noen spesifikke *n*. Samtalene går her fra å være utforskende dialoger der læreren er interessert i hva elevene tenker, til å få en mer quizzende karakter der læreren sitter med svaret og elevene «gjetter» hva læreren tenker på. Dette er spesielt tydelig mellom Anna og lærer. Her blir dialogen brutt. Alrø og Skovsmose (2004b) beskriver dette fenomenet, en utfordring fra læreren som går over i quizzing. Læreren har noe helt konkret han ønsker at elevene skal se, og dermed er det lett å spørre om dette direkte. Spørsmålet er om det gjør noe, eller om læreren kunne spurt på en annen måte for å få elevene til å tenke selv hvordan de kunne sjekke om formelen stemte. Der ser uansett ut som om denne delen av samtalen hjalp Anna til å forstå.

Læreren får Ida og Anna til å se at uttrykket deres stemmer for både en og to terninger. Deretter evaluerer han det ved å si at mye tyder på at det kan stemme. I den andre gruppen hadde Emma allerede sjekket at formelen deres stemte for to ruter. På oppfordring fra læreren får de også sjekket at den stemmer for 8 ruter og 50 ruter. Elevene trekker da selv konklusjonen at formelen de kom fram til er riktig. Jakob evaluerer sin egen innsats med «Jeg er flink da!».

Evaluering er altså en viktig del av lærerens rolle. Det kan være i form av direkte tilbakemeldinger på om noe er rett eller galt, men det er også viktig å oppfordre elevene til å evaluere egne svar og eget arbeid. Både når læreren utfordrer og evaluerer elevene, er det viktig å først ha lokalisert perspektivene deres. Bare på den måten kan han finne ut av hva elevene forstår, og hvilke misforståelser som eventuelt må tas tak i og i hvilken retning de trenger å guides (Schoenfeld, 2017).

OPPSUMMERING – LÆRERENS ROLLE

I mine resultater kan jeg se tre fellestrekk i dialogene mellom lærer og elevgruppene. Lærerne prøvde å lokalisere elevenes tanker og begrunnelser. Dette er viktig for å kunne bygge videre på elevenes ideer, et prinsipp i både dybdelæring og utforskende arbeidsmåter. Og det er viktig for å få et innblikk i hva elevene forstår. Lærerne utfordret elevene til å tenke annerledes, enten når de stod fast eller for å ytterligere belyse oppgaven. Og til slutt hadde de en viktig rolle i forhold til evaluering av elevenes svar.

7. Konklusjon

Målet med studien min var å bidra til debatten om hvordan vi kan bedre algebraundervisningen i Norge. Dybdelæring er et aktuelt begrep, og jeg har i denne studien gitt en grundig beskrivelse av hvordan vi kan jobbe for dybdelæring i algebra, både ut fra teoretiske perspektiver og funn jeg har gjort.

Funnene i studien tyder på at elevene bruker ulike generaliseringsstrategier etter som de ser et behov for det. Begge gruppene viste samme mønster i bruken av generaliseringsstrategier, og fant et generelt uttrykk som de relaterte til oppgavens kontekst.

Utforskende dialog gjør at elevene bygger på hverandres innspill og finner ut av oppgavene i fellesskap. Det muliggjør at også elever som kanskje ikke ville klart oppgavene på egen hånd, nå får en mulighet til å bidra.

Utforskende dialog bidrar også til sosiale og emosjonelle sider ved læringen, som for eksempel holdninger i matematikk, og disse kan endre seg gjennom opplevelse av eierskap og mestring.

Til slutt viser funnene mine noen fellestrekk i dialogen mellom de små elevgruppene og lærer. Læreren har blant annet en viktig rolle når det kommer til å få fram elevenes tanker og forklaringer, utfordre elevene til å tenke på en annen måte og i evaluering av svar og løsningsstrategier.

Utforskende dialog bidro altså i min studie til både faglige, sosiale og emosjonelle sider ved elevenes arbeid med generalisering. Alle disse aspektene kan knyttes til dybdelæring i algebra.

En del av motivasjonen bak oppgaven min handlet om å se nærmere på dialog mellom elever, knyttet til en utforskende setting. Elevene var stort sett veldig flinke til å støtte hverandre i utforskingsprosessen, de viste engasjement og vilje til å finne ut av ting sammen. Men jeg hadde også et elevpar som ikke fungerte, som jeg måtte se bort fra i resultatene. Dette viser at man enten kan være heldig med sammensetningen av elever, eller skikkelig uheldig. I min studie hadde argumentet om at elevene burde være på samme nivå ingen ting å si for om gruppen fikk en god dialog eller ikke. Derimot er det kanskje sosiale faktorer som spiller inn, hvordan elevenes personligheter fungerer sammen. Som jeg har beskrevet i studien, henger utforsking og dialog nøye sammen med sosiale og emosjonelle sider ved læringen. Dette gir implikasjoner for undervisning når man skal tenke på gruppesammensetning.

Når det gjelder implikasjoner for videre forskning, eller kanskje mest for eget utviklingsarbeid som lærer, syns jeg det hadde vært interessant å se på hva man kan bruke de generaliserte uttrykkene til videre i undervisningen. Generaliseringsoppgaver har som mål at elevene skal komme fram til et uttrykk, men hva så? Har elevene forstått at dette er algebra? Oppgavene i min studie viste enkle mønstre, og kanskje kan mer komplekse mønstre gi algebraiske uttrykk som kan manipuleres videre (forenkles eller sammenlignes med lignende uttrykk) slik at vi lager en enda tydeligere inngang til noe av det som blir regnet som sentralt i algebra.

LITTERATUR

Alrø, H. & Skovsmose, O. (2004a). Dialogic learning in collaborative investigation. *Nordic Studies in Mathematics Education, 9*(2), 39-62.

Alrø, H. & Skovsmose, O. (2004b). *Dialogue and learning in mathematics education. Intention, reflection, critique.* (Mathematics education library). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM, 45*(6), 797-810. doi: 10.1007/s11858-013-0506-6

Bergem, O. K., Kaarstein, H. & Nilsen, T. (Red.). (2016). *Vi kan lykkes i realfag. Resultater og analyser fra TIMSS 2015*. Oslo: Universitetsforlaget.

Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A. & Murphy Gardiner, A. (2015). Children's Use of Variables and Variable Notation to Represent Their Algebraic Ideas. *Mathematical Thinking and Learning, 17*(1), 34-63. doi: 10.1080/10986065.2015.981939

Bruder, R. & Prescott, A. (2013). Research evidence on the benefits of IBL. *ZDM, 45*(6), 811-822. doi: 10.1007/s11858-013-0542-2

Carlsen, M. & Fuglestad, A. B. (2010). Læringsfellesskap og inquiry for matematikkundervisning. *Tidsskriftet FoU i praksis, 4*(3), 39-60.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Chapin, S. H., O'Connor, C. & Anderson, N. C. (2009). *Classroom discussions - Using math talk to help students learn* (2. utg.). California: Math Solutions.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forlag.

Denzin, N. K. & Lincoln, Y. S. (2000). *Handbook of qualitative research* (2. utg.). Thousand Oakes: Sage Publications.

Eilertsen, T. V. (2013). Eksemplets makt - casestudier som lærings- og forskningsredskap. I M. Brekke & T. Tiller (Red.), *Læreren som forsker. Innføring i forskningsarbeid i skolen.* Oslo: Universitetsforlaget.

Gilje, Ø., Ingulfsen, L., Dolonen, J. A., Furberg, A., Rasmussen, I., Kluge, A., . . . Skarpaas, K. G. (2016). *Med ARK&APP. Bruk av læremidler og ressurser for læring på tvers av arbeidsformer.* Hentet fra http://www.uv.uio.no/iped/forskning/prosjekter/ark-app/

Grønmo, L. S. & Onstad, T. (2009). *Tegn til bedring. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007.* Hentet fra http://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/TIMSS/2007/index.html

Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*(1), 59-78. doi: 10.1007/bf01284528

Hole, A., Jensen, R., Tellefsen, H. K. & Wallace, A. K. (2014). *Nummer 8. Matematikk for ungdomstrinnet.* Oslo: Aschehoug.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? I J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Red.), *Algebra in the early grades* (s. 4-17). New York: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group.

Karlsen, L. (2014). *Tenk det! Utforsking, forståelse og samarbeid - elever som tenker sjæl i matematikk.* Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Kieran, C., Pang, J., Schiffer, D. & Ng, S. F. (2016). *Early algebra. Research into its nature, its learning, its teaching.* (ICME-13 Topical surveys).

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. Hentet fra https://www.nap.edu/read/9822/chapter/1

Küchemann, D. (1981). Algebra. I K. M. Hart (Red.), *Children's understanding of Math* (s. 102-119). London: John Murray.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258. doi: 10.1207/s15327833mtl0703_3
Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276.
Lithner, J. (2017). Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning. *ZDM, 49*(6), 937-949. doi: 10.1007/s11858-017-0867-3
Maass, K., Reitz-Koncebovski, K. & Billy, G. (2013). *PRIMAS, Inquiry-based learning in maths and science classes*. Hentet fra http://www.primas-project.eu/no/index.do
Matematikksenteret. (u.å.). *Realfagskommuner - Ressurser for eiere, ledere og ansatte i realfagskommuner*. Hentet fra https://www.matematikksenteret.no/satsinger/realfagskommuner
McCrone, S. S. (2005). The Development of Mathematical Discussions: An Investigation in a Fifth-Grade Classroom. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(2), 111-133.
Mercer, N. & Sams, C. (2006). Teaching Children How to Use Language to Solve Maths Problems. *Language and Education, 20*(6), 507-528. doi: 10.2167/le678.0
Nathan, M. J. & Knuth, E. J. (2003). A Study of Whole Classroom Mathematical Discourse and Teacher Change. *Cognition and Instruction, 21*(2), 175-207. doi: 10.1207/S1532690XCI2102_03
Nosrati, M. & Wæge, K. (2015). Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk. *Matematikksenteret, Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen*.
NOU 2014:7. (2014). *Elevenes læring i fremtidens skole - Et kunnskapsgrunnlag*. Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/NOU-2014-7/id766593/
Pólya, G. (1945). *How to solve it*. New Jersey: Princeton University Press.
Powell, A. B., Francisco, J. M. & Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the developpment of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 405-435.
Rabel, S. & Wooldridge, I. (2013). Exploratory talk in mathematics: what are the benefits? *Education 3-13, 41*(1), 15-22. doi: 10.1080/03004279.2012.710095
Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.
Schoenfeld, A. H. (2017). Video analyses for research and professional development: the teaching for robust understanding (TRU) framwork. *ZDM*, 1-16.
Sfard, A. & Kieran, C. (2001). Cognition as Communication: Rethinking Learning-by-Talking Through Multi-Faceted Analysis of Students' Mathematical Interactions. *Mind, Culture, and Activity, 8*(1), 42-76. doi: 10.1207/S15327884MCA0801_04
Sidenvall, J., Lithner, J. & Jäder, J. (2015). Students' reasoning in mathematics textbook task-solving. *International Journal of Mathematics Education in Science & Technology, 46*, 533-552.
Skemp, R. R. (1976). Relational Understading and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.
Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164. doi: 10.1007/bf00579460
Star, J. R. & Rittle-Johnson, B. (2009). Making algebra work: Instructional strategies that deepen student understanding, within and between algebraic representations. *ERS Spectrum, 27*(2), 11-18.
Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340. doi: 10.1080/10986060802229675
Thomas, G. (2011). *How to do your case study. A guide for students and researchers.* London: SAGE Publications.
Tunstad, H. (2012). Effektiv metode for mattelæring brukes lite. Hentet fra http://forskning.no/matematikk-pedagogiske-fag-skole-og-utdanning/2012/07/effektiv-metode-mattelaering-brukes-lite

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag*. Hentet fra http://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Utdanningsdirektoratet. (2018). Siste utkast til kjerneelementer i matematikk fellesfag og programfag. Hentet fra https://hoering.udir.no/Hoering/v2/197?notatId=358

Van Amerom, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics, 54*(1), 63-75. doi: 10.1023/B:EDUC.0000005237.72281.bf

von Renesse, C. & Ecke, V. (2015). Inquiry-Based Learning and the Art of Mathematical Discourse. *PRIMUS, 25*(3), 221-237. doi: 10.1080/10511970.2014.921799

Wæge, K. (2007). *Elevenes motivasjon for å lære matematikk og undersøkende matematikkundervisning* (Doktorgradsavhandling). Fakultet for informasjonsteknologi, matematikk og elektronikk, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, Trondheim

VEDLEGG 1

Algebraprosjekt 2018

Til lærer

Tips til å få i gang gode diskusjoner når elevene jobber utforskende

Med utforskende arbeidsmåter er det viktig å hente fram elevenes tanker og løsningsforslag. Her har jeg samlet noen spørsmål det kan være lurt å stille elevene for å lede dem på riktig vei, og noen tips til ting å tenke på for å få en god helklassediskusjon.

Før timen: Forutse mulige løsningsforslag fra elevene

Da er man bedre forberedt til både å skjønne hvor elevene kan stå fast, misoppfatninger, samt hvordan elevenes ulike strategier kan knyttes sammen og til poenger du vil få fram i helklassediskusjonen.

Under arbeid med oppgave/problem i liten gruppe

- Kan du fortelle meg hva dere tenker på?
- Kan du fortelle meg hva du mener?
- Så det du sier er at….?
- Hvordan pleier du å løse…?
- Hvordan henger dette sammen med….som vi har hatt om før?
- Hva tror du skjer hvis…?
- Kan du tegne en figur for meg?
- Er det en annen måte å løse oppgaven på?
- Hvordan kan du overbevise oss om at svaret ditt stemmer?
- Hva er forskjellen mellom…? Hva er likhetene mellom…?

Noen elever står kanskje helt fast, eller er usikre/frustrerte, og trenger mer direkte støtte.

Det er også lurt å ha helklassediskusjonen i bakhode mens man går rundt til elevgruppene. Hvem har løsningsstrategier eller tenkemåter som det er verdt å dele med klassen? Både riktige og «feil»! Viktige misoppfatninger? Hvem har en god figur? Hvem har en god forklaring? Hvordan kan dette organiseres i helklassediskusjonen for å få fram de viktige poengene?

Helklassediskusjon

- Så du sier at…? (Var det dette eleven mente?) Tydeliggjøring, fokus.
- Be en annen elev gjenta det som ble sagt med sine egne ord.
- Er du enig eller uenig? Hvorfor?
- Vil noen tilføye noe her?

Gi elevene god tid til å tenke, minst 10 sekunder, før man ber om et svar.

Hentet fra bl.a. Stein et al. (2008), Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell.

VEDLEGG 2

Eksempel på transkripter og koding.

Koding 1 Kontakt	**Koding 2 Dialogisk handling**	**Koding 3 Generaliseringsstrategi**
Kontakt	Lete	Telle
	Identifisere (Id)	Rekursiv
	Argumentere (Arg)	Hel-objekt
	Evaluere (Ev)	Gjette og sjekke
		Kontekstuell
Ikke kontakt		

Tid	Koding 1	Koding 2	Koding 3	Samtale	Kommentar
06.50-07.30	Kontakt	Lete Arg Id	Telle	Anna: Hvor mange sider er synlige hvis vi stabler tre terninger oppå hverandre? Ida: Det blir vel det samme som de sa i sta det, når vi hadde to. Anna: Ja, blir det ikke det da? [Teller på terningene] Bare en, to, tre, …., 13? Ida: Ja. Anna: Fordi hvis vi ikke løfter de opp vet du. Ida: Mm. Det blir jo lissom en som blir borte og så ja… Skal vi skrive bare 13 da eller? Forklar hverandre. Anna: Tror det. Ida: Det er vel ikke så mye mer å forklare. [Begge skriver på arket.]	Samtalen preget av åpenhet og en spørrende holdning. Sammen identifiserer de at en side blir borte når man setter en terning oppå.
09.48-12.04	Kontakt (mellom lærer og begge jentene)	Lete Arg Lete Lete Lete		**Interaksjon med lærer** Lærer: Hvor er dere hen jenter? Anna: På første oppgaven, vi sliter med å forklare det. Lærer: Okei? Hva er det… Men hvis dere skal prøve å forklare det da, hva sier dere da? Ida: At vi bare satt de oppå hverandre. Og så tenkte vi liksom rundt at det var fire på hver da, og så ble det jo en borte da vi satt på en ny en. Og så ja… Lærer: Okei? Så da kom dere fram til… Anna: 13. Lærer: 13. Og det kom dere fram til ved at dere telte det terning for terning? Anna: Ja, men bare vi ikke teller oversiden da [peker]. Lærer: Ja. Anna: For det gjør vi jo ikke på den på toppen. Lærer. Nei, riktig. Så det var forskjellen, at på den på toppen så er det...en side… Anna: Ja. Ja. Lærer: Tenkte dere noe forskjellig underveis da eller? Anna: Vet ikke. Ida: Nei, egentlig ikke vel. Lærer: Nei. Hvordan tror du det blir nå videre? For nå på neste så skal det en kube til. Hvordan tror du det blir da? Ida: Det blir jo det samme det da. Bare med flere. Anna: 19 blir det da. Lærer: Blir det 19 på neste? Anna: Mm...ja… Lærer: Hvordan tenkte du da da? Anna: Nei! Det gjør det ikke. Det blir 15. Nei. [Tar seg til panna.] 18…	Lærer lokaliserer jentenes tanker Forklare Utfordrer jentene til å tenke videre. Lokaliserer tankene deres.

		Lete Id Arg Ev	Telle Rekursiv	Lærer: Okei. Men hvis dere… For dere har fått gjort ferdig den a'en. Så da skal dere i gang med den neste. Så dere tenker at det blir det samme...på et eller annet vis. Så da får dere jo se, hvis dere setter opp fire så ser dere hva som skjer? [Anna setter på en terning til.] Ida: Blir det ikke 17 da? Anna: En, to, tre, …, 17. Lærer: 17 ja. Hva var det som skjedde da da? Anna: Det gikk bort…plussa på fire. [Ser på Ida og nikker.] Lærer: Plussa på fire. Okei? Ja, nei men skriv ned… For dere sa jo det at det kom til å være det samme. Hva var det du tenkte på da, Ida, når du sa at det skulle være det samme? Ida: Det blir jo det samme som når du tar tre da, at du liksom plusser på fire, og så tar du en til og da plusser du på fire. På en måte. Lærer: Okei? Anna: Men hvis man kunne ta opp terningen da måtte man telle med den under. Lærer: Hm? Anna: For de sitter på en måte fast, man kan ikke ta de opp og telle med den under. [Viser på terningen.] Lærer: Nei. Nei, riktig. For den som er under den får du jo ikke sett. Anna: Nei.	Identifiserer at man plusser på fire hver gang man setter på en ny terning. Ser et mønster.
13.43-14.03	Kontakt		Rekursiv	Ida: Hvor mange sider er synlige hvis vi stabler fem terninger oppå hverandre? Forklar for hverandre. Har du fem oppå hverandre nå? Anna: Ja Ida: Da blir det bare fire til da. Anna: Og det blir… Ida: 21 Anna: 21 Ida: Egentlig så blir det jo bare samme forklaring hver gang, så det blir jo det samme. Anna: Mm.	
15.03-16.38	Kontakt	Lete Arg Id Ev	Helobjekt (doble)	Anna: Hvor mange sider er synlige når vi stabler 10 terninger oppå hverandre? Vi trenger litt flere [terninger]. [Rekker opp hånda, får etter hvert svar fra lærer at de skal se for seg hva som skjer.] Anna: Da blir det jo 21 pluss 21, det blir 42. Ida: 42? Anna: Ja, for hvis det er fem [terninger] til. Nei. [Ser usikker ut.] Ida: Men sånn vi har hatt nå, så har det ikke gått an å dele på to. Og 21 går ikke an å dele på to, men 42 går jo an å dele på to. Anna: Da må vi ta bort den ene sida da vet du. Da blir det jo… Ida: Da blir det 41. Anna: Mm. Ida: Blir ikke det mer riktig da? Jo, 41. Anna: Jo. [Begge skriver.]	De utforsker strategien med å doble. Skjønner at de må ta bort den ene sida. Fin dialog, du ser virkelig at de løser dette sammen. Både lokalisering og identifisering skjer i samtalen mellom dem.
17.40-17.55	Kontakt		Helobjekt (doble)	Ida: Hvor mange sider er synlige når vi stabler 20 terninger oppå hverandre? Forklar for hverandre. 42… Nei, 41 pluss 41 det er 82. Anna: Det er 82. Ida: Da blir det 81 da. Anna: Mm. [Begge skriver.]	Bruker strategien fra forrige oppgave, begge er helt med.
				Ida: Hvor mange sider er synlige hvis vi har n	

19.11- 20.55	Kontakt	Lete Id Id Arg Arg Arg	Kontekst	terninger? Ja, altså at vi ikke veit hva for noe terning vi har da? Kan dere finne et regneuttrykk eller formel for dette? [Snur seg mot Anna.] Ja, hvordan tenker du da? Anna: [Leser] Hvor mange sider er synlige hvis man har n terninger? Ida: Men da veit man jo ikke hvor mange terninger man har, så da veit man jo ikke hvor mange synlige sider man har heller. Anna: Det er jo vanligvis fem. Ida: Ja. Men vi vet ikke hvor mange. Så du kan jo si at…. Anna: Da blir det jo…det er… Ida: Du ganger 4 med x da. Og så plusser du det med en. Anna: Hæ? [Ler] Ida: At lissom n…eller at du ganger det med fire. Fire ganger n. Og så plusser du med en på grunn av vi har en på toppen. Vi vet jo ikke hvor mange n er. Anna: Ja. Jeg skjønte ikke helt jeg da men… Ida: Ja, at vi bare ganger, siden vi har fire sider. Anna: Ja. Ida: Og så har vi n. Det er lissom vi vet ikke hvor mange vi har. Anna: Fire ganger n. Ida: Så da ganger vi det med n. [Anna nikker.] Og så plusser vi med en, som er toppen. Siden da vet vi ikke hva som er svaret, siden vi har n. Anna: Ja. Ida: Nå prøvde jeg å være smart her. [Begge ler.]	Ida prøver å forklare flere gangen hvordan hun tenker om regneuttrykket. De gir seg ikke før Anna også forstår, får også hjelp fra lærer før de går videre.

Tid	Koding 1	Koding 2	Koding 3	Samtale	Kommentar
01.20- 02.54	Kontakt Emma og Jakob	Lete	Telle	Jakob: Hvor mange ispinner trengs for å lage fire ruter? 16? Emma: Ja, sikkert. [Teller på figur med tre ruter på arket.] En, to, …., 10. Nei, men jeg tror vi skal lage.. Ja men det er 10 pluss… Det er 13. [Legger ut fyrstikker til en rute.] Du bare gjør sånn og så lager du en til. Jakob: Ja vel. [Legger ut fyrstikker så det blir fire ruter.] [Leo sier noe jeg ikke skjønner] Emma: Sånn. Så teller du. Jakob: Skal jeg telle dette her? En, to, …., 13. Emma: Ja. Jakob: Skal vi skrive 13 da? [Alle skriver.]	Emma ser at det blir tre fyrstikker til hvis de legger på en ekstra rute. Hun veileder Jakob i å legge ut fyrstikker og telle slik at han også ser at det blir 13. Emma og Jakob har kontakt, men Leo er ikke helt med. Han ser på, men sier ikke så mye.
02.54- 04.00	Kontakt Alle	Id	Rekursiv	Jakob: …fem ruter. Vi har akkurat. [Legger ut fyrstikker til fem ruter.] Den siste firkanten var finest. Må vi telle alle igjen da? Emma: Det er bare å legge til tre. Leo: Er det ikke å legge til tre ja? Det var det jeg sa. 16. Jakob: 16 da. Emma: Ja. Skriver dere bare svaret? [Ler] Jakob: Ja. Må vi tegne opp? Emma: Det er koselig å tegne da. [Alle tegner opp ruter på arket som forklaring. De venter til alle er ferdige med å bla om til neste oppgave.]	Alle tre er med på at man legger til tre fyrstikker for en ny rute. De venter på hverandre.
04.00- 05.25	Kontakt Alle			Emma: Hvor mange ispinner trengs det for å lage 10 ruter? Jakob: Da tar vi bare 16 gange…	

		Lete Arg	Helobjekt (doble) Telle for å sjekke svaret	Leo: Er det ikke bare å ta det dobbelte av den? [Peker på de fem rutene på pulten]. Er det ikke? Emma: Sikkert. Jakob: 32 da. [De skriver. Emma tegner opp ruter og teller for å sjekke.] Emma: …7,8,9,… Leo: Skal vi tegne også? Jakob: Ja. Emma: …29,30,31. Jakob: Da mangler du en. Emma: Nei, fordi du fjerner en. Du legger jo ikke på dobbelt der. [Viser med fyrstikkene.] Jakob: Greit da. Emma: Tell da. [Hun teller igjen på tegningen på arket hans for å vise.]	De utforsker strategien med å doble. Emma skjønner at man må ta bort en. Viser med fyrstikker og teller på figur for å få med seg de andre (hvert fall Jakob).
05.27-10.47	Kontakt Alle	Lete Id	Helobjekt (gange 5) Teller for å sjekke	Jakob: 50 da. Da tar vi 10… da tar vi 31 ganger 50, nei det blir… Emma: [Ler] 50! 10.. Jakob: Da tar vi det, og ganger det med 5. Nei, sikkert ikke det heller. Emma: Jo, sikkert, men så må du minuse… Jakob: Dem gjør alt så himla vanskelig. Leo: Hva er det vi skal? Jakob: Nei, nå skal vi lage 50 ruter. Emma: Nei, vi skal ikke det da. Det tar altfor lang tid. Leo: Neida, jeg gjør det fort. [Begynner å tegne opp ruter på arket sitt.] Emma: Okei. [De andre venter. Emma finner etter hvert fram kalkulator.] 31 ganger 5. Det blir 155. Jakob: Minuse med 50 da? Emma: Nei, minuse med 5. Jakob: 155, var det det ble? Emma: Ja. Jakob: Ja, da er det 150 da. Emma: Ja, jeg vet ikke jeg. Vi sier det. Vi får se når han er ferdig [med å tegne.] Jakob: Hvor mange er du på? Leo: Vet ikke. 1,2,3,….,20. Emma: 20. Mangler bare 30. [Emma begynner også å tegne opp ruter på arket sitt. Tegner mye fortere enn Leo, og tar han snart igjen. Da gir han opp.] … [Emma er ferdig med å tegne 50 ruter og teller.] Emma: …150… Leo: Nei? Ble det 150? Emma: Enten 150 eller 151. Jeg vet ikke. Jakob: Tell igjen da. [De går til neste oppgave, men hun går tilbake og teller på nytt litt senere, kommer til 151.]	De utforsker strategien med å gange opp fra ti ruter til 50. Leo vil bidra. Identifiserer en løsningsstrategi, Emma tror de må ta minus fem for å korrigere når de ganger opp. Vil sjekke om utregningen deres stemmer med figuren.

VEDLEGG 3

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

"Utforskende arbeidsmåter i algebra"

Bakgrunn og formål

Algebra er et viktig fagområde i matematikken, og elevene møter dette for alvor i matteundervisningen på 8. trinn. Formålet med prosjektet er å se om utforskende arbeidsmåter, der elevene er mer aktive gjennom problemløsing og diskusjoner, kan ha en positiv effekt på elevenes engasjement og forståelse av algebra når dette temaet introduseres.

Matematikklærerne på 8.trinn, med tilhørende elevgrupper, blir spurt om å delta i prosjektet som er en mastergradsstudie ved Norges miljø- og biovitenskapelige universitet (NMBU, Ås).

Hva innebærer deltakelse i studien?

Vi starter opp med temaet algebra i slutten av januar. Jeg (masterstudent) vil i samarbeid med læreren lage et utforskende undervisningsopplegg til noen av mattetimene. Andre mattetimer blir mer tradisjonelle i formen med repetisjon og oppgaveregning.

I de utforskende mattetimene vil jeg være til stede og observere. Det blir tatt både skriftlige notater og videoopptak mens elevene jobber med opplegget. I tillegg vil noen elever bli spurt om å delta i et intervju i etterkant, der spørsmålene blant annet vil omhandle deres tanker rundt undervisningsopplegget. (En oversikt over spørsmål som blir stilt, kan sendes ut ved forespørsel.)

Hva skjer med informasjonen om deg?

Alt materiale vil bli behandlet konfidensielt, og vil kun benyttes til forskningsformål. Kun jeg og veileder ved NMBU har tilgang til personopplysninger, og min rolle som forsker innebærer at jeg er underlagt strenge etiske regler for hvordan datamaterialet kan brukes. Prosjektet skal etter planen avsluttes i juni 2018, da slettes alle personopplysninger og opptak.

Deltakerne vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjonen.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli slettet. Det får selvfølgelig ingen innvirkning på karakteren i faget dersom du ikke vil delta i studien.

Mvh Ingvild Melnes Vandås
(masterstudent)
tlf 41 92 85 41

Dersom du har spørsmål til studien, ta kontakt med meg eller
Margrethe Naalsund (veileder fra NMBU) tlf 92 80 65 92

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.

Samtykke til deltakelse i studien

Vi har mottatt informasjon om studien, og er villige til å delta

Navn på elev: ______________________________

Kryss av	Ja	Nei
Jeg samtykker til han/hun kan bli observert/filmet i en mattetime med utforskende undervisningsopplegg:	☐	☐
Jeg samtykker til at han/hun kan delta på intervju:	☐	☐

Dato og underskrift foresatte:

____