



Norges miljø- og
biovitenskapelige
universitet

Masteroppgave 2017 30 stp
Fakultetet for realfag og teknologi

Ikke-lineære overflatehevninger fra trykkimpuls på vannoverflate

Nonlinear Free-Surface Flow Due to an Impulsive Surface Pressure

Camilla Mulstad
Miljøfysikk og fornybar energi

Forord

Denne masteroppgaven er skrevet høsten 2017 ved Fakultet for realfag og teknologi ved Norges miljø- og biovitenskapelige universitet. Oppgaven tilsvarer 30 studiepoeng og markerer slutten på min mastergrad i miljøfysikk og fornybar energi.

Denne oppgaven hadde ikke blitt til uten min veileder Peder Tyvand. Takk for en spennende og utfordrende oppgave, og for god veiledning gjennom hele skriveprosessen.

Takk til venner og familie for all støtte og tålmodighet under arbeidet med oppgaven. Til slutt vil jeg rette en stor takk til venner og medstudenter for en uforglemmelig tid på Ås.

Ås, 15.12.17

Camilla Mulstad

Sammendrag

Et ikke-lineært Cauchy-Poisson-problem løses analytisk for små tider. En horisontal vannoverflate i ro settes i gang av en trykkimpuls med infinitesimal varighet. Trykkimpulsene som studeres er multipolfunksjoner fra dipolfelt og kvadrupolfelt. Den resulterende ikke-lineære strømmingen får utvikle seg på den frie overflaten.

Masteroppgaven er delt inn i en Eulersk del og en Lagransk del. I den Eulerske delen studeres de fulle, ikke-lineære overflatehevningene eksakt analytisk opp til tredje orden i en small-time expansion. Strømmingen fra tre ulike scenarier blir analysert: en symmetrisk trykkimpuls, en antisymmetrisk trykkimpuls, og til slutt en asymmetrisk trykkimpuls fra superponering av de to første trykkimpulsene. Resultatene viser at den Eulerske løsningen er gyldig fram til dimensjonsløs tid lik 0, 20 og 0, 10 for henholdsvis dipol-trykkimpuls og kvadrupol-trykkimpuls. I den Lagranske delen settes løsningene opp til andre orden i en small-time expansion.

Resultatene viser at det er godt samsvar mellom full tredjeordens Eulersk løsning og full andreordens Lagransk løsning så langt i tiden den Eulerske løsningen er gyldig som tilnærming.

Abstract

A nonlinear Cauchy-Poisson problem is investigated and solved analytically for small times. An undisturbed surface initially at rest is put into motion by an instantaneous pressure impulse. The pressure impulses being investigated are classes of multipole functions and generates a nonlinear flow on the free surface.

The thesis is divided into two parts: an Eulerian part and a Lagrangian part. In the Eulerian part the nonlinear surface elevations are solved to third order in a small-time expansion. The flow from three different scenarios are being analyzed: a symmetric pressure impulse, an antisymmetric pressure impulse and an asymmetric pressure impulse from a linear combination of the two first cases. The Eulerian solution is valid for dimensionless time less than 0.20 for the dipole-pressure impulse and less than 0.10 for the quadrupole-pressure impulse. In the Lagrangian part nonlinear surface elevations are solved to second order in a small-time expansion.

The results show that the full third order Eulerian solution and the full second order Lagrangian solution coincide.

Innhold

Forord	i
Sammendrag	iii
Abstract	v
1 Innledning	1
I Eulersk beskrivelse	3
2 Eulersk beskrivelse av full ikke-lineær fri overflatestrømning	5
2.1 Matematisk formulering	5
2.2 Rand- og initialbetingelser	6
2.2.1 Randbetingelser	6
2.2.2 Initialbetingelser	7
2.3 Cauchy-Poisson-problemet	8
3 Metode	11
3.1 Small-time expansion	11
3.2 Bevaringslover	13
3.2.1 Massebevaring	13
3.2.2 Impulsbevaring	13
3.3 Small-time expansion til hver orden	14
3.3.1 Første-, andre- og tredjeordens kinematiske betingelser	14
3.3.2 Første-, andre- og tredjeordens dynamiske betingelser	15
4 Løsninger av Laplaces ligning i to dimensjoner	17
4.1 Introduksjon av multipolfunksjoner	17
4.2 Symmetrisk dipol-trykkimpuls	20
5 Trykkimpulsfordelinger fra kvadrupoltype-felt	23
5.1 Symmetrisk kvadrupol-trykkimpuls	24
5.2 Antisymmetrisk kvadrupol-trykkimpuls	31
5.3 Asymmetrisk kvadrupol-trykkimpuls	36
II Lagransk beskrivelse	45
6 Lagransk beskrivelse av full ikke-lineær fri overflatestrømning	47

6.1	Matematisk formulering	47
6.2	Small-time expansion	48
6.3	Kontinuitetsligningen	48
6.4	Bevegelsesligningen	49
6.5	Dynamiske betingelser	49
6.6	Virvelligningen	50
6.7	Potensialformulering	51
7	Lagransk løsning for dipol-trykkimpuls og kvadrupol-trykkimpulser	53
7.1	Første ordens løsning	53
7.1.1	Symmetrisk dipol-trykkimpuls	53
7.1.2	Asymmetrisk kvadrupol-trykkimpuls	54
7.2	Andre ordens løsning	54
7.2.1	Symmetrisk dipol-trykkimpuls	54
7.2.2	Asymmetrisk kvadrupol-trykkimpuls	56
8	Konklusjon	61
	Referanser	63
	Vedlegg	65
A	Første-, andre- og tredjeordens kinematisk betingelse	65
B	Første-, andre- og tredjeordens dynamisk betingelse	73
C	To klasser av harmoniske funksjoner	77

Kapittel 1

Innledning

Cauchy-Poisson-problemet er et klassisk problem innen hydrodynamikk og anvendt matematikk. Problemet deles inn i to delproblemer med ulike starttilstander. Ved det første delproblemet slippes en overflatehevning fra ro og lager en strømning. Ved det andre delproblemet blir en strømning satt i gang som følge av en trykkimpulsfordeling på overflaten [6]. I denne masteroppgaven studeres det andre delproblemet ved å benytte kontinuerlige multipolfunksjoner som trykkimpulser.

De analytiske løsningene av Cauchy-Poisson-problemet er velkjente så fremt problemet er fullstendig linearisert. Debnath (1989) studerte ikke-lineariteter på fri overflate gjennom Lagransk beskrivelse av væskebevegelsen (se [4]). Utenom Debnaths bidrag finnes det lite eller ingen publisert forskning på de ikke-lineære effektene ved strømningsproblemet. Siden de fleste fysiske fenomen følger en iboende ikke-lineær oppførsel, er det interessant å studere slike ikke-lineariteter. En teoretisk utvikling bidrar til å øke forståelsen av ikke-lineære effekter, og dermed vil også omfanget av anvendelsesområder utvides. Ikke-linearitetene i Cauchy-Poisson-problemet vil ha størst betydning for små tider, før tyngden overtar og dominerer prosessen. Får å få en dypere forståelse av ikke-lineære effekter på fri overflate, studeres derfor de tidlige strømningsstadiene av vannbølgeproblemet. Dette blir gjort ved å innføre en asymptotisk ekspansjon som er gyldig for små tider.

Bølgeeffekter som oppstår på fri vannoverflate er av viktig betydning innen maritim arkitektur og havteknikk [7]. Bølger i bevegelse vil kunne påføre belastninger på legemer i vann. Kunnskap om bølgelaster er derfor viktig for å dimensjonere og designutvikle offshore-konstruksjoner og fartøy i vann på en sikker og hensiktsmessig måte. Cauchy-Poisson-problemet er nært beslektet med slamming, som handler om nettopp marine ekstremkrefter på legemer i vann. Den konvensjonelle måten å modellere slamming-problemer på, er å oppgi bevegelsen til legemet, og deretter beregne de resulterende trykkreftene som oppstår. I Cauchy-Poisson-problemet går vi motsatt vei og finner hvilke strømninger som oppstår ved gitte trykkrefter.

Væskebevegelse kan beskrives på to måter; ved Eulersk beskrivelse og ved Lagransk beskrivelse. Ved den Eulerske måten beskrives væskens egenskap ved faste punkter i rommet, hvor romkoordinatene (x, y, z) og tiden t er uavhengige variabler [8]. Ved den Lagranske måten følges de individuelle partiklene og væskepartiklenes egenskaper bestemmes gjen-

nom partikkelforflytningen [9]. For å sammenligne disse metodene, er masteroppgaven delt inn i en Eulersk del og en Lagransk del.

I den Eulerske delen løses strømningsproblemet eksakt opp til tredje orden. Kapittel 2 og kapittel 3 gir grunnlaget for beregningene av ikke-lineær strømning fra de valgte trykkimpulsene. I kapittel 4 introduseres multipolfunksjonene og tredjeordensløsningen av overflatehevningen fra en vertikal dipol-trykkimpuls presenteres. I kapittel 5 studeres interaksjonsprosessene ved superponering av en symmetrisk og en antisymmetrisk kvadrupol-trykkimpuls.

I den Lagranske delen løses strømningsproblemet eksakt opp til andre orden. Kapittel 6 gir en Lagransk beskrivelse av strømningsproblemet. I kapittel 7 sammenlignes de Lagranske resultatene med resultatene fra den Eulerske metoden.

Del I

Eulersk beskrivelse

Kapittel 2

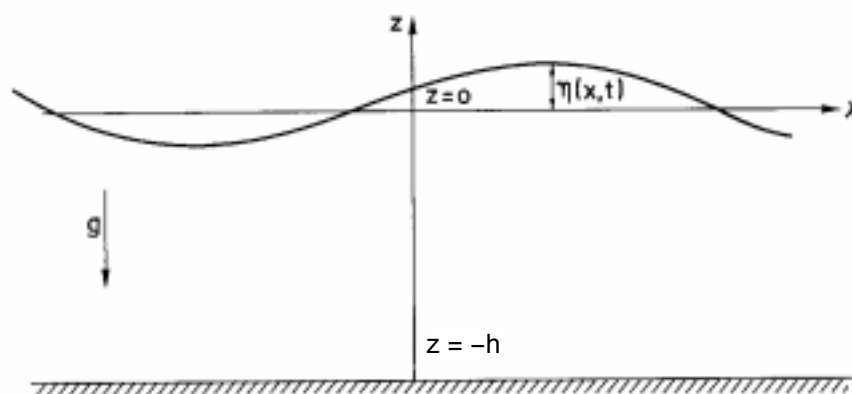
Eulersk beskrivelse av full ikke-lineær fri overflatestrømning

Cauchy Poisson-problemet representerer en horisontal overflate som settes i gang av en hurtig trykkimpulsfordeling på vannoverflaten. Trykkimpulsfordelingen fjernes umiddelbart mens overflaten fortsatt er flat, slik at ikke-lineær strømning får utvikle seg på den frie overflaten.

Vi beskriver overflatebølger ved å anta friksjonsfri, homogen og inkompressibel væske. Vannet har en endelig dybde h og en fri overflate med konstant atmosfærisk trykk p_{atm} . Tyngdens akselerasjon g og vannets tetthet ρ er antatt å være konstant.

2.1 Matematisk formulering

Vi innfører et kartesisk koordinatsystem x, y, z der den frie overflaten ligger i xy -planet og z er vertikalaksen. $\eta(x, y, t)$ betegner overflatehevingen i forhold til horisontalplanet xy . For en todimensjonal bølge er oppsettet som vist i figur 2.1.



Figur 2.1: *Todimensjonal bølge*

Den ikke-viskøse væsken er virvelfri og kan uttrykkes ved Kelvins sirkulasjonsteorem

$$\nabla \times \vec{v} = 0, \quad (2.1)$$

der hastighetsvektoren \vec{v} består av komponentene (u, v, w) . Kelvins sirkulasjonsteorem forteller at en virvelfri væske vil forbli virvelfri ved alle tider t . Dette antyder at det eksisterer et hastighetspotensial $\Phi(x, y, z, t)$ slik at $\vec{v} = \nabla\Phi$. I kartesiske koordinater er hastighetskomponentene

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad \text{og} \quad w = \frac{\partial\Phi}{\partial z}. \quad (2.2)$$

For homogen og inkompressibel strømning kan hastighetspotensialet beskrives med Laplaces ligning

$$\nabla^2\Phi = 0, \quad (2.3)$$

som har gyldighet i hele væskeområdet. For å sikre entydig løsning av ligning (2.3), er det nødvendig å formulere matematiske betingelser ved den frie overflaten. Disse formuleres i neste delkapittel.

2.2 Rand- og initialbetingelser

For å løse partielle differensialligninger som Laplaces ligning (2.3), må det formuleres noen ekstra betingelser. For Cauchy-Poisson-problemet er vi interessert i *randbetingelser* og *initialbetingelser*.

2.2.1 Randbetingelser

Frie overflater forekommer ved grenseflaten mellom to medier. Løsningen av fri overflateproblemer krever to grensebetingelser: (i) En kinematisk betingelse der normalhastighetene på væsken settes lik normalhastighetene på grenseflaten. (ii) En dynamisk betingelse som krever at trykket på overflaten er lik atmosfæretrykket [7].

Variasjonene i overflatehevningen kan uttrykkes ved

$$F(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t) = 0, \quad (2.4)$$

der η uttrykker overflatehevningen.

Fra Lamb (1932) introduserer vi den materialderiverte D/Dt for å betegne den matematiske overflatebevegelsen, der

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad (2.5)$$

Fra ligning (2.4) har vi

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \text{og} \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1,$$

som ved innsetting i ligning (2.5) gir

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (2.6)$$

på flaten $z = \eta(x, y, t)$.

Den ikke-lineære kinematiske overflatebetingelsen er dermed

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \Phi \cdot \nabla \eta = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad z = \eta(x, y, t), \quad (2.7)$$

der ikke-lineariteten kommer inn gjennom produktleddet $\nabla \Phi \cdot \nabla \eta$.

Den ikke-lineære dynamiske overflatebetingelsen kan utledes fra Bernoullis ligning

$$\frac{p - p_{atm}}{\rho} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + gz = 0, \quad (2.8)$$

der atmosfæretrykket p_{atm} framkommer som en integrasjonskonstant. Strømningen går mot null når avstanden fra forstyrrelsen går mot uendelig. Vi setter $p = p_{atm}$ ved $z = 0$ når $|\nabla \Phi| \rightarrow 0$ i fjernfeltet.

Den ikke-lineære dynamiske overflatebetingelsen er dermed

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + g\eta = 0, \quad z = \eta(x, y, t), \quad (2.9)$$

der ikke-lineariteten kommer inn gjennom produktleddet $|\nabla \Phi|^2$. Leddene som inngår i begge overflatebetingelsene evalueres for $z = \eta$, som også gir opphav til ikke-lineære ledd.

Overflatebetingelsene gjelder for $t > 0^+$, etter at trykkimpulsfordelingen har fått virke.

2.2.2 Initialbetingelser

Den frie overflaten er antatt å være horisontal ved tiden $t = 0^+$, slik at

$$\eta(x, y, 0^+) = 0. \quad (2.10)$$

Vi antar at den innledende trykkimpulsfordelingen $P(x, y)$ på overflaten har en infinitesimal varighet $0 < t < 0^+$, før overflaten settes i gang med en endelig vertikal bevegelse $w(x, y, 0, 0^+)$.

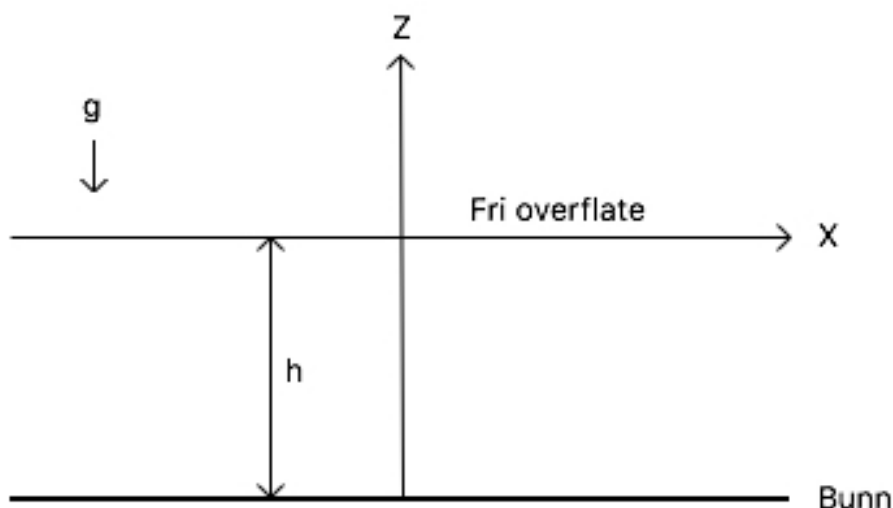
Trykkets initialbetingelse er

$$p(x, y, 0, 0^+) = 0, \quad (2.11)$$

som betyr at overflaten igjen er fri etter at trykkimpulsfordelingen har fått virke.

2.3 Cauchy-Poisson-problemet

Ved starttidspunktet er væsken i ro og okkuperer området mellom $z > -h$ og $z = 0$, langs x -aksen. Figur 2.2 viser en skisse av strømningskonfigurasjonen for tiden $0 < t < 0^+$. Den horisontale grensen $z = -h$ representerer den faste bunnen.



Figur 2.2: *Strømningskonfigurasjonen for tiden $0 < t < 0^+$.*

Vi benytter konseptet trykkimpuls for å beskrive overflateforstyrrelsen som setter i gang strømmingen. Trykkimpulsen $P(x, y)$ har enheten til trykk multiplisert med tid, og er funnet ved å integrere trykket over den korte støttiden. Ettersom trykkimpulsen virker over et infinitesimalt tidsrom, har trykket p uendelig styrke, mens trykkimpulsen er av endelig størrelse. Trykkimpulsen overfører en kraft til vannoverflaten, som setter overflaten i en endelig vertikal bevegelse $w(x, y, 0, 0^+)$. En introduksjon av trykkimpuls har vist seg å være nyttig ettersom eksperimentelle målinger indikerer at bølgeeffektene varierer mindre ved å bruke trykkimpuls sammenlignet med kun trykket (e.g. Bagnold 1939 [1], Richert 1968 [10]).

Vi antar at væsken har en konstant dybde h , men for å sette opp en matematisk løsning, formulerer vi den kinematiske bunnbetingelsen ved uendelig dyp. Den kinematiske bunnbetingelsen er

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \quad z = -h. \quad (2.12)$$

der h er en plan og ugjennomtrengelig horisontal bunnplate.

Kapittel 3

Metode

I dette kapitlet presenteres en matematisk metode for å finne en tilnærmet løsning av det ikke-lineære Cauchy-Poisson-problemet. Vi innfører en asymptotisk ekspansjon for små tider og presenterer eksakte analytiske formler for overflatebetingelsene opp til tredje orden.

3.1 Small-time expansion

Den tidlige utviklingen av overflatebølger følger en iboende ikke-lineær oppførsel. For å undersøke disse ikke-lineære effektene benyttes høyere ordens metoder der grensebetingelsene implementeres. Med en opprinnelig horisontal overflate kan vi introdusere en asymptotisk ekspansjon for å beskrive de tidlige stadiene av den ikke-lineære strømningsprosessen.

Asymptotisk ekspansjon er en approksimasjonsmetode for å finne tilnærmede løsninger av et problem som ikke lar seg løse eksakt [2] [3]. Tyvand og Miloh (1995b) studerte strømmingen fra en sylinder nedsenket horisontalt under en fri overflate. I sin forskning benyttet de en slik perturbasjonsteknikk ved å innføre en asymptotisk ekspansjon for små tider. For å undersøke den tidlige strømmingen introduserer vi en asymptotisk ekspansjon, heretter referert til som *small – time expansion*. Vi postulerer (se Tyvand & Miloh [11], Tyvand & Mulstad [12])

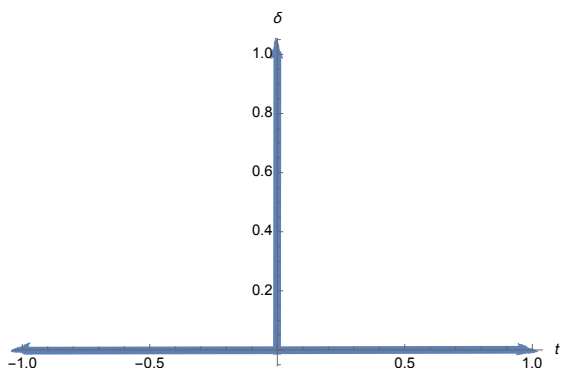
$$(p, \Phi, \eta) = (p_{-1}, 0, 0)\delta(t) + H(t)[(p_0, \phi_0, 0) + t(p_1, \phi_1, \eta_1) + t^2(p_2, \phi_2, \eta_2) + \dots] \quad (3.1)$$

der p er trykket, Φ er hastighetspotensialet og η er overflatehevingen. $\delta(t)$ er Diracs deltafunksjon og $H(t)$ er Heaviside step-funksjonen.

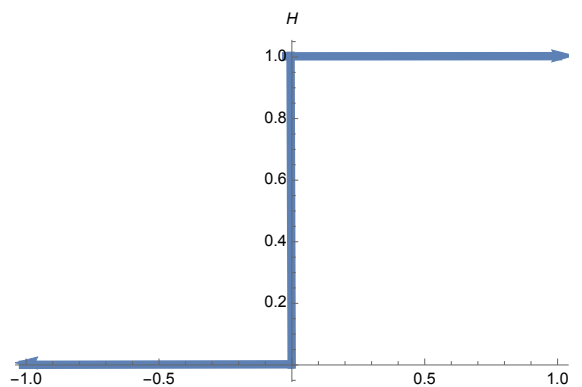
Dirac delta-funksjonen blir også kalt for impulsfunksjonen og kan defineres som den tidsderiverte av Heaviside-funksjonen $H(t)$. Heaviside-funksjonen er introdusert som

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} .$$

En skisse over Dirac delta-funksjonen og Heaviside step-funksjonen er vist i figur 3.1 og figur 3.2.



Figur 3.1: Dirac delta-funksjonen.



Figur 3.2: Heaviside step-funksjonen.

Utviklingen i small-time expansion (3.1) tilsvarer en Taylor-utvikling i tiden. Strømningen løses til tredje orden, og løsningen kan settes opp for overflatehevningen og hastighetspotensialet hver for seg

$$\begin{aligned} \eta &= t\eta_1 + t^2\eta_2 + t^3\eta_3, \\ \Phi &= \phi_0 + t\phi_1 + t^2\phi_2, \end{aligned}$$

når $t > 0^+$.

Den totale overflatehevningen består av tre tidsledd, mens det totale strømningspotensialet består av to tidsledd på grunn av tidssituasjonen til η og Φ . Her representerer venstresiden den lineære beskrivelsen av bølgebevegelsen, mens høyresiden representerer den ikke-lineariserede løsningen. Nøyaktigheten til strømningsløsningen øker når høyere ordener legges til.

Første ledd i (3.1) stammer fra startbetingelsen (2.10), der det ikke eksisterer en overflatehevning η av nulte orden. p_{-1} betegner den totale trykkimpulsen med infinitesimal varighet som utføres på den horisontale overflaten. Som følge av dette rekkes ikke overflatebevegelsen å settes i gang før den raske trykkimpulsen har fått virke. Subskriptet $_{-1}$ er introdusert for å betegne hendelsen før strømningspotensial og overflatehevning er igangsatt. Alle andre kvantiteter beskriver situasjonen etter at trykkimpulsen er satt.

Trykket p_{-1} setter i gang et hastighetspotensial ϕ_0 . Denne relasjonen finner vi ved å sette uttrykket for small-time expansion (3.1) inn i Bernoulliligningen fra ligning (2.8). Vi får

$$p_{-1} = -\rho\phi_0, \tag{3.2}$$

der ϕ_0 er nulte ordens potensial som oppstår ved tiden $t = 0^+$. For denne trykkrelasjonen (3.2) er Dirac delta-funksjonen balansert av den tidsderiverte av ϕ_0 .

Trykkimpulsen som setter væsken i bevegelse kan dermed beskrives ved

$$P(x, y) = p_{-1}(x, y, 0) = -\rho\phi_0(x, y, 0), \quad (3.3)$$

der $P(x, y)$ er en valgt funksjon som representerer årsaken til strømmingen. Våre valgte trykkimpulser presenteres og løses i kapittel 4 og kapittel 5.

3.2 Bevaringslover

For å sikre at beregningene som utføres er matematisk konsistente og med fysisk gyldighet, sjekkes de mot bevaringslover. Det er i utgangspunktet to bevaringslover av interesse:

Massebevaring

Vannet skyves til side og danner overflatehevninger som faller ned igjen og utløser tyngdesvingninger.

Impulsbevaring

Kraftimpulsen som treffer vannoverflaten blir omgjort til bevegelsesmengde i vannet.

3.2.1 Massebevaring

Overflatehevningen $\eta(x, y, t)$ representerer den rent vertikale bevegelsen på den matematiske frie overflaten. Ingen masse blir overført i trykkstøtet slik at det gjennomsnittlige overflatenivået er konstant. Det betyr at integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_n(x, y) dx dy = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.4)$$

må gjelde når vi antar uendelig dyp.

Dette integralet gir oss en nyttig sjekk på at de beregnede overflatehevningene til hver orden er korrekt.

3.2.2 Impulsbevaring

Kraften fra den igangsatte initialstrømmingen $w(x, y, 0, 0)$ overfører en netto nedadgående bevegelsesmengde til væsken. Vi betrakter en vertikal søyle under et infinitesimalt arealelement $dx dy$. Trykkimpulsen mot dette arealelementet må være lik den samlede bevegelsesmengden i vertikalretning. Bevaring av bevegelsesmengde under et slikt område er gitt ved

$$dxdy \int_0^{0^+} (p(x, y, -h, t) - p(x, y, 0, t))dt = \rho dxdy \int_{-h}^0 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{t=0^+} dz. \quad (3.5)$$

Vi har fra ligning (2.11) at initialtrykket er null på flaten $z = 0$. Siden trykket på bunnen er ukjent, betrakter vi tilfellet med uendelig dyp. Ved $h \rightarrow \infty$ blir integralet i ligning (3.5)

$$-p_{-1}(x, y, 0) = \rho \Phi(x, y, 0, 0^+), \quad (3.6)$$

som er identisk med hva vi fant i ligning (3.3).

3.3 Small-time expansion til hver orden

Laplaces ligning må være gyldig i hver orden i small-time expansion

$$\nabla^2 \phi_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, .. \quad (3.7)$$

der hastighetsfeltet til hver orden er $\vec{v}_n = \nabla \phi_n$

De høyere ordens strømningsbetingelser utledes ved å introdusere en fri overflate-operator

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{\text{overflate}} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (3.8)$$

når overflatehevningen $\eta(x, y)$ følger en strengt vertikal bevegelse.

Denne operatoren brukes suksessivt ved å sette inn small-time expansion ved hvert trinn, og til slutt ta grensen $t \rightarrow 0$. Utover i oppgaven vil det fra nå benyttes senket skrift for å betegne de partiellderiverte. De ikke-lineære høyere ordens randbetingelser er utarbeidet i Mathematica. Fullstendig utledning av første-, andre- og tredjeordens kinematisk betingelse er vist i Vedlegg A, og fullstendig utledning av første-, andre- og tredjeordens dynamisk betingelse er vist i Vedlegg B.

3.3.1 Første-, andre- og tredjeordens kinematiske betingelser

Gjennom small-time expansion anvendes den ikke-lineære kinematiske randbetingelsen på andre områder enn kun den horisontale uforstyrrede vannflaten $z = 0$. Dette innebærer et nytt opphav til ikke-lineære effekter, i tillegg til produktleddet i den kinematiske betingelsen som gjelder ved overflaten.

De tre første ordener av kinematisk betingelse (2.7) utledes til

$$\eta_1 = \phi_{0z}, \quad z = 0, \quad (3.9)$$

$$2\eta_2 = \phi_{1z} + \eta_1\phi_{0zz} - \nabla\eta_1 \cdot \nabla\phi_0, \quad z = 0, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} 6\eta_3 = & 2\phi_{2z} + 2\eta_2\phi_{0zz} + 2\eta_1\phi_{1zz} - \eta_1^2\nabla^2\eta_1 \\ & - 2\nabla\phi_1 \cdot \nabla\eta_1 - 2\nabla\phi_0 \cdot \nabla\eta_2 - 2\eta_1|\nabla\eta_1|^2, \quad z = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Formlene viser en økning i kompleksitet for hver orden. Første ordens kinematisk betingelse (3.9) viser at nulte ordens potensial vil bygge opp en overflatehevning som en lineær funksjon av tiden, som følge av treghet i væsken. Andre ordens overflatehevning er en funksjon bestående av nulte og første ordens potensial, som tilsvarer henholdsvis første og andre ordens dynamisk betingelse. I tillegg oppstår de nye leddene ϕ_{0x} og ϕ_{0y} som følge av trykkimpulsen på overflaten. Tredje ordens overflatehevning er en funksjon bestående av første og andre ordens overflatehevning, i tillegg til potensialet opp til andre orden.

3.3.2 Første-, andre- og tredjeordens dynamiske betingelser

Fra ligning (3.3) har vi ledende ordens dynamisk betingelse

$$\phi_0(x, y, 0) = -\frac{P(x, y)}{\rho}. \quad (3.12)$$

Formelen forteller at det oppstår et hastighetspotensial av nulte orden fra den eksterne trykkimpulsen $P(x, y)$.

De neste to ordener av den dynamiske betingelsen finner vi ved å sette uttrykket for small-time expansion inn i den dynamiske betingelsen i ligning (2.9). Det gir

$$\phi_1 = -\frac{1}{2}|\nabla\phi_0|^2, \quad z = 0, \quad (3.13)$$

etter å ha evaluert uttrykket ved $t = 0$. Deretter bruker vi fri overflate-operatoren (3.8) for å utlede den tredje ordens dynamiske betingelse

$$2\phi_2 = -\eta_1\phi_{1z} - \nabla\phi_0 \cdot \nabla\phi_1 - \eta_1\nabla\phi_0 \cdot \nabla\phi_{0z} - g\eta_1, \quad z = 0, \quad (3.14)$$

også evaluert ved tiden $t = 0$.

Disse tre ligningene beskriver hvilke størrelser som må defineres for å bestemme de tre første ordenene av strømningsfeltet. For første ordens dynamisk betingelse trenger vi først å vite trykkimpulsen på vannoverflaten. Trykkimpulsen induserer et nulte ordens potensial, som benyttes for beregning av første ordens potensial. Første ordens potensial setter opp en overflatehevning η_1 som gjør det mulig å finne andre ordens potensial.

Formlene viser at det kun finnes ett tyngdeledd, som dette tyngdeleddet kommer først inn i tredje ordens dynamisk betingelse.

Til nå er formelene vi har utledet gyldig for tredimensjonal strømning. Beregningene i kapittel 4 og kapittel 5 vil være begrenset til todimensjonal strømning, der vi antar uendelig dybde $h \rightarrow \infty$.

Kapittel 4

Løsninger av Laplaces ligning i to dimensjoner

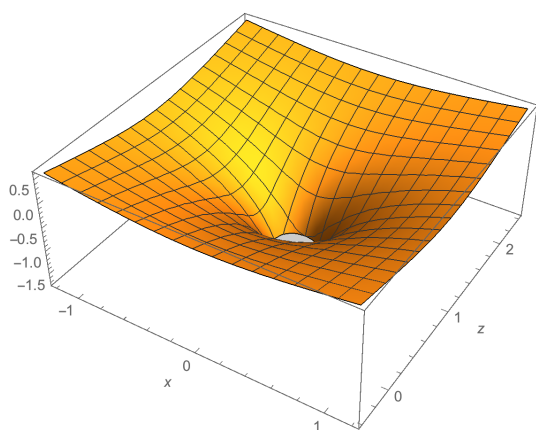
4.1 Introduksjon av multipolfunksjoner

Den valgte trykkimpulsen er en funksjon som må oppfylle Laplaces ligning, og funksjonen gir grunnlag for de høyere ordens løsninger. Løsninger av Laplaces ligning er harmoniske funksjoner og kalles også for potensialfunksjoner.

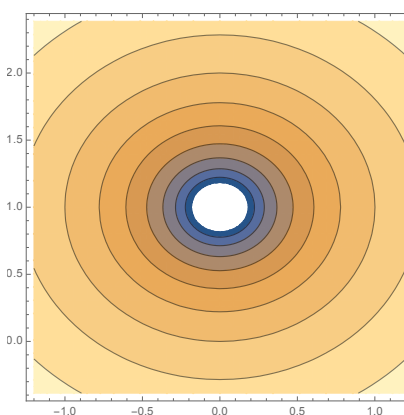
En slik løsning kan ha formen

$$\chi = \frac{1}{2} \log(x^2 + (z - 1)^2).$$

Vi lar χ representere et kildepotensial i et fiktivt punkt $(0, 1)$ over vannflaten. Figur 4.1 viser en fremstilling av kildepotensialet ved (a) 3D-plott og (b) konturplott.



(a) 3D-plott av kildepotensialet



(b) Konturplott av kildepotensialet

Figur 4.1: Kildepotensialet χ lokalisert i punktet $(x, z) = (0, 1)$.

Kildepotensialets gradienter gir førsteordensfunksjonene

$$f_1(x, z) = -\frac{\partial\chi}{\partial z} = \frac{1-z}{x^2 + (z-1)^2}, \quad (4.1)$$

$$g_1(x, z) = \frac{\partial\chi}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + (z-1)^2}. \quad (4.2)$$

Vi introduserer multipolfunksjonene $f_n(x, z)$ og $g_n(x, z)$. Dette er harmoniske funksjoner som er blitt utarbeidet av Tyvand og Miloh (1995b) ved analytiske utvidelser i halvplanet $z < 0$. Funksjonene er definert av grenseverdien $z = 0$

$$f_n(x, 0) = (1 + x^2)^{-n}, \quad (4.3)$$

$$g_n(x, 0) = x(1 + x^2)^{-n}, \quad (4.4)$$

der $n = 1, 2, 3, \dots$

Multipolfunksjonen av orden n beregnes suksessivt ved å derivere funksjonen av orden $n - 1$ med hensyn på z . Funksjonene er blitt beregnet opp til tiende orden og er gitt i Vedlegg C.

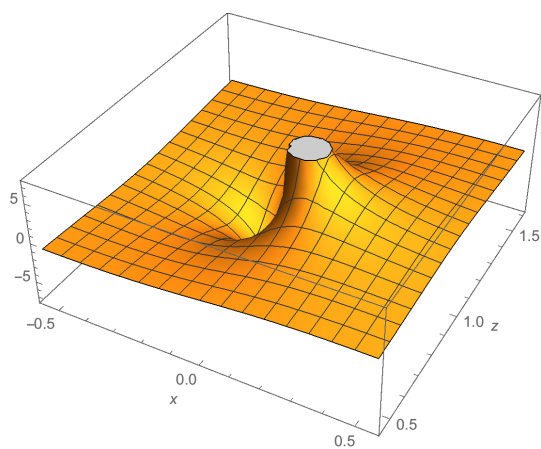
Fra Vedlegg C får vi andreordensfunksjonene

$$f_2(x, z) = \frac{2 - 5z - x^2z + 4z^2 - z^3}{2(x^2 + (z-1)^2)^2}, \quad (4.5)$$

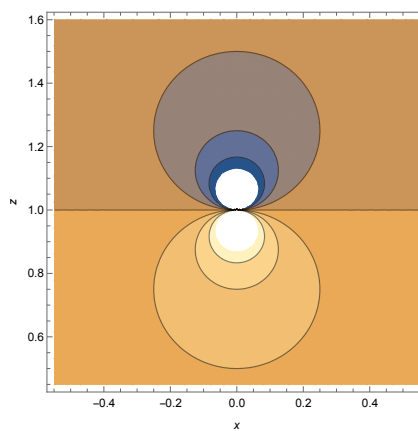
$$g_2(x, z) = \frac{x(1-z)}{(x^2 + (z-1)^2)^2}, \quad (4.6)$$

som vi benytter oss av når vi studerer kvadrupol-trykkimpulser.

Multipolene framkommer ved derivasjoner av det komplekse logaritmepotensialet. En gangs derivasjon av det komplekse logaritmepotensialet gir et system bestående av én kilde og et sluk, der kilde og sluk er av samme styrke, men med motsatt fortegn. Dette mønsteret er vist i figur 4.2 og blir ofte referert til som dipol. Ved to gangers derivasjon dannes det et mønster bestående av to kilder og to sluk av samme styrke, vist i figur 4.3. Dette mønsteret er assosiert med en kvadrupol.

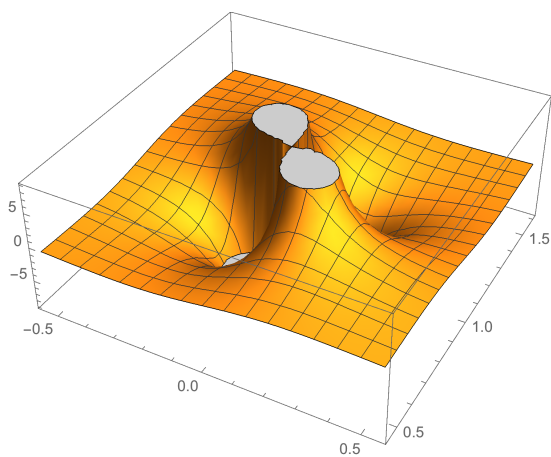


(a) 3D-plott av f_1 .

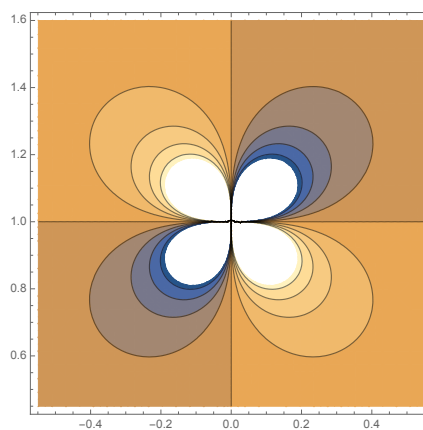


(b) Konturplott av f_1 .

Figur 4.2: Vertikalt dipol-felt.



(a) 3D-plott av g_2 .



(b) Konturplott av g_2 .

Figur 4.3: Kvadrupol-felt.

4.2 Symmetrisk dipol-trykkimpuls

Tyvand og Mulstad (2017) har allerede studert overflatehevningene fra en symmetrisk dipol-trykkimpuls (se [12]). Før vi studerer kvadrupol-trykkimpulser, gjengir jeg først disse resultatene.

Trykkimpulsen induserer et nulte ordens potensial, som på dimensjonsløs form er

$$\phi_0(x, z) = -f_1(x, z). \quad (4.7)$$

Fra dette fant Tyvand og Mulstad første ordens overflatehevning

$$\eta_1(x) = (f_1 - 2f_2)_{z=0}. \quad (4.8)$$

Videre er andre ordens overflatehevning

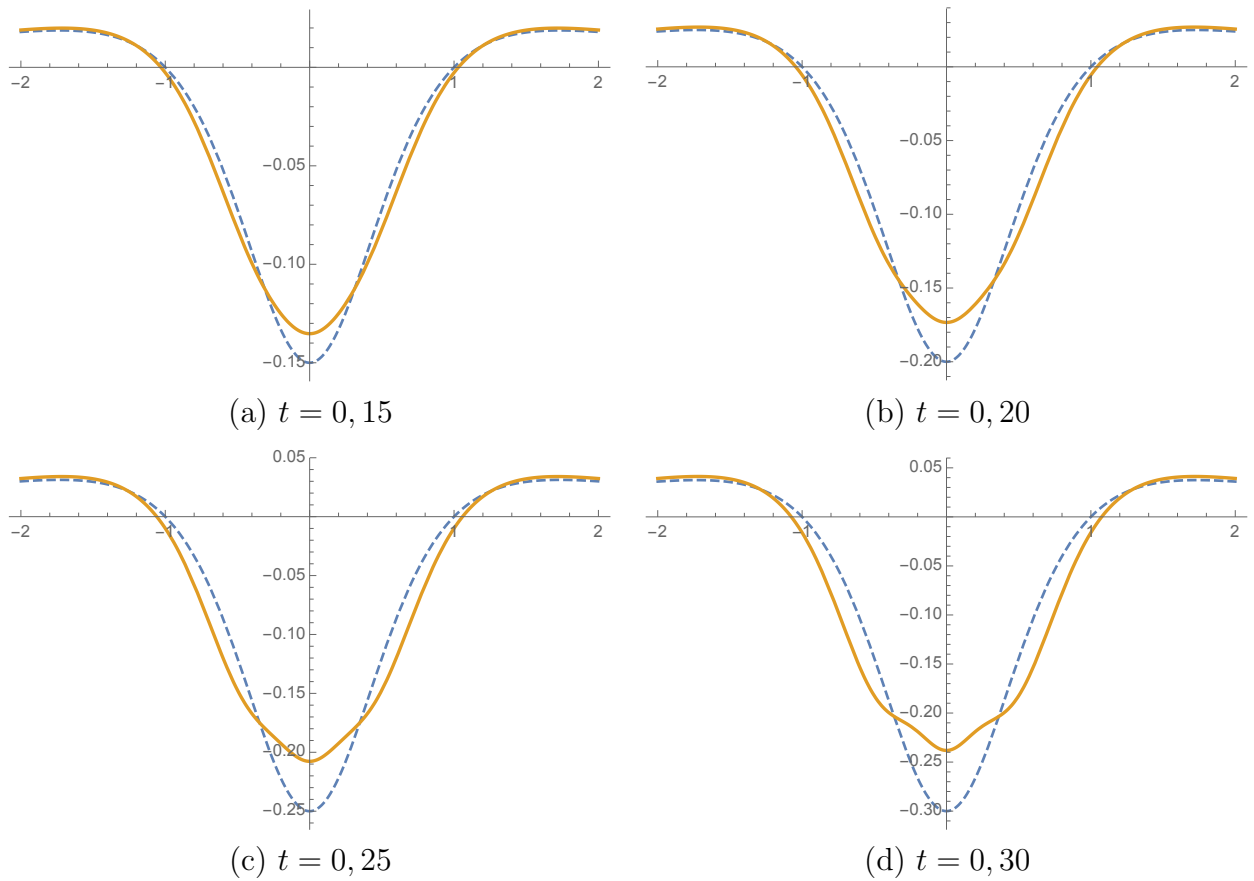
$$\eta_2(x) = \left(\frac{f_1}{8} + \frac{f_2}{2} + 4f_3 - 20f_4 + 16f_5 \right)_{z=0}, \quad (4.9)$$

og til slutt tredje ordens overflatehevning

$$\eta_3(x) = \left(\frac{f_2}{8} + \frac{f_3}{4} + \frac{11}{6}f_4 + \frac{100}{3}f_5 - 260f_6 + 448f_7 - 224f_8 + G \left(-f_2 + \frac{4}{3}f_3 \right) \right)_{z=0} \quad (4.10)$$

Overflatehevningen er plottet i figur 4.4 ved $G = 0$ og ulike dimensjonsløse tider. Figuren viser hvordan den fulle tredjeordensløsningen (heltrukket linje, oransje) avviker fra lineær teori (stiplet linje, blå). Fram til dimensjonsløs tid lik 0, 20 har løsningen en glatt kurve. Etter dette bryter den asymptotiske serien sammen og modellen er ikke lenger gyldig for å beskrive strømmingen.

I slamming-modellering er horisontalhastigheten lik null på den frie overflaten utenfor legemet. Det er derfor ønskelig at trykkimpulsene som setter i gang strømmingen ikke har en sterk horisontal strømningskomponent på overflaten. Den induserte vertikalhastigheten fra multipolfordelingene har en dipoloppførsel i fjernfeltet for hver orden. Ved økende multipolfunksjon vil den horisontale overflatehastigheten reduseres. Ved å benytte kvadrupolfelt som trykkimpulser framfor dipolfelt, vil den horisontale overflatehastigheten bli ubetydelig i forhold til vertikalhastigheten. For kvadrupol-trykkimpulser er overflaten tilnærmet fri i fjernfeltet mens trykkimpulsen virker, noe som ikke er tilfelle for dipol-trykkimpulser. Dette gjør at trykkimpulsene fra kvadrupolfelt har en sterkere tilknytning til slamming-problematikk enn trykkimpulsene fra dipolfelt. I kapittel 5 studeres ikke-linearitetene fra kvadrupol-trykkimpulser.



Figur 4.4: Overflatehevingen etter en symmetisk dipol-trykkimpuls. Stiplet linje (blå) viser lineær teori og heltrukken linje (oransje) viser full tredje ordens løsning av overflatehevingen for dimensjonsløs tid a) $t = 0, 15$, b) $t = 0, 20$, c) $t = 0, 25$ og d) $t = 0, 30$.

Kapittel 5

Trykkimpulsfordelinger fra kvadrupoltype-felt

Bølgebevegelsene som oppstår på vannoverflaten vil variere etter hvilken trykkimpuls overflaten utsettes for. I dette kapitlet studerer vi hvordan bølgefasjonen utvikler seg for små tider, når trykkimpulsene er en multipolfunksjon av klassen kvadrupol.

Vi studerer tre tilfeller av kvadrupol-trykkimpulser:

5.1 Symmetrisk kvadrupol-trykkimpuls

Det første scenariet er en trykkimpulsfordeling som er symmetrisk om $x = 0$.

5.2 Antisymmetrisk kvadrupol-trykkimpuls

Det andre scenariet er en trykkimpulsfordeling som er antisymmetrisk om $x = 0$.

5.3 Asymmetrisk kvadrupol-trykkimpuls

Det tredje scenariet er en lineær kombinasjon av det første og det andre scenariet, der trykkimpulsfordelingen er asymmetrisk om $x = 0$.

Trykkimpulsene vi studerer genereres av en matematisk kilde i punktet $(x, z) = (0, L)$, utenfor væskeområdet. Trykkimpulsfordelingene er kontinuerlige og dekker hele overflaten. På den måten unngås singulariteter i strømmingen slik at small-time expansion er gyldig som metode. I analysen av fri overflatestrømning benyttes Mathematica for håndtering av funksjoner. Overflatehevningene beregnes gjennom de vertikaldेरiverte av funksjonene f_n og g_n . Disse formlene finnes i Vedlegg C.

5.1 Symmetrisk kvadrupol-trykkimpuls

Vi ser først på den symmetriske trykkimpulsen som skyldes en fiktiv kvadrupol i punktet $(0, L)$. Kvadrupolen gir et symmetrisk trykkimpulsfelt bestemt av den harmoniske funksjonen f_2 i ligning (4.5).

Det symmetriske trykkimpulsfeltet er valgt som følgende harmoniske funksjon

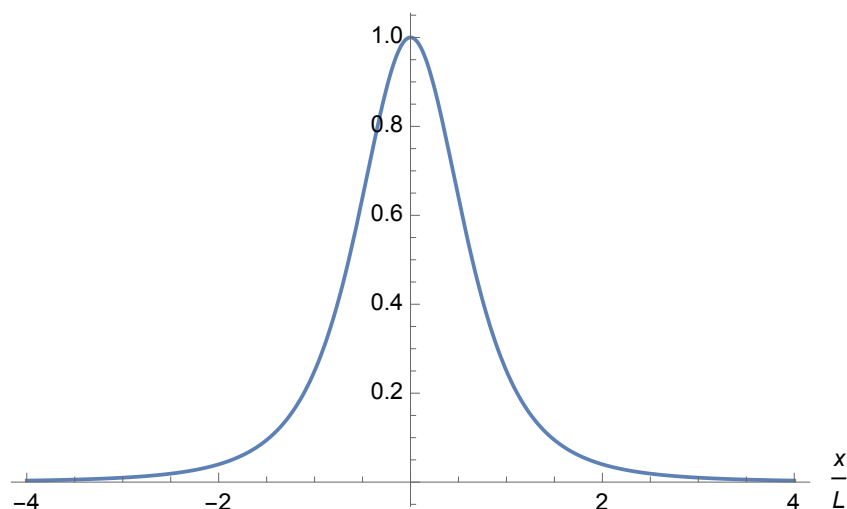
$$p_{-1}(x, z) = P_0 \frac{2 - 5(z/L) - (x/L)^2(z/L) + 4(z/L)^2 - (z/L)^3}{2((x/L)^2 + (z/L - 1)^2)}, \quad (5.1)$$

der P_0 er trykkimpulsens amplitude og L er avstanden fra det fiktive singuærpunktet $(x, z) = (0, L)$.

Det gir en trykkimpuls

$$P(x) = p_{-1}(x, 0) = P_0 \frac{1}{((x/L)^2 + 1)^2} \quad (5.2)$$

på overflaten, illustrert i figur 5.1.



Figur 5.1: *Symmetrisk trykkimpuls.*

Trykkimpulsen induserer et nulte ordens potensial

$$\begin{aligned} \phi_0(x, z) &= -\frac{p_{-1}(x, z)}{\rho} \\ &= -\frac{P_0}{\rho} \frac{2 - 5(z/L) - (x/L)^2(z/L) + 4(z/L)^2 - (z/L)^3}{2((x/L)^2 + (z/L - 1)^2)}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

For å kunne fortsette studien på dimensjonsløs form, må det innføres dimensjonsløse variabler. Vi setter opp $P_0/(\rho L)$ som variabler for hastighet (med enhet m/s), og $\rho L^2/P_0$

som variabler for tid (med enhet s). Vi lar dimensjonsløs tid t^* være definert ved $\frac{P_0}{\rho L^2} t$. Tilsvarende er de dimensjonsløse størrelsene $\phi^* = \phi \frac{\rho}{P_0}$, $\eta^* = \frac{\eta}{L}$, $x^* = x/L$ og $z^* = z/L$. Videre i oppgaven beskrives de dimensjonsløse variablene uten stjerne.

Høyere ordens randbetingelser er dimensjonsløs opp til tredje ordens dynamisk betingelse. Her må tyngdeakselerasjonen g erstattes med en dimensjonsløs tyngdeparameter G . Den dimensjonsløse tyngdeparameteren G defineres som

$$G = \frac{\rho^2 L^3}{P_0^2} g, \quad (5.4)$$

der ρ er vannets tetthet med enhet kg/m^3 , L er trykkimpulsens bredde med enhet m, g er tyngdens akselerasjon med enhet m/s^2 , og P_0 er trykkimpulsens amplitude med enhet $\text{Pa} \cdot \text{s}$.

Tyngdeparameteren beskriver viktigheten av tyngden i et tidlig ikke-lineært fri-overflateproblem. Parameteren er proporsjonal med trykkimpulsens horisontale bredde i tredje potens, og omvendt proporsjonal med kvadratet av trykkimpulsens amplitude.

For vårt todimensjonale problem, kan tredje ordens dynamisk betingelse skrives som

$$2\phi_2 = -2\eta_1\phi_{1z} - \phi_{0x}\phi_{1x} - \eta_1\eta_1'\phi_{0x} + \eta_1^2\phi_{0xx} - G\eta_1, \quad z = 0, \quad (5.5)$$

der tyngdeakselerasjonen g er blitt erstattet med den dimensjonsløse tyngdeparameteren G , og η_1' er den horisontalderiverte av første ordens overflatehevning.

På dimensjonsløs form blir nulte ordens potensial

$$\phi_0(x, z) = -f_2(x, z). \quad (5.6)$$

Satt inn i den dynamiske betingelsen (3.13) for første ordens potensial, får vi

$$\phi_1(x, 0) = -\frac{1}{8(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{(x^2 + 1)^3} = -\frac{1}{8}f_2(x, 0) - f_3(x, 0). \quad (5.7)$$

Ved analytisk utvidelse er $\phi_1(x, z) = -f_2(x, z)/8 - f_3(x, z)$ i det frie, uforstyrrede vannområdet $z \leq 0$.

Fra de kinematiske betingelsene (3.9) - (3.10) kan vi nå regne ut første og andre ordens overflatehevning

$$\begin{aligned} \eta_1(x) &= \phi_{0z}|_{z=0} \\ &= \left(\frac{1}{2}f_1 + 2f_2 - 4f_3 \right)_{z=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{2}g_1 - g_2 \right)_{z=0} \end{aligned} \quad (5.8)$$

og

$$\begin{aligned}
\eta_2(x) &= \frac{1}{2}(\phi_{1z} - \eta_1\phi_{0xx} - \eta_1'\phi_{0x}) \Big|_{z=0} \\
&= \left(\frac{7}{32}f_1 + \frac{1}{2}f_2 + \frac{5}{4}f_3 + 4f_4 + 28f_5 - 128f_6 + 96f_7 \right)_{z=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{7}{32}g_1 - \frac{5}{16}g_2 - \frac{1}{2}g_3 - g_4 - 4g_5 + 8g_6 \right)_{z=0},
\end{aligned} \tag{5.9}$$

hvor Vedlegg C er blitt benyttet.

I kapittel 3 ble det innført en kontroll for massebevaring av overflatehevningen til hver orden. Massen er bevart dersom f_n -funksjonene for overflatehevningene er integrerbar i x -retning. Her er de symmetriske f_n -funksjonene i andre linje blitt omskrevet til en sum av horisontalt differensierte antisymmetriske g_n -funksjoner. Kun ved helt presis sammensetning av koeffisienter og f_n -funksjoner vil integrering av f -funksjonene gi rene g -funksjoner. Tredje linje i ligning (5.8) og (5.9) bekrefter derfor massebevaring for overflatehevningen av første og andre orden. Ved innsetting av grensene blir integralene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta_1 dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \eta_2 dx = 0.$$

Tredje ordens dynamiske betingelse (5.5) gir andre ordens potensial

$$\begin{aligned}
2\phi_2 &= -2\eta_1\phi_{1z} - \phi_{0x}\phi_{1x} - \eta_1\eta_1'\phi_{0x} + \eta_1^2\phi_{0xx} - G\eta_1 \\
&= -\frac{7}{16}f_2 - \frac{11}{4}f_3 - 3f_4 - f_5 + 10f_6 + G \left(-\frac{1}{2}f_1 - 2f_2 + 4f_3 \right), \quad z = 0.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Den totale tredje ordens overflatehevning har vi fra tredje ordens kinematisk betingelse (3.11)

$$6\eta_3 = \left(2\phi_{2z} + 2\eta_2\phi_{0zz} + 2\eta_1\phi_{1zz} - \eta_1^2\nabla^2\eta_1 - 2\nabla\phi_1 \cdot \nabla\eta_1 - 2\nabla\phi_0 \cdot \nabla\eta_2 - 2\eta_1|\nabla\eta_1|^2 \right)_{z=0}. \tag{5.11}$$

Dette er besværlige beregninger, og et nyttig tiltak vil derfor være å dele ligningen opp i kategoriske grupper. Bidragene til η_3 kan deles inn i

$$\eta_3 = \eta_{33} + \eta_{321} + \eta_{3111}, \tag{5.12}$$

der η_{33} betegner de direkte bidragene fra andre ordens potensial, η_{321} er bidragene fra andreordensløsningen som interagerer med førsteordensløsningen og η_{3111} betegner bidragene fra førsteordensløsningen som interagerer tre ganger med seg selv.

Det første bidraget er

$$\begin{aligned}\eta_{33} &= \left. \frac{\phi_{2z}}{3} \right|_{z=0} \\ &= \frac{1}{6} \left(-\frac{7}{16} f_{2z} - \frac{11}{4} f_{3z} - 3f_{4z} - f_{5z} + 10f_{6z} + G \left(-\frac{1}{2} f_{1z} - 2f_{2z} + 4f_{3z} \right) \right)_{z=0},\end{aligned}\tag{5.13}$$

som ved innsetting fra Vedlegg C gir

$$\begin{aligned}\eta_{33} &= \left(\frac{33}{128} f_2 + \frac{29}{32} f_3 - \frac{43}{24} f_4 - \frac{17}{3} f_5 - \frac{35}{3} f_6 + 20f_7 + G(-f_1 - 4f_2 - 2f_3 + 12f_4) \right)_{z=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{11}{128} g_2 - \frac{1}{4} g_3 + \frac{1}{24} g_4 + \frac{2}{3} g_5 + \frac{5}{3} g_6 + G(g_1 + 2g_2 + 2g_3) \right)_{z=0}.\end{aligned}\tag{5.14}$$

Andre linje bekrefter at massebalansen er oppfylt både for gravitasjonsleddene og for leddene uten gravitasjonsbidrag.

Det neste bidraget stammer fra interaksjonen mellom første- og andreordensløsningen

$$\begin{aligned}\eta_{321} &= \frac{1}{3} (\eta_2 \phi_{0zz} + \eta_1 \phi_{1zz} - \phi_{1x} \eta'_1 - \phi_{0x} \eta'_2)_{z=0} \\ &= \left(\frac{21}{8} f_4 + 15f_5 + 35f_6 - \frac{284}{3} f_7 + \frac{1792}{3} f_8 - \frac{10496}{3} f_9 + 5504f_{10} - 2560f_{11} \right)_{z=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{3}{8} g_4 - 2g_5 - 5g_6 + \frac{8}{3} g_7 - \frac{112}{3} g_8 + \frac{512}{3} g_9 - 128g_{10} \right)_{z=0},\end{aligned}\tag{5.15}$$

og til slutt

$$\begin{aligned}\eta_{3111} &= -\frac{1}{6} (\eta_1^2 \eta_1'' + 2\eta_1 (\eta_1')^2) \\ &= \frac{1}{3} \left(-\frac{7}{8} f_4 - 17f_5 - 36f_6 + 473f_7 + 392f_8 - 5248f_9 + 8256f_{10} - 3840f_{11} \right)_{z=0} \\ &= \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{8} g_4 + 2g_5 + 5g_6 - 32g_7 - 56g_8 + 256g_9 - 192g_{10} \right)_{z=0}.\end{aligned}\tag{5.16}$$

Disse tre bidragene oppfyller massebevaring hver for seg

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta_{33} dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \eta_{321} dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \eta_{3111} dx = 0. \quad (5.17)$$

Bidragene summeres og den totale tredje ordens overflatehevning blir

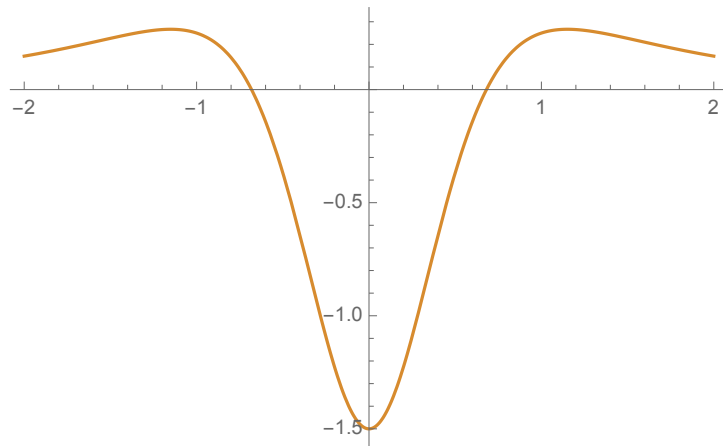
$$\begin{aligned} \eta_3(x) &= \eta_{33} + \eta_{321} + \eta_{3111} \\ &= \left(\frac{33}{128} f_2 + \frac{29}{32} f_3 + \frac{13}{24} f_4 + \frac{11}{3} f_5 + \frac{35}{3} f_6 + 84 f_7 + 728 f_8 - 5248 f_9 + 8256 f_{10} - 3840 f_{11} \right. \\ &\quad \left. + G(-f_1 - 4f_2 - 2f_3 + 12f_4) \right)_{z=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{11}{128} g_2 - \frac{1}{4} g_3 - \frac{7}{24} g_4 - \frac{2}{3} g_5 - \frac{5}{3} g_6 - 8g_7 - 56g_8 + 256g_9 - 192g_{10} \right. \\ &\quad \left. + G(g_1 + 2g_2 + 2g_3) \right)_{z=0} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Utviklingsforløpet for overflatehevningen fra den symmetriske kvadrupol-trykkimpulsen er skissert i figur 5.2. Trykkimpulsen lager en symmetrisk bølgedal. Vannet presses opp på sidene fra det lokale forstyrrelsesområdet og gir første ordens overflatehevning, som vist i figur 5.2a. Figur 5.2b viser hvordan overflaten responderer for å nå sin opprinnelige form. Bølgedalen i figur (a) erstattes med en høyere og spissere bølgetopp i figur (b). Tredje ordens overflatehevning følger samme trend, der bølgetoppen i figur (b) erstattes av en dypere og spissere bølgedal. For hver ny orden dannes det én ny bølgetopp og én ny bølgedal.

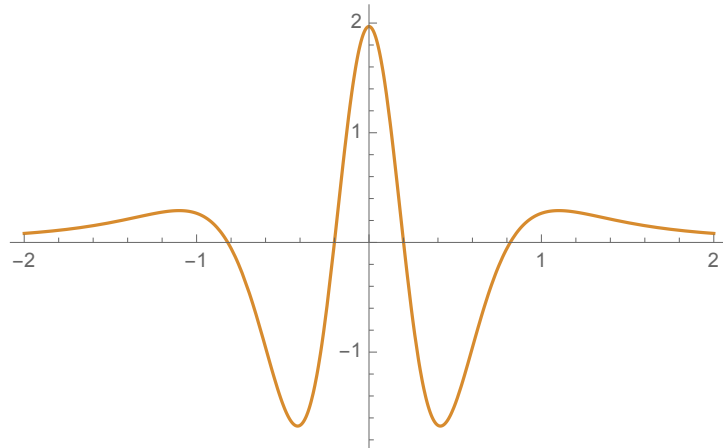
Figur 5.3 viser at den fulle tredjeordensløsningen for den symmetriske trykkimpulsen forblir symmetrisk om $x = 0$. Stiplet linje (blå) viser overflatehevningen fra lineær teori, og heltrukken linje (oransje) viser tredjeordens ikke-lineær overflatehevning. Løsningene er presentert ved ulike dimensjonsløse tider t . Sammenlignet med lineær teori viser figuren at overflatehevningene får en høyere amplitude ved full tredje ordens løsning. Nullpunktene skyves gradvis mer vekk fra sentrum ved en økning i dimensjonsløs tid. I tillegg viser figuren at den ikke-lineære løsningen gir kortere bølgedaler enn ved lineær teori.

Figur 5.3 viser betydningen av ikke-lineære effekter ved $G = 0$ og gir en indikasjon på hvor langt i tiden vi kan anta at den totale ikke-lineære løsningen er gyldig som tilnærming. Vi kan anta at den fulle tredjeordensløsningen er gyldig fram til dimensjonsløs tid $t = 0, 10$. For t over 0,10 får modellen en misformet fasong og den asymptotiske serien bryter sammen. Dette er lavere enn vi fant for dipolfeltet, som tyder på at modellen blir mer unøyaktig når multipolfunksjonene vi betrakter øker i orden n .

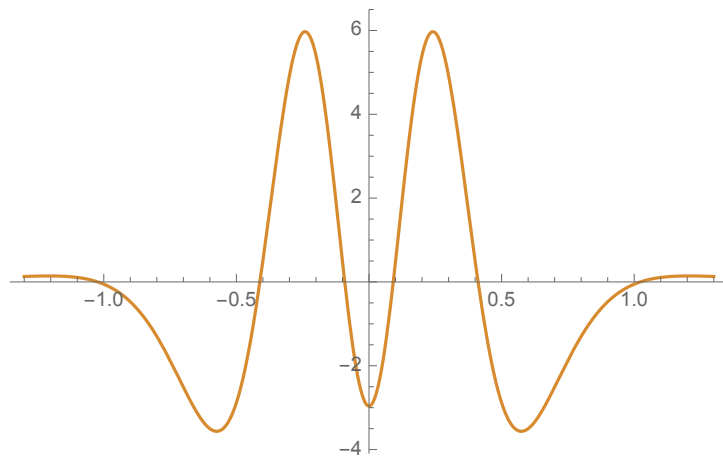
Den dimensjonsløse tyngdeparameteren må være liten for at de ikke-lineære effektene skal få tid til å utvikle seg. Når vi lar tyngden få virke vil hevningene fra horisontalaksen bli mindre sammenlignet med når $G = 0$. I tillegg vil økende G resultere i en stadig mer



(a) Første ordens overflatehevning.

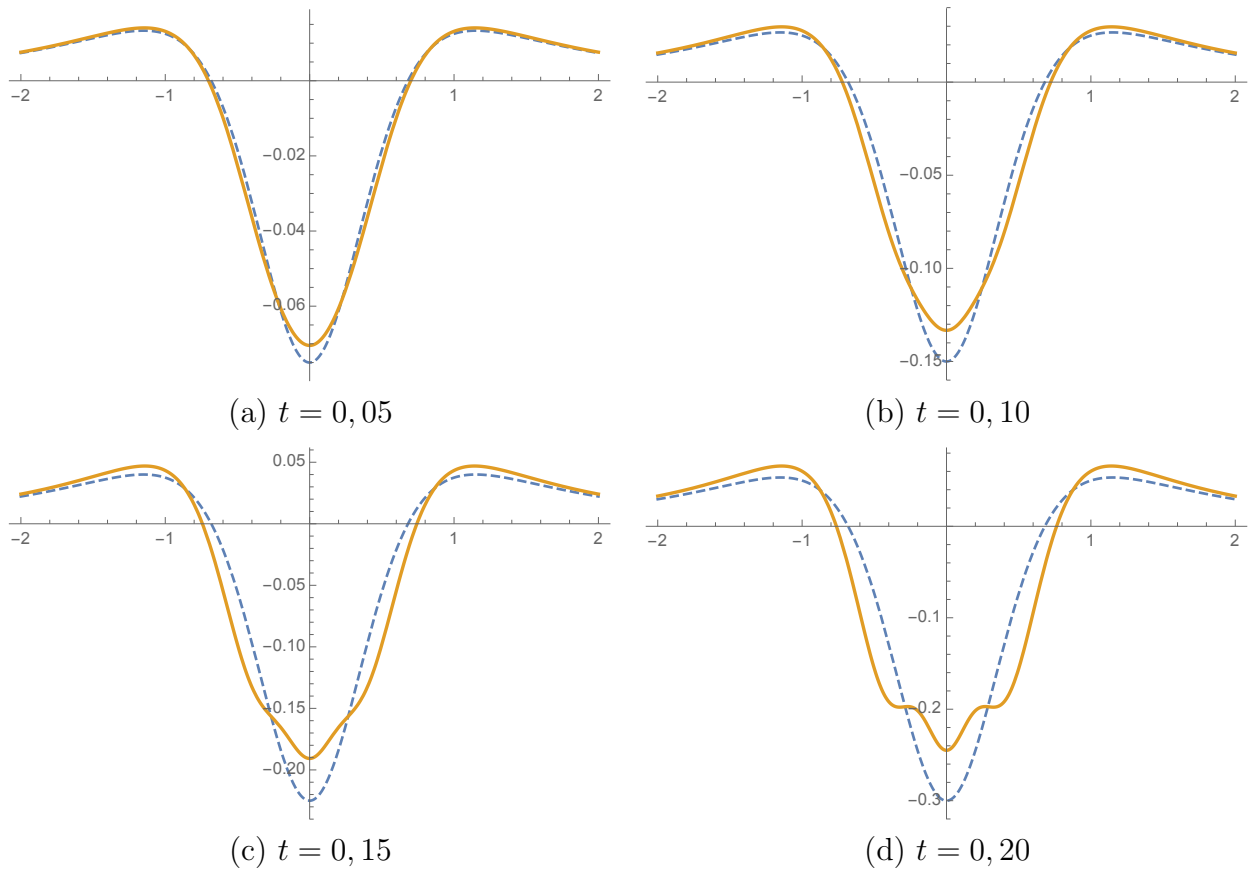


(b) Andre ordens overflatehevning.



(c) Tredje ordens overflatehevning.

Figur 5.2: Utviklingsforløpet for overflatehevningen fra en symmetrisk kvadrupoltrykkimpuls.



Figur 5.3: Overflatehevningene etter en symmetrisk trykkimpuls for $G = 0$. Stiplet linje (blå) viser lineær teori og heltrukken linje (oransje) viser full tredje ordens løsning av overflatehevningene for dimensjonsløs tid a) $t = 0,05$, b) $t = 0,10$, c) $t = 0,15$ og d) $t = 0,20$.

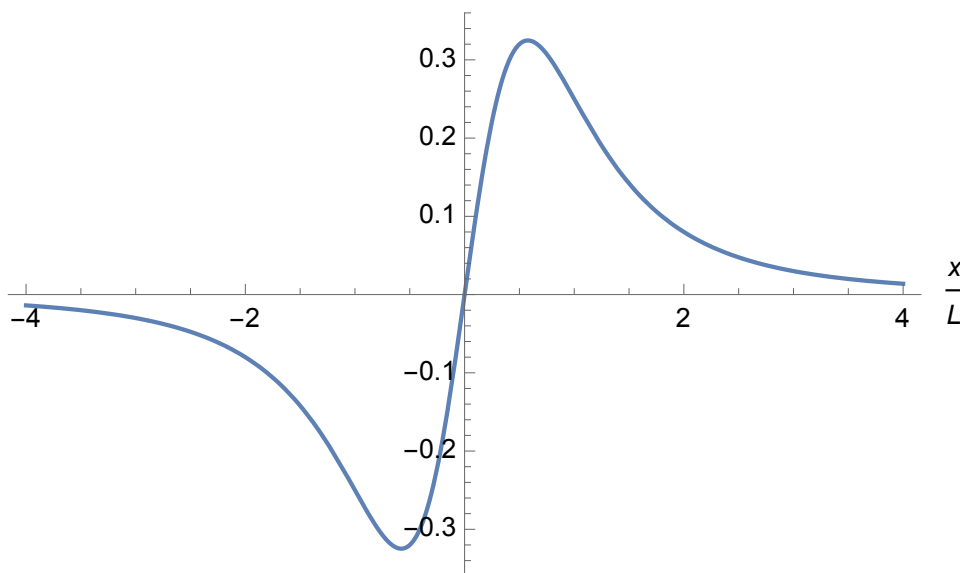
misformet fasong på bølgedalen. $G = 0$ og $G < 0,2$ gir en tilnærmet lik bølgefasong. Vi kan dermed anta at bølgene langt vekk fra trykkimpulsen vil forbli influert av de tidlige ikke-lineære prosessene når $G < 0,2$. Ved G større enn 1 vil antakelig lineær teori være god nok for å studere disse bølgene.

5.2 Antisymmetrisk kvadrupol-trykkimpuls

Vi går videre til den tilsvarende antisymmetriske trykkimpulsen. Den antisymmetriske trykkimpulsen er definert ved

$$P(x) = p_{-1}(x, 0) = P_0 \frac{x/L}{((x/L)^2 + 1)^2}, \quad (5.19)$$

som gir en antisymmetrisk form om $x = 0$, vist i figur 5.4.



Figur 5.4: *Antisymmetrisk trykkimpuls.*

Trykkimpulsen setter i gang et nulte ordens potensial

$$\phi_0(x, 0) = -\frac{x}{(x^2 + 1)^2} = -g_2(x, 0). \quad (5.20)$$

Første ordens overflatehevning tilsvarer den vertikaldेरiverte av nulte ordens potensial. Fra Vedlegg C er den vertikaldेरiverte av g_2 gitt ved $4g_3 - g_2$, slik at

$$\eta_1(x) = -g_{2z} = g_2 - 4g_3, \quad z = 0, \quad (5.21)$$

hvor massebalansen er triviell. Massebevaringen bekreftes også av figur 5.5a.

Ligning (3.13) gir første ordens potensial

$$\phi_1 = -\frac{1}{2}(\phi_{0x}^2 + \phi_{0z}^2) = -\frac{1}{2}f_3, \quad z = 0, \quad (5.22)$$

som ved analytisk utvidelse er gyldig i halvplanet $z \leq 0$.

Andre ordens overflatehevningen fra andre ordens kinematisk betingelse (3.10) er gitt ved

$$\begin{aligned} \eta_2(x) &= \frac{1}{2}(\phi_{1z} - \eta_1\phi_{0xx} - \eta_1'\phi_{0x}) \Big|_{z=0} \\ &= \left(\frac{3}{32}f_1 + \frac{3}{16}f_2 + \frac{3}{4}f_3 + 9f_4 - 84f_5 + 168f_6 - 96f_7 \right)_{z=0} \\ &= \frac{1}{32} \frac{\partial}{\partial x} (-3g_1 - 4g_2 - 8g_3 - 48g_4 + 256g_5 - 256g_6)_{z=0}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

der integrasjon av f_n -leddene i x -retning bekrefter massebevaring av andre ordens overflatehevning.

Tredje ordens dynamisk betingelse (3.14) er

$$\begin{aligned} 2\phi_2 &= -2\eta_1\phi_{1z} - \phi_{0x}\phi_{1x} - \eta_1\eta_1'\phi_{0x} + \eta_1^2\phi_{0xx} - G\eta_1, \quad z = 0, \\ &= -\frac{3}{8}g_3 + \frac{3}{4}g_4 + 6g_6 + G(-g_2 + 4g_3), \quad z = 0, \end{aligned}$$

slik at

$$\phi_2 = \frac{1}{16}(-3g_3 + 6g_4 + 48g_6 + G(-8g_2 + 32g_3)), \quad z = 0. \quad (5.24)$$

Den tilhørende tredje ordens kinematisk betingelse (3.11) er

$$6\eta_3 = 2\phi_{2z} + 2\eta_2\phi_{0zz} + 2\eta_1\phi_{1zz} - \eta_1^2\eta_1'' - 2\phi_{1x}\eta_1' - 2\phi_{0x}\eta_2' - 2\eta_1(\eta_1')^2, \quad z = 0, \quad (5.25)$$

hvor vi igjen deler η_3 inn i tre grupperinger. Vi har fra tidligere

$$\eta_3 = \eta_{33} + \eta_{321} + \eta_{3111}. \quad (5.26)$$

Det første bidraget til tredje ordens overflatehevning er

$$\begin{aligned}
\eta_{33} &= \left. \frac{\phi_{2z}}{3} \right|_{z=0} \\
&= \frac{1}{48} (-3g_{3z} + 6g_{4z} + 48g_{6z} + G(-8g_{2z} + 32g_{3z}))_{z=0} \\
&= \frac{1}{48} \left(-\frac{21}{8}g_2 - \frac{9}{2}g_3 - 54g_4 - 240g_6 + 576g_7 + G(-96g_3 + 192g_4) \right)_{z=0}.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Det andre bidraget er

$$\begin{aligned}
\eta_{321} &= \frac{1}{3} (\eta_2 \phi_{0zz} + \eta_1 \phi_{1zz} - \phi_{1x} \eta'_1 - \phi_{0x} \eta'_2)_{z=0} \\
&= \left(\frac{9}{16}g_4 + \frac{1}{2}g_5 + 15g_6 + 36g_7 - 1288g_8 + 4480g_9 - 5760g_{10} + 2560g_{11} \right)_{z=0},
\end{aligned} \tag{5.28}$$

og til slutt

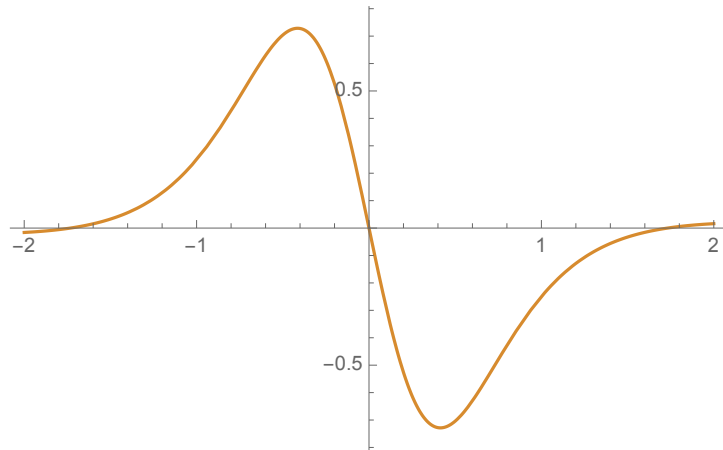
$$\begin{aligned}
\eta_{3111} &= -\frac{1}{6} (\eta_1^2 \eta_1'' + 2\eta_1 (\eta_1')^2) \\
&= (-5g_6 + 102g_7 - 728g_8 + 2240g_9 - 2880g_{10} + 1280g_{11})_{z=0}.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Vi finner den totale tredjeordenshevningen

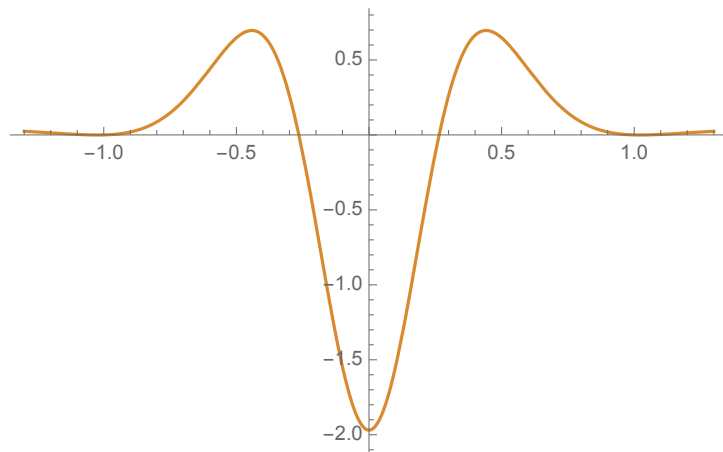
$$\begin{aligned}
\eta_3(x) &= \eta_{33} + \eta_{321} + \eta_{3111} \\
&= \left(-\frac{7}{128}g_2 - \frac{3}{32}g_3 - \frac{9}{16}g_4 + \frac{1}{2}g_5 + 5g_6 + 150g_7 - 2016g_8 + 6720g_9 \right. \\
&\quad \left. - 8640g_{10} + 3840g_{11} + G(-2g_3 + 4g_4) \right)_{z=0}.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Alle bidragene til η_3 består av antisymmetriske g_n -ledd. Integrasjon av antisymmetriske funksjoner mellom grensene \pm uendelig vil alltid gi null, uavhengig av koeffisientene. Derfor vil ikke massebalansetesten ved g -funksjoner bekrefte at beregningene er korrekt utført. Figur 5.5 kan likevel gi en indikasjon på at massen er bevart for hver orden. Figuren viser første-, andre- og tredjeordens overflatehevning. Den antisymmetriske trykkimpulsen gir en symmetrisk andreordenshevning og en antisymmetrisk første- og tredjeordenshevning.

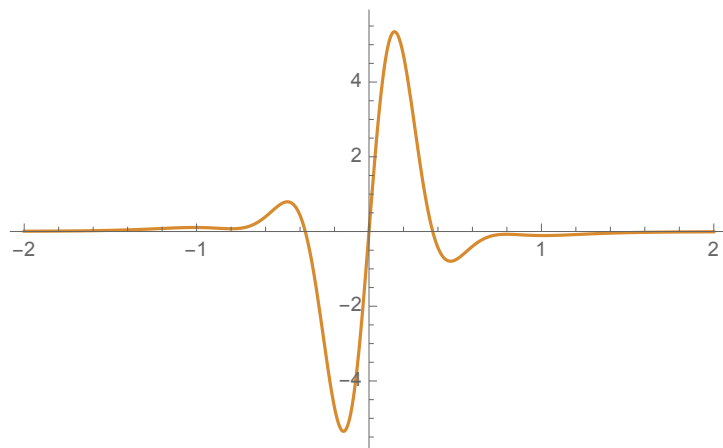
Figur 5.6 viser full tredjeordens løsning av bølgefasjonen som oppstår fra den antisymmetriske trykkimpulsen ved dimensjonsløs tyngdeparameter $G = 0$. Figuren viser at nullpunktet forskyves mot venstre, og denne forskyvningen øker med økende dimensjonsløs tid. Også her viser figurene at den totale ikke-lineære løsningen vil være gyldig som tilnærming opp til dimensjonsløs tid lik 0, 10.



(a) Første ordens overflatehevning.

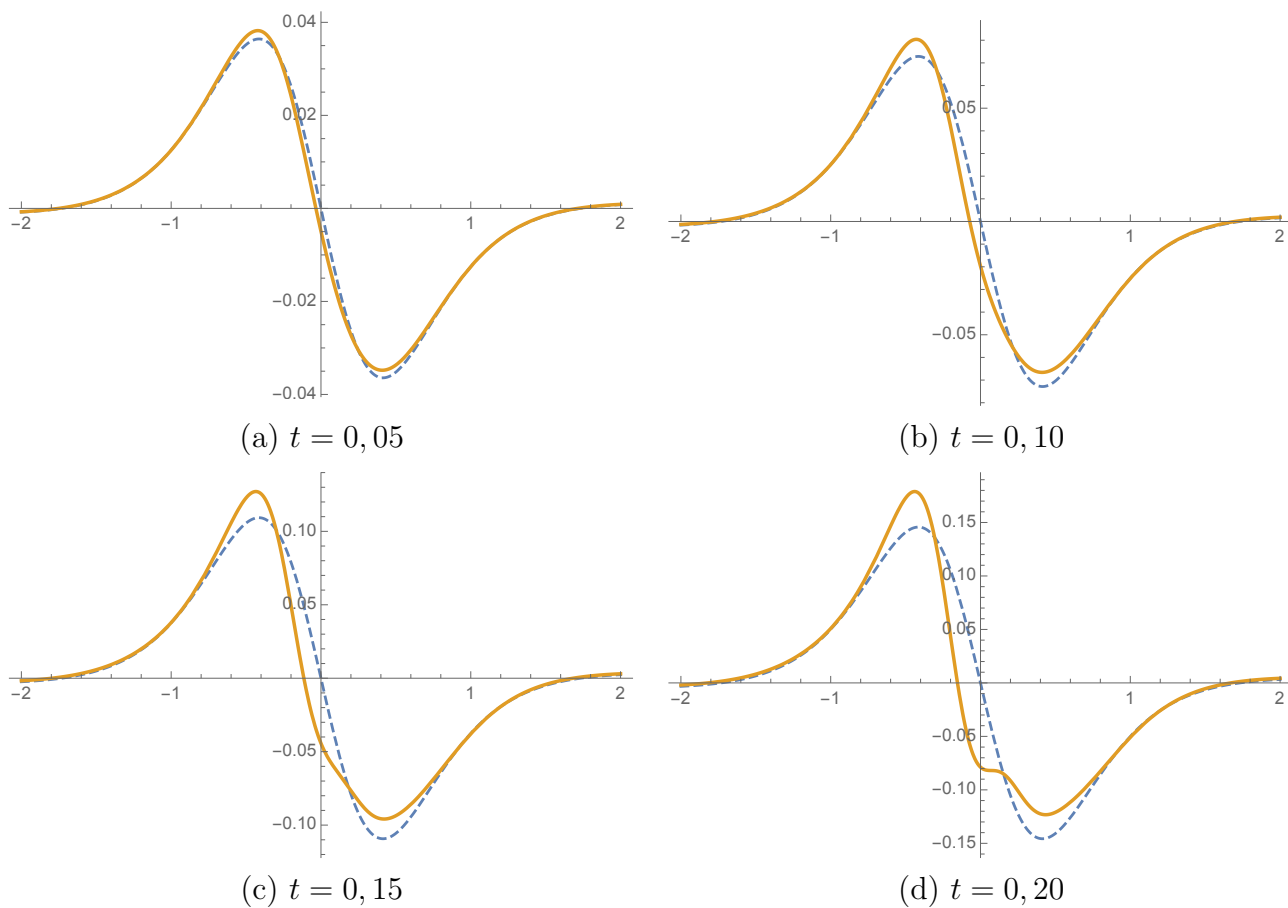


(b) Andre ordens overflatehevning.



(c) Tredje ordens overflatehevning.

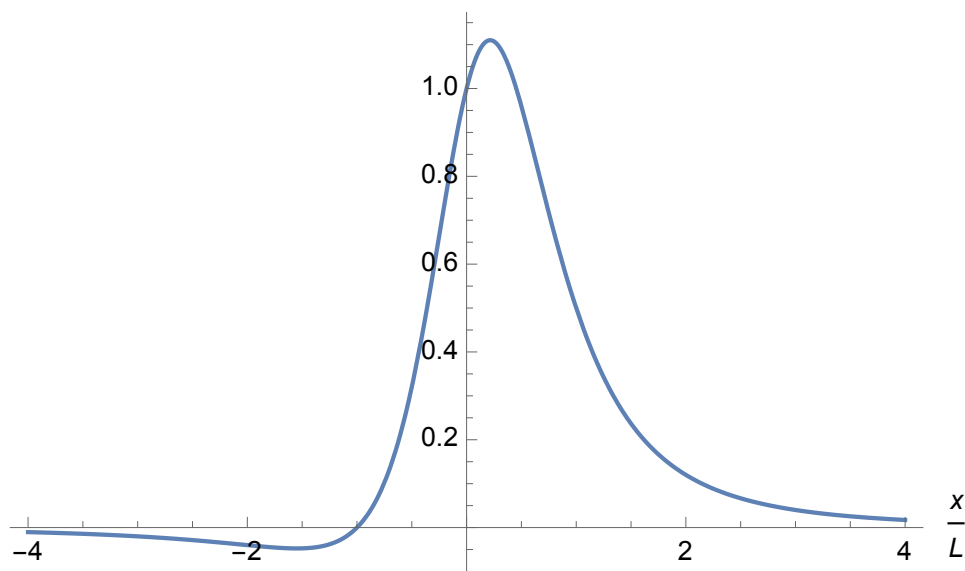
Figur 5.5: Utviklingsforløpet for overflatehevningen fra en antisymmetrisk kvadrupoltrykkimpuls.



Figur 5.6: Overflatehevingen etter en antisymmetrisk trykkimpuls, ved $G = 0$. Stiplet linje (blå) viser lineær teori og heltrukken linje (oransje) viser full tredje ordens løsning for dimensjonsløs tid (a) $t = 0,05$, (b) $t = 0,10$, (c) $t = 0,15$ og (d) $t = 0,20$.

5.3 Asymmetrisk kvadrupol-trykkimpuls

Til nå har vi studert ikke-lineære overflatehevninger som skyldes en symmetrisk og en antisymmetrisk trykkimpuls fra kvadrupoltype-felt. Siden begge disse trykkimpulsfunksjonene er løsninger av Laplaces ligning, vil også summen – eller hvilken som helst lineær kombinasjon – også være en løsning. I denne delen studerer vi de ikke-lineære interaksjonene mellom f_2 og g_2 ved å superponere disse trykkimpulsene. Denne trykkimpulsen vil ha en asymmetrisk form, som vist i figur 5.7.



Figur 5.7: *Asymmetrisk trykkimpuls.*

Interaksjonene finner vi ved å innføre en dimensjonsløs amplitude A for den symmetriske trykkimpulsen og en dimensjonsløs amplitude B for den antisymmetriske trykkimpulsen. På den måten vil arbeidet i delkapittel 5.1 tilsvare tilfellet $(A, B)=(1, 0)$ og arbeidet i delkapittel 5.2 vil tilsvare tilfellet $(A, B)=(0, 1)$. I dette delkapittelet venter vi amplitudene likt ved å se på tilfellet $(A, B)=(1, 1)$.

Det totale nulte ordens potensial for den asymmetriske trykkimpulsen er en superposisjon av nulte ordens potensial fra den symmetriske og den antisymmetriske trykkimpulsen. På den frie overflaten kan det totale nulte ordens potensial på dimensjonsløs form skrives

$$\phi_0(x, 0) = -\frac{A}{(x^2 + 1)^2} - \frac{Bx}{(x^2 + 1)^2} = -Af_2(x, 0) - Bg_2(x, 0), \quad (5.31)$$

som antyder at $\phi_0 = \phi_{0A} + \phi_{0B} = -Af_2 - Bg_2$ i halvplanet $z \leq 0$.

Overflatehevningen av første orden er en lineær kombinasjon av de tidligere studerte tilfellene. Første ordens overflatehevning får formen

$$\begin{aligned} \eta_1(x) &= \eta_{1A} + \eta_{1B}, \quad z = 0 \\ &= -Af_{2z} - Bg_{2z}, \quad z = 0, \end{aligned} \quad (5.32)$$

der η_{1A} er første ordens overflatehevning fra den symmetriske trykkimpulsen og η_{1B} er første ordens overflatehevning fra den antisymmetriske trykkimpulsen. Ved innsetting fra Vedlegg C, blir første ordens overflatehevning

$$\eta_1(x) = A \left(\frac{1}{2}f_1 + 2f_2 - 4f_3 \right) + B(g_2 - 4g_3), \quad z = 0, \quad (5.33)$$

som er de samme overflatehevningene vi har fått i delkapittel 5.1 og 5.2.

Det totale første ordens potensial er gitt av andre ordens dynamiske betingelse (3.13)

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -\frac{1}{2}(\phi_{0x}^2 + \phi_{0z}^2) \\ &= \phi_{1A} + \phi_{1B} + \phi_{1AB} \\ &= A^2 \left(-\frac{1}{8}f_2 - f_3 \right) + B^2 \left(-\frac{1}{2}f_3 \right) + AB \left(-\frac{1}{2}g_3 \right), \end{aligned} \quad (5.34)$$

der ϕ_{1AB} representerer det ledende ordens interaksjonspotensialet. Formelen viser at vi får en interaksjon mellom de to nulte ordens potensialene ϕ_{0x} og ϕ_{0z} til første ordens potensial. Amplitudeproduktet AB viser det nye leddet som oppstår i interaksjonsprosessen.

Ved innsetting i andre ordens kinematisk betingelse (3.10) blir andre ordens overflatehevning

$$\begin{aligned} \eta_2(x) &= \eta_{2A} + \eta_{2B} + \eta_{2AB} \\ &= A^2 \left(\frac{7}{32}f_1 + \frac{1}{2}f_2 + \frac{5}{4}f_3 + 4f_4 + 28f_5 - 128f_6 + 96f_7 \right)_{z=0} \\ &+ B^2 \left(\frac{3}{32}f_1 + \frac{3}{16}f_2 + \frac{3}{4}f_3 + 9f_4 - 84f_5 + 168f_6 - 96f_7 \right)_{z=0} \\ &+ AB \left(\frac{1}{16}g_2 + \frac{1}{2}g_3 + 3g_4 + 32g_5 - 200g_6 + 192g_7 \right)_{z=0}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Bidragene med amplitudeprodukt A^2 og B^2 viser andreordenshevningene som stammer fra henholdsvis det symmetriske og det antisymmetriske kvadrupolfeltet. Disse må nødvendigvis være lik med andreordenshevningene vi har funnet tidligere. De antisymmetriske leddene med amplitudeprodukt AB viser interaksjonsbidragene til overflatehevningen som bryter med superposisjon.

Den tredje ordens dynamisk betingelse (3.14) er

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= \frac{1}{2}(-2\eta_1\phi_{1z} - \phi_{0x}\phi_{1x} - \eta_1\eta_1'\phi_{0x} + \eta_1^2\phi_{0xx} - G\eta_1) \\
&= A^3 \left(-\frac{7}{32}f_2 - \frac{11}{8}f_3 - \frac{3}{2}f_4 - \frac{1}{2}f_5 + 5f_6 \right) \\
&+ B^3 \left(-\frac{3}{16}g_3 + \frac{3}{8}g_4 + 3g_6 \right) \\
&+ A^2B \left(-\frac{1}{2}g_3 + 7g_6 \right) \\
&+ AB^2 \left(-\frac{3}{32}f_2 - \frac{11}{16}f_3 - \frac{9}{8}f_4 - \frac{3}{2}f_5 + f_6 \right) \\
&+ G \left(A \left(-\frac{1}{4}f_1 - f_2 + 2f_3 \right) + B \left(-\frac{1}{2}g_2 + 2g_3 \right) \right), \quad z = 0.
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Her får vi to interaksjonsbidrag til andre ordens potensial. Disse leddene vises med amplitudeprodukt A^2B og AB^2 . Interaksjonspotensialet med amplitudeprodukt A^2B består av antisymmetriske g_n -funksjoner og interaksjonspotensialet med amplitudeprodukt AB^2 består av symmetriske f_n -funksjoner.

Fra tredje ordens kinematisk betingelse (3.11) har vi igjen de tre bidragene η_{33} , η_{321} og η_{3111} til den totale η_3 .

η_{33} er hevingen som oppstår fra vertikalgradienten til andreordenspotensialet

$$\begin{aligned}
\eta_{33} &= \left. \frac{\phi_{2z}}{3} \right|_{z=0} \\
&= \frac{1}{3} \left(A^3 \left(-\frac{7}{32}f_{2z} - \frac{11}{8}f_{3z} - \frac{3}{2}f_{4z} - \frac{1}{2}f_{5z} + 5f_{6z} \right) \right. \\
&+ B^3 \left(-\frac{3}{16}g_{3z} + \frac{3}{8}g_{4z} + 3g_{6z} \right) \\
&+ A^2B \left(-\frac{1}{2}g_{3z} + 7g_{6z} \right) \\
&+ AB^2 \left(-\frac{3}{32}f_{2z} - \frac{11}{16}f_{3z} - \frac{9}{8}f_{4z} + \frac{3}{2}f_{5z} + f_{6z} \right) \\
&\left. + G \left(A \left(-\frac{1}{4}f_{1z} - f_{2z} + 2f_{3z} \right) + B \left(-\frac{1}{2}g_{2z} + 2g_{3z} \right) \right) \right)_{z=0},
\end{aligned} \tag{5.37}$$

som med innsetting fra Vedlegg C blir

$$\begin{aligned}
\eta_{33} = & A^3 \left(\frac{33}{128}f_2 + \frac{29}{32}f_3 - \frac{43}{24}f_4 - \frac{17}{3}f_5 - \frac{35}{3}f_6 + 20f_7 \right)_{z=0} \\
& + B^3 \left(-\frac{7}{128}g_2 - \frac{3}{32}g_3 - \frac{9}{8}g_4 - 5g_6 + 12g_7 \right)_{z=0} \\
& + A^2B \left(-\frac{11}{128}g_2 - \frac{1}{32}g_3 - \frac{15}{8}g_4 - \frac{7}{3}g_5 - \frac{35}{3}g_6 + 28g_7 \right)_{z=0} \\
& + AB^2 \left(\frac{35}{128}f_1 + \frac{65}{128}f_2 + \frac{35}{32}f_3 + \frac{1}{2}f_4 - f_5 - 7f_6 + 4f_7 \right)_{z=0} \\
& + G \left(A \left(-\frac{10}{3}f_3 + 4f_4 \right) + B(-2g_3 + 4g_4) \right)_{z=0}.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Vi får η_{321} til å bli

$$\begin{aligned}
\eta_{321} = & -\frac{1}{3}(\eta_2\phi_{0xx} + \eta_1\phi_{1xx} + \phi_{1x}\eta'_1 + \phi_{0x}\eta'_2)_{z=0} \\
= & A^3 \left(\frac{21}{8}f_4 + 15f_5 + 35f_6 - \frac{284}{3}f_7 + \frac{1792}{3}f_8 - \frac{10496}{3}f_9 + 5504f_{10} - 2560f_{11} \right)_{z=0} \\
& + B^3 \left(\frac{9}{16}g_4 + \frac{1}{2}g_5 + 15g_6 + 36g_7 - 1288g_8 + 4480g_9 - 5760g_{10} + 2560g_{11} \right)_{z=0} \\
& + A^2B \left(\frac{21}{16}g_4 + 7g_5 + 35g_6 - 108g_7 + \frac{3080}{3}g_8 - \frac{22784}{3}g_9 + 14208g_{10} - 7680g_{11} \right)_{z=0} \\
& + AB^2 \left(\frac{21}{16}f_4 + \frac{33}{2}f_5 - 9f_6 + 508f_7 - 5880f_8 + 17280f_9 - 19584f_{10} + 7680f_{11} \right)_{z=0},
\end{aligned} \tag{5.39}$$

og til slutt har vi

$$\begin{aligned}
\eta_{3111} = & -\frac{1}{6}(\eta_1^2\eta_1'' + 2\eta_1(\eta_1')^2) \\
= & A^3 \left(-\frac{7}{24}f_4 - \frac{17}{3}f_5 - \frac{35}{3}f_6 + \frac{476}{3}f_7 + \frac{392}{3}f_8 - \frac{5248}{3}f_9 + 2752f_{10} - 1280f_{11} \right)_{z=0} \\
& + B^3 (-5g_6 + 102g_7 - 728g_8 + 2240g_9 - 2880g_{10} + 1280g_{11})_{z=0} \\
& + A^2B \left(-\frac{7}{3}g_5 - \frac{35}{3}g_6 + 196g_7 + \frac{784}{3}g_8 - \frac{11392}{3}g_9 + 7104g_{10} - 3840g_{11} \right)_{z=0} \\
& + AB^2 \left(-6f_5 + \frac{105}{2}f_6 + 210f_7 - 2940f_8 + 8640f_9 - 9792f_{10} + 3840f_{11} \right)_{z=0}.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Den totale tredje ordens overflatehevning fra den asymmetriske trykkimpulsen er dermed gitt ved

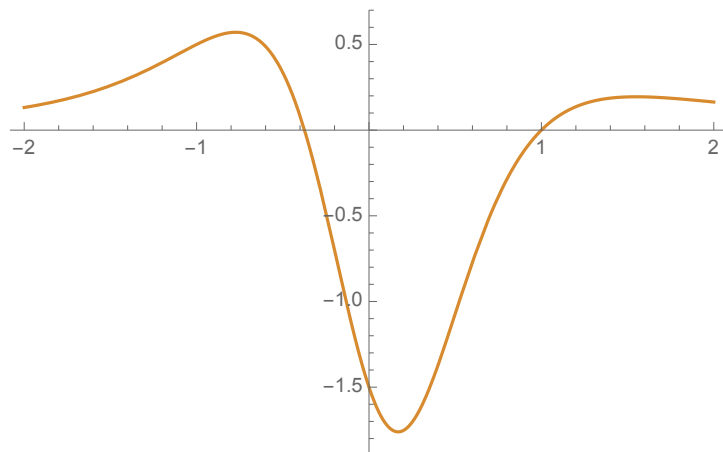
$$\begin{aligned}
\eta_3(x) &= \eta_{33} + \eta_{321} + \eta_{3111} \\
&= A^3 \left(\frac{33}{128}f_2 + \frac{29}{32}f_3 + \frac{13}{24}f_4 + \frac{11}{3}f_5 + \frac{35}{3}f_6 + 84f_7 + 728f_8 - 5248f_9 \right. \\
&\quad \left. + 8256f_{10} - 3840f_{11} \right)_{z=0} \\
&+ B^3 \left(-\frac{7}{128}g_2 - \frac{3}{32}g_3 - \frac{9}{16}g_4 + \frac{1}{2}g_5 + 5g_6 + 150g_7 - 2016g_8 + 6720g_9 \right. \\
&\quad \left. - 8640g_{10} + 3840g_{11} \right)_{z=0} \\
&+ A^2B \left(-\frac{11}{128}g_2 - \frac{1}{32}g_3 - \frac{9}{16}g_4 + \frac{7}{3}g_5 + \frac{35}{3}g_6 + 116g_7 + 1288g_8 - 11392g_9 \right. \\
&\quad \left. + 21312g_{10} - 11520g_{11} \right)_{z=0} \\
&+ AB^2 \left(\frac{35}{128}f_1 + \frac{65}{128}f_2 + \frac{35}{32}f_3 + \frac{29}{16}f_4 + \frac{19}{2}f_5 + \frac{73}{2}f_6 + 722f_7 - 8820f_8 \right. \\
&\quad \left. + 25920f_9 - 29376f_{10} + 11520f_{11} \right)_{z=0} \\
&+ G \left(A \left(-\frac{10}{3}f_3 + 4f_4 \right) + B(-2g_3 + 4g_4) \right)_{z=0}.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Bidragene med amplitude A^3 og B^3 stemmer med resultatene fra tidligere. Det er også sjekket at massebalansen er oppfylt for gravitasjonsbidraget med amplitude A og interaksjonsbidragene med amplitude AB^2 .

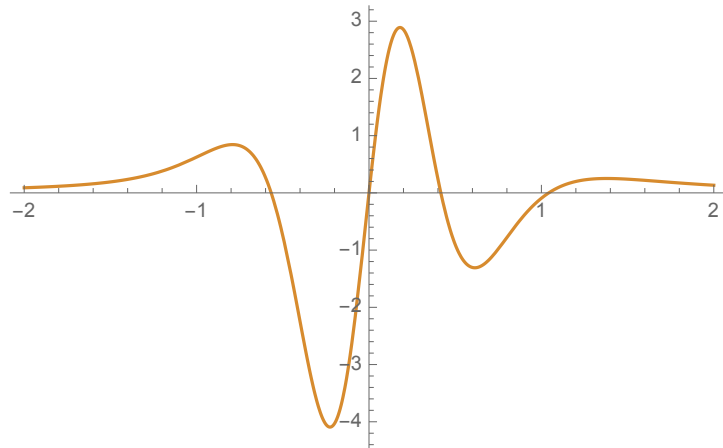
Figur 5.8 viser første-, andre- og tredje ordens overflatehevning fra den asymmetriske trykkimpulsen. Figuren viser at overflatehevningene forblir asymmetrisk for hver orden. På venstre side skyver trykkimpulsen overflaten opp fra undersiden og gir en forhøyning, slik figur (a) viser. Forhøyningene forflytter seg gradvis mot det lokale forstyrrelsesområdet med økende amplitude på bølgetoppene og bølgedalene, som vist i figur (b) og (c).

Figur 5.9 viser at full tredjeordens løsning for den asymmetriske trykkimpulsen forblir asymmetrisk om $x = 0$. Sammenlignet med lineær teori viser figuren at overflatehevningene får en høyere amplitude ved full tredje ordens løsning. I tillegg viser figuren at bølgedalen får lavere amplitude enn hva den lineære teorien tilsier. Dette er det samme mønsteret som vi har sett for de to tidligere tilfellene.

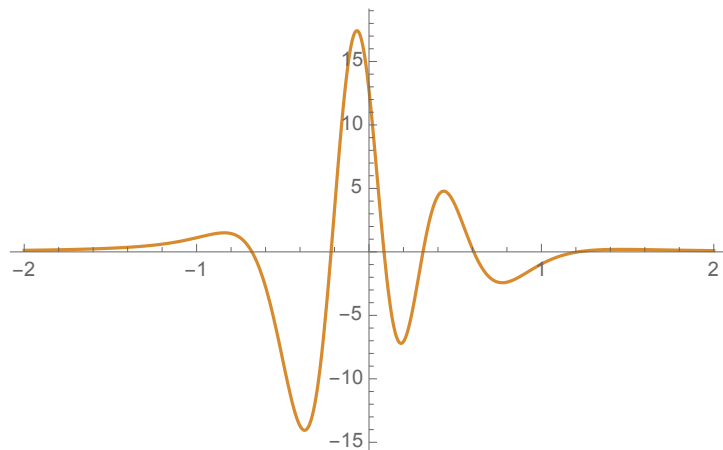
Figur 5.9 indikerer at den totale tredjeordensløsningen fra den asymmetriske trykkimpulsen er en gyldig løsning fram til dimensjonsløs tid lik $t = 0,05$. Etter dette får løsningen



(a) Første ordens overflatehevning.

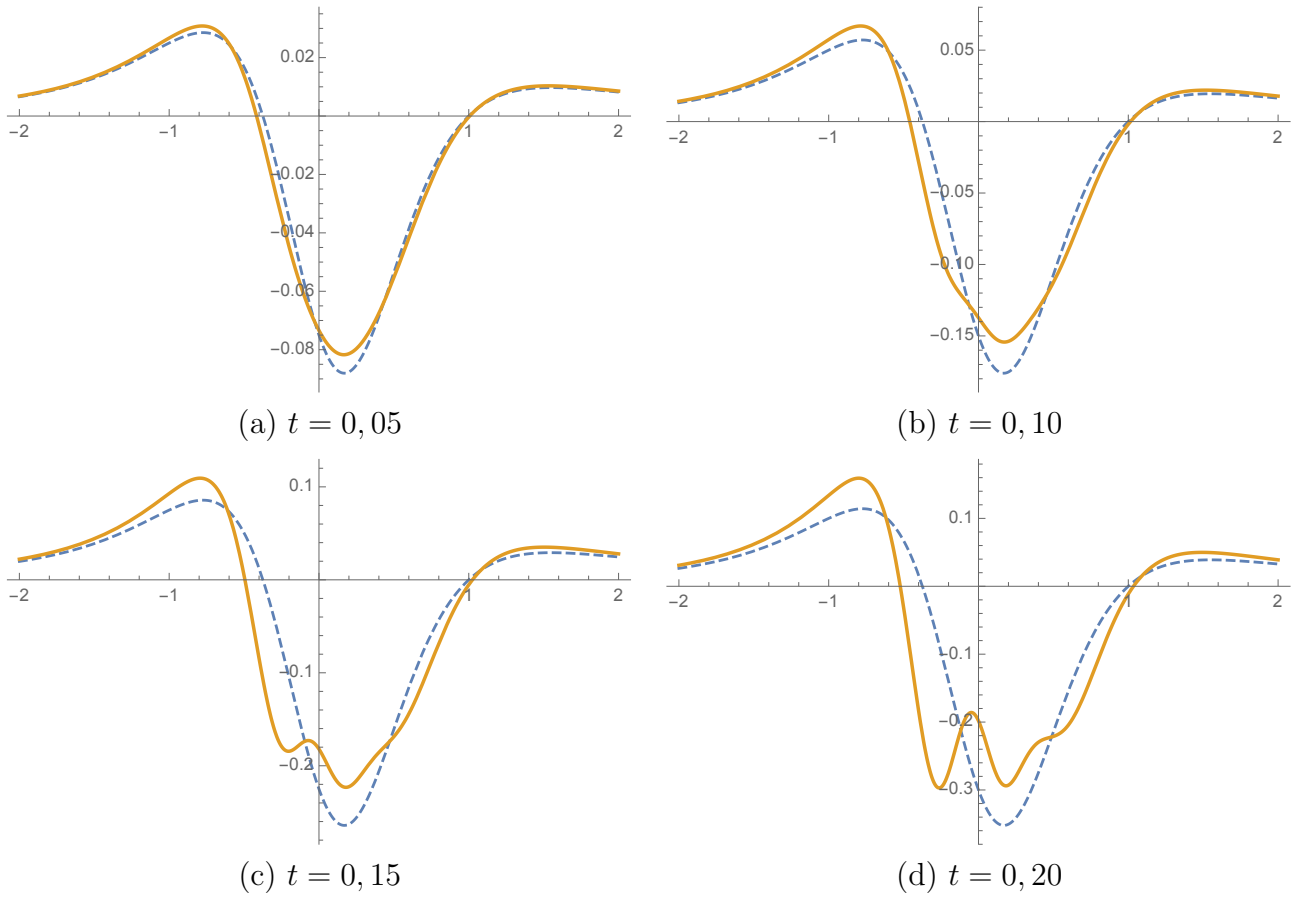


(b) Andre ordens overflatehevning.



(c) Tredje ordens overflatehevning.

Figur 5.8: Utviklingsforløpet for overflatehevningen fra en asymmetrisk kvadrupoltrykkimpuls.



Figur 5.9: Overflatehevningene etter en asymmetrisk trykkimpuls ved $G = 0$. Stiplet linje (blå) viser lineær teori og heltrukken linje (oransje) viser full tredje ordens løsning for dimensjonsløs tid a) $t = 0,05$, b) $t = 0,10$, c) $t = 0,15$ og d) $t = 0,20$.

en tydelig misformet fasong. Dette er lavere enn vi fant for løsningene fra den symmetriske og den antisymmetriske trykkimpulsen. Dette er å forvente ettersom vi her har flere interaksjonsprosesser som kompliserer løsningene.

Del II

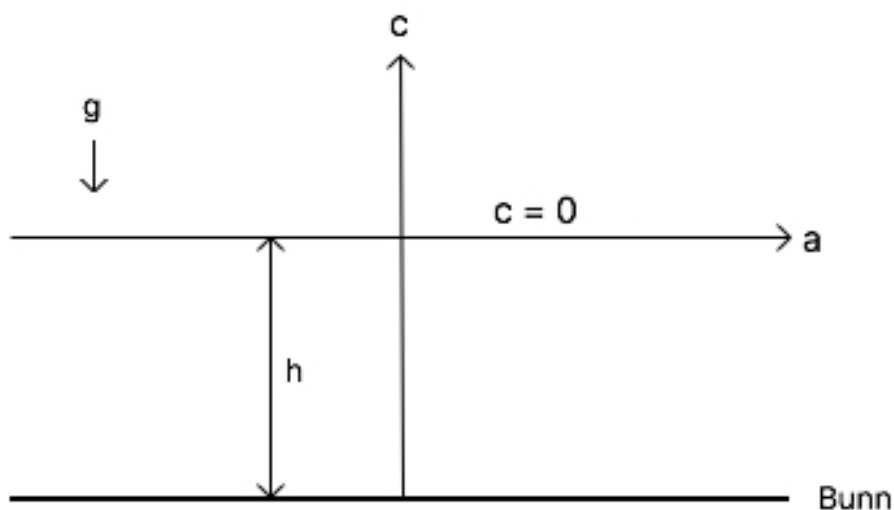
Lagransk beskrivelse

Kapittel 6

Lagransk beskrivelse av full ikke-lineær fri overflatestrømning

6.1 Matematisk formulering

Vi definerer a , c som de initielle koordinatene for en væskepartikkel, og x , z som de tidsavhengige koordinatene ved tiden t . For to-dimensjonal væskebevegelse kan væskepartikkelens posisjon beskrives ved $x = x(a, c, t)$ og $z = z(a, c, t)$.



Figur 6.1: *Lagransk skisse.*

Vi lar den frie overflaten ligge langs a -aksen og gjennom origo, som vist i figur 6.1. Den kinematiske randbetingelsen er $c = 0$ for alle tider t .

6.2 Small-time expansion

For å studere hvordan overflaten utvikler seg for små tider, innfører vi følgende small-time expansion til andre orden

$$x(a, c, t) = a + H(t)(x_1(a, c)t + x_2(a, c)t^2) \quad (6.1)$$

$$z(a, c, t) = c + H(t)(z_1(a, c)t + z_2(a, c)t^2), \quad (6.2)$$

der Heaviside-funksjonen $H(t)$ er 0 for $t \leq 0$ og 1 for $t > 0$.

6.3 Kontinuitetsligningen

Kontinuitetsligningen for inkompressibel væske er

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(a, c)} = x_a z_c - x_c z_a = 1. \quad (6.3)$$

Vi utvider kontinuitetsligningen i tiden ved å sette ligning (6.1) og (6.2) inn i ligning (6.3). Det gir

$$(1 + H(t)(x_{1a}t + x_{2a}t^2))(1 + H(t)(z_{1c}t + z_{2c}t^2)) - H(t)(x_{1c}t + x_{2c}t^2)H(t)(z_{1a}t + z_{2a}t^2) = 1,$$

som for $t > 0^+$ er

$$0 = z_{1c}t + z_{2c}t^2 + x_{1a}t + x_{1a}z_{1c}t^2 + x_{1a}z_{2c}t^3 + x_{2a}t^2 + x_{2a}z_{1c}t^3 + x_{2a}z_{2c}t^4 - x_{1c}z_{1a}t^2 - x_{1c}z_{2a}t^3 - x_{2c}z_{1a}t^3 - x_{2c}z_{2a}t^4. \quad (6.4)$$

Vi deriverer i tiden og får

$$x_{1a} + z_{1c} = 0, \quad (6.5)$$

når $t \rightarrow 0$.

Ligning (6.4) deriveres igjen med hensyn på tiden, slik at

$$x_{2a} + z_{2c} = x_{1c}z_{1a} - x_{1a}z_{1c}, \quad c < 0 \quad (6.6)$$

når $t \rightarrow 0$. Høyre side av ligning (6.6) representerer massedefekten $q(a, c)$.

6.4 Bevegelsesligningen

Newtons bevegelseslover for en vannpartikkel ved posisjon (x, z) kan beskrives på Lagransk form på følgende måte (Lamb, 1932 [6])

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (6.8)$$

der p er trykket og ρ er tettheten til væskepartikkelen (a, c) ved tiden t . X, Z representerer komponentene av eksterne krefter per enhetsmasse. Det virker kun eksterne krefter i negativ vertikalretning, slik at vi kan sette $X = 0$ og $Z = -g$, der g er tyngdens akselerasjon.

For å bli kvitt differensialkoeffisientene multipliserer Lamb ligningene (6.7) og (6.8) med henholdsvis $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial z}{\partial a}$ og summerer, og igjen med henholdsvis $\frac{\partial x}{\partial c}$, $\frac{\partial z}{\partial c}$, og summerer. Vi får

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + g \right) \frac{\partial z}{\partial a} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a} = 0, \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + g \right) \frac{\partial z}{\partial c} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial c} = 0, \quad (6.10)$$

hvor vi har benyttet kjerneregelen $\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial p}{\partial a}$ og $\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial c} = \frac{\partial p}{\partial c}$.

6.5 Dynamiske betingelser

Nulte ordens hastighetsfelt innebærer full linearisering, slik at Lagransk beskrivelse av hastighetsfeltet vil være identisk med den Eulerske. Da må

$$x_1 = \phi_{0x}, \quad (6.11)$$

$$z_1 = \phi_{0z}, \quad (6.12)$$

der x, z uttrykkes med parametrene a, c .

Den dynamiske randbetingelsen krever at trykket på overflaten er lik atmosfæretrykket. Trykket er uendret langs a -aksen, slik at

$$\frac{\partial p}{\partial a} = 0, \quad c = 0,$$

ved tiden $t > 0^+$.

Small-time expansion settes inn i ligning (6.9) for den dynamiske betingelsen. Innsettelse gir

$$2x_2(1 + x_{1a}t + x_{2a}t^2) + (2z_2 + g)(z_{1a}t + z_{2a}t^2) = 0, \quad c = 0. \quad (6.13)$$

Ved å ta grensen $t \rightarrow 0$, blir andre ordens dynamisk betingelse

$$x_2 = 0, \quad c = 0. \quad (6.14)$$

6.6 Virvelligningen

Fra ligning (6.9) og (6.10) kan virvelligningen settes opp. Vi deriverer ligning (6.9) med hensyn på c og ligning (6.10) med hensyn på a . Uttrykkene settes lik hverandre, slik at betingelsen for virvelfri strømming er

$$\ddot{x}_c x_a - \ddot{x}_a x_c + \ddot{z}_c z_a - \ddot{z}_a z_c = 0. \quad (6.15)$$

der dobbeldot-notasjonen betegner den dobbeltderiverte med hensyn på t , og subskriptene a og c betegner den deriverte med hensyn på henholdsvis a og c .

Small-time expansion settes inn i ligning 6.15, slik at

$$2x_{2c}(1 + x_{1a}t + x_{2a}t^2) - 2x_{2a}(x_{1c}t + x_{2c}t^2) + 2z_{2c}(x_{1a}t + x_{2a}t^2) - 2z_{2a}(1 + z_{1c}t + z_{2c}t^2), \quad (6.16)$$

som ved grensen $t \rightarrow 0$ blir

$$x_{2c} - z_{2a} = 0. \quad (6.17)$$

Da må det finnes et potensial, slik at $x_2 = \frac{\partial \Phi_{L2}}{\partial a}$, $z_2 = \frac{\partial \Phi_{L2}}{\partial c}$.

Dermed kan Poissons ligning settes opp

$$\nabla_L^2 \Phi_{L2} = q(a, c), \quad c < 0, \quad (6.18)$$

der $\nabla_L^2 = \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{\partial^2}{\partial c^2}$. Subskriptet L er benyttet for å vise til Lagranske koordinater.

6.7 Potensialformulering

For todimensjonal strømning kan hastighetspotensialet som skyldes en punktkilde beskrives ved

$$\Phi_{L2} = \frac{Q}{2\pi r} = \frac{Q}{2\pi[(a - a')^2 + (c - c')^2]^{1/2}}, \quad (6.19)$$

der Q er kildestyrken og r er den radielle avstanden fra kildepunktet til rompunktet.

Kildeuttrykket er uendelig på kildepunktet, men ved å fordele kilder på hele overflaten vil hastigheten få en endelig verdi overalt i væsken [5]. Fordelte kilder gir hastighetspotensialet

$$\Phi_{L2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(a', c') \log[(a - a')^2 + (c - c')^2]^{1/2} da' dc', \quad (6.20)$$

der $q(a', c')$ er massedefekten definert for hele planet.

Kapittel 7

Lagransk løsning for dipol-trykkimpuls og kvadrupol-trykkimpulser

Vi studerer løsningene fra de to første ordener av multipolfelt: i) den symmetriske dipol-trykkimpulsen, som er det enkleste og mest nøyaktige tilfellet av multipolfunksjonene, og ii) den asymmetriske kvadrupol-trykkimpulsen, som gir en tilnærmet fri overflate i fjerfeltet. En andreordensløsning settes opp for å se hvordan den Lagranske løsningen sammenfaller med den Eulerske løsningen.

7.1 Første ordens løsning

Fra small-time expansion (6.1)-(6.2) får førsteordensløsningen formen

$$(x(t), z(t)) = (a, 0) + t(x_1(a, 0), z_1(a, 0)).$$

Strømningsfeltene for første orden innebærer full linearisering, slik at Lagransk beskrivelse av strømmingen vil være identisk med den Eulerske.

7.1.1 Symmetrisk dipol-trykkimpuls

Ved direkte oversettelse fra de Eulerske førsteordensløsningene, blir

$$x_1 = \phi_{0a} = \frac{2a(1-c)}{(a^2 + (c-1)^2)^2}, \quad (7.1)$$

$$z_1 = \phi_{0c} = \frac{1}{a^2 + (c-1)^2} + \frac{2(1-c)(c-1)}{(a^2 + (c-1)^2)^2}, \quad (7.2)$$

for den symmetriske dipol-trykkimpulsen.

7.1.2 Asymmetrisk kvadrupol-trykkimpuls

Ved direkte oversettelse fra de Eulerske førsteordensløsningene, blir

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi_{0a} \\ &= A \left(\frac{ac}{(a^2 + (c-1)^2)^2} + \frac{2a(2 - 5c - a^2c + 4c^2 - c^3)}{(a^2 + (c-1)^2)^3} \right) \\ &+ B \left(\frac{c-1}{(a^2 + (c-1)^2)^2} + \frac{4a^2(1-c)}{(a^2 + (c-1)^2)^3} \right), \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \phi_{0c} \\ &= A \left(\frac{2(c-1)(2 - 5c - a^2c + 4c^2 - c^3)}{(a^2 + (c-1)^2)^3} + \frac{5 + a^2 - 8c + 3c^2}{2(a^2 + (c-1)^2)^2} \right) \\ &+ B \left(\frac{a}{(a^2 + (c-1)^2)^2} + \frac{4a(1-c)(c-1)}{(a^2 + (c-1)^2)^3} \right), \end{aligned} \quad (7.4)$$

for den asymmetriske kvadrupol-trykkimpulsen.

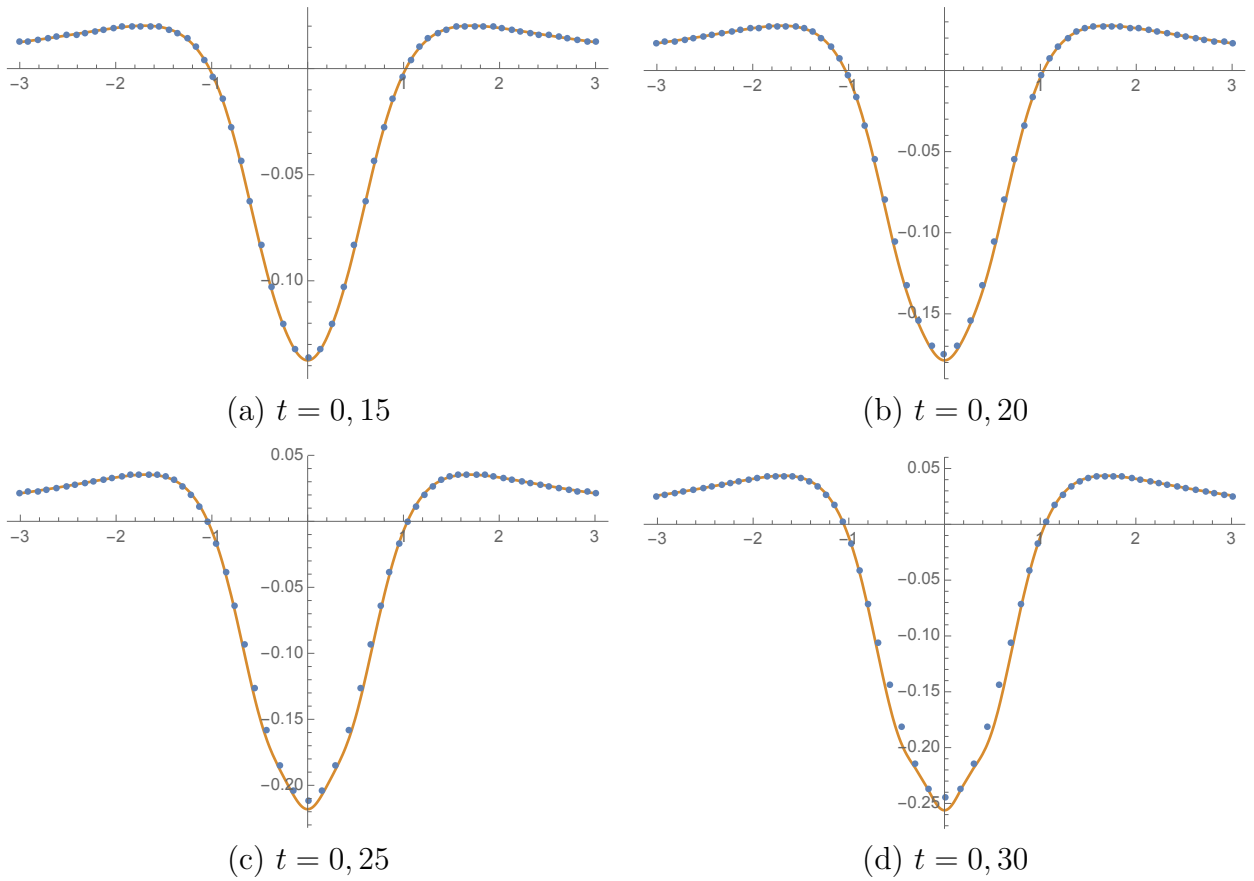
7.2 Andre ordens løsning

Fra small-time expansion (6.1)-(6.2) får andreordensløsningen formen

$$(x(t), z(t)) = (a, 0) + t(x_1(a, 0), z_1(a, 0)) + t^2(x_2(a, 0), z_2(a, 0)).$$

7.2.1 Symmetrisk dipol-trykkimpuls

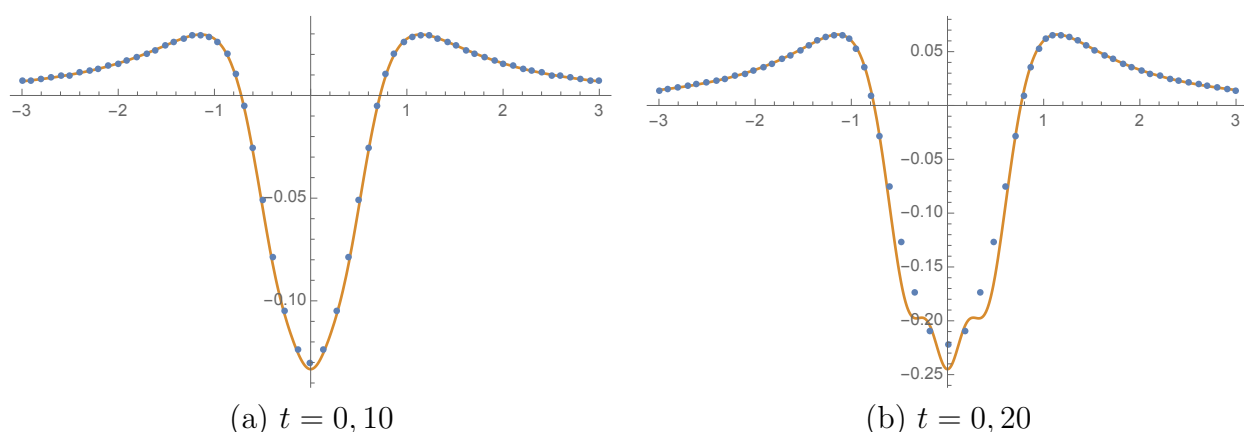
Figur 7.1 viser andre ordens løsning (blå punkter) for den symmetriske dipol-trykkimpulsen. Løsningen er plottet med den Eulerske tredjeordensløsningen (heltrukket linje, oransje) for dimensjonsløs tid 0, 15, 0, 20, 0, 25 og 0, 30. Fra delkapittel 4.2 ble den Eulerske løsningen for den symmetriske dipol-trykkimpulsen antatt å være gyldig fram til dimensjonsløs tid lik $t = 0, 20$. Fram til $t = 0, 20$ er forskjellen mellom Eulersk og Lagransk løsning minimal. Løsningene samsvarer gradvis dårligere ved økende dimensjonsløs tid, men samsvarer fremdeles godt med Eulersk løsning også opp til $t = 0, 30$.



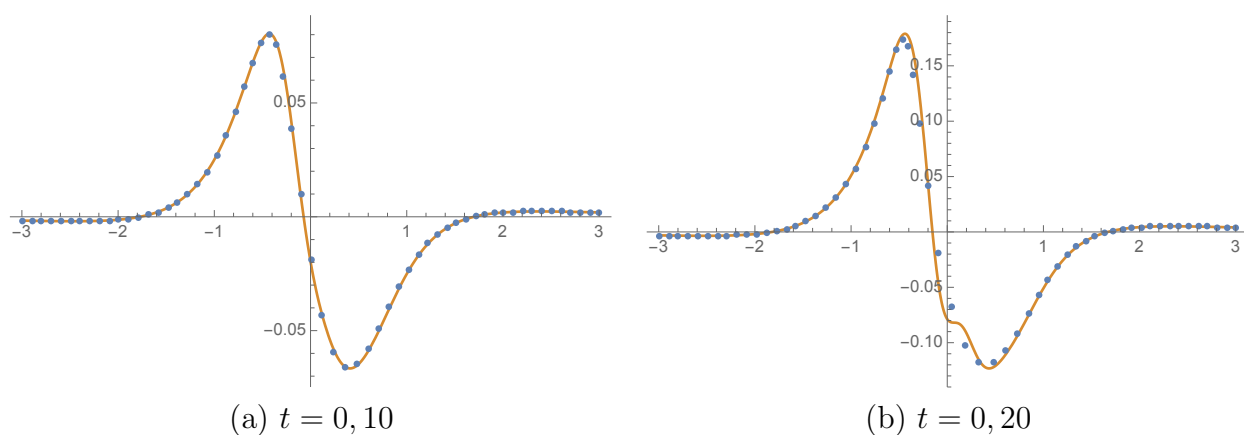
Figur 7.1: Heltrukken linje (oransje) viser full tredjeordens Eulersk løsning og blå punktverdier viser full andreordens Lagransk løsning for en symmetrisk dipol-trykkimpuls.

7.2.2 Asymmetrisk kvadrupol-trykkimpuls

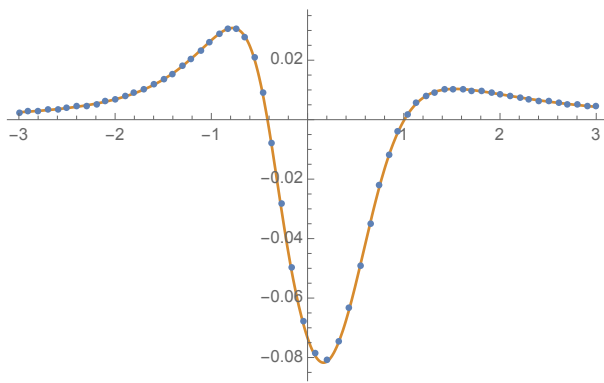
Tilfellet $(A, B) = (1, 0)$ tilsvarer den symmetriske kvadrupol-trykkimpuls og tilfellet $(A, B) = (0, 1)$ tilsvarer den antisymmetriske kvadrupol-trykkimpuls. Løsningene for symmetrisk og antisymmetrisk kvadrupol-trykkimpuls er vist i figur 7.2 og figur 7.3. Den Eulerske løsningen er antatt å være gyldig fram til dimensjonsløs tid lik 0,10 for begge disse tilfellene. Tilfellet $(A, B) = (1, 1)$ tilsvarer den asymmetriske kvadrupol-trykkimpuls. Figur 7.4 viser den tilhørende løsningen for $t = 0,05$ og $t = 0,10$. Den Eulerske løsningen for den asymmetriske kvadrupol-trykkimpuls er antatt å være gyldig fram til $t = 0,05$. For alle tilfellene sammenfaller Lagransk andreordensløsning med Eulersk tredjeordensløsning så langt i tid den Eulerske løsningen er gyldig.



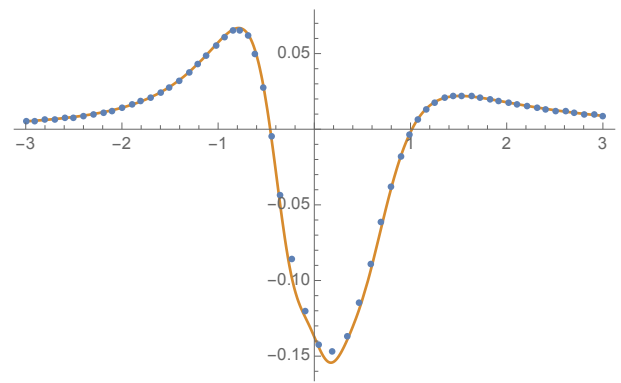
Figur 7.2: Eulersk tredjeordensløsning (oransje) og Lagransk andreordens løsning (blå punktverdier) for symmetrisk kvadrupol-trykkimpuls.



Figur 7.3: Eulersk tredjeordensløsning (oransje) og Lagransk andreordens løsning (blå punktverdier) for antisymmetrisk kvadrupol-trykkimpuls.



(a) $t = 0,05$



(b) $t = 0,10$

Figur 7.4: *Eulersk tredjeordensløsning (oransje) og Lagransk andreordens løsning (blå punktverdier) for asymmetrisk kvadrupol-trykkimpuls.*

Konklusjon

Kapittel 8

Konklusjon

Cauchy-Poisson-problemet representerer en fri overflate som settes i bevegelse av en hurtig trykkimpuls. For å få en dypere forståelse av ikke-lineære effekter på fri overflate, er de tidlige stadiene i strømningsproblemet blitt studert. Studien av strømmingen fra en dipol-trykkimpuls og kvadrupol-trykkimpulser er utført ved en small-time expansion.

Dipol-trykkimpulsen er det enkleste tilfellet av multipolfunksjonene, og den ikke-lineære strømmingen kan beskrives nøyaktig fram til dimensjonsløs tid lik $0,20$. For kvadrupol-trykkimpulsene er den ikke-lineære løsningen av strømmingen kun gyldig fram til dimensjonsløs tid lik $0,10$. I motsetning til dipol-trykkimpulser, gir kvadrupol-trykkimpulsene en tilnærmet fri overflate i fjernfeltet når trykkimpulsene settes, noe som gjør denne type problem nært beslektet med slamming.

Får å generere ikke-lineære effekter på overflaten er det er nødvendig med en kraftig trykkimpuls. Trykkimpulsens styrke er vurdert i forhold til den dimensjonsløse tyngdeparameteren G , som er invers proporsjonal med kvadratet av trykkimpulsens amplitude. Den ikke-lineære løsningen gjelder for G mindre enn 1. Når denne grenseverdien overstiges, overtar tyngdekraften som dominerende prosess.

I den Eulerske delen beskrives høyere ordens overflatehevning gjennom antakelsen om at hevingen er strengt vertikal. Arbeidet med den asymmetriske kvadrupol-trykkimpulsen viser interaksjonsprosessene mellom en symmetrisk og en antisymmetrisk trykkimpuls. De første ikke-lineære interaksjonsleddene mellom disse to trykkimpulsene oppstår allerede ved første ordens potensial. For andre ordens overflatehevning avsløres avvikene fra superposisjon av fri overflate-strømning gjennom leddene med amplitudeprodukt AB . For tredje ordens overflatehevning avsløres dette avviket gjennom leddene med amplitudeprodukt A^2B og AB^2 .

I den Lagranske delen blir overflatepartiklens tangentielle bevegelser tatt hensyn til. Resultatene viser at den Lagranske løsningen samsvarer med den Eulerske løsningen så langt i dimensjonsløs tid som den Eulerske løsningen er gyldig.

For videre arbeid kan det være interessant å samkjøre denne teorien med numerisk analyse for å finne ut hvordan ikke-lineariteten får virkning for fjernfeltet når dimensjonsløs tid er av orden 1 eller større.

Referanser

- [1] RA Bagnold. Interim report on wave-pressure research. *Excerpt from the J. of the Institution of Civil Engineers*, 1939.
- [2] Carl M Bender and Steven A Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] Nicolaas Govert De Bruijn. *Asymptotic methods in analysis*, volume 4. Courier Corporation, 1970.
- [4] L. Debnath. The linear and nonlinear Cauchy-Poisson wave problems for an inviscid or viscous liquid. In T.M. Rassias, editor, *Topics in Mathematical Analysis: A Volume Dedicated to the Memory of A.L. Cauchy*, volume 11, pages 123–155. World Scientific, 2017.
- [5] Odd Faltinsen. *Sea loads on ships and offshore structures*, volume 1. Cambridge University Press, 1993.
- [6] Horace Lamb. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 6 edition, 1932.
- [7] John Nicholas Newman. *Marine Hydrodynamics*. The MIT Press, 3 edition, 1980.
- [8] Frederick V Pohle. Motion of water due to breaking of a dam, and related problems. In *Gravity waves*, page 47, 1952.
- [9] James F Price. Lagrangian and eulerian representations of fluid flow: Kinematics and the equations of motion. *Woods Hole Oceanographic Institution, Woods Hole, MA*, 2543:13, 2006.
- [10] Gustaf Richert. Experimental investigation of shock pressures against breakwaters. In *Coastal Engineering 1968*, pages 954–973. 1969.
- [11] Peder A Tyvand and Touvia Miloh. Free-surface flow generated by a small submerged circular cylinder starting from rest. *Journal of Fluid Mechanics*, 286:103–116, 1995.
- [12] Peder A Tyvand and Camilla Mulstad. A nonlinear Cauchy-Poisson problem initiated by an impulsive surface pressure. 2017. Manuscript in preparation.

Vedlegg A

Første-, andre- og tredjeordens kinematisk betingelse

Regneprogrammet Mathematica benyttes til å utarbeide de høyere ordens randbetingelser. De tre første ordener beregnes gjennom ligningene (2.7), (3.1) og (3.8).

Fra ligning (2.7) har vi den kinematiske randbetingelsen

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \Phi \cdot \nabla \eta = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad z = \eta(x, y, t).$$

Fra (3.1) er small-time expansion er introdusert som

$$(p, \Phi, \eta) = (p_{-1}, 0, 0)\delta(t) + H(t)((p_0, \phi_0, 0) + t(p_1, \phi_1, \eta_1) + t^2(p_2, \phi_2, \eta_2) + \dots)$$

Dermed kan utviklingsforløpet for overflatehevingen η og strømningspotensialet ϕ beskrives gjennom henholdsvis

$$\eta(x, y, t) = t\eta_1 + t^2\eta_2 + t^3\eta_3$$

og

$$\phi(x, y, z, t) = \phi_0 + t\phi_1 + t^2\phi_2.$$

Dette settes inn i den kinematiske randbetingelsen. Første ordens kinematisk betingelse får vi ved å ta grensen $t \rightarrow 0$.

De to neste ordener beregnes gjennom å suksessivt sette small-time expansion inn i fri overflate-operatoren (3.8)

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{overflate}} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z},$$

og til slutt ta grensen $t \rightarrow 0$.

Den stegvise prosessen i Mathematica for utarbeidelse av første-, andre- og tredjeordens kinematisk betingelse vises nedenfor.

```

(*Definerer utviklingsforløpet til overflatehevningen opp til tredje orden*)
In[1]:= eta[x_, y_, t_] := t eta1[x, y] + t^2 eta2[x, y] + t^3 eta3[x, y]

(*Definerer utviklingsforløpet til
strømningspotensialet opp til tredje orden*)
In[2]:= phi[x_, y_, z_, t_] := phi0[x, y, z] + t phi1[x, y, z] + t^2 phi2[x, y, z]

(*Setter uttrykkene fra small-
time expansion inn i den kinematiske randbetingelsen*)
In[3]:= D[eta[x, y, t], t] + D[phi[x, y, z, t], x] D[eta[x, y, t], x] +
D[phi[x, y, z, t], y] D[eta[x, y, t], y] - D[phi[x, y, z, t], z]
Out[3]:= eta1[x, y] + 2 t eta2[x, y] + 3 t^2 eta3[x, y] - phi0^(0,0,1)[x, y, z] - t phi1^(0,0,1)[x, y, z] -
t^2 phi2^(0,0,1)[x, y, z] + (t eta1^(0,1)[x, y] + t^2 eta2^(0,1)[x, y] + t^3 eta3^(0,1)[x, y])
(phi0^(0,1,0)[x, y, z] + t phi1^(0,1,0)[x, y, z] + t^2 phi2^(0,1,0)[x, y, z]) +
(t eta1^(1,0)[x, y] + t^2 eta2^(1,0)[x, y] + t^3 eta3^(1,0)[x, y])
(phi0^(1,0,0)[x, y, z] + t phi1^(1,0,0)[x, y, z] + t^2 phi2^(1,0,0)[x, y, z])

(*Tar grensen t->0*)
In[4]:= t = 0
Out[4]:= 0

(*Henter ut small-time expansion innsatt i kinematisk randbetingelse når t->
0. Tilsvarende første ordens kinematisk betingelse*)
In[5]:= %3
Out[5]:= eta1[x, y] - phi0^(0,0,1)[x, y, z]

(*Sletter definisjonen av t*)
In[6]:= Clear[t]

(*Setter kinematisk betingelse med small-
time expansion inn i fri overflate-operatoren*)

```

In[7]:= D[%3, t] + D[eta[x, y, t], t] D[%3, z]

Out[7]= $2 \text{eta}2[x, y] + 6 t \text{eta}3[x, y] - \text{phi}1^{(0,0,1)}[x, y, z] - 2 t \text{phi}2^{(0,0,1)}[x, y, z] +$
 $(t \text{eta}1^{(0,1)}[x, y] + t^2 \text{eta}2^{(0,1)}[x, y] + t^3 \text{eta}3^{(0,1)}[x, y])$
 $(\text{phi}1^{(0,1,0)}[x, y, z] + 2 t \text{phi}2^{(0,1,0)}[x, y, z]) +$
 $(\text{eta}1^{(0,1)}[x, y] + 2 t \text{eta}2^{(0,1)}[x, y] + 3 t^2 \text{eta}3^{(0,1)}[x, y])$
 $(\text{phi}0^{(0,1,0)}[x, y, z] + t \text{phi}1^{(0,1,0)}[x, y, z] + t^2 \text{phi}2^{(0,1,0)}[x, y, z]) +$
 $(t \text{eta}1^{(1,0)}[x, y] + t^2 \text{eta}2^{(1,0)}[x, y] + t^3 \text{eta}3^{(1,0)}[x, y])$
 $(\text{phi}1^{(1,0,0)}[x, y, z] + 2 t \text{phi}2^{(1,0,0)}[x, y, z]) +$
 $(\text{eta}1^{(1,0)}[x, y] + 2 t \text{eta}2^{(1,0)}[x, y] + 3 t^2 \text{eta}3^{(1,0)}[x, y])$
 $(\text{phi}0^{(1,0,0)}[x, y, z] + t \text{phi}1^{(1,0,0)}[x, y, z] + t^2 \text{phi}2^{(1,0,0)}[x, y, z]) +$
 $(\text{eta}1[x, y] + 2 t \text{eta}2[x, y] + 3 t^2 \text{eta}3[x, y])$
 $(-\text{phi}0^{(0,0,2)}[x, y, z] - t \text{phi}1^{(0,0,2)}[x, y, z] - t^2 \text{phi}2^{(0,0,2)}[x, y, z] +$
 $(t \text{eta}1^{(0,1)}[x, y] + t^2 \text{eta}2^{(0,1)}[x, y] + t^3 \text{eta}3^{(0,1)}[x, y])$
 $(\text{phi}0^{(0,1,1)}[x, y, z] + t \text{phi}1^{(0,1,1)}[x, y, z] + t^2 \text{phi}2^{(0,1,1)}[x, y, z]) +$
 $(t \text{eta}1^{(1,0)}[x, y] + t^2 \text{eta}2^{(1,0)}[x, y] + t^3 \text{eta}3^{(1,0)}[x, y])$
 $(\text{phi}0^{(1,0,1)}[x, y, z] + t \text{phi}1^{(1,0,1)}[x, y, z] + t^2 \text{phi}2^{(1,0,1)}[x, y, z])$

(*Tar grensen t→0*)

In[8]:= t = 0

Out[8]= 0

(*Henter ut uttrykket innsatt i fri overflate-operator når t→
0. Tilsvarende andre ordens kinematisk betingelse*)

In[9]:= %7

Out[9]= $2 \text{eta}2[x, y] - \text{phi}1^{(0,0,1)}[x, y, z] - \text{eta}1[x, y] \text{phi}0^{(0,0,2)}[x, y, z] +$
 $\text{eta}1^{(0,1)}[x, y] \text{phi}0^{(0,1,0)}[x, y, z] + \text{eta}1^{(1,0)}[x, y] \text{phi}0^{(1,0,0)}[x, y, z]$

(*Sletter definisjonen av t*)

In[10]:= Clear[t]

(*Setter Out[7] inn i fri overflate-operatoren*)

In[11]:= D[%7, t] + D[eta[x, y, t], t] D[%7, z]

Out[11]= $6 \text{eta3}[x, y] - 2 \text{phi2}^{(0,0,1)}[x, y, z] +$
 $2 (t \text{eta1}^{(0,1)}[x, y] + t^2 \text{eta2}^{(0,1)}[x, y] + t^3 \text{eta3}^{(0,1)}[x, y]) \text{phi2}^{(0,1,0)}[x, y, z] +$
 $2 (\text{eta1}^{(0,1)}[x, y] + 2 t \text{eta2}^{(0,1)}[x, y] + 3 t^2 \text{eta3}^{(0,1)}[x, y])$
 $(\text{phi1}^{(0,1,0)}[x, y, z] + 2 t \text{phi2}^{(0,1,0)}[x, y, z]) +$
 $(2 \text{eta2}^{(0,1)}[x, y] + 6 t \text{eta3}^{(0,1)}[x, y])$
 $(\text{phi0}^{(0,1,0)}[x, y, z] + t \text{phi1}^{(0,1,0)}[x, y, z] + t^2 \text{phi2}^{(0,1,0)}[x, y, z]) +$
 $2 (t \text{eta1}^{(1,0)}[x, y] + t^2 \text{eta2}^{(1,0)}[x, y] + t^3 \text{eta3}^{(1,0)}[x, y]) \text{phi2}^{(1,0,0)}[x, y, z] +$
 $2 (\text{eta1}^{(1,0)}[x, y] + 2 t \text{eta2}^{(1,0)}[x, y] + 3 t^2 \text{eta3}^{(1,0)}[x, y])$
 $(\text{phi1}^{(1,0,0)}[x, y, z] + 2 t \text{phi2}^{(1,0,0)}[x, y, z]) +$
 $(2 \text{eta2}^{(1,0)}[x, y] + 6 t \text{eta3}^{(1,0)}[x, y])$
 $(\text{phi0}^{(1,0,0)}[x, y, z] + t \text{phi1}^{(1,0,0)}[x, y, z] + t^2 \text{phi2}^{(1,0,0)}[x, y, z]) +$
 $(\text{eta1}[x, y] + 2 t \text{eta2}[x, y] + 3 t^2 \text{eta3}[x, y]) (-\text{phi1}^{(0,0,2)}[x, y, z] -$
 $2 t \text{phi2}^{(0,0,2)}[x, y, z] + (t \text{eta1}^{(0,1)}[x, y] + t^2 \text{eta2}^{(0,1)}[x, y] + t^3 \text{eta3}^{(0,1)}[x, y])$
 $(\text{phi1}^{(0,1,1)}[x, y, z] + 2 t \text{phi2}^{(0,1,1)}[x, y, z]) +$
 $(\text{eta1}^{(0,1)}[x, y] + 2 t \text{eta2}^{(0,1)}[x, y] + 3 t^2 \text{eta3}^{(0,1)}[x, y])$
 $(\text{phi0}^{(0,1,1)}[x, y, z] + t \text{phi1}^{(0,1,1)}[x, y, z] + t^2 \text{phi2}^{(0,1,1)}[x, y, z]) +$
 $(t \text{eta1}^{(1,0)}[x, y] + t^2 \text{eta2}^{(1,0)}[x, y] + t^3 \text{eta3}^{(1,0)}[x, y])$
 $(\text{phi1}^{(1,0,1)}[x, y, z] + 2 t \text{phi2}^{(1,0,1)}[x, y, z]) +$
 $(\text{eta1}^{(1,0)}[x, y] + 2 t \text{eta2}^{(1,0)}[x, y] + 3 t^2 \text{eta3}^{(1,0)}[x, y])$
 $(\text{phi0}^{(1,0,1)}[x, y, z] + t \text{phi1}^{(1,0,1)}[x, y, z] + t^2 \text{phi2}^{(1,0,1)}[x, y, z]) +$
 $(2 \text{eta2}[x, y] + 6 t \text{eta3}[x, y]) (-\text{phi0}^{(0,0,2)}[x, y, z] - t \text{phi1}^{(0,0,2)}[x, y, z] -$
 $t^2 \text{phi2}^{(0,0,2)}[x, y, z] + (t \text{eta1}^{(0,1)}[x, y] + t^2 \text{eta2}^{(0,1)}[x, y] + t^3 \text{eta3}^{(0,1)}[x, y])$
 $(\text{phi0}^{(0,1,1)}[x, y, z] + t \text{phi1}^{(0,1,1)}[x, y, z] + t^2 \text{phi2}^{(0,1,1)}[x, y, z]) +$
 $(t \text{eta1}^{(1,0)}[x, y] + t^2 \text{eta2}^{(1,0)}[x, y] + t^3 \text{eta3}^{(1,0)}[x, y])$
 $(\text{phi0}^{(1,0,1)}[x, y, z] + t \text{phi1}^{(1,0,1)}[x, y, z] + t^2 \text{phi2}^{(1,0,1)}[x, y, z]) +$
 $(\text{eta1}[x, y] + 2 t \text{eta2}[x, y] + 3 t^2 \text{eta3}[x, y]) (-\text{phi1}^{(0,0,2)}[x, y, z] -$
 $2 t \text{phi2}^{(0,0,2)}[x, y, z] + (t \text{eta1}^{(0,1)}[x, y] + t^2 \text{eta2}^{(0,1)}[x, y] + t^3 \text{eta3}^{(0,1)}[x, y])$
 $(\text{phi1}^{(0,1,1)}[x, y, z] + 2 t \text{phi2}^{(0,1,1)}[x, y, z]) +$
 $(\text{eta1}^{(0,1)}[x, y] + 2 t \text{eta2}^{(0,1)}[x, y] + 3 t^2 \text{eta3}^{(0,1)}[x, y])$
 $(\text{phi0}^{(0,1,1)}[x, y, z] + t \text{phi1}^{(0,1,1)}[x, y, z] + t^2 \text{phi2}^{(0,1,1)}[x, y, z]) +$
 $(t \text{eta1}^{(1,0)}[x, y] + t^2 \text{eta2}^{(1,0)}[x, y] + t^3 \text{eta3}^{(1,0)}[x, y])$
 $(\text{phi1}^{(1,0,1)}[x, y, z] + 2 t \text{phi2}^{(1,0,1)}[x, y, z]) +$
 $(\text{eta1}^{(1,0)}[x, y] + 2 t \text{eta2}^{(1,0)}[x, y] + 3 t^2 \text{eta3}^{(1,0)}[x, y])$
 $(\text{phi0}^{(1,0,1)}[x, y, z] + t \text{phi1}^{(1,0,1)}[x, y, z] + t^2 \text{phi2}^{(1,0,1)}[x, y, z]) +$
 $(\text{eta1}[x, y] + 2 t \text{eta2}[x, y] + 3 t^2 \text{eta3}[x, y])$
 $(-\text{phi0}^{(0,0,3)}[x, y, z] - t \text{phi1}^{(0,0,3)}[x, y, z] - t^2 \text{phi2}^{(0,0,3)}[x, y, z] +$
 $(t \text{eta1}^{(0,1)}[x, y] + t^2 \text{eta2}^{(0,1)}[x, y] + t^3 \text{eta3}^{(0,1)}[x, y])$
 $(\text{phi0}^{(0,1,2)}[x, y, z] + t \text{phi1}^{(0,1,2)}[x, y, z] + t^2 \text{phi2}^{(0,1,2)}[x, y, z]) +$
 $(t \text{eta1}^{(1,0)}[x, y] + t^2 \text{eta2}^{(1,0)}[x, y] + t^3 \text{eta3}^{(1,0)}[x, y])$
 $(\text{phi0}^{(1,0,2)}[x, y, z] + t \text{phi1}^{(1,0,2)}[x, y, z] + t^2 \text{phi2}^{(1,0,2)}[x, y, z]))$

(*Tar grensen t→0*)

In[12]:= $t = 0$

Out[12]= 0

(*Henter ut uttrykket innsatt i fri overflate-operator når $t \rightarrow 0$. Tilsvarende tredje ordens kinematisk betingelse*)

In[13]:= %11

Out[13]=
$$6 \eta_3[x, y] - 2 \phi_2^{(0,0,1)}[x, y, z] - 2 \eta_2[x, y] \phi_0^{(0,0,2)}[x, y, z] + 2 \eta_2^{(0,1)}[x, y] \phi_0^{(0,1,0)}[x, y, z] + 2 \eta_1^{(0,1)}[x, y] \phi_1^{(0,1,0)}[x, y, z] + 2 \eta_2^{(1,0)}[x, y] \phi_0^{(1,0,0)}[x, y, z] + 2 \eta_1^{(1,0)}[x, y] \phi_1^{(1,0,0)}[x, y, z] + \eta_1[x, y] (-\phi_1^{(0,0,2)}[x, y, z] + \eta_1^{(0,1)}[x, y] \phi_0^{(0,1,1)}[x, y, z] + \eta_1^{(1,0)}[x, y] \phi_0^{(1,0,1)}[x, y, z]) + \eta_1[x, y] (-\phi_1^{(0,0,2)}[x, y, z] - \eta_1[x, y] \phi_0^{(0,0,3)}[x, y, z] + \eta_1^{(0,1)}[x, y] \phi_0^{(0,1,1)}[x, y, z] + \eta_1^{(1,0)}[x, y] \phi_0^{(1,0,1)}[x, y, z])$$

(*Forenkler uttrykket over. Tredje ordens kinematisk betingelse*)

In[14]:= Simplify[%]

Out[14]=
$$6 \eta_3[x, y] - 2 \phi_2^{(0,0,1)}[x, y, z] - 2 \eta_2[x, y] \phi_0^{(0,0,2)}[x, y, z] - 2 \eta_1[x, y] \phi_1^{(0,0,2)}[x, y, z] - \eta_1[x, y]^2 \phi_0^{(0,0,3)}[x, y, z] + 2 \eta_2^{(0,1)}[x, y] \phi_0^{(0,1,0)}[x, y, z] + 2 \eta_1^{(0,1)}[x, y] \phi_1^{(0,1,0)}[x, y, z] + 2 \eta_1[x, y] \eta_1^{(0,1)}[x, y] \phi_0^{(0,1,1)}[x, y, z] + 2 \eta_2^{(1,0)}[x, y] \phi_0^{(1,0,0)}[x, y, z] + 2 \eta_1^{(1,0)}[x, y] \phi_1^{(1,0,0)}[x, y, z] + 2 \eta_1[x, y] \eta_1^{(1,0)}[x, y] \phi_0^{(1,0,1)}[x, y, z]$$

Out[5] gir uttrykket for første ordens kinematisk betingelse

$$\eta_1 = \phi_{0z}, \quad z = 0.$$

Out[9] gir uttrykket for andre ordens kinematisk betingelse

$$2\eta_2 = \phi_{1z} + \eta_1\phi_{0zz} - \nabla\eta_1 \cdot \nabla\phi_0, \quad z = 0.$$

Out[14] gir uttrykket for tredje ordens kinematisk betingelse

$$\begin{aligned} 6\eta_3 &= 2\phi_{2z} + 2\eta_2\phi_{0zz} + 2\eta_1\phi_{1zz} - \eta_1^2\phi_{0zzz} - 2\eta_{2y}\phi_{0y} - 2\eta_{1y}\phi_{1y} \\ &\quad - 2\eta_1\eta_{1y}\phi_{0yz} - 2\eta_{2x}\phi_{0x} - 2\eta_{1x}\phi_{1x} - 2\eta_1\eta_{1x}\phi_{0xz}, \quad z = 0 \\ &= 2\phi_{2z} + 2\eta_2\phi_{0zz} + 2\eta_1\phi_{1zz} - 2\nabla\phi_1 \cdot \nabla\eta_1 - 2\nabla\phi_0 \cdot \nabla\eta_2 \\ &\quad - \eta_1^2\phi_{0zzz} - 2\eta_1\nabla\eta_1(\phi_{0xz} + \phi_{0yz}), \quad z = 0. \end{aligned}$$

For virvelfri strømming er

$$\phi_{0xz} = \phi_{0zx} \quad \text{og} \quad \phi_{0yz} = \phi_{0zy}.$$

Fra første ordens kinematisk betingelse har vi at $\phi_{0z} = \eta_1$. Ved å benytte denne betingelsen, blir

$$\phi_{0xz} = \eta_{1x} \quad \text{og} \quad \phi_{0yz} = \eta_{1y}.$$

Dermed kan tredje ordens kinematisk betingelse uttrykkes på formen

$$6\eta_3 = 2\phi_{2z} + 2\eta_2\phi_{0zz} + 2\eta_1\phi_{1zz} + \eta_1^2\nabla^2\eta_1 - 2\nabla\phi_1 \cdot \nabla\eta_1 - 2\nabla\phi_0 \cdot \nabla\eta_2 - 2\eta_1|\nabla\eta_1|^2, \quad z = 0.$$

Vedlegg B

Første-, andre- og tredjeordens dynamisk betingelse

Første ordens dynamisk betingelse er allerede gitt i ligning (3.3)

$$\phi_0 = -\frac{P(x)}{\rho}$$

Som gitt i Vedlegg A er utviklingsforløpet for overflatehevningen η og strømningspotensialet ϕ uttrykt ved

$$\eta(x, y, t) = t\eta_1 + t^2\eta_2 + t^3\eta_3$$

og

$$\phi(x, y, z, t) = \phi_0 + t\phi_1 + t^2\phi_2.$$

Dette settes inn i den dynamiske betingelsen (2.9)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + g\eta = 0, \quad z = \eta(x, y, t).$$

Dette settes inn i fri overflate-operaturen. Ved grensen $t \rightarrow 0$ for hvert steg får vi andre og tredje ordens dynamisk betingelse.

Den stegvise prosessen i Mathematica for utarbeidelse av første-, andre- og tredjeordens dynamisk betingelse vises nedenfor.

```

(*Definerer utviklingsforløpet til overflatehevningen opp til tredje orden*)
In[1]:= eta[x_, y_, t_] := t eta1[x, y] + t^2 eta2[x, y] + t^3 eta3[x, y]

(*Definerer utviklingsforløpet til
strømningspotensialet opp til tredje orden*)
In[2]:= phi[x_, y_, z_, t_] := phi0[x, y, z] + t phi1[x, y, z] + t^2 phi2[x, y, z]

(*Setter uttrykkene fra small-
time expansion inn i den dynamiske randbetingelsen*)
In[3]:= D[phi[x, y, z, t], t] +
(1/2) (D[phi[x, y, z, t], x]^2 + D[phi[x, y, z, t], y]^2 + D[phi[x, y, z, t], z]^2) +
g eta[x, y, t]
Out[3]= g (t eta1[x, y] + t^2 eta2[x, y] + t^3 eta3[x, y]) + phi1[x, y, z] + 2 t phi2[x, y, z] +
1/2 ((phi0^(0,0,1)[x, y, z] + t phi1^(0,0,1)[x, y, z] + t^2 phi2^(0,0,1)[x, y, z])^2 +
(phi0^(0,1,0)[x, y, z] + t phi1^(0,1,0)[x, y, z] + t^2 phi2^(0,1,0)[x, y, z])^2 +
(phi0^(1,0,0)[x, y, z] + t phi1^(1,0,0)[x, y, z] + t^2 phi2^(1,0,0)[x, y, z])^2)

(*Tar grensen t->0*)
In[4]:= t = 0
Out[4]= 0

(*Henter ut small-time expansion innsatt i dynamisk randbetingelse når t->
0. Tilsvarende andre ordens dynamisk betingelse*)
In[5]:= %3
Out[5]= phi1[x, y, z] + 1/2 (phi0^(0,0,1)[x, y, z]^2 + phi0^(0,1,0)[x, y, z]^2 + phi0^(1,0,0)[x, y, z]^2)

(*Sletter definisjonen av t*)
In[6]:= Clear[t]

(*Setter dynamisk betingelse med small-
time expansion inn i fri overflate-operatoren*)

```

In[7]:= D[%3, t] + D[eta[x, y, t], t] D[%3, z]

Out[7]= $g \left(\text{eta1}[x, y] + 2 t \text{eta2}[x, y] + 3 t^2 \text{eta3}[x, y] \right) +$
 $2 \text{phi2}[x, y, z] + \frac{1}{2} \left(2 \left(\text{phi1}^{(0,0,1)}[x, y, z] + 2 t \text{phi2}^{(0,0,1)}[x, y, z] \right) \right.$
 $\left. \left(\text{phi0}^{(0,0,1)}[x, y, z] + t \text{phi1}^{(0,0,1)}[x, y, z] + t^2 \text{phi2}^{(0,0,1)}[x, y, z] \right) + \right.$
 $2 \left(\text{phi1}^{(0,1,0)}[x, y, z] + 2 t \text{phi2}^{(0,1,0)}[x, y, z] \right)$
 $\left. \left(\text{phi0}^{(0,1,0)}[x, y, z] + t \text{phi1}^{(0,1,0)}[x, y, z] + t^2 \text{phi2}^{(0,1,0)}[x, y, z] \right) + \right.$
 $2 \left(\text{phi1}^{(1,0,0)}[x, y, z] + 2 t \text{phi2}^{(1,0,0)}[x, y, z] \right)$
 $\left. \left(\text{phi0}^{(1,0,0)}[x, y, z] + t \text{phi1}^{(1,0,0)}[x, y, z] + t^2 \text{phi2}^{(1,0,0)}[x, y, z] \right) \right) +$
 $\left(\text{eta1}[x, y] + 2 t \text{eta2}[x, y] + 3 t^2 \text{eta3}[x, y] \right)$
 $\left(\text{phi1}^{(0,0,1)}[x, y, z] + 2 t \text{phi2}^{(0,0,1)}[x, y, z] + \right.$
 $\frac{1}{2} \left(2 \left(\text{phi0}^{(0,0,1)}[x, y, z] + t \text{phi1}^{(0,0,1)}[x, y, z] + t^2 \text{phi2}^{(0,0,1)}[x, y, z] \right) \right.$
 $\left. \left(\text{phi0}^{(0,0,2)}[x, y, z] + t \text{phi1}^{(0,0,2)}[x, y, z] + t^2 \text{phi2}^{(0,0,2)}[x, y, z] \right) + \right.$
 $2 \left(\text{phi0}^{(0,1,0)}[x, y, z] + t \text{phi1}^{(0,1,0)}[x, y, z] + t^2 \text{phi2}^{(0,1,0)}[x, y, z] \right)$
 $\left. \left(\text{phi0}^{(0,1,1)}[x, y, z] + t \text{phi1}^{(0,1,1)}[x, y, z] + t^2 \text{phi2}^{(0,1,1)}[x, y, z] \right) + \right.$
 $2 \left(\text{phi0}^{(1,0,0)}[x, y, z] + t \text{phi1}^{(1,0,0)}[x, y, z] + t^2 \text{phi2}^{(1,0,0)}[x, y, z] \right)$
 $\left. \left(\text{phi0}^{(1,0,1)}[x, y, z] + t \text{phi1}^{(1,0,1)}[x, y, z] + t^2 \text{phi2}^{(1,0,1)}[x, y, z] \right) \right)$

(*Tar grensen t→0*)

In[8]:= t = 0

Out[8]= 0

(*Henter ut uttrykket innsatt i fri overflate-operator når t→0. Tilsvarende tredje ordens dynamisk betingelse*)

In[9]:= %7

Out[9]= $g \text{eta1}[x, y] + 2 \text{phi2}[x, y, z] + \frac{1}{2}$
 $\left(2 \text{phi0}^{(0,0,1)}[x, y, z] \text{phi1}^{(0,0,1)}[x, y, z] + 2 \text{phi0}^{(0,1,0)}[x, y, z] \text{phi1}^{(0,1,0)}[x, y, z] + \right.$
 $\left. 2 \text{phi0}^{(1,0,0)}[x, y, z] \text{phi1}^{(1,0,0)}[x, y, z] \right) + \text{eta1}[x, y]$
 $\left(\text{phi1}^{(0,0,1)}[x, y, z] + \frac{1}{2} \left(2 \text{phi0}^{(0,0,1)}[x, y, z] \text{phi0}^{(0,0,2)}[x, y, z] + 2 \text{phi0}^{(0,1,0)}[x, y, z] \right. \right.$
 $\left. \left. \text{phi0}^{(0,1,1)}[x, y, z] + 2 \text{phi0}^{(1,0,0)}[x, y, z] \text{phi0}^{(1,0,1)}[x, y, z] \right) \right)$

(*Forenkler uttrykket over. Tredje ordens dynamisk betingelse*)

In[10]:= Simplify[%]

Out[10]= $2 \text{phi2}[x, y, z] + \text{phi0}^{(0,0,1)}[x, y, z] \text{phi1}^{(0,0,1)}[x, y, z] +$
 $\text{phi0}^{(0,1,0)}[x, y, z] \text{phi1}^{(0,1,0)}[x, y, z] + \text{phi0}^{(1,0,0)}[x, y, z] \text{phi1}^{(1,0,0)}[x, y, z] +$
 $\text{eta1}[x, y] \left(g + \text{phi1}^{(0,0,1)}[x, y, z] + \text{phi0}^{(0,0,1)}[x, y, z] \text{phi0}^{(0,0,2)}[x, y, z] + \right.$
 $\left. \text{phi0}^{(0,1,0)}[x, y, z] \text{phi0}^{(0,1,1)}[x, y, z] + \text{phi0}^{(1,0,0)}[x, y, z] \text{phi0}^{(1,0,1)}[x, y, z] \right)$

Første orden dynamisk betingelse er

$$\phi_0 = -\frac{P(x)}{\rho}.$$

Out[5] gir andre orden dynamisk betingelse

$$\phi_1 = -\frac{1}{2}(\phi_{0x}^2 + \phi_{0y}^2 + \phi_{0z}^2) = -\frac{1}{2}|\nabla\phi_0|^2, \quad z = 0.$$

Out[10] gir tredje orden dynamisk betingelse

$$\begin{aligned} 2\phi_2 &= -\phi_{0z}\phi_{1z} - \phi_{0y}\phi_{1y} - \phi_{0x}\phi_{1x} - \eta_1 g - \eta_1\phi_{1z} - \eta_1\phi_{0z}\phi_{0zz} - \eta_1\phi_{0y}\phi_{0yz} - \eta_1\phi_{0x}\phi_{0xz}, \quad z = 0 \\ &= -\eta_1\phi_{1z} - \nabla\phi_0 \cdot \nabla\phi_1 - \eta_1\nabla\phi_0 \cdot \nabla\phi_{0z} - g\eta_1, \quad z = 0, \end{aligned}$$

der vi har benyttet at $\phi_{0xz} = \phi_{0zx}$ og $\phi_{0yz} = \phi_{0zy}$, og $\phi_{0z} = \eta_1$ fra første orden kinematisk betingelse.

Vedlegg C

To klasser av harmoniske funksjoner

For å studere de høyere ordens hevninger innfører vi de harmoniske funksjonene $f_n(x, y)$ og $g_n(x, y)$. Funksjonene er definert ved grenseverdien $z = 0$

$$f_n(x, 0) = \frac{1}{(1 + x^2)^n},$$
$$g_n(x, 0) = \frac{x}{(1 + x^2)^n},$$

der $n = 1, 2, \dots$

For å vise hvordan disse klassene av harmoniske funksjonene kan beregnes rekursivt, introduserer vi først et kildepotensial χ i ytterpunktet $(0, 1)$. Dette er et fiktivt punkt utenfor væskeområdet, og er definert ved

$$\chi = \frac{1}{2} \log(x^2 + (z - 1)^2).$$

Kildepotensialets grader gir førsteordensfunksjonene

$$f_1(x, z) = -\frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{1 - z}{x^2 + (z - 1)^2},$$
$$g_1(x, z) = \frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + (z - 1)^2}.$$

Hver nye funksjon av orden n er en lineær kombinasjon av de lavere ordens funksjoner, pluss den z -deriverte av funksjon $n - 1$. Funksjonene er utarbeidet i Mathematica og er gitt av følgende rekursive ordning

$$2f_2 = f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial z},$$
$$2g_2 = \frac{\partial g_1}{\partial z},$$

$$\begin{aligned}
4f_3 &= \frac{1}{2}f_1 + 2f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial z}, \\
4g_3 &= g_2 + \frac{\partial g_2}{\partial z}, \\
6f_4 &= \frac{3}{8}f_1 + \frac{3}{4}f_2 + 3f_3 + \frac{\partial f_3}{\partial z}, \\
6g_4 &= \frac{1}{4}g_2 + 2g_3 + \frac{\partial g_3}{\partial z}, \\
8f_5 &= \frac{5}{16}f_1 + \frac{1}{2}f_2 + f_3 + 4f_4 + \frac{\partial f_4}{\partial z}, \\
8g_5 &= \frac{1}{8}g_2 + \frac{1}{2}g_3 + 3g_4 + \frac{\partial g_4}{\partial z}, \\
10f_6 &= \frac{35}{128}f_1 + \frac{25}{64}f_2 + \frac{5}{8}f_3 + \frac{5}{4}f_4 + 5f_5 + \frac{\partial f_5}{\partial z}, \\
10g_6 &= \frac{5}{64}g_2 + \frac{1}{4}g_3 + \frac{3}{4}g_4 + 4g_5 + \frac{\partial g_5}{\partial z}, \\
12f_7 &= \frac{63}{256}f_1 + \frac{21}{64}f_2 + \frac{15}{32}f_3 + \frac{3}{4}f_4 + \frac{3}{2}f_5 + 6f_6 + \frac{\partial f_6}{\partial z}, \\
12g_7 &= \frac{7}{128}g_2 + \frac{5}{32}g_3 + \frac{3}{8}g_4 + g_5 + 5g_6 + \frac{\partial g_6}{\partial z}, \\
14f_8 &= \frac{231}{1024}f_1 + \frac{147}{512}f_2 + \frac{49}{128}f_3 + \frac{35}{64}f_4 + \frac{7}{8}f_5 + \frac{7}{4}f_6 + 7f_7 + \frac{\partial f_7}{\partial z}, \\
14g_8 &= \frac{21}{512}g_2 + \frac{7}{64}g_3 + \frac{15}{64}g_4 + \frac{1}{2}g_5 + \frac{5}{4}g_6 + 6g_7 + \frac{\partial g_7}{\partial z}, \\
16f_9 &= \frac{429}{2048}f_1 + \frac{33}{128}f_2 + \frac{21}{64}f_3 + \frac{7}{16}f_4 + \frac{5}{8}f_5 + f_6 + 2f_7 + 8f_8 + \frac{\partial f_8}{\partial z}, \\
16g_9 &= \frac{33}{1024}g_2 + \frac{21}{256}g_3 + \frac{21}{128}g_4 + \frac{5}{16}g_5 + \frac{5}{8}g_6 + \frac{3}{2}g_7 + 7g_8 + \frac{\partial g_8}{\partial z}, \\
18f_{10} &= \frac{6435}{32768}f_1 + \frac{3861}{16384}f_2 + \frac{297}{1024}f_3 + \frac{189}{512}f_4 + \frac{63}{128}f_5 + \frac{45}{64}f_6 + \frac{9}{8}f_7 + \frac{9}{4}f_8 + 9f_9 + \frac{\partial f_9}{\partial z}, \\
18g_{10} &= \frac{429}{16384}g_2 + \frac{33}{512}g_3 + \frac{63}{512}g_4 + \frac{7}{32}g_5 + \frac{25}{64}g_6 + \frac{3}{4}g_7 + \frac{7}{4}g_8 + 8g_9 + \frac{\partial g_9}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Disse formlene har gyldighet i halvplanet $z \leq 0$.

I de frie overflatebetingelsene får vi bruk for de første- og annenderiverte av f - og g -funksjonene i horisontal- og vertikalretning. Disse uttrykkes ved funksjonsverdiene på den uforstyrrede frie overflaten, $f_n(x, 0)$ og $g_n(x, 0)$. Formlene nedenfor inneholder informasjon som er nødvendig for å beregne disse derivasjonene.

Koeffisientene for de vertikalderverte funksjonene på den uforstyrrede frie overflaten er definert ved

$$\left. \frac{\partial f_n}{\partial z} \right|_{z=0} = \sum_{j=1}^{j=n+1} A_{nj} f_j(x, 0), \quad \left. \frac{\partial g_n}{\partial z} \right|_{z=0} = \sum_{j=2}^{j=n+1} B_{nj} g_j(x, 0),$$

der $n = 1, 2, \dots$ og $j = 1, 2, \dots, n + 1$.

Koeffisientsettene i stigende rekkefølge for de vertikaldेरiverte av f_n -funksjonen er

$$\begin{aligned}
(A_{11}, A_{12}) &= (-1, 2), \\
(A_{21}, A_{22}, A_{23}) &= \left(-\frac{1}{2}, -2, 4\right), \\
(A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34}) &= \left(-\frac{3}{8}, -\frac{3}{4}, -3, 6\right), \\
(A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44}, A_{45}) &= \left(-\frac{5}{16}, -\frac{1}{2}, -1, -4, 8\right), \\
(A_{51}, A_{52}, A_{53}, A_{54}, A_{55}, A_{56}) &= \left(-\frac{35}{128}, -\frac{25}{64}, -\frac{5}{8}, -\frac{5}{4}, -5, 10\right), \\
(A_{61}, A_{62}, A_{63}, A_{64}, A_{65}, A_{66}, A_{67}) &= \left(-\frac{63}{256}, -\frac{21}{64}, -\frac{15}{32}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}, -6, 12\right), \\
(A_{71}, A_{72}, A_{73}, A_{74}, A_{75}, A_{76}, A_{77}, A_{78}) &= \left(-\frac{231}{1024}, -\frac{147}{512}, -\frac{49}{128}, -\frac{35}{64}, -\frac{7}{8}, -\frac{7}{4}, -7, 14\right), \\
(A_{81}, A_{82}, A_{83}, A_{84}, A_{85}, A_{86}, A_{87}, A_{88}, A_{89}) &= \left(-\frac{429}{2048}, -\frac{33}{128}, -\frac{21}{64}, -\frac{7}{16}, -\frac{5}{8}, -1, -2, -8, 16\right), \\
(A_{91}, A_{92}, A_{93}, A_{94}, A_{95}, A_{96}, A_{97}, A_{98}, A_{99}, A_{9,10}) &= \left(-\frac{6435}{32768}, -\frac{3861}{16384}, -\frac{297}{1024}, -\frac{189}{512}, -\frac{63}{128}, -\frac{45}{64}, -\frac{9}{8}, -\frac{9}{4}, -9, 18\right).
\end{aligned}$$

Koeffisientsettene i stigende rekkefølge for de vertikaldेरiverte av g_n -funksjonen er

$$\begin{aligned}
B_{12} &= 2, \\
(B_{22}, B_{23}) &= (-1, 4), \\
(B_{32}, B_{33}, B_{34}) &= \left(-\frac{1}{4}, -2, 6\right), \\
(B_{42}, B_{43}, B_{44}, B_{45}) &= \left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}, -3, 8\right), \\
(B_{52}, B_{53}, B_{54}, B_{55}, B_{56}) &= \left(-\frac{5}{64}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, -4, 10\right), \\
(B_{62}, B_{63}, B_{64}, B_{65}, B_{66}, B_{67}) &= \left(-\frac{7}{128}, -\frac{5}{32}, -\frac{3}{8}, -1, -5, 12\right), \\
(B_{72}, B_{73}, B_{74}, B_{75}, B_{76}, B_{77}, B_{78}) &= \left(-\frac{21}{512}, -\frac{7}{64}, -\frac{15}{64}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, -6, 14\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (B_{82}, B_{83}, B_{84}, B_{85}, B_{86}, B_{87}, B_{88}, B_{89}) \\
& = \left(-\frac{33}{1024}, -\frac{21}{256}, -\frac{21}{128}, -\frac{5}{16}, -\frac{5}{8}, -\frac{3}{2}, -7, 16 \right), \\
& (B_{92}, B_{93}, B_{94}, B_{95}, B_{96}, B_{97}, B_{98}, B_{99}, B_{9,10}) \\
& = \left(-\frac{429}{16384}, -\frac{33}{512}, -\frac{63}{512}, -\frac{7}{32}, -\frac{25}{64}, -\frac{3}{4}, -\frac{7}{4}, -8, 18 \right).
\end{aligned}$$

De horisontalderiverte av disse funksjonene kan skrives med følgende generelle formler

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial f_n}{\partial x} \right|_{z=0} &= -2n g_{n+1}(x, 0), \\
\left. \frac{\partial g_n}{\partial x} \right|_{z=0} &= (1 - 2n) f_n(x, 0) + 2n f_{n+1}(x, 0), \\
\left. \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} \right|_{z=0} &= 2n(2n + 1) f_{n+1}(x, 0) - 4n(n + 1) f_{n+2}(x, 0) = - \left. \frac{\partial^2 f_n}{\partial z^2} \right|_{z=0}, \\
\left. \frac{\partial^2 g_n}{\partial x^2} \right|_{z=0} &= 2n(2n - 1) g_{n+1}(x, 0) - 4n(n + 1) g_{n+2}(x, 0) = - \left. \frac{\partial^2 g_n}{\partial z^2} \right|_{z=0}.
\end{aligned}$$



Norges miljø- og biovitenskapelig universitet
Noregs miljø- og biovitenskapelige universitet
Norwegian University of Life Sciences

Postboks 5003
NO-1432 Ås
Norway