Norges miljø- og biovitenskapelige universitet

Masteroppgave 2017 30 stp.
Fakultet for realfag og teknologi

Læreres rolle for å fremme elevers matematiske resonnement

The teachers' role in promoting students' mathematical reasoning

Elin Brandsnes Vårtun
Lektorutdanning i realfag

Forord

Fem år ved Norges miljø- og biovitenskapelige universitet nærmer seg slutten, hvor denne masteroppgaven setter punktum for en epoke. Jeg startet arbeidet med denne masteroppgaven høsten 2016, etter fire år med fordypning i matematikk, fysikk og pedagogikk. Helt siden jeg startet på studiet i 2012, har jeg ønsket å skrive en matematikkdidaktisk oppgave. Dette ønsket ble enda sterkere etter endt praktisk pedagogisk utdanning (PPU) våren 2015. Høsten ble brukt til masterforberedende fag, hvor jeg jobbet med å finne hvilket område innenfor matematikkdidaktikken som fanget min interesse. Jeg sitter nå igjen med utelukkende gode minner fra studietiden, og gleder meg til fortsettelsen ute i skoleverket, hvor jeg skal bruke kunnskapen jeg har tilegnet meg. Jeg vil derfor takke alle lærere og medstudenter ved lektorutdanningen på NMBU for fem innholdsrike og fine år.

Jeg vil rekke en stor takk til lærerne som sa seg villige til å delta i denne studien. Deres positive holdning og gode samarbeidsevne gjorde denne studien mulig. Selv om deltagelsen skapte endringer og ekstra planlegging for deres del, var de utelukkende positive. Dette setter jeg stor pris på, og jeg tar med meg denne positive erfaringen inn i min lærerkarriere.

Den største takken må gå til min veileder Margrethe Naalsund og biveileder Ellen Kristine Solbrekke Hansen. Takk for gode samtaler, uvurderlig veiledning, konstruktive tilbakemeldinger og motiverende smil gjennom dette halvåret. Deres kunnskaper og arbeidskapasitet er inspirerende.

Studietiden ville ikke vært det samme uten Studentsamfunnet i Ås, da spesielt Samfunsstyret 2015, som har gitt meg mange gode minner og nære venner. Takk til dere alle! Sist, men ikke minst, ønsker jeg å rette en takk til samboer Per André, mine foreldre og søsken, som har oppmuntret og motivert meg gjennom hele studietiden min.

Ås, mai 2017.

Elin Brandsnes Vårtun

Sammendrag

Internasjonale studier viser at norske elever scorer relativt dårlig i algebra, i forhold til andre referanseland. En av årsakene til dette kan være at algebra oppleves som rene aritmetiske prosedyrer, hvor eleven kun fokuserer på tall og regneoperasjoner. Dette kan være spesielt utfordrende i arbeid med likninger. Et matematisk resonnement kan bidra til at elevene utvikler evnen til å begrunne og argumentere i matematikken, som igjen fører til en bedre matematisk forståelse. Læreren veileder elevene gjennom det matematiske landskapet, og denne studien ser på hvilke muligheter elevene blir gitt, for å utvikle evnen til et matematisk resonnement i arbeid med likninger. Jeg ser spesielt etter et kreativt resonnement, som vil være det motsatte av utenatlæring. Forskningsspørsmålet er formulert som «*Hvordan kan lærerens handlinger, med særlig vekt på spørsmål og argumenter, fremme elevers kreative resonnement i arbeid med likninger?*»

For å besvare forskningsspørsmål bestod studien av en kvantitativ del, bestående av en diagnostisk test, og en kvalitativ hoveddel, bestående av observasjon i klasserommet. Datainnsamlingen foregikk i to 1T klasser ved en norsk videregående skole. Den kvantitative testen ble gjennomført for å gjøre utvalg av elever, og for å få et innblikk i elevenes matematiske resonnement. Videre ble to lærere og fire elever observert i to ulike klasserom med undervisning i temaet likninger. Lærerens handlinger og elevens resonnement ble sett i sammenheng og analysert.

Analysen og diskusjonen av resultatene viser at lærerens handlinger kan bidra til at elevene utvikler evnen til å resonnere og argumentere for sine løsninger. Det kommer frem av analysen at lærerens spørsmål som får eleven til å utforske matematiske ideer og/eller sammenhenger, og spørsmål som får eleven til å begrunne sine valg, kan bidra til elevens kreative resonnement. Lærerne påvirket ofte elevene til å endre løsningsstrategier, men av resultatene fremkommer det at endringsforslag uten begrunnende argumenter, ikke bidrar til at elevene blir fleksible i likningsløsningen. Lærerne benyttet seg av et større spekter av spørsmålstyper i interaksjon med enkeltelever, enn i tavleundervisning. Lærerne argumenterer ofte med forankring i matematiske egenskaper, som gir elevene mulighet til å gjøre det samme.

Abstract

International studies show that Norwegian students score relatively poorly in algebra, compared to other countries. One of the reasons might be that algebra is perceived as pure arithmetic procedures, where the student focuses on numbers and calculations. This can be particularly challenging when working with equations. Mathematical reasoning can help students develop the ability to justify and argue in mathematical solutions, which can lead to a better mathematical understanding. The teacher guides the students through the mathematical landscape. This thesis looks at the possibilities the students are given to develop the ability of mathematical reasoning working with equations. I will specifically focus on creative reasoning, as to the opposite of rote learning. Therefore, my problem statement is as follows: *«How can the teacher's actions, with particular emphasis on questions and arguments, promote the students' creative reasoning when working with equations?»*

To answer the problem statement, this thesis will be based on a quantitative part, a diagnostic test, and a primary qualitative part, containing the observation of two classrooms lectures. The classroom observations took place in two separate theoretical mathematics classes in a Norwegian high school. The objective of the quantitative test was to select students for further analysis, and to gain an insight to students' mathematical reasoning skills. Two teachers and four students were observed in two different classrooms, where the topic was equations. The teachers' actions and the students' reasoning were viewed in coherence with each other and analyzed.

The analysis and discussion of the results shows that the teachers' actions can help students develop the ability to reason and argue for their solutions. The analysis also show that if the teacher asks questions that make the student explore mathematical meanings and/or relationships, and asks questions that make the student explain their thinking, can contribute to the students' creative reasoning. The teachers often influenced the students to change their solution strategies, however, the analysis shows that the students need justifying arguments for this change, to become more flexible in their solution of equations. Teachers used a larger range of question types when interacting with individual students, compared to the whole class. The analysis shows that teachers who anchor their arguments in mathematical properties, are enabling the students to do the same.

Innholdsfortegnelse

1. Innledning

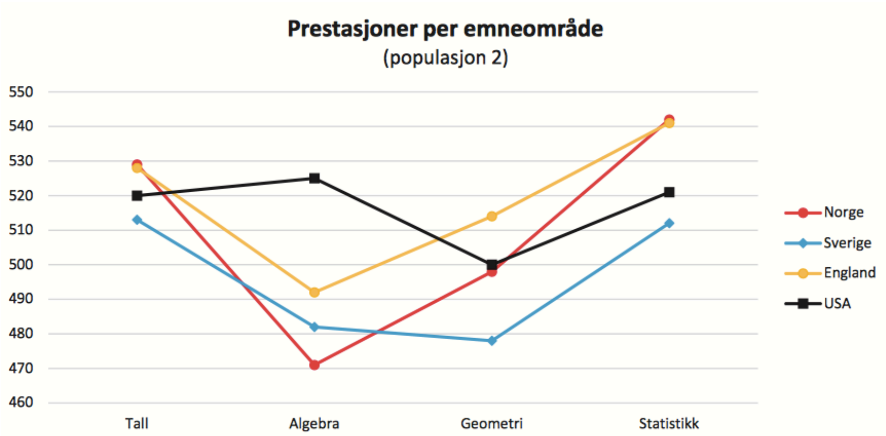
1.1 Bakgrunn

Skoleforskning er i stadig utvikling. Gjennom forskning hos den enkelte skole, rapporter og statlige prosjekter settes skolen og utdanningen i søkelyset, hvor målet hos de aller fleste er å forbedre dagens skole. Ludvigsenutvalget ble oppnevnt i juni 2013 av regjeringen med formål «… å vurdere grunnopplæringens fag … opp mot krav til kompetanse i et framtidig samfunns- og arbeidsliv» (Meld. St. 28 (2015-2016), 2016, s. 15). Siden den gang har utvalget kommet frem til Stortingsmelding 28, som består av resultatene fra deres undersøkelse, som sier at den norske skolen med sitt tilhørende læreplanverk, burde revideres. Utvalget peker på at fagene bør fornyes, og legger vekt på dybdelæring hos den enkelte elev. Dybdelæring blir av utvalget definert som «... elevene gradvis og over tid utvikler sin forståelse av begreper og sammenhenger innenfor fag» (Meld. St. 28 (2015-2016), 2016, s. 14). Eleven skal ikke bare ha forståelse i hvert enkelt fag, men se sammenhenger og bruke sin kunnskap på tvers av fag til å mestre hva de møter senere i livet. Dybdelæringen kan ses i sammenheng med Kilpatrick, Swafford og Findell (2001, s. 118) sin definisjon av begrepsforståelse (*conceptual understanding),* som sier «students with conceptual understanding know more than isolated facts and methods». Dybdelæring vil være det motsatte av overflatelæring, som fokuserer på innlæring av isolerte faktakunnskaper. Elevene vil med dybdelæring kunne utvikle en helhetlig forståelse av faget. Ludvigsenutvalget viser til at en prioritering på dybdeforståelse, krever at fagenes kjerneelementer kartlegges og vektlegges (Meld. St. 28 (2015-2016), 2016).

Noen av kjerneelementene i matematikk vil jeg si er algebra og tallforståelse. Algebra defineres som «… a tool for manipulating symbols and for solving problems» (Kieran, 2007, s. 707). Algebra er nyttig for oss, rett og slett fordi ikke alle problemer vi møter i hverdagen, kan gi et regnestykke kun med de fire regneartene. Algebra uttrykker sammenhenger og situasjoner som man ikke kan beskrive kun med tall (Høines, Rinvold & Selvik, 2007). Elevene møter algebra for første gang i læreplanverket i kompetansemålene etter 7. trinn, og finnes i læreplanene frem til eleven er ferdig på videregående løp (Utdanningsdirektoratet, 2006). Rapporten fra TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study)[1] 2011,

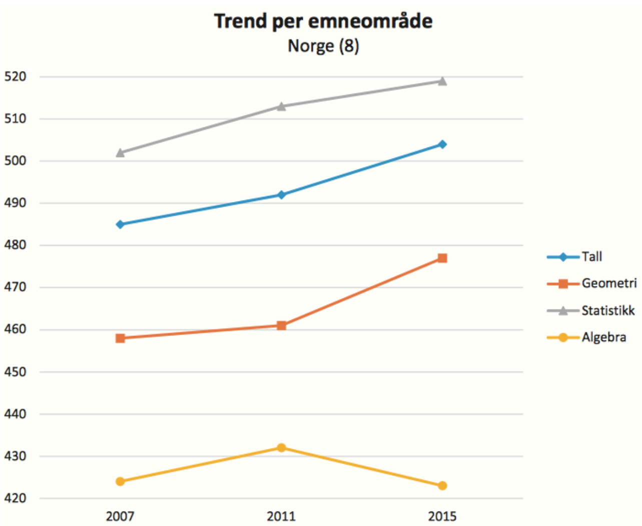
[1] TIMSS er et internasjonalt forskningsprosjekt som måler elevers kompetanse i matematikk og naturfag på 4./5. trinn og 8./9. trinn (UiO: Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, u.å).

viser til at norske elever ved utgangen av 8. trinn scorer bemerkelsesverdig dårlig i algebra, i forhold til resten av landene i studiene. I rapporten kommer det frem at dette delvis skyldes for lite arbeid med algebra i skolen, noe som understrekes ved tidligere TIMSS rapporter fra 1995, 2003 og 2007. TIMSS-advanced 2008, som ser på elevers kompetanse etter 13. trinn, viste samme resultat (Grønmo et al., 2012). Rapporten fra TIMSS 2015, som ble presentert i slutten av november 2016, viser at dette fortsatt er gjeldende, hvor algebra er det emneområde som scorer dårligst av alle (se **figur 1**).



Figur 1: Oversikt over norske elevers prestasjoner i TIMSS 2015 i populasjon 2 (8. og 9. trinn) i matematikk, sett i sammenheng med nordiske- og referanseland (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016, s. 36).

Figur 2 viser at norske elevers prestasjon i algebra for 8. og 9. trinn økte noe i 2011, men i 2015 har prestasjonene sunket tilbake til nivået fra 2007 (Bergem et al., 2016). Det er tydelig at problematikken er like dagsaktuell nå, og at arbeidsmengden med algebra er liten, i forhold til andre emneområder.



Figur 2: Trender per emneområde i matematikk i TIMSS 2015 for elever på ungdomstrinnet i 2007, 2011 og 2015 (Bergem et al., 2016, s. 41).

Algebra kan bli sett på som motoren i matematikken, ved at tall og regning blir brukt som utgangspunkt for andre deler av matematikken. De grunnleggende regneferdighetene er også viktig for hva man møter i hverdagslivet, i videreutdanning og i yrkesliv. En god matematisk forståelse i algebra er derfor essensielt, sett opp mot Ludvigsenutvalgets ønske om dybdelæring i faget, slik at eleven er rustet for hverdagslivet. Det at forskningen viser at den norske skolen har en gjennomgående algebrautfordring, har gjort meg interessert i å se på sammenhengen mellom undervisning og læring i klasserommet i temaet algebra. Algebra hevdes å være den delen av matematikken hvor memorering og algoritmer oppstår hyppigst (Nosrati & Wæge, 2014). Sentralt i algebraundervisningen på ungdomsskolen og videregående opplæring står likninger, hvor elevene skal både løse og tolke likninger (Utdanningsdirektoratet, 2006). På bakgrunn av likningers sterke og essensielle rolle i algebra, velger jeg i masteroppgaven å se spesielt på dette tema.

Elevens evne til å resonnere om matematiske egenskaper er nødvendig, for at eleven skal oppnå dybdelæring i algebra. Den svenske matematikkdidaktikeren Johan Lithner har i senere tid forsket mye på det matematiske resonnementet hos eleven, hvor han viser til at et kreativt resonnement vil skape dybdelæring, i motsetning til utenatlæring. Lithner (2008) definerer det kreative resonnementet som et resonnement som er nyskapende, plausibelt og matematisk forankret (se **kapittel 2.2**). NCTM (2014) viser også til at oppgaver som fremmer matematisk resonnement og problemløsing hos eleven, er med på å øke elevens forståelse. Det er lærerens jobb å legge til rette for dette i undervisningen. Formålet med matematikkfaget, viser til at opplæringen i matematikk «… veksler mellom utforskende, lekende, kreative og problemløsende aktiviteter og ferdighetstrening» (Utdanningsdirektoratet, 2006, s. 1). Selv om dette blir presisert i læreplanen og forskningen har vist til dette i lengre tid (Nosrati & Wæge, 2014), bærer fortsatt matematikkundervisningen preg av mange elever som kun pugger og følger algoritmer, uten en dypere forståelse (Lithner, 2008). Et matematisk resonnement kan redusere fokuset på pugging, og er en av flere faktorer som skaper en helhetlig forståelse i matematikk (Kilpatrick et al., 2001).

For å forstå samspillet mellom undervisning og læring, er det nødvendig å se på lærerens undervisning, men også elevens læringsutbytte, for en helhetlig forståelse av det som skjer. Mueller, Yankelewitz og Maher (2014) viser til at det mangler forskning på hvordan lærerens arbeid kan fremme spesifikke matematiske ferdigheter, og hvordan læreren gir faget mening i klasserommet. Bergqvist og Lithner (2012) har forsøkt å se på hvordan læreren fremmer ulike matematiske resonnement (se **kapittel 2.3**), men også de velger å utelate elevens egentlige læringsutbytte. Derfor ønsker jeg i masteroppgaven å se på hvordan læreren fremmer det matematiske resonnementet i klasserommet, som en matematisk ferdighet, og knytte dette opp mot det faktiske læringsutbytte hos eleven i form av et kreativt resonnement. Denne masteroppgaven bidrar til forskningsfeltet ved å se på interaksjonen mellom lærer og elev, hvor formålet med interaksjonen vil være å fremme et kreativt resonnement hos eleven.

Lærerens handlinger innebærer blant annet å planlegge undervisningen, stille spørsmål, argumentere og lage oppgaver som skal bidra til at eleven får tilegnet seg så mye kunnskap som mulig. Francisco og Maher (2011) påpeker at lærere som gir eleven mulighet til å utforske ideer, bestemme gyldigheten av deres eget matematiske argument og videre forklare deres egen tankegang, fremmer elevens matematiske resonnement. Likevel viser Kjærnsli og Olsen (2013) til at dette ikke er tilfelle i norske klasserom, da elevene får lite muligheter til å synliggjøre og bekrefte sin læring, og fokuset ligger på løsning av standardiserte problemer (Nosrati & Wæge, 2014). Begrenser lærerens handlinger seg til å fokusere på algoritmer, vil også elevene gjøre dette. Det er læreren som setter rammene i undervisningen og gir elevene muligheter til å utvikle et matematisk resonnement (Hiebert & Grouws, 2007). Dette er bakgrunnen for at jeg ønsker å se på lærerens handlinger i undervisningen, da de er nødvendig for elevens utvikling av et kreativt resonnement, hvor eleven får mulighet til å synliggjøre og bekrefte sin læring.

1.2 Problemstilling

Med bakgrunn i **kapittel 1.1** har jeg valgt følgende forskningsspørsmål for masteroppgaven:

«*Hvordan kan lærerens handlinger, med særlig vekt på spørsmål og argumenter, fremme elevers kreative resonnement i arbeid med likninger?*»

Som nevnt i **kapittel 1.1** er lærerens handlingsrom stort, og det er derfor nødvendig å avgrense oppgaven til en mer spesifikk del av lærerens rolle. Jeg velger derfor i oppgaven å avgrense lærerens handlinger til de handlinger som kan knyttes til samtalen mellom lærer og elev. Hovedsakelig avgrenses disse handlingene til spørsmål og argumenter, som læreren benytter seg av i samtalen. Likevel vil også andre handlinger som læreren gjør i samtalen, som viser å ha innvirkning på elevens matematiske resonnement, bli tatt med. Hvis læreren for eksempel bruker konkretiseringer eller demonstrasjoner i samtalen, som viser å være betydningsfull for resonnementet til eleven, vil dette bli analysert. Lærerens handlinger i samtalen blir så sett i sammenheng med elevens respons, og om denne responsen kan karakteriseres som kreativ. Ved å se på denne interaksjonen mellom lærer og elev vil det være mulig å se hvordan denne kommunikasjonen påvirker læringen. Jeg ønsker å se på hvordan lærerens handlinger i samtale med eleven, kan bidra til at elevene får muligheter til å utvikle et kreativt resonnement i arbeid med algebra.

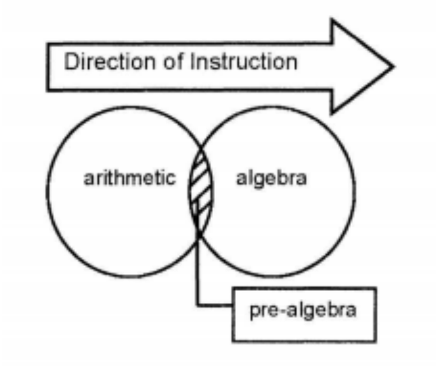
2. Teori

For å kunne besvare forskningsspørsmålet er det nødvendig å se på teorigrunnlaget og forskning som er gjort innenfor feltet. **Kapittel 2.1** omhandler både likningens historie, definisjon og hvorfor likninger kan være vanskelig for elever. Videre i **Kapittel 2.2** belyses teori rundt begrepene matematisk forståelse og matematisk resonnement, og da spesielt det kreative resonnementet. **Kapittel 2.3** ser på lærerens handlinger, da spesielt på spørsmål og argumenter.

2.1 Likninger i algebra

Som nevnt i innledningen, er algebra en utfordring for elever på ungdomsskolen og videregående utdanning (Grønmo et al., 2012). De norske elevene scorer dårligere enn referanselandene i algebra, og dette skaper debatt om hva som skjer ute i skolen. Algebra har eksistert i mange tusen år, men algebra slik vi kjenner den i dag, så sin begynnelse på 1500- og 1600-tallet. Før dette hadde algebraen vært *retorisk*, hvor alt ble beskrevet med ord og uten tall. Etter hvert endret dette seg til å bli *synkopert* algebra utviklet av Diofantos omkring år 250, hvor forkortelser ble brukt for ord. Men det var altså ikke før slutten av 1500-tallet at *symbolsk* algebra ble innført av franskmannen Francois Vieté, som brukte bokstaver for ukjente størrelser. *Geometrisk* algebra har hatt en viktig rolle gjennom utviklingen for å støtte resonneringen og begrunnelser (Brekke, Grønmo & Rosén, 2000; Onstad, 1994).

Den historiske utviklingen av algebra, er derfor viktig for å se på forholdet mellom aritmetikk og algebra i skolen. Den retoriske og synkoperte algebraen kan bli sett i sammenheng med det eleven møter i barne- og ungdomsskolen, mens elevene møter symbolsk algebra mot slutten av ungdomsskolen og på videregående skole. Forholdet er også viktig, for å forstå hvorfor noen elever sliter med det algebraiske resonnementet. Aritmetikk handler om situasjoner som inneholder tall, mens algebra er mer komplekse situasjoner med generaliserte tall. Schliemann, Carraher og Bricuela (2007) viser til at aritmetikk tradisjonelt blir sett på som forgjengeren til algebra, med pre-algebra som de ideer, teknikker og representasjoner som inngår i begge (se **figur 3**). Dette kan ses i sammenheng med den historiske utviklingen hvor regneoperasjoner med ord, kom før symboler for ukjente størrelser (Onstad, 1994). Vygotskij definerer forholdet som: «Written language is to oral language what algebra is to arithmetic» (Brekke et al., 2000, s. 7).



Figur 3: Tradisjonelt syn på sammenheng mellom aritmetikk og algebra. Pre-algebra er de ideer, teknikker og representasjoner som inngår i begge. Pilen viser retning av introduksjon (Schliemann et al., 2007, s. xi).

Brekke et al. (2000) viser til at elever tilegner seg kunnskaper i aritmetikken (kunnskaper om egenskaper til tall og regneoperasjoner) i starten av grunnskolen, som i høyere trinn skal generaliseres om til algebra. Det er langs denne veien noen elever blir mer fokusert mot kun å finne rett svar, heller enn generelle tanker om resultatet. For noen elever vil svar uten tallverdier, gi liten mening. Posisjonssystemet er også noe annerledes i aritmetikken i forhold til algebra. Tallet 57, samsvarer med $50 + 7$ i aritmetikken, mens i algebra vil 5a samsvare med 5 multiplisert med a. Ettersom oppgaver i algebra kan gi svar på formen $a + 5$, vil mange elever se på dette som et uferdig svar, da de fra aritmetikken ønsker å få et svar bestående kun av tall (Brekke et al., 2000). På bakgrunn av denne problematikken har Schliemann et al. (2007) innført begrepet «early algebra», som innebærer at man ikke skal flytte dagens algebraundervisning ned til lavere trinn, men heller at aritmetikken skal bli sett på som en del av algebraen tidligere i skoleløpet.

Likninger er et av de sentrale begrepene i algebra. En likning inneholder vanligvis et likhetstegn, tall og én eller flere ukjente størrelser. Vi bruker likninger når vi forklarer en sammenheng mellom en eller flere ukjente. Likningen er oppdelt i en høyre og venstre side, som skilles med et likhetstegn. Algebrabegrepet og likninger blir først nevnt i læreplanen under kompetansemål etter 7. årstrinn «Mål for opplæringen er at eleven skal kunne stille opp og løse enkle ligninger …» (Utdanningsdirektoratet, 2006, s. 7). Etter 10. årstrinn skal eleven blant annet kunne mestre å «løse ligninger og ulikheter av første grad og ligningssystemer med to ukjente og bruke dette til å løse praktiske og teoretiske problemer» (Utdanningsdirektoratet, 2006, s. 8). Videre vil også elevene møte likninger i videregående opplæring, men rammene er gitt ut fra valg av utdanningsprogram. Grunnelementene som regnerekkefølge og regning med tall, skal elevene ha lært tidligere på barneskolen.

2.1.1 Likhetstegnet og variabelbegrepet

Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg og Stephens (2005) viser til at et algebraisk resonnement avhenger av å forstå ulike kjerneideer, og støtter derfor Ludvigsenutvalget, som sier at kunnskap om kjerneelementene eller kjernebegrepene er nødvendig for å kunne mestre å anvende faget (Meld. St. 28 (2015-2016), 2016). Knuth et al. (2005) viser til at to av de mest fundamentale kjerneideene er likhetstegnet og variabler, i arbeid med likninger. Elever som forstår disse elementene vil ha et bedre utgangspunkt for å lykkes når de løser problemer. Disse elevene velger seg løsningsstrategier og viser dypere forståelse (se **kapittel 2.2**).

Likhetstegnet

«Limited conception of what the equal sign means is one of the major stumbling blocks in learning algebra. Virtually all manipulations on equations require understanding that the equal sign represents a relation» (Carpenter, Franke & Levi, 2003, s. 22). Mange elever ser ikke på likhetstegnet som et symbol for ekvivalens, heller en kunngjøring om et svar, eller et aritmetisk symbol. Likhetstegnet blir et signal på at «noe må gjøres», heller enn et tegn for ekvivalens. Problematikken er gjennomgående fra barneskolen opp til videregående skole (Kieran, 1981). Venstre-høyre forholdet blir sett på som en operasjon på venstre side, og svaret på høyre. Likningen blir også lest fra venstre, mot høyre, som en vanlig tekst. Dette fungerer på barneskolen, og lave trinn på ungdomsskolen, hvor elever møter likninger på formen a+b= □, men elevene vil møte problemer på høyere trinn, hvor det også finnes operasjoner på høyre side av likhetstegnet (ax+b=cx+d). Det er dette Schliemann et al. (2007) viser blir et problem for forståelsen av algebra, når elever lærer å behandle likhetstegnet på denne måten i aritmetikken. Dette kunne vært unngått ved innføring av «early algebra», slik at likhetstegnet ble behandlet som algebraisk fra start. At elevenes forståelse av likhetstegnet plutselig må endre seg, når de møter algebra, kan føre til frustrasjon og misforståelser. Likhetstegnet må bli sett på som et relasjonssymbol, heller enn et operasjonelt symbol. Ved et relasjonelt syn på likhetstegnet, vil eleven forstå at å gjennomføre transformasjoner, ikke endrer ekvivalensforholdet til likningen (Carpenter, Levi, Franke & Zeringue, 2005; Knuth et al., 2005). «Students who understand the equal sign as a relational symbol of equivalence are more successful solving algebraic equations, than their peers who do not have such an understanding» (Knuth, Stephens, McNeil & Alibali, 2006, s. 310).

Variabler og den ukjente

Brekke et al. (2000) viser til at variabelbegrepet har to aspekter, hvor det ene er å se på variabler som noe som varier, og det andre er å se på hvordan man bruker bokstaver på å representere generaliserte tall. Variabelbegrepet er altså det som skiller aritmetikken fra algebraen og symboliserer noe som varier i seg selv, eller i forhold til noe annet. I likninger vil variabelbegrepet ha forskjellige aspekter, hvor den ukjente ofte symboliseres med en x. Dette kan være en fiksert ukjent. Likevel kan også en likning bestå av flere ukjente som varierer i forhold til hverandre, og vil derfor ikke være fiksert. I det en likning blir fremstilt som en funksjon, vil den ukjente x symbolisere en variabel som gir ulike funksjonsverdier. Variabelbegrepet har vært et fokus for forskere i lengre tid, som har vist til at elever synes bruk av symboler i algebra er vanskelig, noe som igjen påvirker deres evne til å lykkes i matematikk (Gray, Loud & Sokolowski, 2009). Dette kommer av at de fleste elevene ser på symboler som objekter, heller enn et symbol for en varierende verdi, som for eksempel å se på 5a som fem appelsiner. Dette kalles for en aritmetisk forståelse av variabelbegrepet. Forvirringen oppstår i mangel på forståelse av forskjell på variabel og benevning. Få ser på variabler som fikserte ukjente, og enda færre som generaliserte ukjente (Knuth et al., 2005).

Gray et al. (2009) beskriver *algebraisk* forståelse som tilfeller hvor eleven klarer å se variabler, uttrykk og likninger som strukturer av generelle representasjoner. Elevene som i deres forskning viste en form for forståelse for at variabler kan ha ulike verdier, men hadde mangler i sine besvarelser, ble kalt for *transisjonale*. Elever som viste manglende forståelse, ble karakterisert som *aritmetiske*. Eksempelvis ble elevenes svar på oppgaven «Hvilken er størst, 2n eller n+2?» (Gray et al., 2009, s. 67) kartlagt som algebraisk om elevene begrunnet at dette avhenger av verdien på n, og fremstilte dette, mens elever som kun svarte at dette kunne avhenge av n, ble karakterisert som transisjonale. Elevene som mente at 2n var størst, ettersom dette var multiplikasjon, viste da tegn til å være aritmetiske (Gray et al., 2009). I sin studie på kalkulusstudenter ble kun en tredjedel av 174 elever karakterisert med en type algebraisk forståelse. Elevenes resultater knyttet til variabelbegrepet ga noe bedre resultater, enn for likhetstegnet, hos Knuth et al. (2005) sin forskning, hvor han mener at variabelbegrepet får eksplisitt oppmerksomhet i klasserommet i større grad enn likhetstegnet. Likevel vil manglende forståelse for begrepet være en hovedfaktor for elever med lav måloppnåelse i algebra.

2.1.2 Elevenes utfordringer med likninger

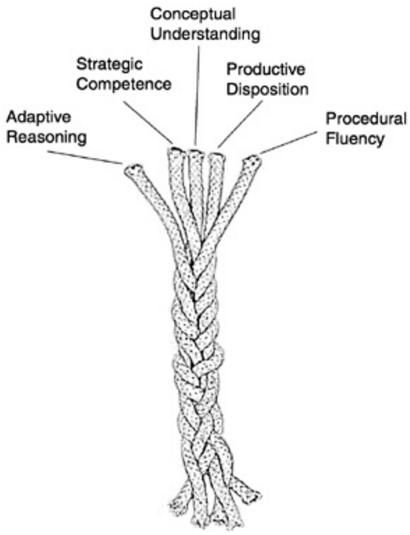
Ufullstendige tanker om et begrep i matematikken blir kalt for misoppfatninger (Brekke et al., 2000). I algebra kommer disse misoppfatningene ofte av at elever tilegner seg erfaringer og ideer, som de ønsker å generalisere til alle situasjoner. De klarer ikke skille ut når erfaringene kun hører til et begrenset felt. Elever i ungdomsskolen og videregående skole vil få problemer i arbeid med algebra, om den grunnleggende aritmetikken ikke er tilstede (Schliemann et al., 2007). Dette er grunnleggende for å kunne utvikle en god forståelse i arbeid med likninger, og er et av de fire punktene som Brekke et al. (2000, s. 3) nevner som utfordringer elevene møter i skolen i arbeid med algebra:

- Kunne se sammenhenger med andre deler av læreplan og bruksområde utover matematikkundervisningen.
- Trekke paralleller til tallforståelse og tallregningen (aritmetikken).
- Mangel på grunnleggende forståelse for regneoperasjoner.
- Holdninger til faget. Faget oppfattes som et isolert system med symbolmanipulasjon og regler.

Disse fire punktene, i tillegg til nevnte misoppfatninger om likhetstegnet og variabelbegrepet, skaper utfordringer da elevene skal utvikle evne til matematisk resonnement i arbeid med likninger.

2.2 Elevens resonnement i algebra

På 1950- og 60-tallet endret fokuset seg mot å forstå matematikken, ikke bare å kunne beregne, som hadde vært det store fokuset tidligere. Man skulle nå forstå strukturen til matematikken og ideene som lå til grunn (Kilpatrick et al., 2001). Siden da har begrepet forståelse, som kognitiv kapasitet, blitt forsøkt definert av mange forskere, med mange ulike underbegreper og definisjoner. For at eleven skal oppnå dybdelæring i matematikk, er det nødvendig å se på hva som skjer med elevens matematiske resonnement, da resonnementet er de tankene og begrunnelsene som elevene bruker i arbeid med matematikken. Elevens resonnement kommer fra de vurdering eleven selv har gjort seg, og hvilke påstander som rettferdiggjør konklusjonene. Kilpatrick et al. (2001) beskriver elevens matematiske kompetanse (*mathematical proficiency*) som et flettet tau som består av fem tråder. Alle fem trådene blir sett på som nødvendige og gjensidig avhengig for en helhetlig forståelse i matematikk. Kilpatrick et al. (2001, s. 116) definerer trådene som:



- Begrepsforståelse *(conceptual understanding)*, forståelse av matematiske konsepter, operasjoner og relasjoner.
- Regneferdigheter *(procedural fluency),* utøve prosedyrer fleksibelt, nøyaktig og effektivt.
- Strategisk kompetanse *(strategic competence),* formulere og løse matematiske oppgaver.
- Resonnementsforståelse *(adaptive reasoning)*, reflektere, forklare, begrunne og logisk tenkning.
- Engasjement *(productive disposition),* se matematikk som meningsfylt og tro på egen innsats.

Figur 4: «The Strands of Mathematical Proficiency», fem tråder som til sammen danner elevens matematiske kompetanse (Kilpatrick et al., 2001, s. 117).

Resonnementsforståelsen må derfor ses i sammenheng med de andre trådene, men vil i seg selv være en viktig faktor for elevens kompetanse i faget. Begrepsforståelse vil være nødvendig for å kunne resonnere i matematikk. Regneferdigheter er nødvendig for å kunne resonnere seg rundt de matematiske prosedyrene, hvor en strategisk kompetanse gjør det mulig å vite hvordan dette kan brukes i oppgaveløsing. Tilslutt vil også elevens engasjement avgjøre om eleven har motivasjon for å gjennomføre et matematisk resonnement. Det matematiske resonnementet vil derfor bli påvirket av de andre komponentene, og må bli sett i sammenheng med de andre trådene for en helhetlig definisjon på matematisk kompetanse.

Resonnering er limet i matematikken, hvor resonneringen brukes for å finne veien i en verden av matematiske konsepter, mot en gyldig og logisk konklusjon, som ikke kun er basert på forklaring, men en legitimering av valgt strategi (Kilpatrick et al., 2001). Resonnementet er et produkt som kommer til synet gjennom ord og tekst i klasserommet (Bergqvist & Lithner, 2012). Et matematisk resonnement er sterkere enn pugging, og vil derfor være lettere å gjenskape om noe blir glemt. Kunnskap som oppstår på grunn av gjentatte repetisjoner, uten stor grad av resonnering, kan sammenlignes med Skemp (1976) sin definisjon av *instrumentell forståelse*. Han definerer dette som «rules without reasons» (Skemp, 1976, s. 20). Her vil motivasjonen bestå av å produsere svar hyppig. Eleven vet altså hva som skal gjøres ut fra tidligere gjennomføringer, men forstår ikke hvorfor dette gjennomføres. Motsetning vil være *relasjonell forståelse*, som innebærer å forstå på et dypere plan ved å se sammenhenger. Skemp (1976, s. 20) definerer dette som «knowing both what to do and why», som vil være grunnlaget for et matematisk resonnement. Relasjonell forståelse kan sammenlignes med begrepet dybdelæring, hvor Ludvigsenutvalget sier at dette kjennetegnes ved at elevene utvikler begrepsforståelse og ser sammenhenger innenfor fag (Meld. St. 28 (2015-2016), 2016). Ettersom instrumentell forståelse ikke tar like lang tid å oppnå, kan dette være en enklere vei å gå for elever, men hvis man oppnår relasjonell forståelse vil kunnskapen vare i lengre tid. Det kan være enklere å forstå noe instrumentelt og det kan lede til riktig svar, men med en relasjonell forståelse vil eleven være mer tilpasningsdyktig mot nye oppgaver. Det er derfor forskjell på at eleven løser en likning, og om eleven faktisk forstår det som blir gjort (Skemp, 1976).

Carpenter et al. (2005) bruker begrepet *relasjonstenkning* om å se på uttrykk og likninger i sin helhet i algebra, i motsetning til steg for steg, og har derfor en ganske lik definisjon som Skemp (1976). Videre viser de til at dette krever at eleven har kjennskap til de matematiske egenskapene. Elever som kun følger rutiner vil ikke kjenne igjen at aritmetikk og algebra er basert på de samme fundamentale ideene, og heller oppleve dette som et gap, da rutinene forandres. Likevel presiserer Carpenter et al. (2005) at matematikken krever undervisning i prosedyrer, men at regneferdigheter, fra Kilpatrick et al. (2001) sine fem tråder, involverer fleksibilitet i prosedyrer, og dette vil relasjonstenkning være utgangspunktet for. Spesielt for algebra er det viktig å beherske prosedyrene også, da de er en stor del av emnet. Men som Brekke et al. (2000) viser til, er prosedyrene viktig, men prosedyrene må utvikle begrepsdanning.

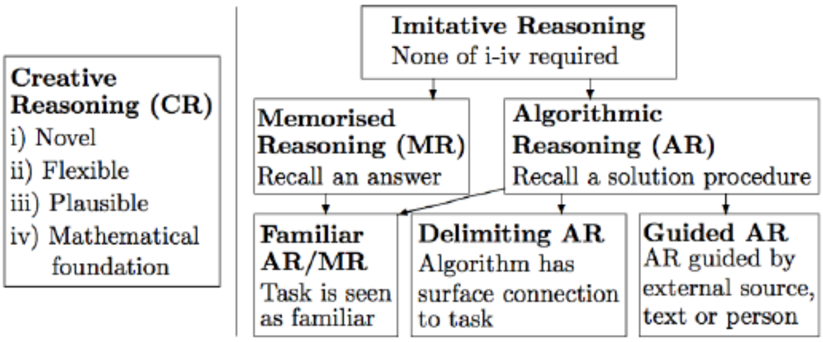
Elevens resonnement er derfor tett knyttet mot elevens matematiske forståelse. For å kunne resonnere i matematikkfaget trenger eleven forståelse for faget, i tillegg vil forståelsen i faget kunne utvikles gjennom et matematisk resonnement. Felles for både Kilpatrick et al. (2001) sin definisjon på matematisk kompetanse, Skemp (1976) sin definisjon på relasjonell forståelse og Carpenter et al. (2003) sin definisjon på relasjonstenkning, er at alle mener matematisk forståelse strekker seg lengre enn å bare regne matematiske oppgaver. Eleven må ha forståelse i faget for å kunne resonnere i matematikken, og det er derfor nødvendig å definere forståelse for å kunne se dypere på det matematiske resonnementet. Matematisk forståelse vil videre i oppgaven, med bakgrunn fra disse teoretikerne, bli definert som evnen til å gjennomføre matematiske oppgaver, hvor eleven har kunnskap om de matematiske komponentene som inngår i oppgaven, og eleven vet hvorfor sin løsning av oppgaven fungerte.

Hvis læreren legger for stor vekt på regler og algoritmer, både i undervisning og i tester, vil elevenes resonnement bestå av å beherske en rekke prosedyrer. Lithner (2006) viser til at dette er et stort fokus i skolen, og han ønsker derfor å utvikle et rammeverk som kan motvirke denne trenden, ved å sette fokus på elevens resonnement. Dette rammeverket er også valgt for min oppgave, på bakgrunn av tydelige definisjoner på ulike typer resonnement, og definisjon av et matematisk resonnement.

2.2.1 Definisjon på resonnement

For at eleven skal tilegne seg gode kunnskaper i algebra, krever det at eleven utvikler sin evne til å resonnere. Matematisk resonnement blir ofte brukt som definisjon på en elevens evne til å reflektere på et høyere nivå, men ofte uten å bli eksplisitt definert. Lithner (2008) bruker begrepet matematisk resonnement, som resonnement på alle nivåer som dukker opp i arbeid med matematikk. For å karakterisere resonnementet innfører han heller et rammeverk, som viser til kvaliteten på resonnementet. Lithner (2008) definerer resonnement som tankegangen som brukes for å produsere påstander, og deretter komme frem til en konklusjon i oppgavejobbing. Resonnementet trenger ikke være sann, men må være holdbare for personen som resonnerer, og det kan være en tankeprosess, et produkt av tankeprosesser eller begge deler.

Strukturen i et resonnement kommer fra utfordringene som elevene møter i oppgavejobbing. Lithner (2008) beskriver denne strukturen i fire punkter som kan bli sett i sammenheng med Polya (1971) sine fire faser i problemløsingsprosessen. Lithner (2008) beskriver det første steget som at eleven møter en oppgave, som ikke automatisk har en løsningsmetode. I andre steg gjør eleven et strategivalg for å løse oppgaven, som støttes av prediktive argumenter, som sier noe om hvorfor strategien vil løse oppgaven. Disse to stegene kan sammenlignes med Polya (1971) sine tre første steg; forstå problemet, lage en plan og utføre denne. I tredje steg implementeres strategien, da gjerne med verifiserende argumenter som forklarer hvorfor strategien løste oppgaven, før konklusjonen er nådd i fjerde steg (Lithner, 2008). Planen er gjennomført og Polya (1971) sitt siste steg med å se tilbake er gjort. Resonnementet fra start til konklusjon, kan ifølge Lithner (2008) bli karakterisert som enten kreativt (CR) eller imitativt (IR), hvor sistnevnte består av algoritmisk (AR) og memorert (MR) resonnement eller en blanding av disse (se **figur 5**).



Figur 5: Oversikt over resonnementstyper. Et resonnement er kreativt eller imitativt som to motsetninger (Lithner, 2006, s. 5).

2.2.2 Imitativt resonnement

Det imitative resonnementet vil i hovedsak være et resultat av tidligere gjennomføringer, hvor elevens hukommelse av algoritmer eller regler er gjeldende. Dette resonnementet blir delt inn to undergrupper, memorert og algoritmisk resonnement. I memorert resonnement er valg av strategi å gjenkjenne svar ved memorering, og implementeringen går ut på å skrive svaret ned som man husker det. Også i et algoritmisk resonnement kan gjenkjenning være en stor del av strategivalget, men her blir en hel algoritme gjenkjent. «An algorithm is a finite sequence of executable instructions which allows one to find a definite result for a given class of problems» (Brousseau, 1997, s. 129). I et algoritmisk resonnement bruker eleven en slik algoritme som strategi, og implementeringen er å bruke denne algoritmen på å løse oppgaven. Begrunnelsene ligger ofte i at denne algoritmen har ført til riktig resultat tidligere, uten noen formening om hvorfor. Den bestemmes på forhånd, og har styrke i at gjennomføringen går fort. En operasjon avhenger ikke av noen omgivelser, som var uforutsett i den foregående operasjonen (Bergqvist & Lithner, 2012). Det er algoritmen som tar seg av de vanskelige delene av oppgaven, slik at kun enkle operasjoner gjennomføres av eleven, og kun feil i denne gjennomføringen kan føre til feil svar (Lithner, 2008). Det algoritmiske resonnementet blir delt inn i tre undergrupper, hvor en gruppe består av å gjenkjenne oppgaven til en bestemt type, for så å bruke denne algoritmen også på den nye oppgaven. Dette blir derfor kalt for *kjent algoritmisk resonnement*. *Avgrenset algoritmisk resonnement* kjennetegnes ved at eleven bruker kunnskap som er avgrenset til de overfladiske egenskapene til oppgaven. Dette kan for eksempel være at en elev setter inn ulike verdier for x i en likning, for å finne hva som passer. En tredje type algoritmisk resonnement kaller Lithner (2008) for *guidet algoritmisk resonnement.* Dette resonnementet består av en ekstern kilde som gir eleven en løsningsalgoritme. Dette kan enten være tekstguidet, som typisk består av å følge et eksempel i tekstboka, eller så kan det være personguidet, hvor alle strategivalgene blir tatt av en annen person enn eleven selv. Dette kan typisk være en lærer eller en medelev.

2.2.3 Kreativt resonnement

Det kreative resonnementet vil være det motsatte av utenatlæring, og å følge en algoritme utelukkende fordi det minner om noe som er gjort tidligere. For at et resonnement skal være kreativt, må det utfylle følgende kriterier:

1. Nyskapende. En ny resonneringssekvens er laget eller en glemt er omformulert.
2. Plausibel. Det eksisterer argumenter som støtter strategivalget og/eller strategiimplementeringen, som forklarer konklusjonens troverdighet.
3. Matematisk forankring. Argumentene er forankret i de iboende matematiske egenskapene hos komponentene som er med i resonneringen. (Lithner, 2008, s. 266)

Elevene må ut fra denne definisjonen ha opplevelsen av å møte en matematisk utfordrende oppgave, som defineres ved at de ikke automatisk vet løsningen av den. En resonneringssekvens defineres som et resultat av tankeprosesser som starter i en oppgave og ender i et svar (Lithner, 2008). Argumentene som støtter strategivalget (prediktive argumenter) eller strategiimplementering (verifiserende argumenter) er ut fra definisjonen nødvendig for at elevenes resonnement er plausibelt og kan klassifiseres som kreativt. Et riktig svar, uten noen argumenter, vil derfor ikke kunne bli sett på som kreativt. Om et argument aksepteres, blir bestemt av sosiomatematiske normer, hvor argumenter som forankres i matematikken er foretrukket, heller enn for eksempel sosial status. Derfor må argumentene være forankret i iboende matematiske egenskaper til komponentene, hvor komponenter enten kan være objekter (tall/variabler), transformasjoner (det som blir gjort med objektene) eller konsepter (matematiske ideer) i oppgavesituasjonen. Argumenter som er forankret i overflateegenskaper kan derfor ikke klassifiseres som kreativt (Lithner, 2008).

Resonnementsforståelse, som Kilpatrick et al. (2001) sin ene tråd, defineres som evne til å reflektere, forklare og begrunne logisk tenkning. Denne kan sammenlignes med Lithner (2008) sin definisjon for kreativt resonnement, selv om Lithner (2008) sin definisjon er bredere i den forstand at resonneringssekvenser må være nye og forankret i iboende matematiske egenskaper. Et kreativt resonnement vil være synonymt med en høyere grad av forståelse, men i tillegg vil bruk av algoritmisk resonnement også kunne vise dette i noen tilfeller. Da ved at eleven velger algoritmisk resonnement der det lønner seg å bruke det. Lithner (2006) legger også vekt på at elevens evne til å være fleksibel mellom ulike resonneringssekvenser, er nødvendig for et kreativt resonnement. Ut fra definisjonen på en resonneringssekvens, innebærer dette at elevene er fleksible mellom ulike sekvenser som starter i oppgaven og ender i ulike svar. Evnen til å overkomme fiksering, blir sett på som nødvendig for den kreative evnen, som kjennetegnes med at eleven ikke er låst fast i en løsning (Haylock, 1997; Silver, 1997). Dette utfordrer elevens metakognitive ferdigheter, hvor for eksempel eleven reflekterer over eget resonnement, som er en slik ferdighet. Hvis læreren legger for stor vekt på algoritmer og regler, vil dette også påvirke elevene mot et slikt resonnement. Spesielt i algebra vil et stort fokus på prosedyrer bidra til et algoritmisk resonnement, uten begrunnelser. «The problem is not that imitative reasoning exists; it is a natural part of mathematical learning. The problem is its domination» (Bergqvist & Lithner, 2012, s. 267).

Mitt forskningsspørsmål ønsker å se på om lærerens handlinger, da spesielt spørsmål og argumenter bidrar til det kreative resonnementet hos eleven. Videre i oppgaven velger jeg derfor å bruke Lithner (2008) sin definisjon av resonnement, og kriteriene for det kreative resonnementet.

2.3 Lærerens handlinger i matematikkundervisningen

For at eleven skal kunne utvikle et kreativt resonnement, må læreren legge opp til undervisning som gir muligheter for dette. Elevenes muligheter til å lære, handler om hvordan elevene får møte det matematiske innholdet, og det er læreren som setter disse rammene (Hiebert & Grouws, 2007). Bergqvist og Lithner (2012, s. 257) har sett på hvilke muligheter elevene blir gitt for å kunne tilegne seg ulike typer resonnement i gjennomgang av oppgaver. De har sett på seks aspekter som viser ulike handlinger som er viktige for å kunne analysere dette.

1. **Identifisering av oppgavetypen.** Velger læreren eksplisitt å identifisere oppgaven til å være av en spesiell type eller struktur (for eksempel en andregradslikning)?
2. **Gjenkjennelse av løsningsmetode.** Beskriver læreren de generelle egenskapene for oppgaver av denne typen? Gir læreren hovedelementene for løsningsmetoden?

Disse to aspektene kommer fra typiske egenskaper ved løsning av rutineoppgaver, de neste aspektene kommer fra egenskaper som gjenkjenner en kreativ løsning, og kommer fra Lithner (2008) sin definisjon av det kreative resonnementet (se **kapittel 2.2.3**).

3. **Kreativ refleksjon**. Gir læreren elevene strategivalg og strategiimplementering fra start? Dette er ikke tilfelle i kreativt resonnement.
4. **Argumentasjon**. Formulerer læreren argumentasjonen før konklusjonen? Enten er argumentene prediktive, altså formulert før konklusjonen eller verifiserende argumenter som er formulert etter konklusjonen.
5. **Matematisk forankring.** Forankrer læreren argumentene i de iboende matematiske egenskapene til komponentene som er med i oppgaven? Er konklusjonen basert på relevante egenskaper?
6. **Justering.** Er lærerens mål og oppgavesituasjon lik med elevens? Er resonnementet realistisk for eleven?

Ved å analysere lærernes oppgavegjennomgang mot disse aspektene, fant Bergqvist og Lithner (2012) at de fleste gjennomgangene ga elevene mulighet for å utvikle en form for algoritmisk resonnement, heller enn et kreativt resonnement. Dette ble indikert ved at aspekt 3-5 sjeldent var tilstede i fellesskap, noe som er kriteriene for et kreativt resonnement (fra Lithner (2006)). Ettersom læreren ikke argumenterer med forankring, vil heller ikke eleven få eksempler på dette i undervisningen, og eleven lærer ikke hvordan de skal argumentere for egne løsninger. Hvis læreren gir elevene strategivalg og strategiimplementering, vil ikke læreren legge til rette for at elevene utvikler evnen til å argumentere selv. Om oppgavetypen blir identifisert og løsningsmetoden gjenkjent (aspekt 1-2) på en klar og systematisk måte kan dette fremme et algoritmisk resonnement. Hvis ingen av handlingene var tilstede, vil det memorerte resonnementet, og utenatlæring være gjeldende. Disse seks aspektene er med på å kartlegge om lærerens handlinger fremmer et kreativt resonnement, og Bergqvist og Lithner (2012) viser til at læreren må tilrettelegge for det i undervisningen. Lærerens handlinger i undervisningen er altså essensiell for elevenes utvikling av et kreativt resonnement.

Læreren har mange oppgaver i dagens skole. Undervisningen planlegges ut fra gitte rammer fra læreplaner og skolens rammeverk. Læreren forholder seg til normer og regler, jobber sammen med kollegaer, foresatte og mye mer (Imsen, 2016). Som lærer har man tatt på seg arbeidet med å utdanne neste generasjons borgere. I oppgaven ser jeg spesifikt på de oppgavene som utspiller seg i klasserommet i interaksjon med elev og lærer. Læreren skal variere og tilpasse undervisningen for alle elevene, ved å ta hensyn til mangfoldet i klassen (Utdanningsdirektoratet, 2016). En viktig faktor vil da være samtalen som læreren har med sine elever. I denne oppgaven velger jeg derfor å se på lærerens handlinger som kan knyttes til samtalen mellom lærer og elev. Samtalen gir undervisningen flyt og retning, og lærerens handlinger legger rammene for samtalen. Historisk sett har klasserommet tradisjonelt blitt styrt gjennom et IRE-mønster (Initiate-Respons-Evaluate), hvor læreren starter med å stille et spørsmål for å innhente informasjon om elevens kunnskap, dette følges opp med et svar fra eleven som blir evaluert av læreren (Mehan, 1979). Selv om dialogen er bygget opp rundt individuelle bidrag som følger hverandre, vil det være vanskelig å studere denne diskusjonen uten å se bidragene i sammenheng. Et utsagn er avhengig av tidligere utsagn fra andre individer (Drageset, 2014). I masteroppgaven ønsker jeg ikke kun å se på undervisning med IRE-mønster, men også samtalen læreren skaper i grupper og mellom elever, hvor elevene deler matematiske tanker og ideer med hverandre. Ettersom lærerens handlinger i samtalene kan være så mangt (for eksempel konkretisering, visualiseringer, tilbakemeldinger, spørsmål, forklaringer osv.) er det nødvendig å avgrense oppgaven. For å kunne si noe om klasseromsdiskusjonen og om lærerens handlinger bidrar til et kreativt resonnement, ønsker jeg derfor spesielt å se på de spørsmål og argumenter, som læreren benytter seg av i samtale med elever.

2.3.1 Lærerens spørsmål

«Effective teaching of mathematics uses purposeful questions to assess and advance students' reasoning and sense making about important mathematical ideas and relationships» (NCTM, 2014, s. 35). Det å skulle stille gode spørsmål i alle situasjoner i undervisningen, kan føles vanskelig for læreren, og dette krever mye erfaring, pedagogisk kunnskap og god kjennskap til sine elever (Boaler & Brodie, 2004). Ved å stille spørsmål, engasjerer læreren elevene i undervisningen, og dette er med på å gi undervisningen retning og mening. Men ikke alle spørsmål gir et like godt grunnlag for elevenes resonnement og matematiske forståelse. Mange forskningsartikler har vist at mange lærere sjeldent stiller høyere ordens-spørsmål, selv om læreren vet at dette er viktig for elevens forståelse (Boaler & Brodie, 2004; Myhill & Dunkin, 2005). Ayaduray og Jacobs (1997, s. 562) definerer forskjellen på høyere ordens-spørsmål og lavere ordens-spørsmål som: «Lower order questions generate more superficial thought, e.g. recall of information, while higher order questions are those which stimulate learners to think more deeply, e.g. application, analysis, or evaluation of information».

Om læreren opplever at elevene ofte gir feil svar i klasseromsdiskusjonen, vil etter hvert læreren gi mer og mer informasjon for å hjelpe og for å komme frem til det svaret som var ønskelig fra start. Dette kaller Brousseau (1997) for *Topaze effekten.* Valg av spørsmål som læreren stiller, springer ut fra hva som gir de riktige svarene. Dette kan sammenlignes med Lithner (2008) sin definisjon på et guidet algoritmisk resonnement (se **kapittel 2.2.2**). Vanskelige strategivalg og det intellektuelle arbeidet blir gjort av guiden, i dette tilfelle læreren. Det er derfor lite igjen til eleven å gjennomføre, annet enn rutinetransformasjoner, som ikke krever verifiserende eller prediktive argumenter. Denne prosessen, hvor læreren har bestemt seg for veien som diskusjonen skal gå, uten å ta med seg noen av elevenes innspill kalles for *funneling*, som består av å lede eleven. Det motsatte vil være *focusing,* som vil være å fokusere på elevens tanker, hvor elevene ytrer sine tanker og læreren får elevene til å reflektere over disse. Læreren er åpen for flere løsninger på en oppgave (NCTM, 2014). For elevens kreative resonnement, legges det vekt på at resonneringssekvensen må skje hos eleven selv. Derfor vil ledende spørsmål ikke bidra i like stor grad til et kreativt resonnement hos eleven, som fokuserende spørsmål.

Myhill og Dunkin (2005) viser til at klasseromsdiskusjonen bærer preg av en asymmetrisk fordeling av makt. Læreren overfører sine kunnskaper til elevene, gjennom undervisningen som læreren legger opp til. Barnes' analyse av lærerens spørsmål i 1986 (ifølge Myhill og Dunkin (2005)) definerte forhåndsbestemte spørsmål som *lukkede spørsmål,* hvor motsetningen følgelig var *åpne spørsmål*, som er utforskende. Denne definisjonen har blitt mye brukt i senere tid, men blir diskutert, da denne inndelingen ikke tar for seg konteksten eller hensikten. I tillegg kritiseres det at lærerens spørsmål er mer komplekse, enn at de kan passe inn i to ulike kategorier. Myhill og Dunkin (2005) utviklet derfor fire kategorier over lærerens spørsmål. Faktaspørsmål *(factual questions)* som ønsker forhåndsbestemte svar, og prosedyrespørsmål (*procedural questions*) som relateres til organiseringen av timen. Disse to kategoriene kan sammenlignes med Barnes' lukkede spørsmål. De åpne spørsmålene ble så delt inn i spekulative spørsmål *(speculative questions),* som ikke ønsket forhåndsbestemte svar, heller meninger og ideer, og prosess spørsmål (*process questions*) som inviterer elevene til å forklare deres tankeprosess. Deres forskning viste at de fleste lærere stiller faktaspørsmål, hvor læreren er avsender av informasjon og eleven er mottageren. Samme resultat finner vi også fra Sahin og Kulm (2008) sin forskning på en nyutdannet og en erfaren lærer, som viste til at flest faktaspørsmål ble stilt av begge to.

Et rammeverk for lærerens spørsmål som er enda mer beskrivende og spesifikt, er utarbeidet av Boaler og Brodie (2004) som har sett på hvilke spørsmål som fører til læring, hvor omgivelsene er tatt med i betraktning. Karakteriseringen endte i ni ulike kategorier, oversatt og gjengitt i **tabell 1**. Funnene fra forskningen viste tydelig at lærere som fulgte tradisjonell læreplan stilte 95 % av sine spørsmål av type 1 (leder elevene gjennom en metode). Boaler og Brodie (2004) viser til at det ikke nødvendigvis er hva som skjer i klasserommet som er viktig, men det som har noe å si, er hvordan elevene jobber og responderer i den valgte settingen. De viser til at bredde i lærerens spørsmål så ut til å være viktig, og kvaliteten i diskusjonen var avhengig av hvor mange av spørsmålstypene som ble brukt. Om læreren benyttet seg av flere av spørsmålstypene, var mulighetene for diskusjon god. Spørsmålene leder eleven gjennom det matematiske terrenget, og elevene vil kunne lære seg å stille de mer konseptuelle spørsmålene selv.

Tabell 1: Kategorisering av læreres spørsmål, fra Boaler og Brodie (2004, s. 777) med forklaring og eksempler på spørsmålstypene.

Spørsmålstype	Forklaring	Eksempel
1. Ledende spørsmål	Læreren innhenter informasjon fra elevene. Gir eleven mulighet til å fastsette fakta/prosedyrer.	Hva er verdien til x i denne likningen?
2. Innsetting av terminologi	Læreren spør etter riktig matematisk språk.	Hva er dette kalt? Hvordan ville vi skrive dette rett?
3. Utforske matematiske ideer og/eller sammenhenger	Læreren spør om matematiske sammenhenger og meninger. Linker mellom matematiske ideer og representasjoner.	Hvor er x i diagrammet? Hva betyr sannsynlighet?
4. Begrunnelser	Læreren spør elevene om å artikulere, utdype og klargjøre deres tanker.	Hvordan fikk du 10? Kan du forklare ideen din?
5. Generere diskusjon	Læreren innhenter bidragene fra andre medlemmer av klassen.	Er det en annen mening til dette, Justin?
6. Se sammenhenger	Læreren spør eleven om sammenheng mellom matematisk idé og matematikk, og andre deler av skolen/livet.	I hvilken annen situasjon kunne du brukt dette?
7. Utvidet tenkning	Læreren utvider situasjonen under diskusjon til andre situasjoner, hvor like ideer kan bli brukt.	Ville dette fungere med andre tall?
8. Fokusering	Læreren hjelper eleven å fokusere på nøkkelelementene, eller aspekter av situasjonen for å legge til rette for problemløsing.	Hva spør problemet om? Hva er viktig ved dette?
9. Etablere konteksten	Læreren snakker om problemer utenfor matematikken, for å kunne knytte linker til matematikken.	Hva er et lotteri?

For å vise hvordan tabellen kan brukes på lærerens spørsmål, velger jeg å benytte et eksempel fra Bergqvist og Lithner (2012, s. 258) sin forskning på lærerens rolle i klasserommet. Situasjonen utspiller seg i en 9. klasse i løsning av en oppgave om likninger:

> Læreren skrev $x(x + 5) =$ og spurte etter svaret. Ingen elever svarte.
> **Lærer:** Vi starter med de første to. Hva vil det bli, Max?
> **Max:** 2x.
> **Lærer:** Nei, hva var $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$?
> **Max:** Kan det være $5x^2$?
> **Lærer:** Nei. Det er $x^2 + 5x$. Hva er $-4x(2x + y)$?
> **Jan:** $8x -$
> Læreren avbryter: «Nei», og skriver uten diskusjon – $(8x^2 + 4xy)$.
> **Lærer:** Hva blir dette? Fjern parentesen.
> **Eve:** $-8x^2 - 4xy$.

I dette eksempelet stilles kun spørsmål av type en (ledende spørsmål), hvor læreren leder elevene gjennom en metode. Alle spørsmålene som stilles er på formen «Hva blir dette?», og elevene blir ikke spurt om å begrunne sin tankegang. Elevenes korte svar inneholder ikke et kreativt resonnement fra Lithner (2008) sin definisjon, ettersom det ikke eksisterer argumenter som støtter strategivalget eller forankring i iboende matematiske egenskaper. Derfor bidrar ikke læreren i dette eksempelet til et kreativt resonnement hos eleven, ut fra de spørsmål som læreren velger å stille. Dette eksempelet viser hvordan lærerens spørsmål i undervisningen, kan bidra til å fremme en type resonnement i arbeid med likninger, slik som forskningsspørsmålet ønsker å kartlegge.

NCTM (2014) viser til at en lærer som spør mange ulike spørsmål, får bedre innblikk i elevenes tankegang. Her vises til innhenting av informasjon, verifisering av tankegang, synliggjøre matematikken og oppmuntring til refleksjon og begrunnelser, som fire ulike typer spørsmål. Alle like viktige for å legge opp til effektiv undervisning. For å stille målbevisste spørsmål viser NCTM (2014, s. 36) til følgende punkter:

- Få elevene til å bygge på sin forståelse, uten at ledende spørsmål (funneling) tar over.
- Stille spørsmål som krever mer enn bare å innhente informasjon, men også begrunnelser.
- Stille bevisste spørsmål som gjør matematikken mer synlig for elevene.
- Gi nok tid så flere elever kan bidra i diskusjonen.

Lærerens spørsmål setter ofte retningen for samtalen mellom lærer og elev, og kan være utgangspunktet for elevens resonnement. Det ser ut til å være en form for enighet om at spørsmål som får elevene til å uttrykke sine tanker, gir et bedre utgangspunkt for matematisk forståelse og resonnement, enn spørsmål med forutbestemte svar, hvor læreren leder elevene mot ønsket svar. Lærerens handling, i form av å stille spørsmål, vil derfor bidra til elevenes matematiske resonnement. For å ha et beskrivende og detaljert rammeverk for lærerens spørsmål, er Boaler og Brodie (2004) sin kategorisering brukt videre i oppgaven.

2.3.2 Lærerens argumenter

Som skrevet i innledning av avsnittet følger ofte klasseromsdiskusjonen en IRE-struktur, hvor læreren drøfter elevens svar. Læreren bruker argumenter, eventuelt nye spørsmål for å veilede eleven i det matematiske landskapet. Lærerens argumenter er viktig, for at eleven skal kunne utvikle sin forståelse. Argumentene kan komme som respons på en elevs spørsmål eller svar, eller argumentet kan være en del av en forklaring. Jeg definerer argumenter i oppgaven som de tilbakemeldinger og begrunnelser som læreren gir i respons på en elevs spørsmål, eller argumenter brukt i tavleundervisning.

I likhet med elevens argumentasjon, vil også lærerens argumenter kunne bli klassifisert som prediktiv argumentasjon og verifiserende argumentasjon (Bergqvist & Lithner, 2012). Prediktiv argumentasjon, som nevnt i **kapittel 2.2.1**, sier noe om hvorfor strategien vil løse oppgaven, hvor argumentene brukes for å støtte strategivalget. Verifiserende argumenter støtter implementeringsstrategien, og sier noe om hvorfor strategien løste oppgaven. Lithner (2008) viser til at argumenter som er forankret i matematiske egenskaper, altså de matematiske egenskapene til komponentene i det man resonnerer om, er mer troverdige. For likninger vil dette da være for eksempel likhetstegnets matematiske egenskaper. Bergqvist og Lithner (2012) mener at læreren er viktig for elevens resonnement, ved at læreren gir eksempel på hvordan et godt matematisk resonnement blir gjort.

I en samtale mellom lærer og elev, benytter læreren seg ofte av tilbakemeldinger som kan være støttet av argumenter. Hattie og Timperley (2007) viser til fire nivåer for tilbakemelding. Første nivå er å gi tilbakemelding på oppgaven eller produktet (*feedback about the task*), ofte i form av om oppgaven er rett eller feil. Andre nivå beskriver tilbakemeldinger på valg av strategi, altså prosessen som er brukt for å klare oppgaven *(feedback about the processing of the task*). Tredje nivå består av tilbakemeldinger på elevens egenvurdering (*feedback about self regulation*) og fjerde nivå er tilbakemelding på eleven som person (*feedback about the self as a person*). Sistnevnte er den typen tilbakemelding som Hattie og Timperley (2007) mener er minst effektiv, mens tilbakemelding på strategivalg og egenvurdering vil skape forståelse og mestring. Tilbakemeldinger på oppgaven kan være viktig hvis de virker inn på strategivalg og egenvurderingen.

Drageset (2014) sier i likhet med Lithner (2008) at strukturering av diskusjon rundt den matematiske ideen er viktig, da det ikke holder å kun få elevene til å snakke. Videre har han utarbeidet et rammeverk for å beskrive lærerens respons på elevens kommentarer, og hvordan læreren bruker elevenes kommentarer til å jobbe med det matematiske innholdet, og er derfor mer omfattende enn Hattie og Timperley (2007) sine fire nivåer. Rammeverket består av tre hovedgrupper for kommentarer, med til sammen 13 undergrupper (se **tabell 2**). Flere av disse kommentarene kan utforme seg som spørsmål, slik at rammeverket overlapper på flere av punktene med blant annet Boaler og Brodie (2004) sin kategorisering av spørsmål (se **tabell 1**). Noen handlinger gjør så man får innblikk i elevens tankegang, mens andre handlinger brukes for å hjelpe eleven frem til en konklusjon. Disse handlingene kan støttes av argumenter, hvis ikke er handlingsforslagene basert på autoritet (Drageset, 2014). For denne oppgaven er det derfor viktig å se på lærerens respons på elevens kommentarer, i sammenheng med argumentene som brukes.

Tabell 2: Rammeverk for lærerens respons på elevens kommentarer, oversatt fra Drageset (2014).

1. Endrende handlinger	a. Sette til side b. Foreslå en ny strategi c. Korrigerende spørsmål
2. Fremdrifts-handlinger	a. Demonstrasjon b. Forenkling c. Lukkede fremdriftsdetaljer d. Åpne fremdriftstiltak
3. Fokuserende handlinger	a. Etterspørsel etter elevens tanker i. Opplyse om detaljer ii. Begrunnelser iii. Bruk på like problemer iv. Etterspørre vurdering fra andre elever b. Peke ut i. Oppsummering ii. Legge merke til

Endrende handlinger blir brukt av læreren til å endre elevens tilnærming til oppgaven, enten ved å sette til side elevens løsning, foreslå en annen strategi eller med spørsmål som korrigerer eleven inn på riktig løsning. *Fremdriftshandlinger* brukes av læreren for å få prosessen til å bevege seg fremover, som kan bli gjort med demonstrasjoner eller forenklinger hvor læreren tilføyer informasjon, eller med å etterspørre lukkede fremdriftsdetaljer eller gi åpne fremdriftstiltak. *Fokuserende handlinger* brukes av læreren til å stoppe prosessen, for å se grundigere på detaljer og begrunnelser for en valgt løsningsstrategi. Her ber læreren elevene om å gjøre noe, eller så peker læreren på viktige faktorer selv (Drageset, 2015a).

Kategoriseringen kan brukes for å forstå sammenhengen mellom kommunikasjon og læring, og ved å bruke kategoriene i studie av prosesser eller som forklaringer av for eksempel *funneling* og *focusing*. *Fokuserende handlinger* er eksempel på situasjoner hvor læreren ønsker at eleven skal gå dypere på detaljnivå og ser på elevens forståelse. Slike kommentarer kan lede eleven mot «… more powerful, efficient, and accurate mathematical thinking» (Drageset, 2014, s. 298). *Endrende handlinger* og *fremdriftshandlinger* kan sammenlignes med ledende spørsmål (funneling), og også guidet algoritmisk resonnement. Likevel er disse viktig for å holde flyt i timen. I en tilegnelsesfase kan disse være nyttige for å skape muligheter for elevene til å utvikle evnen for problemløsing og resonnement. Lærere som ofte bruker *begrunnelser* vil ifølge Drageset (2014) utvikle elevens matematiske resonnement, som kan ses i sammenheng med Lithner (2008) sitt fokus på argumentet og forankring. Det er også nødvendig for læreren å innhente slike begrunnelser fra elevene, for å få innsikt i elevenes tanker. Drageset (2015b) viser likevel til at læreren sjeldent etterspør begrunnelser når svaret er feil, som kan føre til at elevene kun ser begrunnelser for riktige besvarelser i undervisningen.

Eksempelet som ble trukket frem i **kapittel 2.3.1**, fra matematikkundervisning i 9. klasse i Bergqvist og Lithner (2012) sin forskning, viser en lærer som kun responderer på elevenes svar, ut fra om svarene er rett eller galt. Læreren setter alle andre, enn det riktige svaret til side (kategori 1a i **tabell 2**), hvor eksempelet derfor kan karakteriseres som ledende (funneling). I dette eksempelet bruker læreren kun endrende handlinger (kategori 1), og læreren har verken prediktive eller verifiserende argumenterer for det som blir gjort. Ettersom læreren ikke bruker argumenter med matematiske forankringen, vil ikke læreren bidra til at elevene vil gjøre dette heller. For at eleven skal utvikle et kreativt resonnement, er det derfor viktig at også læreren legger opp til argumenter som bidrar til et slikt resonnement. Hvis læreren heller hadde respondert på elevens svar med å argumentere med fokuserende handlinger, og etterspurt elevens tanker, måtte eleven ha begrunnet sine svar ut fra de matematiske egenskapene og argumentert for dette. Det vil derfor være viktig å se på lærerens argumenter, som et bidrag til elevens kreative resonnement.

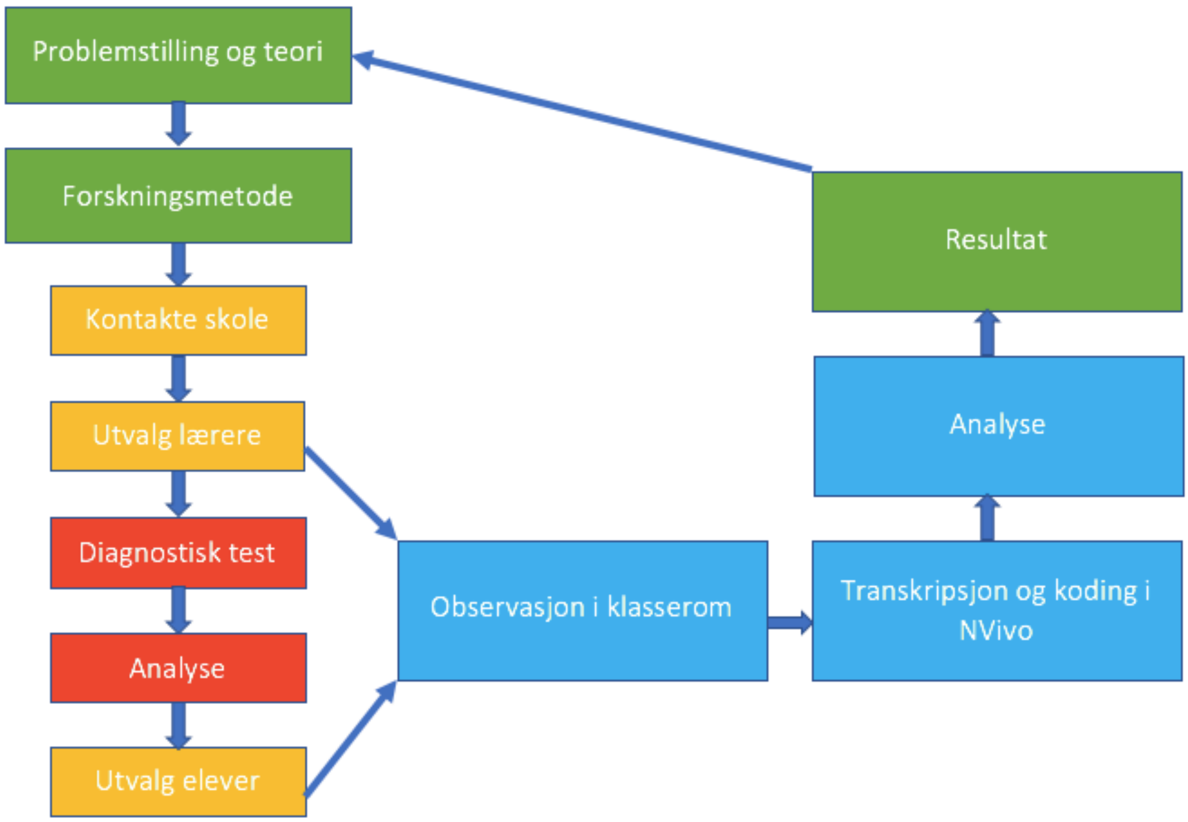
3. Metode

I dette kapittelet presenteres forskningsmetodene som er brukt for å besvare forskningsspørsmålet. **Kapittel 3.1** beskriver forskningsmetodene som er valgt for oppgaven, designet og progresjonen i prosjektet. **Kapittel 3.2** viser prosessen bak utvelgelsen av deltagerne til prosjektet. **Kapittel 3.3** og **kapittel 3.4** går i dybden på teori om, og gjennomføring av, forskningsmetodene. Metodens svakheter blir drøftet i **kapittel 3.5**, før **kapittelet 3.6** viser det etiske aspektet.

3.1 Valg av forskningsmetode og design

I forskningsbasert arbeid skiller vi mellom to hoved-forskningstilnærminger, i form av kvalitativ og kvantitativ forskningsmetode. I kvalitativ forskning vil data som samles inn utforme seg som ord, handlinger, meninger og tolkinger, mens kvantitativ forskning baserer seg på tall og hyppighet (Christoffersen & Johannessen, 2012). Ettersom forskningsspørsmålet omhandler handlinger og kommunikasjon i klasserommet, har valget falt på en kvalitativ forskningsmetode, da dette prosjektet går mer i dybden på hva som skjer i interaksjonen mellom lærer og elev.

Mot slutten av 1980-tallet begynte utviklingen av en tilnærming som benyttet seg av begge forskningsmetodene. Ideen springer ut fra at både kvantitative og kvalitative metoder har sine styrker og svakheter, og ved å innhente data fra begge tilnærmingene vil det være mulig å nøytralisere svakhetene (Creswell, 2014; Smeby, 2012). Metoden fikk derfor navnet *mixed-methods*. Med bakgrunn i forskningsspørsmålet mitt, har jeg også valgt å kombinere tilnærmingene for min datainnsamling, men hovedmetoden vil være kvalitativ. En kvantitativ del vil bli brukt for å få innblikk i elevenes forståelse av likninger, og være grunnlag for utvalg av elever for videre observasjon i klasserommet (Ivankova, Creswell & Stick, 2006). Ved at eleven viser forståelse av oppgavene, vil elevene ha et utgangspunkt for et matematisk resonnement, siden forståelse og resonnement er avhengig av hverandre for en matematisk kompetanse (Kilpatrick et al., 2001). Forskning som først består av å hente inn kvantitativ data, for så å analysere og bygge videre på resultatene med kvalitativ forskning, kaller Creswell (2014) for *explanatory sequential mixed methods.* Mitt design faller under hva Creswell og Plano Clark (2011) kaller en *participant-selection variant,* hvor kvantitativ data brukes for å identifisere og velge ut de mest egnede deltagerne. En slik utvelgingsprosess er med på å styrke validiteten. Mitt forskningsspørsmål ønsker å finne svar på situasjoner som utspiller seg i klasserommet, og et casedesign passer derfor godt som et forskningsdesign. I casedesign utforsker man et fenomen i sin virkelighetsnære kontekst hvor skillet mellom fenomen og kontekst er uklart (Yin, 2014). Casedesign er ofte løsningen når forskningsspørsmålet prøver å finne ut *hvordan* eller *hvorfor*. Man får mulighet til å finne ut av det situasjonsbestemte, og få en forståelse av det som undersøkes (Brekke & Tiller, 2013). Det er det spesielle og komplekse i situasjoner, som skal undersøkes (Stake, 1995). Det er nettopp dette jeg er ute etter, hvor jeg i forskningsspørsmålet ønsker å finne ut hvordan læreren bidrar til elevens resonnement i klasserommet. **Figur 6** viser en fremstilling av fremgangsmåten som er valgt.



Figur 6: Mitt forskningsdesign. Grønne bokser viser utgangspunktet og sluttresultatet av forskningsdesignet. Gule bokser viser utvalget (se **kapittel 3.2**), røde bokser viser til den kvantitative delen (se **kapittel 3.3**), mens de blå boksene viser til den kvalitative forskningsmetoden (se **kapittel 3.4**). Resultatene blir tilslutt sett opp mot problemstilling og teori, i **kapittel 4** og **kapittel 5**.

Slik som **figur 6** viser, startet prosjektet i en problemstilling med tilhørende teori, før valget falt på en blandet forskningsmetode. Videre kontaktet jeg en skole for å gjøre et utvalg av lærere og elever (se **kapittel 3.2**). To lærere ble valgt ut til observasjon i tillegg til fire elever i hver klasse. Første del av datainnsamlingen bestod derfor av en kvantitativ diagnostisk test på disse to klassene (se **kapittel 3.3**), hvor analysen av denne testen skulle være med å bestemme utvalget av elever. Elevene og lærer ble så observert ved bruk av observasjonsskjema og videokamera i en naturlig setting i sitt klasserom i en dobbel skoletime (se **kapittel 3.4**). Videofilene ble så transkribert og kodet i programmet NVivo (se **kapittel 3.4.3**) før dette ble analysert og fremstilt i **kapittel 4**.

3.2 Valg av deltakere

For å gjennomføre datainnsamlingen, var det nødvendig å finne en skole som sa seg villig til å delta i prosjektet med tilhørende lærere og elever. Ettersom jeg og medstudent Ingrid Kay begge skriver om algebra, ønsket vi å gjennomføre deler av datainnsamlingen i fellesskap, i form av den kvantitative testen. Vi kontaktet derfor en videregående skole som vi kjente godt til, og sendte forespørsel til rektor (se **vedlegg 1**). Etter godkjennelse fra ledelsen tok vi kontakt med avdelingsleder på realfag som også var positiv til et slikt prosjekt. Ettersom jeg i mitt forskningsspørsmål ønsker å se spesifikt på likninger, var det viktig å velge meg årstrinn og matematikkfag, som jobbet med dette i læreplan dette året. Valget falt derfor på teoretisk matematikk i første årstrinn, da dette er elever som kommer fra ungdomsskolen og har valgt første steg i en eventuell matematisk fordypning på videregående trinn. Et av Kilpatrick et al. (2001) sine tråder som symboliserer matematisk kompetanse, er engasjement for matematikkfaget (se **kapittel 2.2**). Elevene ble derfor valgt fra 1T, hvor dette engasjementet kan være større enn i andre klasser, for at dette ikke skulle være en begrensende faktor for det matematiske resonnementet. I 1T skal elevene mestre å «… løse ligninger … og ligningssystemer av første og andre grad, og enkle ligninger med eksponential- og logaritmefunksjoner, både ved regning og med digitale verktøy» (Utdanningsdirektoratet, 2006, s. 9) og de skal «omforme en praktisk problemstilling til en ligning, en ulikhet eller et ligningssystem … og begrunne løsningen og vurdere gyldighetsområde og begrensninger» (Utdanningsdirektoratet, 2006, s. 9). Disse læreplanmålene viser at en 1T klasse passer for mitt forskningsspørsmål.

For å gjennomføre mitt forskningsprosjekt ønsket jeg et utvalg på to lærere. Dette for å få to ulike klasserom, og tilhørende hendelser. Jeg tror dette vil være med på å styrke mine funn, selv om to lærere ikke kan generalisere noe for alle lærere, vil tendenser bli mer tydelige for to i stedet for en. Prosjektet har heller ikke til hensikt å finne generelle trekk, men snarere gå i dybden på det som skjer i disse klasserommene. Det er også interessant å se på forskjellene og sammenlikningene i de to relativt like klasserommene. Hovedsakelig analyseres hvert klasserom for seg, men jeg sammenlikner klasserommene i slutten av **kapittel 4** og i **kapittel 5**. På grunn av tidsrammen til dette mastergradsprosjektet observerte jeg ikke flere lærere, da mixed-methods design er tid- og ressurskrevende (Ivankova et al., 2006). Jeg kontaktet derfor to lærere, som jeg allerede kjente til, som underviste i 1T- klasser. Jeg har et inntrykk av de kommuniserer godt med elevene sine i klasserommet. Valget falt på disse lærerne på bakgrunn av muligheter for mange interaksjoner i klasserommet, og begge virker utviklingsorienterte og positive for forskning i skolen. En av lærerne er relativt ny som lærer, mens den andre er erfaren i skoleverket. Begge ble informert om prosjektet og underskrev samtykkeerklæring (se **vedlegg 2**).

Forskningsprosjektet er også avhengig av elever, da forskningsspørsmålet ønsker å se på interaksjonen mellom lærer og elev. Jeg og min medstudent Ingrid informerte derfor i fellesskap om våre prosjekter i lærernes tilhørende matematikklasser, og i hver klasse signerte 21 av 24 elever samtykkeerklæringen (se **vedlegg 3**). Den kvantitative testen ble gjennomført på alle elevene som samtykket. For videre observasjon ønsket jeg å velge ut to samarbeidende par i hver klasse, altså fire elever i hver klasse, åtte til sammen i begge klassene. Ved å velge meg åtte elever, ville jeg få tilgang til mange ulike elevers resonnement, og derfor kunne se flere forskjeller og eventuelle likheter. Det ble ikke observere flere elevgrupper, da det ville blitt vanskelig å holde god oversikt. Ettersom jeg ønsket å se på det muntlige resonnementet til eleven, var det viktig at utvalget bestod av muntlig aktive elever, og jeg gjennomførte derfor samtaler med lærerne for å finne disse elevene. Johnson, Johnson, Haugaløkken og Aakervik (2006) viser til at en fungerende samarbeidsgruppe har en størrelse fra to til seks. Jeg ønsket å se på klasseromssituasjon slik den utspiller seg til daglig. Elevene jobber ofte i par i tradisjonell undervisning, derfor falt valget på to elever som pleier å være plassert ved siden av hverandre i hver klasse, for en mest mulig naturlig setting. Om jeg hadde valgt større grupper ville samspillet i form av sosiale ferdigheter spilt en større rolle, noe jeg i så fall måtte tatt mer hensyn til. Plassering ville også bli en utfordring med flere enn to elever. Utvalget av elever er også basert på resonnementet fra den diagnostiske testen, hvor jeg ønsket å velge to elever som kunne se ut til å ha samme resultat, for å unngå et stort sprik i forståelse og resonnement. Elever som viste en algebraisk profil (se **kapittel 2.1.1**) ble foretrukket, med bakgrunn i at disse elevene ville ha en bedre forutsetning for et kreativt resonnement, enn de aritmetiske. Dette for å sikre at jeg vil få noe data å forholde meg til, da de aritmetiske elevene kan ha vanskeligheter med å sette ord på resonnementet sitt. De algebraiske elevene kan ha større mulighet for å se likninger som strukturer av generell representasjon (Gray et al., 2009).

Det var altså tre kriterier som spilte inn for utvelgelse av elever:

1. Elevenes svar på kartleggingstest. Elever med algebraisk profil ble foretrukket.
2. Lærerens begrunnelser for hvilke elever som var muntlig aktive, og hvem som kunne sette ord på resonnementene sine.
3. Naturlige grupper på to og to i klasserommet.

Utvalget blir gitt fiktive navn. **Petter** er lærer i den første klassen, her har **Tobias** og **Ola** blitt valgt ut som den ene gruppen på bakgrunn av alle tre utvalgskriteriene, mens **Thea** og **Hanna** har blitt valgt ut på grunnlag av punkt to og tre. Dette på bakgrunn av at ingen flere elever som samarbeidet til vanlig i klasserommet, hadde svart algebraisk, kun enkeltelever i ulike grupper. Både Thea og Hanna har svart aritmetisk på deler av kartleggingstesten (se **kapittel 4.3.2**), men ettersom læreren uttrykte at disse elevene var muntlig aktive og hadde et tydelig resonnement i undervisningen, er de likevel valgt. **Arne** er lærer i den andre klassen, her har **Nora** og **Aleksander** blitt valgt, i tillegg til **Per** og **Andreas**. Her er alle tre utvalgskriteriene lagt til grunn. Av de åtte utvalgte elevene er det da seks som oppfyller alle tre utvalgskriteriene, og to som ikke oppfyller det første kriteriet. Det på grunn av mangel på elever som oppfylte alle tre kriteriene. For beskrivelse av elevens besvarelse, se **kapittel 4.3.2**.

3.3 Diagnostisk test

3.3.1 Utforming av test

Diagnostiske oppgaver skiller seg ut fra vanlige oppgaver ved at de er konstruert for å kunne identifisere og framheve misoppfatninger, og forsøker å synliggjøre elevenes løsningsstrategier (Brekke, 2002). Målet med slike oppgaver er at elevene får synliggjort sin begrepsforståelse. Elever som har misoppfatninger knyttet til begrepet, vil da vises ved at de ikke klarer å løse dette riktig. For meg vil det derfor være viktig å kunne synliggjøre elevens begrepsforståelse på likhetstegnet og variabelbegrepet, ettersom disse begrepene er grunnleggende i forståelse av likninger (se **kapittel 2.1.1**). Videre vil denne forståelsen kunne gi et godt utgangspunkt for et matematisk resonnement, som jeg er ute etter (Kilpatrick et al., 2001). Elevene ble instruert til å skrive ned sine tanker omkring spørsmålene, noe som gir et lite innblikk i resonnementet. I samarbeid med Ingrid og veiledere utviklet vi en diagnostisk test bestående av to oppgaver, hvor siste oppgave bestod av to deloppgaver (se **vedlegg 4**). Ettersom testen er relativt kort, er det mulig at eleven ikke får vist sin kunnskap, men likevel vil jeg ut fra disse to oppgavene få mulighet til å kartlegge elevens forståelse.

Oppgave 1: Ettersom elever kan ha vanskeligheter med å forstå likhetstegnet som et relasjonelt symbol (**kapittel 2.1.1**), ble oppgave 1 utformet slik at den utfordret denne forståelsen, ved at elevene måtte balansere sidene av likhetstegnet og skrive svar på begge sider. I tillegg måtte elevene legge sammen like variabler. Oppgaven ble formulert som:
Sett rett bokstavuttrykk på strekene, vis utregningen og forklar fremgangsmåten din med ord.

$$\_\_\_ - 3b = 2a + 6a + 5b - \_\_\_$$

Riktig svar er: $8a - 3b = 2a + 6a + 5b - 8b$.

Oppgave 2: Hart, Brown, Kerslake, Küchemann og Ruddock (1985) gjennomførte i tidsrommet 1976-1977 en diagnostisk matematikktest på ungdomsskoleelever, hvor målet var å identifisere og utvikle et hierarki av forståelse innenfor matematikk. Oppgavene fra denne testen har blitt brukt i en rekke forskning (Gray et al., 2009; Küchemann, 1981) og er også valgt som oppgave i denne kartleggingstesten, for å kunne sammenligne svar. Selv om min datainnsamling foregår på videregående skole, viser Gray et al. (2009) i sin forskning at oppgavene ikke er for lette, da en tredjedel av 174 kalkulusstudenter ikke klarte denne. Hart et al. (1985) viser også til at testen kan brukes på eldre elever. Bokstavene i denne oppgaven representerer en rekke tall, og utfordrer derfor variabelforståelsen. Oppgavene som er valgt fra Hart et al. (1985) er som følger:

- *Hvis* $a = b + 3$*, hva skjer med a hvis b øker med 2? Forklar svaret ditt.*
  Riktig svar: a øker med 2.
- *Hvis* $f = 3g + 1$*, hva skjer med f hvis g øker med 2? Forklar svaret ditt.*
  Riktig svar: f øker med 6.

Valget falt på disse oppgavene, da de utfordrer forståelsen av to variabler som endrer seg i forhold til hverandre i en likning. Alle oppgavene vil kunne avsløre om elevene har ulike misoppfatninger knyttet til variabelbegrepet og likhetstegnet, og vil gi et innblikk i elevenes resonnement rundt oppgavene.

3.3.2 Gjennomføring

Kartleggingstesten ble gjennomført rett etter at elevene hadde blitt informert om prosjektet og skrevet under samtykkeerklæringen. Elevene hadde ikke jobbet spesifikt med algebra og likninger siden starten av skoleåret, men dette er heller ikke nødvendig for diagnostiske oppgaver, da disse brukes for å fange opp misoppfatninger og kartlegge forståelse (Brekke, 2002). Elevene ble bedt om å notere ned hva de tenkte, i tillegg til løsningen på oppgaven. Dette gjorde vi for å forsøke å tyde elevenes resonnement. Elevene fikk til sammen 15 minutter på å løse oppgavene individuelt, og elevene hadde mulighet til å spørre om noe var uklart. I løpet av disse 15 minuttene skulle de også svare på et eget ark om metakognisjon, som tilhørte min medstudents forskningsprosjekt, men dette fikk de ikke utlevert før de hadde gjennomført oppgavene, så dette hadde ingen innvirkning på oppgaveløsingen. Testen ble gjennomført i klassene parallelt hvor jeg holdt testen i den ene klassen, mens min medstudent holdt testen i den andre. Dette ble gjort slik at elevene ikke kunne snakke sammen. Testen foregikk i en vanlig dobbelttime i matematikk 1T, og elevene leverte fortløpende ettersom de var ferdige, men uten å snakke sammen til alle var helt ferdig.

3.3.3 Analyse av diagnostisk test

For å analysere svarene opprettet jeg og min medstudent et excelark, hvor vi samlet elevenes svar separat for hver oppgave. Første oppgave ble kategorisert ut fra om eleven hadde fått rett svar, og om eleven så ut til å forstå variabelbegrepet og likhetstegnet i denne oppgaven. Ettersom 36 av de 42 løste oppgaven riktig, ble denne oppgaven valgt å fokusere mindre på enn de andre, da denne så ut til å være lett for elevene. Løsningen av den andre oppgaven ble karakterisert som enten algebraisk (*algebraic)*, transisjonal (*transitional)* eller aritmetisk (*arithmetic)* ut fra Gray et al. (2009) sine kriterier (se **kapittel 2.1.1**). I begge oppgavene ble elever som viste at variablene økte med riktig verdi, kategorisert som algebraiske. Elever som mente at endring i en variabel, skapte endring i den andre, men uten å gi en spesifikk verdi ble karakterisert som transisjonale. Tilslutt ble elever som ikke kom frem til rett svar, som typisk gjorde en beregning med tallet 2, karakterisert som aritmetiske. Ved å bruke samme rammeverk, kunne vi sammenligne resultatene med tidligere forskning og derfor si noe om nivået i klassen. Etter å ha gjennomgått oppgavene en gang, gikk vi gjennom alle igjen for å se over at alle som svarte på samme måte ble evaluert likt. Vi forsøkte å både kategorisere de som hadde svart riktig og de som hadde svart feil, i ulike grupper med relativt like besvarelser, før vi tilslutt gikk gjennom for å se over at vi var enige om resultatene.

3.4 Observasjon

3.4.1 Observasjon som metode

Vi mennesker observerer verden rundt oss, tilegner oss kunnskap og utvikler oss som individer. Dette er kjent for de fleste, men når det kommer til observasjon som metode stilles det høyere krav til hva som kan kalles observasjon, i forhold til observasjon i dagliglivet. Observasjon som metode i forskningsarbeid har strengere krav til rammer og dokumentasjon, og den er mer formell og systematisk (Angrosino & Flick, 2007). Observasjon blir gjennomført som metode, når vi ønsker å undersøke noe som vi kun kan fange inn ved å være direkte tilstede der det skjer. Det vil være vanskelig å fange opp interaksjonen mellom lærer og elev, uten å være tilstede og observere hendelsen. På bakgrunn av dette ble observasjon valgt som datainnsamlingsmetode. Metoden egner seg også når forskningsspørsmålet er knyttet til et avgrenset og overkommelig geografisk område (Christoffersen & Johannessen, 2012), som i mitt tilfelle er klasserommet.

Det er mer enn synet som brukes i observasjon. Alle sansene blir satt i spill, og helhetsinntrykket av det som blir undersøkt, forsøkes å bli beskrevet (Malderez, 2003). Angrosino og Flick (2007, s. 54) definerer observasjon som «observation is the act of noting a phenomenon, often with instruments, and recording it for scientific purposes». Malderez (2003) viser til at det ikke bare er observasjonen i seg selv som definerer metoden, men også diskusjonene før og etter observasjonen. Før observasjonen fant sted, gjennomførte jeg flere korte møter med hver av de to lærerne jeg skulle observere. Første møtet ble brukt til å informere om prosjektet, hvor lærerne ble informert om behovet for å synliggjøre elevens resonnement. Jeg påvirket derfor lærerne til å få elevene til å sette ord på tankene sine. Dette ble gjort for å sikre datagrunnlag i observasjonen, da dette avhenger av elevens muntlige aktivitet. Lærerne ble informert om at jeg ønsket å se på lærerens bidrag til elevens resonnement, men jeg valgte ikke å informere mer i detalj om prosjektet. Dette ble gjort for å unngå å påvirke lærerne for mye, da jeg ønsket en naturlig klasseromssituasjon, slik at resultatene kunne vise til en naturlig setting. Disse møtene vil derfor være med å påvirke hva som blir observert, og gi konsekvenser for innsamlet data.

Fokuset ved observasjon som forskningsmetode er å generere plausible beskrivelser og forklaringer av fenomener i klasserommet. Man trekker ut det som føles meningsfylt, beskriver det og prøver å forklare det. I løpet av observasjonsarbeidet vil noen antakelser bli bekreftet, mens andre forkastes. Nye antakelser vil dukke opp, og slik vil observasjonen bevege seg fra å være relativt åpen til å tilspisse fokuset sitt mer og mer. På denne måten kan man se på observasjon som en induktiv forskningsmetode, hvor data blir utgangspunktet for nye hypoteser og forskningsspørsmål. Observasjon og dataanalyse skal skje parallelt. Man vil etter hvert som datainnsamlingen utspiller seg komme seg nærmere og nærmere kjernen i det man ønsker å se på (Christoffersen & Johannessen, 2012; Postholm, 2005). Høsten 2016 gjennomførte jeg et pilotprosjekt i tilknytning til forskningsspørsmålet, hvor jeg observerte en lærer i undervisning av en 1P klasse (praktisk matematikk). Her gikk jeg inn med relativt åpent fokus på lærerens bidrag til elevens resonnement, hvor formålet var å få erfaringer med observasjon som metode. I pilotprosjektet hadde jeg utviklet et observasjonsnotatskjema med for mange kategorier og hendelser å følge med på, slik at jeg mistet oversikten. Denne erfaringen gjorde at observasjonssnotatskjema for dette prosjektet kun inneholder åpne rubrikker for kommentarer og tanker (se **vedlegg 5**).

Thomas (2011) mener at i observasjon ser man enten systematisk etter en type oppførsel, eller så ser man uformelt på det som skjer, men metodisk og skriver ned viktige aspekter. Førstnevnte kaller han strukturert observasjon, mens sistnevnte er ustrukturert observasjon. Ved strukturert observasjon vil du kunne se på verden gjennom et prisme, hvor du kategoriserer det som skjer. I ustrukturert observasjon er du en del av den sosiale situasjonen. Observasjonen kan også veksle mellom disse ytterpunktene. Jeg ønsket først og fremst å ha en strukturert observasjon, ettersom jeg kategoriserer lærerens handlinger og elevens resonnement, med litteratur som jeg støtter meg på (Thomas, 2011). Men likevel vil jeg være åpen for nye innspill. Jeg hadde deltatt i den ene klassen som vikarlærer, og i den andre klassen under oppgavejobbing, et par uker før selve observasjonen, og var derfor kjent for elevene. Ettersom jeg påvirker læreren på forhånd og ber elevene om å tydeliggjøre sitt resonnement, setter jeg noen rammer for observasjonen, men under selve observasjonen vil jeg kun delta som forsker. Min rolle kan bli sett på som det Gold (1958) kaller *observatør som deltager,* hvor jeg leder observasjonen for korte perioder, for å sette konteksten og jeg er gjenkjent i settingen. Jeg ønsket å observere en mest mulig normal setting, slik at resultatene kan vise en vanlig klasseromssituasjon. Derfor er påvirkning fra meg minst mulig. Mitt forskningsspørsmål ser på en *interaktiv setting*, mellom lærer og elev (Christoffersen & Johannessen, 2012), altså samhandlinger som skjer i klasserommet. Valget av observasjon som metode, er derfor først og fremst for å få direkte tilgang på det som skjer ute i klasserommet.

3.4.2 Gjennomføring

I gjennomføringen av pilotprosjektet forsøkte jeg å fange inn alt som foregikk i klasserommet, kun ved bruk av mine egne sanser. Dette erfarte jeg som vanskelig, og valgte derfor å gjennomføre observasjon med videokamera til dette prosjektet. Ved å bruke video får man bilder og lyder som er analoge med det som skjer. Diskusjonen mellom lærer og elev vil bli synliggjort (Tlberghien & Sensevy, 2012). Bruk av video gir forskeren mulighet til å gå tilbake og analysere hva som skjer, i dybden. Dette var nødvendig for meg i mitt prosjekt, da jeg var ute etter naturlige settinger. På bakgrunn av dette var jeg lite delaktig i gjennomføringen, hvor jeg plasserte meg bak de to utvalgte gruppene i klasserommet. Gruppene ble plassert lengst fremme slik at de andre elevene ikke ble med i filmen, og slik at avstanden frem til læreren ved tavlen ikke ble stor. Kameraene gjorde det mulig for meg å trekke meg litt bort fra settingen, da det meste ble fanget opp via disse. Ettersom jeg ønsker å se på interaksjonen mellom lærer og elev, var kameraet derfor rettet mot læreren og elevgruppene.

Elevene som var valgt ut til prosjektet, ble kontaktet på deres læringsplattform, hvor de bekreftet at de ønsket å være med og godkjente at de ble filmet. Jeg påpekte at elevene gjerne kunne være ekstra muntlig aktive i denne timen, men at de skulle oppføre seg som normalt og forsøke å glemme at kameraene var der. I begge klasserommene valgte jeg å informere hele klassen om gjennomføringen i starten av timen, ettersom videokameraene tok en del plass i klasserommet. Jeg informerte om at elevene skulle prøve å glemme at kameraene var der, og at jeg ville sitte i klasserommet og notere ned informasjon som var til mitt prosjekt, og derfor ikke kunne hjelpe til under oppgavejobbing. Begge undervisningsøktene var repetisjonsundervisning, med fokus mot en vurderingssituasjon, i form av en skriftlig prøve. Det er derfor viktig å få frem at elevene ikke hadde jobbet spesifikt med algebra på en stund. Begge lærerne gjennomførte derfor en introduksjon til likninger, slik at elevene fikk repetert hva de hadde jobbet med tidligere. Elevenes resonnement må derfor bli sett opp mot at elevene ikke har dette friskt i minne. Begge undervisningstimene bestod både av lærerens introduksjon til temaet og elevene som jobbet med oppgaver. I Arne sitt klasserom ble alle oppgavene gjennomgått på tavla før neste oppgave ble gitt, mens Petter ga alle oppgavene med en gang uten noen felles gjennomgang. Petter sin undervisning ble gjennomført først, han lot elevene jobbe selvstendig, noe som viste seg å begrense dataomfanget. Derfor oppfordret jeg Arne til å ha flere samtaler med de utvalgte elevene. Petter ønsket å ha fokus på logaritmelikninger og potensregning, mens Arne ønsket å ha fokus på andregradslikninger.

Se **kapittel 4** for mer konkret beskrivelse av timene. Videre følger utvalgte oppgaver som elevene jobbet med i de ulike klasserommene. Oppgavene ble utformet av lærerne ut fra hva de ønsket å ha repetisjonsundervisning om, hvor jeg godkjente oppgavene på forhånd. I begge klasserommene ble det gitt oppgaver både i likninger og funksjoner. Likevel ble også oppgavene om funksjoner valgt ut, da disse oppgavene utfordrer variabelforståelsen. Som nevnt i **kapittel 2.1.1**, så får den ukjente x, som ofte er en fast ukjent i en likning, en annen mening i funksjoner, hvor x symboliserer en variabel som gir ulike funksjonsverdier. Disse funksjonsoppgavene ble derfor tatt med for å få et bedre innblikk i elevenes resonnement rundt variabelbegrepet, selv om jeg i forskningsspørsmålet fokuserer på likninger.

Utvalgte oppgaver i Petter sitt klasserom

Oppgave 1:

Løs likningen

$$2^{4x} \cdot 2^{x^2} = 32$$

Oppgave 2:

Hentet fra Oldervoll, Orskaug, Audhild, Svorstøl og Hals (2014).

Da Idar ble født, satte bestefar inn penger på en ny bankkonto. Funksjonen *f* gitt ved

$$f(x) = 12\,000 \cdot 1{,}025^x$$

Mormor kjøpte aksjer for 10 000kr som Idar fikk da han ble født. Aksjene steg med 6 % hvert år. Regn ut hvor gammel Idar var da aksjene hadde samme verdi som penger på bankkontoen.

Utvalgte oppgaver i Arne sitt klasserom

Oppgave 1:

$$3x^2 = x$$

Oppgave 2:

$$f(x) = -x^2 + 2x - 2$$

Bestem nullpunktene til denne funksjonen.

Oppgave 3:

Gitt likningen $x^2 + 7x + c = 0$, finn c slik at vi bare har en løsning.

3.4.3 Analyse av data fra observasjon

Powell, Francisco og Maher (2003) har på bakgrunn av mangel på metoder for å analysere video i utvikling av matematisk resonnement, utviklet en modell av sju kategorier som kan brukes til dette formålet. Modellen må nødvendigvis ikke følges stegvis, men viser til viktige aspekter i videoanalyse, i studier på elevens matematiske forståelse og resonnement. På bakgrunn av forskningsspørsmålets forankring i matematisk resonnement, er modellen valgt som rammeverk for analyse av videodata.

1. Se oppmerksomt gjennom videoopptakene.
2. Beskrive videodata.
3. Identifisere kritiske hendelser.
4. Transkribering.
5. Koding.
6. Konstruere en tidslinje (storyline).
7. Komponere en fortelling. (Powell et al., 2003, s. 413)

Forskeren vil med denne modellen få et helhetlig bilde av data, før forskeren etter hvert konsentrerer seg om de kritiske hendelsene, som er valgt ut fra forskningsspørsmålet og eventuelle hypoteser. Jeg begynte derfor analysen med å se gjennom filmene uten å se etter spesifikke hendelser, men beskrev det som skjedde og luket ut tidsrom som ikke inneholdt noe av interesse. Etter dette så jeg gjennom filmene på ny, på utkikk etter kritiske hendelser. Kritiske punkter ved forskning på elevens resonnement og forståelse, vil kunne være når det skjer en forandring, altså at eleven har et konseptuelt sprang fra tidligere hvor eleven viser endring i sin forståelse (Powell et al., 2003). Ved fokus på interaksjon mellom lærer og elev sier Powell et al. (2003, s. 418): «... a researcher concerned with the impact of teacher interventions on students' reflective abstraction or mathematical understanding might deem as critical those events that connect teacher interventions and associated student articulations of their thinking». De kritiske hendelsene er gitt fra forskningsspørsmålet, og for mitt forskningsspørsmål vil de kritiske punktene innebære hvor eleven synliggjorde et kreativt resonnement, som kan ha en sammenheng med hvilke handlinger læreren gjorde, hvilke spørsmål læreren stilte eller hvilke argumenter læreren brukte. De kritiske punktene vil også være hvor eleven viser det motsatte av det forskningsspørsmålet ønsker å se på, altså hvor eleven ikke ser ut til å synliggjøre et kreativt resonnement, som har en sammenheng med interaksjonen med lærer. For å se om elevene var blitt gitt mulighet til et kreativt resonnement i oppgavejobbingen, ble også lærerens gjennomgang analysert.

Transkribering av hendelsene ble gjennomført i det kvalitative dataanalyseprogrammet NVivo. Programmet gjorde transkriberingen enklere ved at sekvenser av filmen ble spilt av mens jeg transkriberte direkte i programmet. Etter dette analyserte og kodet jeg i NVivo (se **vedlegg 6** for kodingsskjema). Lærerens introduksjon til tema og gjennomgang av oppgaver i plenum ble kodet ut fra Bergqvist og Lithner (2012) sine seks aspekter, hvor jeg tok utgangspunkt i spørsmålene under hver kategori, som listet opp i **kapittel 2.3**. Disse handlingene ble kategorisert på en skala fra lite, noe, en god del opp til gjennomgående, hvor jeg beveget meg opp langs skalaen etter hvert som læreren gjennomførte handlingen i flere tilfeller. Lærerens handlinger ble kodet ut fra Drageset (2014) sitt rammeverk, og lærerens handling, og da spesielt argument, ble notert ned sammen med elevens respons. Lærerens argumenter ble også analysert om de var verifiserende eller prediktive (Lithner, 2008). Lærerens spørsmål ble kodet ut fra Boaler og Brodie (2004) sin kategorisering, hvor lærerens spørsmål ble notert ned og det samme med elevens respons. Elevenes resonnement ble kodet ut fra Lithner (2008) sin definisjon på kreativt resonnement. Et av kriteriene i denne definisjonen er at resonneringssekvensen må være nyskapende, ved at en ny resonneringssekvens er laget eller en glemt er omformulert (se **kapittel 2.2.3**). Dette var vanskelig for meg å si noe om, ettersom jeg ikke kjente elevene godt. Jeg valgte derfor å se bort ifra dette kriteriet og fokuserte på argumentenes plausibilitet og forankring.

Selv om jeg forholder meg til disse rammeverkene, viser Derry et al. (2010) til at forskeren skal være åpen for uforutsette handlinger slik at nye spørsmål kan utvikles. Dette er en av styrkene med å ha video som data, da dette kan analyseres uendelig mange ganger. NVivo ga meg mulighet til å se på alle situasjonene som jeg hadde kodet til det samme. Jeg kunne for eksempel se alle situasjonene hvor jeg hadde kodet at elevene hadde et forankret argument, og jeg kunne derfor sammenligne situasjonene. Dette ble derfor brukt for å velge de mest interessante situasjonene til resultat, hvor jeg fikk mulighet til å se om noen av lærerens handlinger gjentatte ganger førte til at elevene viste aspekter av et kreativt resonnement. Denne prosessen førte til rundt tolv situasjoner, som innehold interessante samtaler mellom lærer og elev ut fra forskningsspørsmålet. Disse tolv situasjonene ble så sett i sammenheng, før seks ble valgt ut som de beste eksemplene på funnene i datamaterialet. Disse seks situasjonene er typiske for undervisningen, og gir et godt bilde på undervisningen slik den foregikk. Mer detaljert informasjon om hvorfor hver enkelt situasjon er valgt, er begrunnet i **kapittel 4** under analyse av hver situasjon. Fortellingen av undervisningen blir beskrevet i **kapittel 4**.

3.5 Reliabilitet og validitet

For å si om en datainnsamlingsmetode er et godt alternativ for et forskningsspørsmål så nevnes to mål som vi kaller relabilitet og validitet. Reliabilitet betyr hvor pålitelig data er, og handler om nøyaktigheten av undersøkelsens data (Christoffersen & Johannessen, 2012). Reliabiliteten er et mål på om det som skjer er konsistent, eller om det rett og slett bare er tilfeldig. Feilkildene kan være mange, hvor en av de største ved bruk av videokamera, kan være det vi kaller observasjonseffekten, hvor observasjonsobjektene endrer oppførsel på bakgrunn av at de blir filmet. Goldman (2007) viser til at det er vanskelig å si hvordan man påvirker analyseenhetene, hvor man både kan distrahere, men også øke konsentrasjonen deres ved at de blir filmet. Det er nesten umulig å gjennomføre forskning, uten noen feilkilder. Men reliabiliteten øker, om man er bevisst på de feilkildene man har, og derfor forsøkte jeg å gjøre elevene og lærer bevisst på at jeg var ute etter en normal setting, så det beste var om alle glemte at kameraene var tilstede. Christoffersen og Johannessen (2012) nevner at reliabiliteten øker om flere forskere undersøker samme fenomen. Ettersom jeg og Ingrid rettet kartleggingstestene sammen, styrker dette reliabiliteten, da vi diskuterte elevenes resultater da vi var usikre. Det var kun jeg som gjennomførte observasjonen i klasserommet, men ved å bruke filmkamera ga det meg mulighet til å diskutere situasjoner med veiledere om jeg var usikker.

Validitet betyr hvor relevante data er for det man forsøker å undersøke (Everett & Furseth, 2012). Validitet sier noe om sammenhengen mellom forskningsspørsmålet og teori, med det som blir undersøkt. Altså om observasjonen faktisk er relevant for det vi ønsker å finne ut av, nemlig forskningsspørsmålet, eller om observasjonen som gjennomføres ikke har grunnlag i teorien slik at funnene ikke kan være gyldige for virkeligheten. Ettersom min observasjon tok utgangspunkt i kriterier og rammeverk fra tidligere forskning, er validiteten mot teoriforankringen styrket (Angrosino & Flick, 2007). For å øke validiteten er det viktig å begrunne alle valg som blitt tatt i datainnsamlingen, slik at det er mulighet for etterprøvbarhet. Dette er viktig, slik at lignende prosjekter kan sammenligne resultat, ut fra de samme rammene og begrensingene. Jeg har begrunnet alle valg som er gjort gjennom dette metodekapittelet, og har derfor forsøkt å være transparent i alle steg gjennom datainnsamlingen, noe som styrker validiteten.

3.5.1 Meg selv som forsker

Observatøren bruker sine sanser i innhenting av data, to ulike observatører vil derfor kunne innhente ulik data fra samme situasjon. Klasserommet er et komplekst miljø hvor videodataene fra dette miljøet vil være av et stort omfang. Det er derfor naturlig at jeg må selektere noen sanseinntrykk, og hvilke jeg selekterer hører ofte sammen med hva jeg opplever er mindre viktig. Dette kan likevel være viktig for en annen person. Som forsker kan man også ha ulike «hatter» på seg i ulike situasjoner, altså at man observerer med gitte forventninger, fordommer eller meninger, som vil gjenspeile det man observerer (Malderez, 2003). Dette kan henge sammen med om jeg går inn med et deduktivt eller et induktivt blikk. Ettersom jeg på forhånd hadde en sterk teoriforankring hvor jeg går inn og ser etter ulike handlinger, vil min koding av situasjoner være avgjørende. Her igjen spiller mine egne meninger inn for utvalget av hendelser. Det er derfor svært viktig å være klar over hensikten med hver observasjon og være bevisst på de rollene man kan ha på forhånd (Malderez, 2003), og være åpen for nye innspill.

Da jeg som forsker ikke blandet meg mye inn, kan settingen bli mer naturlig enn hvis jeg var deltagende. Ettersom jeg trakk meg bort fra situasjonene og satt bak eleven når de jobbet med oppgaver, mistet jeg som forsker mulighet til å notere ned hendelser som ikke så lett ville bli fanget opp på kamera. Derfor var det viktig at jeg sjekket at kameraene fungerte gjennom hele observasjonen, slik at jeg ikke skulle miste data. Gjennom observasjonen stod kameraene for det meste stasjonært, dette ble gjort slik at elevene ikke ble forstyrret av at kameraet beveget på seg, som kan få de til å miste fokus (Erickson, 2006). Det kan se ut til at alle elevene i undersøkelsen synes det var uvant å bli filmet ut fra opptakene, og de har oppmerksomheten rettet mot kamera i flere tilfeller, men i oppgavejobbingen ser dette ut til å være litt glemt.

3.6 Etiske betraktninger

Forskningsarbeid som bruker video i datainnsamlingen, vil få data hvor personene som deltar i forskningen kan bli gjenkjent, hvor deres matematiske resonnement blir synliggjort. Dette er personlige egenskaper, og det er derfor særdeles viktig at alle involverte blir behandlet med respekt. Dette gjøres ved at alle deltagere blir fullt informert om hensikten, eventuelle risikoer, og at deltagelsen er frivillig slik at de kan trekke seg med umiddelbar virkning (Derry et al., 2010). Dette ble gjennomført ved at alle involverte ble informert og fikk utdelt samtykkeerklæring som ble signert. For å verne om personene som er involvert, ble fiktive navn valgt i oppgaven og skolens navn blir ikke nevnt. Dette blir gjort for å sikre konfidensialiteten. Ingen i prosjektet ønsket å trekke seg gjennom prosessen. Mastergradsprosjektet ble også meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk senter for forskningsdata AS, hvor Personvernombudet vurderte prosjektet, og fant at behandlingen av personopplysninger var meldepliktig i henhold til personopplysningslovens § 31 (Personopplysningsloven, 2000). På bakgrunn av dette ble det gjort diverse grep for å sikre personvernet, hvor prosjektet tilfredsstilte kravene. Dette sikrer deltagernes personlige opplysninger.

4. Resultat

I dette kapittelet fremkommer resultatene fra datainnsamlingen. **Kapittel 4.1** viser testresultatene fra de to klassene på kartleggingstesten, før en beskrivelse av besvarelsene til de utvalgte elevene. Kartleggingstesten blir analysert ut fra Gray et al. (2009) sine kriterier, som forklart i **kapittel 3.3.3**. Etter dette følger beskrivelse og analyse av de to ulike undervisningstimene med utvalgte situasjoner i **kapittel 4.2**. Observasjonen blir kodet og analysert som forklart i **kapittel 3.4.3**. Analysen av lærerens gjennomgang på tavlen tar utgangspunkt i Bergqvist og Lithner (2012) sine seks aspekter for lærerens handlinger. Videre i samtalen mellom lærer og elev ble lærerens spørsmål analysert ut fra Boaler og Brodie (2004) sine spørsmålstyper og lærerens respons ut fra Drageset (2014) sitt rammeverk på lærerens handlinger, hvor jeg spesielt ser på lærerens argumenter. Lærerens argumenter ble også kartlagt som enten verifiserende eller prediktive argumenter (Lithner, 2008). Elevenes resonnement ble kodet ut fra Lithner (2008) sin definisjon på et kreativt resonnement.

4.1 Diagnostisk test

4.1.1 Resultat fra begge klassene

86 % av alle elevene klarte oppgaven 1, og jeg velger derfor ikke vektlegge denne oppgaven. Ut fra dette resultatet kan det se ut til at elevene hadde et relasjonelt syn på likhetstegnet i denne oppgaven, hvor elevene viste at de balanserte begge sidene. Mange av elevene uttrykte også at like bokstaver måtte trekkes sammen, og de elevene som svarte feil kunne se ut til å ha gjort regnefeil i oppgaven.

Tabell 3: Resultatene i oppgave 2a «Hvis $a = b + 3$, hva skjer med a hvis b øker med 2? Forklar svaret ditt».

Klasse	Algebraisk	Transisjonal	Aritmetisk
Lærer Petter	13	1	7
Lærer Arne	17	0	4
Sum	30	1	11

Av alle elevene i begge klassene var det 71 % som løste oppgaven algebraisk, til sammenlikning var dette 67 % i Gray et al. (2009) sin forskning på kalkulusstudenter. Elevene i begge klassene hadde ulike fremgangsmåter, hvor tolv av de algebraiske elevene forsøker seg frem med ulike verdier. I likhet hos Gray et al. (2009), blir disse elevene regnet som algebraiske, selv om det å sette inn verdier er en typisk aritmetisk handling. Dette fordi elevene klarte å generalisere ut fra tabellen de laget seg. Kun en elev løste oppgaven transisjonalt, ved å uttrykke at a også øker, men uten en spesifikk verdi. Resterende 26 % hadde en aritmetisk tilnærming til oppgaven, hvor hele sju elever uttrykte misoppfatningen $b + 2 = 2b$. Fem elever substituerte inn verdien 2 for *b*. To av disse elevene fikk rett svar, og ble derfor med i den algebraiske gruppen.

Tabell 4: Resultatene i oppgave 2b «Hvis $f = 3g + 1$, hva skjer med *f* hvis *g* øker med 2? Forklar svaret ditt».

Klasse	Algebraisk	Transisjonal	Aritmetisk
Lærer Petter	7	4	10
Lærer Arne	10	3	8
Sum	17	7	18

I oppgave 2b ble det registrert større variasjon i resultatene. 40 % løste oppgaven algebraisk, hvor elevene i Gray et al. (2009) sin forskning scoret 30 % på dette. Alle 17 elevene som hadde en algebraisk tilnærming i oppgave 2b kunne se ut til å ha et algebraisk resonnement i de foregående oppgavene. Ti av disse elevene forsøkte seg frem med en tabell med ulike tall, før de generaliserte et svar. De resterende sju elevene løste oppgaven ved å vise svaret i en likning. 17 % løste denne transisjonal, ved å uttrykke en økning i *f*, på bakgrunn av økning i *g*, men uten å gi svaret en fast verdi. Av alle elevene var det da 43 % som løste denne aritmetisk. Også her var misoppfatningene av samme art som i oppgave 2a. Sju av disse elevene sa at ved å øke *3g* med 2, vil dette bli *5g*. Fire av de aritmetiske mente at *f* øker med 2, siden *g* gjør det, og tre av de aritmetiske elevene substituerte inn 2 for *g*. De resterende aritmetiske elevene forsøkte å lage tabell, men klarte ikke å generalisere. I både oppgave 2a og 2b er det en elev som så på *a* og *f* som konstante verdier.

Generelt var det 17 elever som kunne se ut til å ha et algebraisk resonnement gjennom hele testen, mens sju elever har et algebraisk resonnement i oppgave 2a, men et aritmetisk svar i oppgave 2b. Om disse sju elevene forstod hvorfor *a* øker med det samme som *b* i oppgave 2a, eller om dette var et resultat av flaks eller gjetning er usikkert. De aller fleste elevene svarte godt på oppgave 1, slik at denne kan vurderes litt for lett, eventuelt at dette er noe de har jobbet mye med i undervisningen. Grunnlaget for utvelgelse av algebraiske elever ble derfor først og fremst fokusert på elevenes løsning av oppgave 2b. Navnene på disse elevene ble notert ned, og var utgangspunkt for utvalg av elever til videre observasjon i klasserommet (se **kapittel 3.2**).

4.1.2 Resultatene til de utvalgte elevene

Ut fra testresultatene ble åtte elever valgt ut som deltagere i observasjon i klasserommet i interaksjon med lærer. Som nevnt i **kapittel 3.2** er seks av de åtte elevene valgt ut fra gruppen som løser alle oppgavene algebraisk. To av elevene løser siste oppgave aritmetisk, men er valgt ut fordi læreren uttrykte at de har et tydelig resonnement. I tillegg er utvalget basert på hvem som jobber sammen i klasserommet til vanlig. Elevene svarte på oppgavene hver for seg, men resultatene blir her presentert ut fra gruppene i klasserommet i observasjonen.

I lærer Petter sin klasse er følgende fire elever valgt ut:

Gruppe 1 - Tobias og Ola

Tobias skriver i oppgave 1 at «jeg så at oppgaven hadde to ulike bokstaver/ukjente og tenkte at det har svaret og», videre legger han disse sammen. I oppgave 2a forsøker han med tre ulike verdier for *b*, og ser hva som skjer med *a*. Han begrunner så svaret sitt «dette skjer fordi at *a* er 3 mer enn *b*. Så hvis *b* øker med 2, må også *a* øke med 2 for at differansen mellom *a* og *b* skal være 3. Eks: $\mathrm{a} - \mathrm{b} = 3$». Tobias har her foretatt en operasjon hvor han samler variablene på en side. I oppgave 2b prøver han seg frem med fire ulike verdier for *g*, før han generaliserer ut fra dette. «Siden den ukjente *g* faktoriseres med 3 må *f* stige med $2 \cdot 3$ når den ukjente *g* øker med 2». Tobias klarer derfor å generalisere ut fra tabellen han lager seg.

I oppgave 1 sier Ola «siden det er både *a* og *b* må jeg prøve å få like mye av hver på begge sider». Ola fokuserer også på at det må være like mye på begge sider av likhetstegnet i oppgave 2a og 2b, men presiserer i 2b «siden det er 3g-er blir det en litt annerledes økning». Han viser så med to ulike verdier for *g*, og generaliserer ut fra dette at *f* øker med 6 når *g* øker med 2. Ola sine argumenter er noe vage, og selv om han får rett svar, tolker jeg det som at han ikke helt forstår oppgavene på grunn av lite forankrede argumenter. Han er likevel valgt ut siden han har korrekt svar, og siden han samarbeider godt med Tobias, ifølge lærer Petter.

Gruppe 2 - Thea og Hanna

Thea er en av de to i utvalget som ikke har fått til alle oppgavene. Hun forklarer i oppgave 1 «jeg sammenligner sidene for å se hvordan de er i forhold til hverandre». I oppgave 2a forklarer hun at *a* vil endre seg i samsvar med *b* «... siden de er avhengig av hverandre». Men i 2b forklarer hun at «*g* er en variabel og vi vet ikke hva den står for, men dersom *g* for eksempel var 2 og ble doblet til 4, ville det skapt ubalanse i likningen. Generelt for begge disse er at du kan ikke gjøre en operasjon eller endre noe på kun en side av likhetstegnet».

Thea blir evaluert som aritmetisk ettersom hun ikke klarer å generalisere ut fra tallene hun forsøker å sette inn. Det er også usikkert om hun misforstår oppgaven og tror *g* dobler seg i verdi, i stedet for å øke med 2. Det kan virke som at hun ser på *f* og *g* som faste verdier.

Hanna forklarer at hun ser på variablene i oppgave 1 hver for seg og forsøker å få det likt på begge sider. Hanna forsøker med en tabell i oppgave 2a og generaliserer ut fra denne. Men i oppgave 2b svarer Hanna «hvis *g* øker med 2 vil 3g bli dobbelt så stor, så *f* vil øke likt som 3g ved å doble seg, men så må vi også legge til 1 for å få *f*». Hun setter inn to ulike verdier for *g*, men generaliserer ikke ut fra dette. Hanna er den andre i utvalget som blir karakterisert som aritmetisk på siste oppgave. Også i hennes besvarelse kan det tyde på at hun tolker at *g* øker med 2, som at *g* dobler seg.

I Arne sin klasse er følgende fire elever valgt ut:

Gruppe 3 - Aleksander og Nora

Aleksander balanserer likningen i oppgave 1 og trekker sammen like variabler. I oppgave 2a forklarer han at *a* øker med 2 «fordi det er *b* ett sted på andre siden av likhetstegnet». Dette resonnementet er noe uklart. Videre i oppgave 2b svarer han at *f* øker med 6 uten å lage tabell. Han begrunner dette slik: «... fordi *g* gjentar seg 3 ganger på andre siden av likhetstegnet og $3 \cdot 2 = 6$». Aleksander viser at han forstår at endring av en variabel på en side av likhetstegnet, fører til endring av den andre variabelen på andre siden av likhetstegnet.

Nora fokuserer gjennom besvarelsen på at det skal bli likt på begge sider av likhetstegnet. I oppgave 2a svarer Nora rett, før hun viser dette med en tabell med tre ulike verdier. I oppgave 2b kan det se ut til at hun først prøver seg frem med tre ulike verdier for *g* (g=2, 4 og 6), før hun ser at *f* øker med 6. «*f* øker med 6 dersom *g* øker med 2, fordi *f* er summen av $3 \cdot g + 1 \ldots$ for hver gang *g* øker med 2 blir det ganget med 3 og *f* øker med 6». Det kan derfor virke som at Nora er fleksibel i løsningen, da hun forsøker flere fremgangsmåter.

Gruppe 4 - Per og Andreas

Per skriver i første oppgave at «begge sider må bli like», og viser hvordan han gjør dette. Per begrunner svaret i oppgave 2a «dette kommer av at *a* avhenger av hva *b* er». Hvor han videre i oppgave b begrunner at *f* øker med 6 «dette er fordi $3 \cdot 2 = 6$», før han viser sitt argument med to ulike verdier. Det kan se ut til at Per forstår at endring i en variabel, skaper endring i en annen i en slik likning.

I oppgave 1 sier Andreas «det må være like verdier på hver side», og trekker sammen like variabler. Andreas løste både oppgave 2a og 2b, ved bruk av en likning. Etter riktig konklusjon i oppgave a, har han vist dette ved å skrive: «$a(+2) = b(+2) + 3$». Han begrunner videre svaret i oppgave 2b med: «dette er fordi *g* blir ganget med 3 så det blir ulikt hvis *f* også bare gikk opp med 2. $f + (3 \cdot 2) = 3 \cdot (g + 2) + 1$». Det kan se ut til at Andreas fokuserer på at begge sider skal bli like.

Disse resultatene er utgangspunkt for utvelgelse av elevene, i tillegg gir resultatene et innblikk i elevenes forståelse rundt likninger, da spesielt likhetstegnet. Resultatene fra kartleggingstesten vil bli drøftet mot resultatene fra observasjonen i **kapittel 5**.

4.2 Observasjon

4.2.1 Lærer Petter sitt klasserom

Beskrivelse og analyse av lærerens gjennomgang

I løpet av de 90 minuttene undervisningen varte, besto mesteparten av oppgavejobbing i par. Lærer Petter gjennomførte ca. 15 minutter introduksjon og repetisjon i temaet likninger, og da spesielt logaritme- og potenslikninger som skulle være hovedtemaet for timen. For å introdusere likninger, valgte læreren å gjennomføre en konkretisering, hvor han hadde med seg en skålvekt inn i klasserommet. Skålvekten i balanse symboliserte likhetstegnet. Læreren bruker dette for å visualisere for elevene at samme operasjon må gjøres på begge sider, for at vekten ikke skal tippe. Elevene ser da at å gjennomføre en operasjon på en side, skaper ubalanse og det blir knyttet til noe som ikke er lov å gjøre. Lærer Petter balanserer vekten med å legge to telys på ene siden av vektskålen, for så å balansere dette med fyrstikkesker på begge sidene. Han skriver likningen $2x + 2 = 5$ på tavla.

Lærer Petter presiserer at x symboliserer telys, mens to og fem er antall fyrstikkesker. Ettersom han sier at x symboliserer telys, gir han variabel x en fast størrelse, nemlig to. Så sier han «det er en likning vi skal løse, og da er det viktig å huske på at vi kan gjøre en del ting med en slik likning, men hele tiden skal den være i balanse. Hva vil dere begynne med om dere skal løse dette?». En elev svarer «flytter to over … så vi får to x». Lærer bryter inn og sier «, men hva var det egentlig vi gjorde når vi flyttet over?». Samme elev svarer «du tar minus på begge sider». For å vise dette, tar lærer bort to fyrstikkesker fra begge sidene av vektskålen og den fortsetter å være i balanse. Igjen lurer Petter på hva neste steg er, og en elev svarer at man må dele på to på begge sider. Lærer viser dette ved å redusere to telys til ett på den ene siden, og redusere tre fyrstikkesker til en og en halv på den andre. Lærer avslutter med å si:

> Når vi jobber med likninger etterpå, ha det tydelig og klart, det bilde i hodet av vekta. At med likhetstegnet gjør vi noe på den ene sida, må vi gjøre det på den andre. Vi skal også jobbe med logaritmer og potenser … når det er snakk om likninger er det fortsatt skålvekta det handler om, men det er helt andre klosser og litt andre regneregler. Noen andre knep og verktøy vi har, men du må fortsatt gjøre akkurat det samme på begge sider av likhetstegnet.

Ved å spesifisere dette gir Petter elevene et av hovedelementene i løsning av likninger. Dette argumentet er forankret i de iboende matematiske egenskapene til likhetstegnet som et relasjonssymbol. I løsning av likningen leder læreren elevene gjennom løsningsmetoden ved å stille spørsmål som innhenter informasjon. Spørsmålene er avgrenset til rutinetransformasjoner i løsning av likninger, hvor elevene ikke begrunner svarene. Etter denne gjennomgangen viser lærer Petter læringsmålene fra kapitlene og forklarer hvordan ulike oppgaver kan være, og hvordan de kan se ut. I tillegg har Petter laget et eget ark med regneregler som han har tenkt å levere ut til elevene. For å avslutte introduksjonen viser Petter grafen til funksjonen $f(x) = 10^x$ i GeoGebra og viser sammenhengen mellom den og logaritmer. «Denne henger sammen med logaritmereglene, og hvorfor gjør den det? Jo, det vi spurte om når vi hadde logaritme til et eller annet var, hva må du opphøye ti i for å få dette. Det var spørsmålet vi alltid skulle stille oss». Her gir han elevene en løsningsstrategi som skal følges i løsning av logaritmelikninger. Denne løsningsstrategien er forankret i den matematiske definisjonen av logaritmer. Petter legger vekt på at logaritmer gjør det enklere å jobbe med relativt store tall. Videre deler han ut et oppgavehefte bestående av tidligere eksamensoppgaver, og noen oppgaver fra elevenes bok, hvor Petter beskriver oppgavene til å være av en spesiell art (for eksempel logaritmelikning, potenslikning). Ved å gjøre dette har han gitt elevene en liten pekepinn på hvordan de skal gå frem i løsning av likningene.

I løpet av de 90 minuttene som timen varte, hadde lærer Petter flere interaksjoner med begge elevgruppene. Jeg velger å legge frem et utvalg av to situasjoner fra Petter sitt klasserom, på bakgrunn av at disse situasjonene er gode eksempler på hva som kjennetegnet interaksjonene i denne klassen. Situasjonene er valgt ut fra de interaksjonene mellom læreren og elevene, som er identifisert som kritiske hendelser i analyseringen, som forklart i **kapittel 3.4.3**. Disse situasjonene er interessante fordi elevene uttrykker sitt matematiske resonnement, som kan bli sett i tilknytning med lærerens handlinger. Det er valgt kun en situasjon fra hver gruppe i Petter sitt klasserom, fordi de andre interaksjonene var relativt like i hendelsesforløpet, så disse to situasjonene er valgt ut fordi de viser hvordan elevenes resonnement påvirkes av Petters handlinger. Analysen av hver enkelt situasjon viser hvorfor situasjonen er interessant.

Situasjon 1

Elevene Thea og Hanna jobber med oppgaven $2^{4x} \cdot 2^{x^2} = 32$. Thea regner fort i hodet at $32 = 2^5$ og Hanna skriver ned $2^{4x} \cdot\ 2^{x^2} = 2^5$.
Hanna: Så tar vi lg. (Skriver $4x\ \cdot\ x^2 lg2 = 5lg2$ i boka).
Thea: Så kan vi dele på lg2.
Hanna: Så får vi $4x^3 = 5$. Tar man det i hodet? Må få x alene, så vi deler på fire. Så tar vi logaritme igjen.
Thea: Kan man ta logaritme så mange ganger man vil?
Hanna: Ja tror det. Vi har nok samme forhold. Men var det ikke noe med $10^{\lg x}$, så ble det bare x? Men hva gjør vi med 3lgx?
Hanna viser Petter deres løsningsforslag.
Hanna: Hvis vi har dette (peker på $10^{\lg x}$=x) får vi x, men hva gjør vi når vi har 3lgx?
Lærer: Her har dere gjort det litt vanskelig for dere selv. Dere må gjøre det om til en andregradslikning på en side av likhetstegnet. Det er der dere gjør feil (peker på første del av utregning). For det enkleste å gjøre er å bruke potensregnereglene først. Hva blir det da?
Hanna: Da blir det 2^{4x+x^2}?
Lærer: Og så tar du lg etter det. For da ser du at det blir pluss der.
Elevene regner ut oppgaven, og lærer går bort fra gruppen.
Hanna: Det burde gått an å regne som vi gjorde og da?

Analyse av situasjon 1

Situasjon 1 er interessant for forskningsspørsmålet fordi elevene ser ut til å være opphengt i en løsningsalgoritme helt til læreren kommer bort og foreslår at elevene endrer løsningsstrategien. Elevene løser så oppgaven ut fra lærerens tilbakemelding, og det kan se ut som at læreren tar ansvar for de vanskelige delene av oppgaven. Elevene har noen argumenter som støtter deres strategivalg og implementering, hvor for eksempel Hanna begrunner at de kan ta logaritme så mange ganger de vil på hver side av likhetstegnet, da de får samme forhold. Dette kan ses i sammenheng med Hanna sitt svar på kartleggingstesten, hvor hun også der fokuserer på at likhetstegnet er i balanse, om man gjør noe på begge sider. Likevel stopper likningsløsningen opp i en grunnleggende feil i starten, hvor elevene setter at $2^{4x} \cdot 2^{x^2} = 2^{4x \cdot x^2}$, noe som ikke stemmer, før de bruker logaritmeregler for å få ned eksponentene. Ettersom Hanna uttrykker at deres løsningsstrategi burde ha løst likningen, viser dette at hun ikke forstår hva de gjør feil. Feilen har også lærer identifisert for de, og forklart. I resonnementssekvensen har også elevene memorerte regler som de husker, men som de ikke vet hvordan de skal bruke da situasjonen er litt ulik fra regelen. Dette kan tyde på et algoritmisk resonnement. Lærer Petter setter elevenes løsning til side og forslår ny løsningsstrategi, når han ser elevenes svar. Argumentene hans om å bruke potensregel først, er formulert etter konklusjonen om at elevene må løse denne slik at de får en andregradslikning, og er derfor et verifiserende argument. Deler av elevenes resonneringssekvens kan kartlegges som algoritmisk, ettersom elevene er fiksert på sin løsningsmetode, bruker memorerte algoritmer uten begrunnelser og at det eksisterer få argumenter med matematisk forankring.

Situasjon 2

Elevene Ola og Tobias kommer ikke frem til en løsningsmetode for tekstoppgaven med to potensfunksjoner (se oppgave 2 i Lærer Petter sitt klasserom i **kapittel 3.4.2**).

Ola: Mener man der de møtes? (Viser et kryss med fingrene).

Lærer: Ja, hvordan kan du finne ut det uten å tegne?

Ola: Hadde vært greit med GeoGebra.

Lærer: Men hvis du skulle gjort det som en likning?

Tobias: Setter den ene siden lik den andre.

Lærer nikker og elevene løser oppgaven, men når de sjekker svaret de får med fasiten, stemmer ikke dette. Lærer går gjennom løsningen med Ola, mens Tobias løser den alene.

Lærer: Det et triks vi må ty til her for å gå videre, og det er et enkelt potensregneregel-triks (viser Ola regelarket). Er det en regel vi kan bruke her?

Ola: den der kanskje? (Peker på en av reglene på arket).

Lærer: Hva blir det da?

Ola: Blir det det, delt på det, opphøyd i x? (Peker i boka).

Lærer: Og det blir lik hva da?

Ola: 1,2.

Lærer: Hva er det du vil gjøre nå videre?

Ola: Ta lg kanskje?

Lærer: Da er du i mål.

Lærer går bort fra elevene, og elevene løser oppgaven individuelt.

Analyse av situasjon 2

Situasjonen er interessant fordi elevene, i interaksjon med lærer, kommer frem til en løsningsstrategi. Lærer Petter stiller et spørsmål som får elevene til å utforske matematiske ideer, da han spør hvordan eleven kan finne skjæringspunktet mellom funksjonene uten å tegne, men da Ola svarer at han kan gjøre det i GeoGebra, forenkler lærer Petter oppgaven ved å si at det skal gjøres som en likning. Tobias bryter inn i samtalen og sier at de må sette sidene lik hverandre. Likevel stopper løsningen av oppgaven opp, og Ola trenger hjelp fra læreren for å komme seg videre. Jeg tolker det som at Tobias kommer frem til riktig svar på oppgaven, etter han har oppdaget sin egen regnefeil, ettersom han fortsetter videre med neste oppgave som er gitt. Ola har delt på en verdi kun på en side av likhetstegnet. Det kan se ut til at Ola ikke har forstått gjennomgangen til lærer Petter med vektskålen i dette tilfellet. Lærer Petter leder hovedsakelig Ola gjennom løsningsmetoden, hvor spørsmålene er karakterisert som lukkede fremdriftshandlinger, som er et tegn på ledende spørsmål. Ved å be Ola om å se på regelarket og gi løsningsmetoden, kan dette føre til at Ola tilegner seg et algoritmisk resonnement knyttet til slike oppgaver. Ettersom elevene utforsker matematiske sammenhenger i starten av situasjonen, kan dette gi et godt utgangspunkt for et kreativt resonnement, men elevene setter få ord på sitt resonnement. Ola sitt resonnement mangler verifiserende argumenter i videre oppgaveløsing, noe som kan bli sett i sammenheng med besvarelsen hans i kartleggingstesten hvor det også mangler forankrede argumenter, noe som også skjer i andre situasjoner i denne timen. Derfor kan ikke Olas resonnement karakteriseres som kreativt i denne situasjonen.

4.2.2 Lærer Arne sitt klasserom

Beskrivelse og analyse av lærerens gjennomgang

Lærer Arne startet timen med en kort introduksjon til temaet, før han ga elevene en og en oppgave av gangen (se **kapittel 3.4.2** for oppgavene). For hver oppgave valgte Arne å gjennomgå løsningen av oppgaven for elevene på tavla. I introduksjonen velger også Arne å se sammenheng mellom en likning og en skålvekt, men Arne har tegnet den på tavla, som visualiserer viktigheten av å gjøre det samme på begge sider av likhetstegnet.

> Den skal være hele tiden i balanse, og det er ikke lov å gjøre noe på den ene siden om vi ikke gjør tilsvarende på den andre siden. Hva skjer da? Jo, da tipper den på en eller annen måte. Den skal være i balanse. Midten av skålvekten er på en måte likhetstegnet.

Her argumenterer Arne med de iboende matematiske egenskapene til likhetstegnet som et relasjonssymbol, og gir derfor elevene mulighet til å gjøre det samme. Arne går videre med et enkelt eksempel av en førstegradslikning hvor han leder elevene gjennom løsningsmetoden. En elev i klassen ønsker å «flytte og bytte», hvor Arne er enig, men han innhenter begrunnelse fra eleven på «… hva er egentlig å flytte og bytte?». Eleven sier at man gjør det samme på begge sier av likhetstegnet. Etter å ha gjennomført løsning av likningen $3\mathrm{x} - 1 = 5$ på tavla, ønsker lærer å se på hva dette betyr grafisk og tegner i et koordinatsystem. Han tegner inn den rette linjen $y = 3\mathrm{x} - 1$, og tegner inn en rett linje for $\mathrm{y} = 5$. Arne viser her for elevene at løsningen er rett i forhold til den grafiske løsningen. Arne påpeker også for elevene at prinsippet gjelder for vanskeligere oppgaver. Han introduserer så temaet andregradslikninger. Arne presiserer at ved andregradslikninger kan man få to løsninger, men man må ikke. Arne spør elevene:

> Hvilke verktøy har vi da, og hva er det vi har lært? … det er gunstig å få en oversikt, det spiller ikke stor rolle hvilket kapittel det står i, alt er verktøy for å løse det samme. Vi har lært faktorisering, dere husker det? Også har jeg bedt dere om å lære de tre kvadratsetningene. Har vi noe annet for å løse andregradslikninger?

En elev svarer angregradsformelen. Etter dette skriver Arne opp alle mulighetene på tavla, hvor disse blir stående gjennom hele timen. Arne avslutter med «så prøv å ha det klart for dere, det er ikke nødvendigvis at den ene er bedre enn den andre. Prøv å se sammenhenger». Arne gir altså elevene løsningsmetoder i form av formler og matematiske prosedyrer, som for eksempel faktorisering. Han legger også vekt på at elevene må pugge formlene. Dette kan virke begrensende på elevenes løsningsstrategier og kreative resonnement, da de blir gitt løsningsmetoder som skal brukes og oppfordres til et imitativt resonnement. Likevel presiserer Arne at flere av disse løsningsmetodene kan gi samme svar, og presiserer at elevene skal forsøke å se sammenhenger. Dette argumentet om å se sammenhenger, analyserer jeg som et godt utgangspunkt for et kreativt resonnement, hvor lærer her legger vekt på at elevene skal se sammenhengene som ofte er forankret i de iboende matematiske egenskapene, og være fleksibel i sine løsningsstrategier.

Av alle interaksjonene mellom lærer og elev, er fire situasjoner valgt ut for videre analyse fra lærer Arne sin undervisning. I likhet med situasjonene fra lærer Petter sin undervisning, er situasjonene valgt ut på bakgrunn av at situasjonene er kodet som kritiske hendelser ut fra forskningsspørsmålet (se **kapittel 3.4.3**). Situasjonene ble kodet til å inneholde deler som tydet på et kreativt resonnement hos eleven, som igjen kunne bli sett i sammenheng med lærerens handlinger. Det er valgt ut to situasjoner fra hver gruppe, som er interessante og gode eksempler på hvordan interaksjonen mellom lærer og elever utspilte seg i dette klasserommet. Analysen av hver enkelt situasjon begrunner hvorfor situasjonen er interessant.

Situasjon 3

Nora og Aleksander jobber med oppgaven $3x^2 = x$. Elevene har regnet seg frem til $x(3x - 1) = 0$, og har kommet frem til riktig svar ved bruk av produktregel.

Lærer: Det stemmer, dere har satt det på prøve. Løser, slik som du sa Aleksander, ved å tenke produktregel, $r \cdot s = 0$. Enten må r være null eller s være null. La oss gå tilbake til utgangspunktet, altså $3x^2 = x$, kunne jeg ikke delt på x på hver side?

Aleksander: Jo, det går vel? Eller …

Lærer: Hvilken løsning får man da?

Aleksander: Den ene, man får 1/3, men du får ikke 0.

Nora: Det du finner med å gjøre det, er jo at du finner ut hva x må være, for å få x på andre siden av likhetstegnet.

Aleksander: Da kan ikke x være null likevel?

Lærer: Nei, hvis du deler på x må du forutsette at det ikke er null, men det kan det jo være, og dessuten mister du en løsning.

Aleksander: Men det går jo teknisk sett å sette inn null da, og få riktig svar, det funker jo da.

Lærer: Ja, alt multiplisert med null er jo null. Men det er kjempe viktig å ikke dele på null, for da mister du en løsning.

Analyse av situasjon 3

Denne situasjonen er interessant fordi elevene har resonnert seg frem til svaret, og lærer Arne oppsummerer fremgangsmåten med forankrede argumenter i matematiske egenskaper, før han stiller et spørsmål som får elevene til å utforske matematiske ideer. Nora resonnerer omkring løsningsmetoden, hvor hun forklarer at å dele på x, blir gjort for å få x på andre siden av likhetstegnet. Aleksander blir forvirret, og spør lærer om løsningen de hadde funnet ikke var gyldig. Lærer Arne begrunner hvorfor en løsning forsvinner i sin nest siste kommentar, ved å vise til en forutsetning som dukker opp når det deles på en variabel. Aleksander argumenterer tilbake til utgangspunktet og mener at null må være et riktig svar. Hvor lærer Arne avslutter situasjonen med å på ny nevne at en løsning forsvinner, om man deler på null. Lærer Arne forsøkte i dette tilfelle å få elevene til å utforske matematiske ideer, og ved å lede elevene gjennom denne løsningsmetoden ser elevene hvorfor deres strategivalg var riktig. Aleksander har et troverdig argument for at null må være en løsning. Elevenes resonnement i denne situasjon kan ha aspekter av et kreativt resonnement, likevel er det lærer Arne som argumenterer med grunnlag i de iboende matematiske egenskapene til variabler.

Situasjon 4

Nora og Aleksander forsøker å finne nullpunktene til funksjonen $f(x) = -x^2 + 2x - 2$.
Lærer: Dere satte det lik null ser jeg, det er riktig når vi skal finne nullpunktene. Ser i den ene parentesen din at du har satt minus x. Kan hende det blir vanskelig når du har ulikt fortegn på den ukjente i hver av parentesene og faktorisere direkte.
Nora: Sette minus en foran.
Lærer: Så ville jeg tenkt hvilket annengradsuttrykk er det jeg har igjen inne i parentesen? Før jeg hadde begynt å faktorisere her.
Lærer trekker seg fra settingen, mens elevene forsøker på ulike løsningsmetoder, hvor de setter inn sine løsninger på verdien av x, for å se om det stemmer.
Nora: Det må være andre kvadratsetning.
Aleksander: Det må være en og to?
Nora: Nei, det kan ikke være det for da får du minus tre.
Lærer: Dere prøver å faktorisere?
Aleksander: Vi kan bruke andregradsformelen … Det er ikke et fullstendig kvadrat.
Elevene løser oppgaven hver for seg med andregradsformelen.
Aleksander: Det går ikke, det er ingen løsning. Nei, det er umulig. Man kan ikke ha kvadratroten av negativ fire. Det er ingen løsning.
Lærer: Hvorfor ikke?
Nora: Fordi det går ikke å ta kvadratroten av minus fire.
Lærer: Diskriminanten er mindre enn null og da har vi ingen løsning. Og hvis vi tenker graf?
Nora: Den treffer ikke aksene noe sted. Var det derfor vi ikke klarte å faktorisere denne da?
Lærer: Helt riktig.

Analyse av situasjon 4

Denne situasjonen er interessant ved at elevene er fleksible og selvstendig i løsning av oppgaven, selv om lærer har gitt de løsningsstrategi. Elevene forsøker å faktorisere uttrykket, mens lærer foreslår ny løsningsstrategi og begrunner dette med at valgt løsningsstrategi kan gi vanskeligheter i regning. Lærer gir også hint om å heller bruke andregradsformelen, enn å faktorisere, likevel fortsetter spesielt Nora på sin løsningsstrategi. Elevene setter prøve på svarene og evaluerer gyldigheten av sine argumenter. Aleksander prøver lærerens forslag til løsningsstrategi når han står fast i sin løsningsstrategi, og argumenterer for sin løsning med forankring i egenskapene til kvadratrottegnet. Nora resonnerer seg frem til at dette har en sammenheng med at de ikke fikk svar med deres første løsningsstrategi. Elevenes resonnement inneholder argumenter som støtter strategivalgene som blir tatt og de er forankret. Resonnementet kan derfor se ut til å være kreativt. Lærerens bidrag bestod først av å foreslå nye løsningsstrategi, før han videre får elevene til å begrunne hvorfor det ikke finnes en løsning. Lærer får elevene til å se matematiske sammenhenger ved å henvise til graf, hvor Nora ser tilbake på det første strategivalget og vurderer hvorfor dette ikke ga noen løsning. Her viser Nora, i likhet med i kartleggingstesten, at hun er åpen og fleksibel for flere løsningsstrategier.

Situasjon 5

Per og Andreas forsøker å finne nullpunktene til funksjonen $f(x) = -x^2 + 2x - 2$.

Lærer: Hva starter dere med da hvis dere skal finne nullpunktene? Hva setter dere opp, hva skal man gjøre først? Dere har for så vidt gjort det, men. Det betyr at dette uttrykket må være lik? (Peker på elevenes løsning).

Per og Andreas: Null.

Lærer: Ja, så har dere satt at a er minus en, b er to og c er minus to. Har du satt inn i andregradsformelen? Hva får du, Andreas?

Andreas: Null og to.

Lærer: Gå tilbake til funksjonsuttrykket når dere har satt det lik null, sett inn løsningene og se om det stemmer.

Per og Andreas: Det blir ikke riktig. Hva har vi gjort feil? Ingen er riktige?

Per: Nei, kvadratroten av minus fire? Det er jo ikke minus to. Det går ikke.

Lærer: Hva skjer da?

Per: Da går det ikke, det blir ingen løsning.

Lærere: Og det betyr, hvis du tenker deg de tre grafene på tavla, hvilke er det vi har?

Lærer viser til tre ulike grafer han har tegnet på tavla.

Per: Den øverste. Treffer aldri x-aksen.

Analyse av situasjon 5

Denne situasjonen er valgt ut fordi den viser hvordan læreren veileder elevene gjennom løsning av oppgaven, hvor læreren oppmuntrer elevene til å vurdere sin egen løsning. Det er elevene som gjennomfører regningen, men det er lærer Arne som styrer retningen av samtalen, ettersom han sier hva elevene skal fokusere på. Lærer starter med å rette på elevenes løsning, da den ikke er helt matematisk korrekt. Ut fra elevenes svar på kartleggingstesten og videre løsning, kan det tyde på at dette bare var en forglemmelse, da det ser ut som at elevene har kontroll på likhetstegnets egenskaper. Lærer etterspør elevenes resultater, og får elevene til å sjekke svarene sine selv. Ettersom lærer Arne får elevene til å sjekke sine egne svar, i stedet for å si om de er rett og galt, utfordrer han elevene på å være sin egen fasit. Elevene finner derfor ut at svaret deres er feil, og diskuterer seg imellom hvorfor dette ikke går. Per oppdager hvor han har gjennomført en matematisk ukorrekt handling, og endrer svaret. Lærer får deretter elevene til å utforske den matematiske sammenhengen mellom likning og graf, hvor Per argumenterer for svaret sitt. Elevenes argumenter er forankret, elevene vurderer sin egen løsning og begrunner hvordan funksjonen ville sett ut grafisk, slik at elevenes resonnement kan ha aspekter av et kreativt resonnement.

Situasjon 6

Andreas og Per skal finne c slik at likningen $x^2 + 7x + c = 0$ kun har en løsning.

Andreas: c ganger fire må være det samme som syv ganger syv.

Per: Hvorfor det?

Andreas: Inne i andregradsformelen, da blir det null inne i den (peker på kvadratroten), 49/4.

Per: 49/4, er det c? $7^2 - 4 \cdot c$, det er jo a ganger c da?

Andreas: Men a er 1.

Per: Du må jo sette 4c over. $7^2 = 4c$. $4c = 49$, så deler vi på fire på begge sider. Det er 49/4.

Lærer kommer bort.

Lærer: Hva får dere til svar? Jeg hørte et svar kjempefort her

Per: Er det riktig?

Lærer: Hvordan kom dere frem til det?

Per og Andreas: Vi så bare på den inne i kvadratroten. For det er $7 - 4 \cdot a \cdot c$, og da er det lik null. Så da er det å flytte over.

Lærere: For du skal jo ha $2 \cdot a \cdot b$, hvis du tenker deg at a er x, så har du $2x \cdot b$ og b^2 er på en måte c. Og hva skal du gange to med for å få sju?

Per: 3,5.

Lærer: Ja, og hvis du tar det i brøk, så er det?

Per: 7/2.

Lærer: Ja, som er opphøyd i andre blir 49/4.

Lærer går bort fra elevene, og elevene uttrykker at deres måte var enklere.

Analyse av situasjon 6

Situasjon 6 er valgt ut fordi den viser et tilfelle hvor lærer og elevene har ulike løsningsstrategier for en oppgave. Her har elevene valgt å løse oppgaven ut fra tidligere erfaring om at null under kvadratroten gir en løsning, slik som oppgaven etterspør, men det kan tyde på at de mangler argumenter som støtter implementering og strategi, ettersom Per spør lærer Arne om løsningen er riktig. Argumentet til Andreas kan også være noe misvisende, da han snakker om hele andregradsformelen. Når lærer kommer bort, er Per spent på om løsningen er riktig, men lærer Arne får elevene til å begrunne sin løsning og forklare hvordan de klarte å komme frem til løsningen. Elevenes respons til dette er et argument som er mer forankret i matematiske egenskapene enn tidligere, hvor lærer Arne bekrefter løsningen. Lærer kommer med en annen løsningsstrategi, som gir samme svar, men elevene synes deres egen er enklere. Ettersom elevene baserer løsningen på en tidligere oppgave i timen, som kun ga en løsning fordi den hadde null under kvadratroten, så kan elevenes resonnement tyde på å være memorert. Det eksisterer noen argumenter for løsningen som er forankret, men ikke i stor grad.

4.2.3 Sammenlikning av undervisningsøktene

Alle disse seks situasjonene er interessante ved at de viser dialog mellom elev og lærer som oppstår i klasserommet. Situasjonene er hentet fra deler av undervisningen hvor læreren går rundt i klasserommet og hjelper elevene med oppgaveløsing. Ettersom begge undervisningsøktene er repetisjonsundervisning i samme tema, er de to lærernes handlinger relativt like i starten av undervisningsøkten. I interaksjonen med elevene er derimot lærernes handlinger, både spørsmål og argumenter, noe forskjellig. Ettersom elevene diskuterer oppgavene sammen og kommer frem til svar i lærer Petter sin undervisning, lar Petter elevene jobbe en del uten forstyrrelser fra han. Dette er grunnen for at flere situasjoner er valgt fra

Arne sin undervisning. Generelt i interaksjonene med elevene består lærer Petter sine argumenter og respons, først og fremst av fremdriftshandlinger, da i hovedsak lukkede og forenkling av problemene. Av endrende handlinger foreslår lærer Petter, spesielt til gruppe 2, ny strategi for løsning av likningene, hvor Petter uttrykker at han synes elevene har gjort det litt vanskelig for seg selv, og heller burde prøve en annen løsningsmetode. Av fokuserende handlinger oppsummerer Petter oppgavene for elevene, hvor han argumenterer med de iboende egenskapene til logaritmelikninger, som er viktig å huske på til videre arbeid. Eksempelvis sier han etter at gruppe to er ferdig med en oppgave «… det vi egentlig gjør når vi tar 10 opphøyd i på begge sider, er at logaritmer spør hva man må opphøye ti i for å få dette». Spørsmålene som Petter stiller i interaksjonen med elevene avgrenser seg til å innhente informasjon og lede eleven gjennom løsningen av oppgavene, men han ber de også om å utforske matematiske ideer i noen tilfeller.

Generelt i oppgavejobbing i undervisningsøkten er Arne interessert i å høre elevenes forslag på løsningsmetoder, før han i noen tilfeller støtter elevenes strategivalg, mens i andre tilfeller foreslår en ny strategi. Dette kan virke motsigende av det han har sagt i gjennomgangen, med at flere muligheter gir riktig løsning. Av kodingen kommer det frem at Arne både responderer med endrende-, fokuserende- og fremdriftshandlinger. Arne foreslår i likhet med Petter nye strategier for elevene flere ganger da elevene har valgt en annen metode enn den «enkleste», hvor Arne foreslår annen strategi ut fra oppgavens egenart som for eksempel med begrunnelsen «… det blir vanskelig når du har ulikt fortegn på den ukjente i hver av parentesene å faktorisere direkte». Når elevene står fast forenkler Arne oppgavene eller gir lukkede fremdriftsdetaljer. Av spørsmål stiller Arne flest spørsmål som leder eleven gjennom løsningen av oppgavene, men han får også elevene til å utforske matematiske sammenhenger ved å få de til å se for seg flere av oppgavene grafisk. I gjennomgang av oppgavene på tavla spør Arne elevene lite om innspill, men han forankrer løsningen i de matematiske egenskapene til slike likninger.

Analysen av lærernes undervisning i plenum er viktig for å kunne se på hvilke muligheter elevene blir gitt for ulike typer resonnement. Sammenlikningen av lærernes handlinger gir også en pekepinn på hvilken type undervisning læreren gjennomførte i timene, og om lærernes handlinger er av en spesiell type. De seks utvalgte situasjonene gjør det mulig å gå mer i dybden på enkelte av interaksjonene som var interessante. Videre vil disse resultatene, fra både kartleggingstesten og observasjonen bli drøftet i **kapittel 5.**

5. Diskusjon

I dette kapittelet drøftes resultatene i lys av forskningsspørsmålet. Forskningsspørsmålet er formulert «*Hvordan kan lærerens handlinger, med særlig vekt på spørsmål og argumenter, fremme elevers kreative resonnement i arbeid med likninger?*». Lærerens handlinger, da spesielt spørsmål og argumenter, i samtalen med eleven blir drøftet i sammenheng med elevenes resonnement i de to undervisningssituasjonene. De utvalgte samtalene mellom elev og lærer har blitt analysert i **kapittel 4**. Disse resultatene blir trukket frem og drøftet i lys av teorien. Tre ulike type handlinger som læreren gjør, går igjen i flere av interaksjonene og ser ut til å ha en innvirkning på elevens resonnement. Disse handlingene er valg for videre drøfting, og er strukturert under tre ulike tema i **kapittel 5.1-5.3**. Disse handlingene oppsummeres og drøftes som en helhet mot forskningsspørsmålet i **kapittel 5.4**, før diskusjonskapittelet avsluttes med implikasjoner og veien videre i **kapittel 5.5**.

5.1 Spørsmål som får eleven til å utforske matematiske ideer og/eller sammenhenger

Læreren kan ut fra Boaler og Brodie (2004) sitt rammeverk, stille spørsmål som får eleven til å utforske matematiske ideer og/eller sammenhenger (spørsmålstype to). Slike spørsmål blir forklart ved at de «points to underlying mathematical relationships and meanings. Makes links between mathematical ideas and representations» (Boaler & Brodie, 2004, s. 777). I flere av situasjonene benyttet lærerne seg av slike spørsmål som kan ses på som åpne spørsmål, ved at de er utforskende (Myhill & Dunkin, 2005). I situasjon 2 har Ola lest tekstoppgaven som spør etter skjæringspunktet mellom to potensfunksjoner, og han ser for seg hvordan han kunne tegnet likningene som funksjoner, og da finne skjæringspunktet. Lærer Petter spør hvordan Ola og Tobias kan løse dette på en annen måte enn å tegne, nemlig ved bruk av likninger. Dette spørsmålet kan få elevene til å utforske matematiske ideer rundt likhetstegnet, hvor Ola og Tobias må se oppgaven som en relasjon mellom to likninger. Dette kan se ut å bidra til aspekter av et kreativt resonnement hos elevene som må forankre argumentene i likhetstegnets egenskaper, hvor en side skal være lik den andre. Blant annet ved å se på likhetstegnet som et relasjonssymbol som sier at venstre side er det samme som høyre. Også lærer Arne får elevene til å se sammenhenger mellom likninger og graf i både situasjon 4 og 5, hvor elevene jobber med oppgave 2. Han spør elevene i begge tilfellene hva elevenes svar på oppgaven betyr grafisk. Dette resulterer i at elevene i begge gruppene argumenterer for at grafen ikke kan treffe x-aksen, da funksjonen ikke har noen nullpunkter.

Dette er forankrede argumenter, som verifiserer løsningen. Det utforskende spørsmålet, hvor han får elevene til å se sammenheng mellom likning og en graf av en funksjon, får Nora til å tenke tilbake og se at grunnen for at hun ikke fikk til å bruke faktorisering som løsningsmetode, var fordi grafen ikke traff aksene. Lærer Arnes spørsmål bidro til at Nora så matematiske sammenhenger. Hennes resonnementet kan bli sett på som kreativt ved at det både er forankret og troverdig. Dette tyder på spørsmål som utforsker ideer kan få elevene til å resonnere rundt viktige matematisk innhold, som NCTM (2014) viser til er viktig for effektiv undervisning. Denne lærerhandlingen kan derfor se ut til å få elevene til å utvide deres ideer og kunnskaper i algebra (Mueller et al., 2014). Ved at lærerne stilte elevene utforskende spørsmål, gir lærerne eleven i oppgave å resonnere seg frem til gyldige argumenter. Ansvaret for det intellektuelle arbeidet blir gitt til eleven, og en slik handling kan derfor bidra til det motsatte av det ledende spørsmål (funneling) gjør, nemlig å få elevene til å reflektere over egne tanker (focusing) (NCTM, 2014).

Det kan se ut til å være spesielt viktig at læreren stiller spørsmål som utforsker matematiske ideer og/eller sammenhenger, til de elevene som ikke naturlig gjør dette av seg selv, for at elevene skal utvikle evnen til et kreativt resonnement. Elevene Per og Andreas i situasjon 5 viste lite tegn til et kreativt resonnement, før læreren fikk de til å se den matematiske sammenhengen med en graf. Ettersom læreplanen sier at elevene skal kunne gjøre om praktiske problemstillinger til likninger (Utdanningsdirektoratet, 2006), vil det være viktig at elevene kan veksle mellom matematiske sammenhenger, som Arne og Petter får elevene til å gjøre i noen tilfeller. Dette kan føre til at elevene ser hvordan de kan stille slike spørsmål selv, ved senere anledning. Det kan også bidra til at elevene opplever likninger som mer enn aritmetiske prosedyrer, hvor elevene ser sammenheng med andre deler av matematikken, som for eksempel i Arnes undervisning hvor elevene ser sammenheng med funksjonsdrøfting. Disse sammenhengene er igjen sentralt for å oppnå dybdelæring (Meld. St. 28 (2015-2016), 2016).

En forutsetning for at elevene kan resonnere seg frem til et svar på et spørsmål som utforsker matematiske ideer og/eller sammenhenger, er at lærerens spørsmål er tilpasset elevens oppgavesituasjon, eller som Bergqvist og Lithner (2012) nevner at resonnementet må være realistisk for elevene. Elevene må forstå spørsmålet som blir stilt. I situasjonene som er valgt ut, hvor lærerne får elevene til å utforske matematiske ideer, ser det ut til at spørsmålene er forståelig for elevene. Det forekom også situasjoner i observasjonen hvor dette ikke var tilfelle, hvor læreren forsøkte å få elevene til å se sammenhenger, hvor elevene ikke satte ord på sitt resonnement og så ut til å ikke forstå hva læreren spurte om. I disse tilfellene ble ofte løsningen for lærer å redusere kompleksiteten ved å gi fremdriftshandlinger som forenkling og lukkede fremdriftsdetaljer, som kan ses i sammenheng med et guidet algoritmisk resonnement hvor læreren deler opp oppgaven i mindre deler, for å spørre elevene om enkle detaljer. Dette kan påvirke elevenes resonnement negativt, ved at elevene mister muligheten til å resonnere om de matematiske ideene på deres nivå i læreplanen (Drageset, 2015b). Resonneringssekvensen skjer da hovedsakelig gjennom lærerens veiledning, og kan derfor bli sett på som ledende (funneling) (NCTM, 2014). I flere tilfeller velger også lærerne å legge til mer informasjon eller gi et hint, for at elevene skal komme frem til en løsning, som igjen kan bli sett på som det Brousseau (1997) kaller Topaze-effekten. Dette viser at det er essensielt at spørsmålet som stilles, er tilpasset elevens kunnskap. Det kan derfor tyde på at spørsmål som utforsker matematiske ideer og/eller sammenhenger kan legge til rette for et kreativt resonnement hos eleven, ved at eleven må argumentere med matematisk forankring, men forutsatt at spørsmålet er justert mot elevens forståelse.

5.2 Læreren foreslår nye løsningsstrategier

I flere av situasjonene foreslår begge lærerne at elevene bytter løsningsstrategi, ved at elevene skal forsøke å tenke på en annen måte. Dette kategoriserer Drageset (2014) som en endrende handling. I situasjon 4 ser Lærer Arne at Nora har begynt oppgaveløsingen på en vanskelig måte, og sier han heller ville valgt løsningsstrategien med å gjenkjenne andregradsuttrykker, heller enn å faktorisere. Han argumenterer ikke noe videre hvorfor eleven bør gjøre denne endringen. Selv om Arne foreslår endring av strategi, fortsetter Nora sin resonneringssekvens og endrer ikke før Aleksander foreslår at de skal bruke løsningsstrategien som læreren har foreslått. Ved å endre løsningsstrategi kommer elevene seg videre, og frem til svaret som sier at likningen ikke har en løsning. Det samme gjelder i situasjon 1 hvor lærer Petter også mener at elevene har valgt en vanskelig løsningsstrategi, og sier at en annen måte å regne oppgaven på er enklere. Heller ikke han bruker videre argumentasjon for at elevene skal gjøre denne endringen. Det kan tyde på at lærerens forslag om å endre løsningsstrategi, uten noen videre begrunnelse, kan føre til at elevene blir forvirret om de selv ikke ser hvorfor deres løsningsstrategi ikke vil løse oppgaven. En slik korrigering uten argumenter blir da basert på autoritet (Drageset, 2014), og lærerens autoritet er sjeldent satt spørsmål ved (Bergqvist & Lithner, 2012). Likevel gir denne endrede handlingen elevene mulighet til å komme seg videre i likningsløsningen, når de ikke kommer seg videre selv, eller har regnet feil. Elevene i disse to ulike situasjonene responderer ulikt på lærerens endrende handling, hvor Nora og Aleksander likevel fortsetter å prøve på sin løsningsstrategi til forskjell fra Thea og Hanna som endrer til lærerens forslag. Dette kan gi en indikasjon på at Nora og Aleksander ønsker å komme frem til en egen konklusjon for sin løsningsstrategi, som kan tyde på at denne gruppen er selvstendige i likningsløsningen.

I situasjon 3 spør Arne om elevene kunne løst oppgaven på en annen måte, etter at elevene har gjennomført oppgaven og kommet frem til riktig svar med sin løsningsstrategi. Han spør «kunne jeg ikke delt på x på hver side?». Til forskjell fra de andre nevnte situasjonene foreslår Arne her en ny strategi etter at elevene har gjennomført oppgaven, og i dette tilfelle blir spørsmålet stilt for å utforske andre løsningsmetoder, enn den elevene har valgt. Dette spørsmålet virker som bidrar til en kreativ resonneringssekvens mellom elevene, hvor de utforsker egenskapene til variabler og hvilke begrensninger det gir, når man deler på en variabel i en likning. Det kan virke som at elevene er mer åpne for å se nye løsningsstrategier, etter at de har fått gjennomført og konkludert for sine forsøk først.

For det kreative resonnementet kan det ut fra disse situasjonene tyde på at lærerens forslag på ny løsningsstrategi kan bidra til et kreativt resonnement, ved at det kan få elevene inn i nye resonneringssekvenser. Når læreren ikke argumenterer for hvorfor elevene skal gjøre denne endringen, kan det oppstå forvirring hos eleven, hvis eleven ikke har verifiserende argumenter for sitt strategivalg (Lithner, 2008). I tillegg kan slike argumenter gjøre at algebra erfares som aritmetiske prosedyrer (Schliemann et al., 2007), hvor de opplever at læreren ser hvilke løsningsstrategier som de burde bruke, som de selv ikke ser. Elevene vil da oppleve at matematisk kunnskap består av å vite alle løsningsmetodene på forhånd, hvor alle argumentene involverer noe man vet fra før (Bergqvist & Lithner, 2012), som igjen fører til at elevene ikke utvikler prediktive argumenter i oppgaveløsingen. Dette observeres i Petter sitt klasserom, hvor spesielt gruppen med Thea og Hanna flere ganger viser frustrasjon over at deres løsningsstrategi ikke løser oppgaven, men at lærer Petter sitt forslag gjør det. Det kan tyde på at elevene har få argumenter som støtter løsningene sine, og i disse tilfellene vil slike forslag om å endre løsningsstrategi kunne bygge opp under et algoritmisk resonnement.

5.3 Læreren får elevene til å begrunne sine løsningsstrategier

For at elevens resonnement skal være kreativt ut fra Lithner (2008) sin definisjon, må elevens argumenter blant annet være matematisk forankret og troverdig. De tilfellene hvor læreren får elevene til å begrunne sine utsagn, utfordrer læreren eleven på å finne enten prediktive eller verifiserende argumenter, som begrunner deres løsning. Drageset (2014) beskriver handlingen hvor læreren får elevene til å begrunne sine utsagn, som en fokuserende handling hvor læreren påvirker eleven til å stoppe opp, og gå dypere i matematikken. Dette kan bli sett i sammenheng med Boaler og Brodie (2004) sin spørsmålskategori som omhandler begrunnelser (spørsmålstype 4), hvor læreren får eleven til sette ord på sine ideer. I situasjon 4 utfordrer lærer Arne elevene på dette. Elevene har kommet frem til at oppgaven ikke har noen løsning, hvor han spør «hvorfor ikke?». Dette utfordrer elevene til å argumentere for sin løsning, hvor Nora forankrer argumentet med å si «fordi det går ikke å ta kvadratroten av minus fire». I situasjon 6 spør lærer Arne «hvordan kom dere frem til det?», når Per og Andreas viser han deres skriftlige forslag på løsning. Det kan tyde på at Per og Andreas ikke er like vant med å argumentere for sine løsninger, da elevens respons i dette tilfellet består av å forklare fremgangsmåten, heller enn å argumentere i matematiske egenskaper. Elevenes respons kan i dette tilfellet ikke beskrives som en begrunnelse, heller at elevene opplyser om detaljer i oppgaven (Drageset, 2015b). I denne situasjonen kan det virke som at elevene ikke stoler helt på sine argumenter før læreren har bekreftet at dette er riktig. Dette kan tyde på at elevene i samtale med lærer ser på læreren som en fasit. Det viser sider av et personguidet algoritmisk resonnement, hvor elevene ser på læreren som en ekstern kilde som gir løsningsalgoritmer (Lithner, 2008), hvor læreren sier om det er rett eller galt. I arbeid med likninger vil det ofte være mulighet for elevene å sjekke egne løsninger ved å sette inn sitt løsningsforslag i likningen, noe som Arne også har presisert at elevene kan gjøre. Arne kaller dette for å «sette prøve på svaret», men i interaksjonene med elevene ber han elevene gjennomføre denne handlingen, kun i de tilfeller hvor elevene har feil verdier for x. Denne prosessen kan gi verifiserende argumenter for elevenes løsning, hvor konklusjonens troverdighet støttes av argumenter som er formulert etter oppgaven er gjennomført.

Selv om læreren spør om elevenes begrunnelse, skjer det i begge tilfellene at lærer tilføyer tilleggsopplysninger eller endrer noe på argumentet slik at det er mer matematisk korrekt. Dette kan igjen føre til at elevene opplever at deres resonnement ikke er gyldig nok, og læreren blir igjen en ekstern kilde med de rette argumentene. Ved å etterspørre elevenes begrunnelser vil læreren få tilgang på elevenes ideer og detaljene som støtter disse ideene (Drageset, 2014). Dette var essensielt for å få tilgang på elevenes resonnement, som ikke alltid kom til syne i begge klasserommene. Likevel kan denne handlingen være et nyttig verktøy, ved at den legger til rette for argumentering, og derfor en viktig tilrettelegger for et kreativt resonnement.

5.4 Lærerens handlinger som fremmer et kreativt resonnement

Begge undervisningssituasjonene starter med en introduksjon til temaet likninger hvor den ene undervisningsøkten har fokus på logaritme- og potenslikninger, mens den andre har fokus på andregradslikninger. Begge undervisningsøktene er relevante for læreplanmålene i 1T (Utdanningsdirektoratet, 2006), og ettersom dette er repetisjonsundervisning, vil elevene ha kunnskaper om temaet fra før. Dette gjør at elevene i utgangspunktet skal ha det teoretiske grunnlaget for et kreativt resonnement, men her er det selvfølgelig individuelle forskjeller. I lærernes gjennomgang blir elevene gitt ulike «verktøy» i form av formler, regler og eksempler som de kan bruke i sin oppgaveløsing. En slik gjennomgang kan bidra til et algoritmisk resonnement, ved at elevene blir gitt hele løsningsmetoder som følges uten videre argumenter, enn at algoritmen vil løse oppgaven. Eksempelvis i situasjon 2 hvor Ola bruker regelarket han har fått utdelt, til å finne den regelen som han kan bruke i oppgaveløsingen. For å kunne argumentere i matematiske egenskaper for likninger, som er nødvendig for et kreativt resonnement, er det viktig at eleven har tilegnet seg kunnskaper om komponentene som inngår i oppgaven. Dette henger sammen med lærerens undervisning av temaet. Læreren kommer derfor ikke utenom å gjennomgå slike formler og algoritmer, men det er nivået av fokus på disse reglene som kan være avgjørende (Bergqvist & Lithner, 2012). Begge lærerne fokuserte på en enkel likning, hvor de visualiserer at likhetstegnet fungerer som en skålvekt, hvor samme operasjon må gjøres på begge sider. Videre argumenterer de for at dette også er gjeldende for mer avanserte likningsoppgaver. Selv om lærerne her gir en viktig løsningsmetode i arbeid med likninger, er den forankret i en av de viktigste egenskapene til likhetstegnet, hvor likhetstegnet blir sett på som et symbol for ekvivalens (Kieran, 1981). Ut fra resultatene i kartleggingstesten hvor hele 86 % av elevene i begge klassene viser riktig resonnement rundt oppgave 1, som utfordrer forståelsen av likhetstegnet som et relasjonssymbol, kan det tyde på at elevene har en god forståelse for dette. Dette vises også blant annet i situasjon 1 hvor Hanna sier at forholdet er det samme, om man gjør en operasjon på begge sider av likhetstegnet. Dette vises også i flere situasjoner med andre elever. Det kan virke som likhetstegnets egenskaper har vært i fokus i undervisningen.

5.4.1 Elevens kreative resonnement

Algoritmer vil ikke nødvendigvis kun være synonymt med et algoritmisk resonnement. Noen oppgaver i matematikk, og da kanskje spesielt likninger, krever algoritmer. Og i noen oppgaver vil et memorert eller algoritmisk resonnement være mest hensiktsmessig. For likninger kan dette for eksempel være en rask løsning av en enkel førstegradslikning. Her presiserer likevel Lithner (2008) at det er nødvendig at eleven vet hvorfor nettopp algoritmen løste oppgaven. Hvis eleven ikke har noen argumenter for dette, vil kunnskapen kun være overfladisk. Dette kom til syne spesielt ved det lærerne kalte «flytte og bytte regelen», hvor elevene flytter ledd over på andre siden av likhetstegnet, uten å argumentere for hva som egentlig skjer. For de elevene som kjenner til argumentene som ligger til grunn, om at du kan gjøre det samme på begge sider av likhetstegnet, vil det ikke bli en like stor utfordring om oppgavene endrer seg og blir mer avanserte. Men for de elevene som kun har den overfladiske kunnskapen om denne regelen, kan det oppstå utfordringer.

Kartleggingstesten bestod av oppgaver som elevene ikke var vant med, og de hadde derfor ikke mulighet til et kjent algoritmisk resonnement. Ettersom 42 % av elevene løste oppgave 2b aritmetisk, kan det tyde på noen av elevene i klassene har et algoritmisk resonnement i arbeid med nye oppgaver. I observasjonen viste spesielt elevene Nora og Aleksander i flere tilfeller at de kunne begrunne hvorfor valgte algoritmer fungerte. Eksempelvis viser Aleksander at han må forsøke å finne løsningen med andregradsformelen som han har memorert, i stedet for å faktorisere fordi likningen «er ikke et fullstendig kvadrat». Lærerens handlinger var med på å avduke om elevene hadde denne begrunnelsen for algoritmens gyldighet, ved at Arne utfordret eleven på å argumentere for sine løsninger, selv om svaret er rett. Dette ble gjort i varierende grad i undervisningsøktene, hvor det kan tyde på at lærerne ofte er fornøyd med et riktig svar. Likevel var det i de situasjonene hvor elevene hadde et rett svar at læreren faktisk spurte om begrunnelse. I de tilfellene hvor elevene hadde kommet frem til feil svar, valgte for eksempel lærer Petter å gå tilbake og peke ut feilen som Thea og Hanna hadde gjort i situasjon 1, i stedet for å få elevene til å begrunne sitt resonnement. Dette kan føre til at elevene mister muligheten til å resonnere seg frem til de matematiske ukorrekte handlingene selv, og lærer Petter får heller ikke innblikk i elevenes eventuelle mangler i forståelsen. Hvis elevene ikke blir utfordret på å resonnere rundt oppgaver de selv føler er vanskelige, noe som er viktig for at elevene skal utvikle forståelsen (Hiebert & Grouws, 2007), mister de muligheten til å resonnere rundt uferdige svar og hvordan de eventuelt kan komme seg videre selv, som også er en viktig kompetanse i matematikk (Drageset, 2015b).

Etter at Arne introduserte hvilke verktøy elevene kunne bruke i løsning av andregradslikninger, presiserte han at elevene skal forsøke å se sammenhengene mellom verktøyene han gir, ikke bare se etter hvilke som er bedre enn andre. Argumentet kan bidra til relasjonell forståelse for likningene hvor elevene ser på temaet i sin helhet (Carpenter et al., 2005; Skemp, 1976). Dette argumentet kan også være med på å påvirke elevene til å være fleksible i løsning av slike andregradslikninger. Fleksibilitet blir av Lithner (2006) sett på som viktig for et kreativt resonnement, og i oppgaver med likninger kjennetegnes dette ved at eleven kan endre løsningsstrategi, om en valgt strategi ikke kommer frem til en løsning. Her var det en tydelig forskjell i elevgruppene, hvor spesielt Hanna og Thea viste lite fleksibilitet. I flere av oppgavene ble elevene stående fast, og spurte da heller lærer om hjelp enn å forsøke selv. Denne mangelen på fleksibilitet og Hanna og Thea sine resultater på kartleggingstesten, kan være faktorer som indikerer at disse elevene har et algoritmisk resonnement i arbeid med likningene. En rekke regler er memorert, og brukes i oppgaver som de gjenkjenner fra tidligere. Dette kan også avdekkes av at elevene bruker fasit og læreren som guide i oppgaveløsingen. Nora og Aleksander derimot, virker mer fleksible i bruk av løsningsstrategier, hvor elevene utfører ulike resonneringssekvenser, før de konkluderer med at denne ikke løste oppgaven, og dermed forsøker en annen vinkling. Også Nora sin kartleggingstest viser at hun angriper oppgaven på flere ulike måter, både med å forsøke med ulike verdier for variablene, og med å fremstille oppgaven som en likning.

De ulike elevgruppene viser i både kartleggingstesten og i observasjonen at deres kunnskaper i tema algebra er varierende. Dette påvirker det kreative resonnementet, da dette krever forankring av argumenter i matematiske egenskaper. For at resonnementet kan kalles kreativt er det derfor nødvendig at elevene innehar en viss kunnskap om komponentene som resonneringssekvensene inneholder. Det er også flere tilfeller i observasjonene hvor elevene står fast i oppgaver på bakgrunn av regnefeil, som kan knyttes mot mangel på grunnleggende forståelse for regneoperasjoner, slik som Brekke et al. (2000) viser til er en utfordring for elever i skolen. Denne mangelen gjør at flere av resonneringssekvensene stopper opp, og dette virker hemmende for det kreative resonnementet. Ut fra flere av situasjonene ser det ut til at lærerens veiledning er nødvendig for at elevene skal komme seg videre, og derfor kan det tyde på at lærerens handlinger er viktig for disse elevene for å kunne utvikle et kreativt resonnement.

I analyseringen av kartleggingstesten ble Thea og Hanna sin besvarelse karakterisert som aritmetisk. I tillegg hadde Ola manglende argumenter for sin løsning. Disse resultatene ble støttet gjennom observasjonen, hvor analyseringen av disse tre elevenes oppgaveløsing ofte kunne se ut til å være algoritmisk. Det kan se ut til at en slik kartleggingstest, hvor elevene får i oppgave å skrive ned begrunnelser for sin løsningsstrategi, kan gi en pekepinn på elevenes matematiske resonnement. Ved å gi oppgaver som er ukjente for elevene, avdekkes det raskt om elevene ikke har løsningsstrategier for valgt oppgave. 17 av 42 elever svarte algebraisk gjennom hele kartleggingstesten, og ut fra resultatene i observasjonen, så det ut til at de utvalgte elevene med algebraisk profil fra kartleggingstesten, viste aspekter av et kreativt resonnement. Dette kan igjen henge sammen med at disse elevene har en høyere begrepsforståelse (*conceptual understanding)* eller andre av Kilpatrick et al. (2001) sine fem tråder for matematisk kompetanse, som kan tyde på at disse elevene har en mer helhetlig relasjonell forståelse av likninger (Skemp, 1976).

5.4.2 Lærerens handlinger

Ut i fra de to undervisningsøktene, er lærernes bidrag til et kreativt resonnement forskjellig i ulike undervisningssituasjoner. I introduksjon og gjennomgang av oppgaver og i oppsummering i en helklassesituasjon består undervisningen for det meste av lærerens begrunnelser og forklaringer. Læreren stiller spørsmål til elevene, men nesten alle spørsmålene som blir stilt kan bli karakterisert som at læreren leder eleven gjennom en løsningsmetode. Det kan tyde på at lærerne sjeldent stiller høyere ordens-spørsmål (Boaler & Brodie, 2004; Myhill & Dunkin, 2005) og undervisningen kan bli sett i sammenheng med tradisjonell IRE- undervisning (Mehan, 1979), hvor læreren evaluerer gyldigheten av elevens respons, i stedet for at eleven må begrunne gyldigheten selv. Når Arne oppsummerer oppgavene på tavla er alle spørsmål avgrenset til faktaspørsmål fra elevens løsning av oppgavene, hvor han er avsender av all informasjon (Sahin & Kulm, 2008). Når læreren går rundt i klasserommet og har en dialog med enkeltelever og elevgrupper, er samtalen fortsatt preget av at læreren stiller elevene spørsmål, men av typen åpne spørsmål (Myhill & Dunkin, 2005). Her er et tydelig skille i resultatene, hvor læreren stiller mer varierte spørsmålstyper fra Boaler og Brodie (2004) sitt rammeverk, noe som igjen kan føre til en bredere diskusjon. Om denne forskjellen i ulike klasseromssituasjoner skyldes undervisningens natur, at læreren må gjennomføre tavleundervisningen uten særlig innblanding av elevene for å kunne holde tidsplanen eller andre faktorer, vites ikke. Det kan settes spørsmål ved hvorfor undervisningen har denne tydelige todelingen av lærerens spørsmål i undervisningen, spesielt da tiden læren har med enkeltelever er mindre enn tiden læreren bruker på dialog med hele klassen. Ettersom dette var en repetisjonsundervisning, kan det også tenkes at lærerne ønsket at elevene skulle få jobbe så mye som mulig hver for seg, og derfor gjennomførte raske introduksjoner og gjennomganger. Likevel mister elevene mulighet til å høre andre elever sine løsningsforslag, hvor tanker og oppfatninger kan drøftes i plenum, og elevene kan få innsikt i andre argumenter for andre og sin egen løsningsstrategi.

Lærernes argumenter har flere fellestrekk i de ulike undervisningssituasjonene enn spørsmålene som lærerne stiller. Gjennomgående i både tavleundervisning og i dialog med elevene, er lærerens argumenter forankret i de matematiske egenskapene, noe som kanskje ikke er overraskende. Likevel er det viktig at læreren begrunner sine utsagn i matematikken, slik at elevene også blir gitt mulighet til å gjøre det samme, som er nødvendig for et kreativt resonnement. Det kan heller stilles spørsmål om hvor ofte læreren benytter seg av argumenter, i stedet for argumentenes innhold, da mange av lærerens handlinger ikke inneholder argumenter. Flyten i timen blir opprettholdt ved at både endrende, fremdrifts og fokuserende handlinger er en del av lærerens respons. Ettersom begge lærerne oftere benytter endrende handlinger og fremdriftshandlinger, enn fokuserende handlinger kan dette skape situasjoner som kan vise sider av å lede eleven (funneling) (Drageset, 2014). De fokuserende handlingene får elevene til å stoppe opp, hvor enten elevenes tanker løftes frem, eller det pekes på matematiske egenskaper som er spesielt viktige. Her vil det matematiske resonnementet bli løftet opp og frem. Endrende handlinger og fremdriftshandlinger fører prosessen fremover mot en konklusjon, men vil ikke sikre at elevene resonnerer rundt de matematiske idéene.

For å kunne si noe om lærerens spørsmål og argumenter fremmer et kreativt resonnement er det valgt å bruke relativt detaljerte rammeverk på lærerens handlinger i dette prosjektet. Dette gjør det mulig å gå detaljert i dybden på kommunikasjonen mellom lærer og elev, hvor handlingens funksjon i seg selv blir sett i det større bildet mot responsen den utløser (Drageset, 2014). Denne masteroppgaven har benyttet seg av observasjon av to klasserom, og prosentandel av ulike kategorier i rammeverkene er derfor ikke interessant. Ettersom begge undervisningssituasjonene er relativt like repetisjonsøkter, kan det være en av grunnene for at lærerens spørsmål og argumenter var relativt like. Det er fullt mulig at disse lærerne bruker flere spørsmålstyper og andre handlinger i andre undervisningssituasjoner, og funnene kan derfor ikke beskrive undervisningen til disse lærerne generelt. Observasjonen fanger ikke opp lærerens intensjoner med ulike handlinger, og det vil derfor ikke kunne drøftes om lærerens handlinger er bevisst eller ubevisst. Dette kunne blitt belyst ved å gjennomføre intervjuer med lærerne i forkant eller i ettertid, men på bakgrunn av tidsbegrensingen i mastergradsprosjektet, ble ikke dette prioritert.

5.5 Implikasjoner og veien videre

Det finnes store mengder litteratur og forskning på lærerens handlinger i klasserommet. Lærerens handlingsrom i klasseromsundervisningen er stort, og dette gir grunnlag for å stille spørsmål om hvilken undervisning som skaper god læring. Selv om det finnes mye forskning på nettopp dette, finnes det lite forskning på sammenhengen mellom lærerens handlinger og elevens resonnement. Det kan tyde på at forskere er enig i at elever som blir gitt mulighet til å resonnere selv rundt matematiske ideer, utvikler en bedre matematisk kompetanse (Kilpatrick et al., 2001; Lithner, 2008; Skemp, 1976). Likevel eksisterer det lite detaljerte beskrivelser av hvordan læreren kan legge til rette for dette i undervisningen. Denne studien fyller derfor et matematikkdidaktisk hull i forskningsfeltet, hvor studien viser til konkrete handlinger som kan fremme et kreativt resonnement hos eleven. Ettersom studien kun ser på to klasserom, og situasjonene i klasserommet er så komplekse, kan ikke funnene generaliseres for alle lærere og elever. Likevel kan denne studien peke på situasjoner hvor lærerens handlinger er med på å bygge opp et matematisk resonnement.

Kompetansemålene i teoretisk matematikk på første årstrinn på videregående skole legger vekt på at elevene skal løse andre- og førstegradslikninger og eksponential- og logaritmelikninger, hvor det presiseres at eleven blant annet skal begrunne og vurdere løsningen (Utdanningsdirektoratet, 2006). For å oppnå dette målet, er det nødvendig at elevene resonnerer om de matematiske egenskapene som inngår i disse likningene. Elevene som utvikler et kreativt resonnement, vil stille mer rustet for nye oppgaver og situasjoner, enn de elevene som utelukkende fokuserer på algoritmer (Lithner, 2008). Elevens matematiske resonnement vil gi eleven mulighet til en mer helhetlig matematisk kunnskap (Kilpatrick et al., 2001), hvor eleven kan oppnå dybdelæring i faget. Ettersom algebra ser ut til å være en utfordring for mange elever (Bergem et al., 2016), er det spesielt viktig å legge til rette for et kreativt resonnement, som bygger på plausible og forankrede argumenter, i algebraundervisningen. Læreren legger rammene for undervisningen, og vil derfor spille en sentral rolle for utviklingen av denne kognitive prosessen hos elevene.

Resultatene fra denne studien kan bidra til å belyse problematikken omkring elevenes algebrautfordring, ved at elevenes resonnement rundt likningsbegrepet er satt i søkelyset. Denne studien foreslår at lærerens handlinger blir sett i sammenheng med elevenes matematiske resonnement, og viser situasjoner hvor lærerens argumenter og spørsmål kan bidra til at elevene utvikler sine evner. Først og fremst kan studien bidra til økt oppmerksomhet på elevenes matematiske resonnement i undervisningen, hvor studien viser betydningen av å avduke et imitativt resonnement, da dette resonnementet kan begrense elevenes muligheter for å lykkes med oppgaver de ikke automatisk vet løsningen av. I tillegg kan studien bidra til at lærere øker sin bevissthet rundt sin egen undervisningspraksis og hvilke muligheter man gir elevene til å utvikle et matematisk resonnement i temaet likninger og algebra. Læreren setter eksempel for hvordan elevene skal løse matematiske utfordringer, ved at læreren gjennomgår tema, viser eksempler og fokuserer på viktige elementer for det matematiske innholdet. Hvis læreren fokuserer på algoritmer og memorering, vil sannsynligheten være stor for at elevene gjør det samme. Det er derfor viktig at læreren legger opp til undervisning som bygger på de matematiske egenskapene i algebra, og gir elevene tid og mulighet til å formulere egne argumenter. Resultatet vil være selvstendige elever som er bedre rustet for å møte nye utfordringer.

Denne studien ser spesielt på klasseromsdiskusjonen mellom lærer og elev, hvor fokuset er lærerens handlinger som fremmer et kreativt resonnement. Studien velger å ikke gå nærmere inn på hvilke oppgaver som spesielt kan bidra til dette resonnementet, heller ikke hvordan elevenes dialog seg imellom bidrar. I mange av situasjonene kommer elevene frem til resultater i fellesskap, og derfor kan det være interessant å se på hvordan elevene bidrar til hverandres kreative resonnement. Ettersom tidsrammen for denne studien var begrensende, ble kun to klasserom observert. Begge undervisningsøktene var relativt like, og oppgaven omfavner heller ikke spørsmålet om hvilke undervisningsopplegg som fremmer et kreativt resonnement. Dette er sider av undervisningssituasjonen som kan være interessant å forske mer på.

6. Konklusjon

I denne studien ønsker jeg å finne ut av hvordan lærerens handlinger, med særlig vekt på spørsmål og argumenter, kan fremme elevers kreative resonnement i arbeid med likninger. Resultatene fra studien viser at spørsmål som får elevene til å utforske matematiske ideer og sammenhenger, og spørsmål som får elevene til å begrunne sine løsningsstrategier, kan bidra til et kreativt resonnement, ettersom disse handlingene påvirker eleven til å synliggjøre sine tanker. Det vil være essensielt at spørsmålene er tilpasset elevenes kunnskaper. Det er derfor nødvendig at læreren er kjent med elevens forutsetninger og en diagnostisk test, som den som er utført i denne studien, vil kunne gi en pekepinn på elevenes argumenter og matematiske resonnement. Ved at læreren får elevene til å vurdere sine egne svar, heller enn å kommentere om det er riktig eller ikke, ser også ut til å skape et utforskende og selvkorrigerende læringsmiljø.

Lærerens handlinger som får elevene til å endre løsningsstrategier, kan bidra til at elevene utvikler nye resonneringssekvenser. Dette kan bidra til at elevene blir mer fleksible i løsning av likninger, som er viktig for et kreativt resonnement. Det forutsetter at læreren benytter seg av forankrede argumenter for sitt endringsforslag, slik at elevene har forståelse for endringen de må utføre, for at elevene skal bli fleksibel i oppgaveløsingen.

Det fremkommer av resultatene at lærernes bruk av spørsmålstyper varierer i ulike deler av undervisningen ut fra valgt rammeverk. I tavleundervisningen begrenser spørsmålene seg til å lede elevene gjennom en løsning, mens i interaksjon med enkeltelever stiller læreren et bredere spekter av spørsmålstyper. Dette kan skape bedre forutsetninger for diskusjon, og kan være en viktig grunn for at tavleundervisningen består av lite diskusjon. Lærerens bruk av argumenter varierer i mindre grad, og består store deler av forankring i likningens matematiske egenskaper som for eksempel likhetstegnet og variabelbegrepet.

Denne oppgaven har vist nødvendigheten av å rette fokus mot elevens resonnement i algebra, og hvordan lærerens arbeid fremmer denne egenskapen. Studien bidrar derfor til forskningsfeltet ved å se på hvordan lærerens handlinger påvirker elevens resonnement. Jeg håper denne oppgaven kan motivere til undervisning som fremmer fokus på elevens matematiske resonnement.

Referanser

Angrosino, M. & Flick, U. (2007). *Doing ethnographic and observational research*. London: SAGE.

Ayaduray, J. & Jacobs, G. M. (1997). Can learner strategy instruction succeed? The case of higher order questions and elaborated responses. *System, 25*(4), 561-570. doi:10.1016/S0346-251X(97)00044-4

Bergem, O. K., Kaarstein, H. & Nilsen, T. (2016). *Vi kan lykkes i realfag. Resultater og analyser fra TIMSS 2015*. Hentet fra https://www.idunn.no/file/pdf/66911876/vi-kan-lykkes-i-realfag.pdf

Bergqvist, T. & Lithner, J. (2012). Mathematical reasoning in teachers' presentations. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(2), 252-269. doi: 10.1016/j.jmathb.2011.12.002

Boaler, J. & Brodie, K. (2004). The importance, nature, and impact of teacher questions. I D. E. McDougall & J. A. Ross (Red.), *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bind 2, s. 774-790). Toronto, Canada: OISE/UT.

Brekke, G. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk*. Hentet fra http://bestilling.utdanningsdirektoratet.no/Bestillingstorg/PDF/59447_KAR_MAT_007_innmat.pdf

Brekke, G., Grønmo, L. S. & Rosén, B. (2000). *Veiledning til algebra : F, H og J*. Hentet fra http://urn.nb.no/URN:NBN:no-nb_digibok_2011040806031

Brekke, M. & Tiller, T. (2013). *Læreren som forsker : innføring i forskningsarbeid i skolen*. Oslo: Universitetsforlaget.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Carpenter, T., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically. Integrating arithmetic and algebra in Elementary School*. Portsmouth: Heinemann.

Carpenter, T., Levi, L., Franke, M. & Zeringue, J. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(1), 53-59. doi: 10.1007/BF02655897

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forlag.

Creswell, J. W. (2014). *Research design : qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4. utg.). Los Angeles: Sage.

Creswell, J. W. & Plano Clark, V. L. (2011). *Designing and conducting mixed methods research* (2. utg.). Los Angeles: Sage.

Derry, S. J., Pea, R. D., Barron, B., Engle, R. A., Erickson, F., Goldman, R., . . . Sherin, M. G. (2010). Conducting video research in the learning sciences: Guidance on selection, analysis, technology, and ethics. *The Journal of the Learning Sciences, 19*(1), 3-53. doi: 10.1080/10508400903452884

Drageset, O. G. (2014). Redirecting, progressing, and focusing actions—a framework for describing how teachers use students' comments to work with mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 85*(2), 281-304. doi:10.1007/s10649-013-9515-1

Drageset, O. G. (2015a). Student and teacher interventions: a framework for analysing mathematical discourse in the classroom. *Journal of mathematics teacher education, 18*(3), 253-272. doi: 10.1007/s10857-014-9280-9

Drageset, O. G. (2015b). Teachers' response to unexplained answers. I K. Krainer & N. Vondrová (Red.), *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (3009-3014). Prague: HAL.

Erickson, F. (2006). Definition and analysis of data from videotape: Some research procedures and their rationales. I J. L. Green, G. Camilli & P. B. Elmore (Red.), *Handbook of complementary methods in education research* (s. 177-192). Mahwah, N.J: Lawrence Erlbaum.

Everett, E. L. & Furseth, I. (2012). *Masteroppgaven : hvordan begynne - og fullføre* (2. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Francisco, J. M. & Maher, C. A. (2011). Teachers attending to students' mathematical reasoning: Lessons from an after-school research program. *Journal of mathematics teacher education, 14*(1), 49-66. doi: 10.1007/s10857-010-9144-x

Gold, R. L. (1958). Roles in Sociological Field Observations. *Social Forces, 36*(3), 217-223. doi: 10.2307/2573808

Goldman, R. (2007). Video representations and the perspectivity framework: Epistemology, ethnography, evaluation, and ethics. I R. Goldman, R. Pea, B. Barron & S. J. Derry (Red.), *Video research in the learning sciences* (s. 3-37). Oxon: Routledge.

Gray, S. S., Loud, B. J. & Sokolowski, C. P. (2009). Calculus Students' Use and Interpretation of Variables: Algebraic vs. Arithmetic Thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 9*(2), 59-72.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H. & Bo, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram*. Hentet fra http://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/TIMSS/2011/timss_2011_web.pdf

Hart, K., Brown, M., Kerslake, D., Küchemann, D. & Ruddock, G. (1985). *Chelsea Diagnostic Mathematics Tests : teacher's guide*: Nfer-Nelson.

Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of educational research, 77*(1), 81-112.

Haylock, D. (1997). Recognising mathematical creativity in schoolchildren. *ZDM, 29*(3), 68-74. doi:10.1007/s11858-997-0002-y

Hiebert, J. & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. I F. K. Lester (Red.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 371-404). Charlotte, N.C: Information Age.

Høines, M. J., Rinvold, R. & Selvik, B. K. (2007). *Matematiske sammenhenger: Algebra og funksjonslære*. Bergen: Caspar forlag.

Imsen, G. (2016). *Lærerens verden. Innføring i genrell didaktikk* (5 utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Ivankova, N. V., Creswell, J. W. & Stick, S. L. (2006). Using mixed-methods sequential explanatory design: From theory to practice. *Field methods, 18*(1), 3-20.

Johnson, R. T., Johnson, D. W., Haugaløkken, O. K. & Aakervik, A. O. (2006). *Samarbeid i skolen : pedagogisk utvikling - samspill mellom mennesker* (4. rev. utg.). Namsos: Pedagogisk psykologisk forlag.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317-326. doi:10.1007/BF00311062

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at Middle School through College Levels: Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. I F. K. Lester (Red.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 707-743). Charlotte, N.C: Information Age.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping Children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Kjærnsli, M. & Olsen, R. V. (2013). *Fortsatt en vei å gå: Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012*. Hentet fra https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/pisa/publikasjoner/publikasjoner/fortsatt-en-vei-a-ga.pdf

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A. & Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & Variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(1), 68-76. doi:10.1007/BF02655899

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for research in Mathematics Education, 37*(4), 297-312.

Küchemann, D. E. (1981). Algebra. I K. M. Hart (Red.), *Children's Understanding of Mathematics : 11-16* (s. 102-119). London: John Murray.

Lithner, J. (2006). *A framework for analysing creative and imitative mathematical reasoning*. Hentet fra http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.466.7119&rep=rep1&type=pdf

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276. doi:10.1007/s10649-007-9104-2

Malderez, A. (2003). Observation. *ELT Journal, 57*(2), 179-181. doi:10.1093/elt/57.2.179

Mehan, H. (1979). «What time is it, Denise?»: Asking known information questions in classroom discourse. *Theory into practice, 18*(4), 285-294. doi: 10.1080/00405847909542846

Meld. St. 28 (2015-2016). (2016). *Fag – Fordypning – Forståelse — En fornyelse av Kunnskapsløftet*. Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld.-st.-28-20152016/id2483955/?ch=1&q=

Mueller, M., Yankelewitz, D. & Maher, C. (2014). Teachers Promoting Student Mathematical Reasoning. *Investigations in Mathematics Learning, 7*(2), 1-20.

Myhill, D. & Dunkin, F. (2005). Questioning learning. *Language and Education, 19*(5), 415-427. doi:10.1080/09500780508668694

NCTM. (2014). *Principes to Actions: Ensuring Matematical Success for All*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Matematics.

Nosrati, M. & Wæge, K. (2014). *En oppsummering av status for forskning på hva som kjennetegner god læring og undervisning innenfor matematikk*. Hentet fra https://nettsteder.regjeringen.no/fremtidensskole/files/2014/05/Status-rapport-matematikksenteret.pdf

Oldervoll, T., Orskaug, O., Audhild, V., Svorstøl, O. & Hals, S. (2014). *Sinus matematikk 1T*. Oslo: Cappelen Damm.

Onstad, T. (1994). *Fra Babel til Abel : likningenes historie*. Hentet fra http://urn.nb.no/URN:NBN:no-nb_digibok_2010042706092

Personopplysningsloven. (2000). *Lov om behandling av personopplysninger*. Hentet fra https://lovdata.no/dokument/NL/lov/2000-04-14-31

Polya, G. (1971). *How To Solve It: A New Aspect of Mathematical Method* (2. utg.). Hentet fra https://notendur.hi.is/hei2/teaching/Polya_HowToSolveIt.pdf

Postholm, M. B. (2005). Observasjon som redskap i kvalitativ forskning på praksis. *Norsk pedagogisk tidsskrift, 89*(2), 146-158.

Powell, A. B., Francisco, J. M. & Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(4), 405-435. doi:10.1016/j.jmathb.2003.09.002

Sahin, A. & Kulm, G. (2008). Sixth grade mathematics teachers' intentions and use of probing, guiding, and factual questions. *Journal of mathematics teacher education, 11*(3), 221-241. doi:10.1007/s10857-008-9071-2

Schliemann, A. D., Carraher, D. & Bricuela, B. M. (2007). *Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic. From Children's Ideas to Classroom Practice.* Hentet fra https://books.google.no/books?hl=no&lr=&id=Vs3FlEZzl-wC&oi=fnd&pg=PP1&dq=Bringing+Out+the+Algebraic+Character+of+Arithmetic.+From+Children%27s+Ideas+to+Classroom+Practice+&ots=ojyvy-lCfp&sig=drsJSghiECh1Y_Pmcx0iHDymJ1w&redir_esc=y - v=onepage&q=Bringing%20Out%20the%20Algebraic%20Character%20of%20Arithmetic.%20From%20Children's%20Ideas%20to%20Classroom%20Practice&f=false

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM, 29*(3), 75-80. doi: 10.1007/s11858-997-0003-x

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Smeby, J. C. (2012). How Can Qualitative and Quantitative Data Sets Be Linked? I K. Klette, S. Gorard, L. E. Borge, J. C. Smeby, I. Størksen, M. Ødegaard & T. Falch (Red.), *Mixed Methods in Educational Research, Report from the March Seminar 2012* (s. 17-21). Hentet fra http://www.forskningsradet.no/prognett-utdanning/Rapporter_fra_arlige_marsseminar/1253983310413

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks, California: Sage.

Thomas, G. (2011). *How to do your Case Study : a guide for Students & Researchers*. Los Angeles: Sage.

Tlberghien, A. & Sensevy, G. (2012). The nature of video studies in science education *Science Education Research and Practice in Europe* (s. 141-179). Hentet fra https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-6091-900-8_7

UiO: Institutt for lærerutdanning og skoleforskning. (u.å). TIMSS & TIMSS Advanced. Hentet 30.04.17 fra http://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/

Utdanningsdirektoratet. (2006). *Læreplan i matematikk fellesfag*. Hentet fra http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/

Utdanningsdirektoratet. (2016). Hva er tilpasset opplæring? Hentet 05.02.17 fra http://www.udir.no/laring-og-trivsel/tilpasset-opplaring/hva-er-tilpasset-opplaring/

Yin, R. K. (2014). *Case study research : design and methods* (5. utg.). Los Angeles, California: Sage.

Vedlegg

Vedlegg 1

Elin B.Vårtun og Ingrid Kay Ås, 18.01.16

Til
Rektor v/

Søknad om tillatelse til å gjennomføre forskning ved Deres skole.

Vi, Elin Brandsnes Vårtun og Ingrid Kay, er studenter ved lektorutdanningen i realfag, ved Norges Miljø- og Biovitenskapelige Universitet. Vi er i gang med masteroppgave på studiet og forsker begge under felles prosjekt med tittel:
Matematisk resonnement i algebra
Hensikten med prosjektet er å kartlegge elevenes matematiske resonnement i algebra, og se på ulike faktorer som spiller inn på dette. Elin ser på lærerens rolle, mens Ingrid ser sammenheng med metakognisjon. Vi vil gjennomføre en kartleggingstest av elever, høyttenkningsprotokoll med elever, observasjon i klasserommet og eventuelle intervjuer med elev og lærer. Datainnsamling vil foregå med video- og lydopptaker og notater.

I den forbindelse ønsker vi å gjennomføre forskning blant lærere og elever ved Deres skole. Vi forsikrer om at alle opplysninger vil bli behandlet **konfidensielt**.

Det understrekes at deltakelse i prosjektet er frivillig. Deltakerne kan trekke seg fra prosjektet når som helst underveis i prosjektet og samtidig få allerede registrerte opplysninger om seg slettet. Jamfør vedlagte kopi av **samtykke-erklæring** som de involverte lærerne og elevene blir bedt om å underskrive før deltakelse i spørreundersøkelsen. Veileder, Margrethe Naalsund, har også underskrevet brevet, for å vise hvem fra universitet som er ansvarlig veileder på prosjektet.

Vi håper på snarlig svar og positiv respons.

Med vennlig hilsen

Elin Brandsnes Vårtun Margrethe Naalsund

Ingrid Kay

Vedlegg 2
Samtykke om deltakelse i Mastergradsprosjekt

Generell informasjon
Dette brevet er en forespørsel til deg som lærer i matematikk 1T om ditt samtykke til deltakelse i et forskningsprosjekt tilknyttet våre masteroppgaver våren 2017. Noe av datainnsamlingen, vil foregå sammen for våre to prosjekter, og derfor sendes det ut en felles samtykkeerklæring for begge. Videre følger informasjon om våre individuelle prosjekter:
Elin:
I min masteroppgave ønsker jeg å se på hvordan læreren kan bidra til at elevene utvikler sitt matematiske resonnement i arbeid med likninger. I denne studien ser jeg på hva som skjer i klasserommet ved å se på hvordan læreren kan legge opp til undervisning som fremmer elevens matematiske resonnement, da spesielt i algebra, som er et område norske elever scorer dårlig (TIMSS 2015). Jeg ønsker hovedsakelig å se på lærerens spørsmål og argumenter i klasserommet, og hvordan disse utfordrer elevens matematiske resonnement. Forskning viser at mange elever følger algoritmer i algebra, uten begrunnelser og argumenter. I denne oppgaven ønsker jeg å se på hvordan læreren bidrar til at elevene heller utvikler et kreativt resonnement, som er det motsatte av et algoritmisk resonnement (Lithner 2006). Datainnsamlingen vil foregå ved en kartleggingstest av elevens matematiske resonnement, før et utvalg av elever velges for videre studie. Deretter ønsker jeg å observere disse elevene og læreren i klasserommet i undervisningen. Det vil bli foretatt intervjuer med både elevene og læreren i etterkant, om dette blir sett på som viktig for besvarelse av problemstillingen. Kartleggingstesten brukes for å kunne si noe om elevenes ståsted i matematikk, da spesielt elevenes matematiske resonnement i likninger, for å kunne si noe videre i studien om eleven utvikler sitt kreative resonnement. Dette prosjektet er på ingen måte en analyse av om du som lærer gjør noe rett eller galt i undervisningen, den er ute etter å se på ulike elevers matematiske resonnement som en respons på ulike undervisningssituasjoner.

Ingrid:
I min masteroppgave vil jeg se på sammenhengen mellom elevers metakognisjon og deres matematiske resonnement i løsning av algebraoppgaver. Jeg ønsker derfor først å ha en prøve med elever i to 1T-matematikklasser hvor jeg kan få et innblikk i deres resonnement gjennom løsning av oppgaver, og metakognisjon ved et spørreskjema som vil ligge ved prøven. Det er altså på denne prøven Elin og jeg vil samarbeide om datainnsamlingen. Ut i fra resultatene på denne prøven, vil jeg ta ut 4-6 elever til en høyttenkningsprotokoll. Dette går ut på at eleven skal løse oppgaver mens han eller hun tenker høyt. På denne måten kan jeg få et unikt innblikk i hvordan eleven resonnerer, og dessuten se på deres metakognitive evner.

Anonymitet og oppbevaringa av data
Vi ønsker å benytte oss av videopptak og lydopptak i observasjon og lydopptak i intervju og høyttenkningsprotokoll, for å få et best mulig datagrunnlag. All informasjon vil bli samlet inn og lagret på våre private pcer, hvor kun vi og våre veiledere har innsyn. Du kan be om å få dette slettet om du måtte ønske det. Alt av filer og dokumenter vil bli slettet og makulert ved oppgavens slutt. Alle som deltar i prosjektet vil bli anonymisert, i form av fiktive navn. Navnet på institusjonen vil heller ikke bli nevnt. Prosjektet er meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelige datatjeneste AS, og arbeidet med data vil følge deres retningslinjer.

Det er frivillig å delta i forskningsstudien og du kan når som helst trekke deg fra studien uten å begrunne dette nærmere. Vår rolle som forskere innebærer at vi er underlagt strenge etiske regler for hvordan datamaterialet kan brukes. Materialet vil bli behandlet konfidensielt, og vil kun benyttes til forskningsformål.

Vi håper du vil gi oss den nødvendige tillatelse ved å undertegne arket og returnere til oss(side 3). For nærmere spørsmål kan du kontakte oss, Elin Brandsnes Vårtun (elin.brandsnes.vaartun@nmbu.no, 95835016) og Ingrid Kay (ingrid.kay@nmbu.no, 95029592). Vår veileder er Margrethe Naalsund (margrethe.naalsund@nmbu.no, 67231528/92806592) og biveileder er Ellen Kristine Solbrekke Hansen (ellen.hansen@nmbu.no).
Vennlig hilsen
Elin Brandsnes Vårtun og Ingrid Kay.

Samtykkeerklæring

Jeg har lest informasjonen om forskningsprosjektet tilknyttet masterprosjektet. Jeg er kjent med at den frivillige deltakelsen i forskningsprosjektet innebærer dokumentasjon ved hjelp av videoopptak og intervjuer.

Vennligst kryss av:

1) Jeg kan delta i forskningsprosjektet:

- ☐ Ja, jeg samtykker
- ☐ Nei, jeg samtykker ikke

Underskrift: ____

Sted: __________________________________ Dato: _________________________

Vedlegg 3
Samtykke om deltakelse i Mastergradsprosjekt

Generell informasjon
Vi er masterstudenter i matematikkdidaktikk ved Norges miljø- og biovitenskapelige universitet. Dette brevet er en forespørsel til deg som elev i matematikk 1T om ditt **samtykke** til deltakelse i et forskningsprosjekt tilknyttet våre masteroppgaver våren 2017. Noe av datainnsamlingen vil foregå sammen for våre to prosjekter, og derfor sendes det ut en felles samtykkeerklæring for begge.
Datainnsamlingen som vil foregå sammen, er en kartleggingstest i algebra med tilhørende spørreskjema hvor vi kan få et nærmere innblikk i deres matematiske resonnement og tanker om læring. Ut i fra resultatene på denne prøven kan dere bli valgt ut til videre datainnsamling i et eller begge prosjektene. Nedenfor følger informasjon om Elins og Ingrids prosjekt.
Elin:
Etter at dere har gjennomført kartleggingstesten vil jeg velge ut 2-3 elever til videre observasjon. Dette innebærer at de som blir plukket ut sitter sammen i en gruppe og følger vanlig undervisning, som de andre i klassen. Til forskjell fra de andre elevene, vil et kamera og en båndopptaker være plassert på disse elevene. Elevene kan bli spurt i ettertid om å stille opp i et kort intervju. Det er viktig å presisere at de som velges ut følger vanlig undervisning, og trenger ikke tenke over at de blir filmet. De vil ikke bli vurdert på om de gjør noe rett eller galt.
Ingrid:
I mitt prosjekt ønsker jeg 4-6 elever til en høyttenkningsdel. Høyttenkningsmetoden går ut på å la eleven tenke høyt mens han/hun utfører et utvalg matematikkoppgaver uten innblanding av forsker. Jeg vil bruke video eller båndopptaker og ta notater mens vi snakker sammen. Datainnsamlingen vil ta omtrent 20-30 minutter, og vil foregå på her på skolen.

Anonymitet og oppbevaringa av data
All informasjon vil bli samlet inn og lagret på våre private PCer, hvor kun vi og våre veiledere har innsyn. Du kan be om å få dette slettet om du måtte ønske det. Alle som deltar i prosjektet vil bli anonymisert i form av fiktive navn. Navnet på skolen vil heller ikke bli nevnt. Prosjektet er meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelige datatjeneste AS (NSD), og arbeidet med data vil følge deres retningslinjer.
Det er frivillig å delta i forskningsstudien og du kan når som helst trekke deg fra studien uten å begrunne dette nærmere. Vår rolle som forskere innebærer at vi er underlagt strenge etiske regler for hvordan datamaterialet kan brukes. Materialet vil bli behandlet konfidensielt, og vil kun benyttes til forskningsformål.

Vi håper du vil gi oss den nødvendige tillatelse ved å undertegne arket og returnere til oss (side 2). For nærmere spørsmål kan du kontakte oss, Elin Brandsnes Vårtun (elin.brandsnes.vaartun@nmbu.no, 95835016) og Ingrid Kay (ingrid.kay@nmbu.no, 95029592). Vår veileder er Margrethe Naalsund (margrethe.naalsund@nmbu.no, 67231528/92806592) og biveileder er Ellen Kristine Solbrekke Hansen (ellen.hansen@nmbu.no).
Vennlig hilsen
Elin Brandsnes Vårtun og Ingrid Kay

Samtykkeerklæring

Jeg har lest informasjonen om forskningsprosjektet tilknyttet masterprosjektet. Jeg er kjent med at den frivillige deltakelsen i forskningsprosjektet innebærer dokumentasjon ved hjelp av video- og lydopptak.

Vennligst kryss av:

2) Jeg kan delta i forskningsprosjektet:

   - ❑ Ja, jeg samtykker
   - ❑ Nei, jeg samtykker ikke

Underskrift: ____

Sted: _____________________________________ Dato: ___________________________

Vedlegg 4: Kartleggingstest

Navn:____

Når du løser disse oppgavene ønsker vi at du skriver ned så mye som mulig av det du tenker. Etter dere har løst disse to oppgavene, får dere et nytt ark som dere skal svare på.

Takk for at du deltar ☺

Oppgave 1:

Sett rett bokstavuttrykk på strekene, vis utregningen og forklar fremgangsmåten din med ord.

$$\_\_\_ - 3b = 2a + 6a + 5b - \_\_\_$$

Svar:

Oppgave 2:

Hvis $a = b + 3$, hva skjer med *a* hvis *b* øker med 2? Forklar svaret ditt.

Hvis $f = 3g + 1$, hva skjer med *f* hvis *g* øker med 2? Forklar svaret ditt.

Spørreskjema til oppgave 2. Navn:_______________

Sett ett kryss for hvert utsagn.

Utsagn	**Ja**	**Nei**	**Usikker**
1. Jeg leste oppgaven mer enn en gang.			
2. Jeg passet på at jeg forstod hva det ble spurt etter i oppgaven.			
3. Jeg vurderte hvor mye tid jeg trengte for å løse oppgaven.			
4. Jeg løste oppgaven med en fremgangsmåte jeg kunne fra før.			
5. Jeg prøvde å huske om jeg tidligere hadde jobbet med en lignende oppgave.			
6. Jeg lagde en strategi for å løse oppgaven.			
7. Jeg visste hvordan jeg skulle begynne for å løse oppgaven.			
8. Da jeg løste oppgaven møtte jeg på en utfordring.			
Hvis «ja» i 8., beskriv utfordringen.			
9. Da jeg løste oppgaven fant jeg en feil jeg hadde gjort og rettet den.			
Hvis «ja» i 9., beskriv feilen.			
10. Jeg tenkte på hvordan jeg gikk frem for å løse oppgaven.			
11. Jeg prøvde ulike strategier for å løse oppgaven.			
12. Jeg spurte meg selv om svaret mitt ga mening.			
13. Jeg undersøkte at mine beregninger var riktige.			
14. Jeg tenkte på om det var noe av informasjonen, gitt i oppgaven, som trengte spesiell oppmerksomhet.			
Hvis «ja» i 14., beskriv hva.			

Vedlegg 5: Observasjonsskjema

Dato:____________

Hva sier læreren…	Elevens respons…	Kommentarer, tanker

Vedlegg 6: Kodingsskjema

<u>Lærerens gjennomgang av oppgaver i plenum:</u>
Identifiserer læreren aktivitetene og/eller oppgavene ti å være av en spesiell type eller struktur?
Lite ________ Noe ________ En god del_______ Gjennomgående _______

Beskriver læreren de generelle egenskapene for oppgaver av denne typen?
Lite ________ Noe ________ En god del _______ Gjennomgående _______

Gir læreren hovedelementene for læringsmetoden?
Lite ________ Noe ________ En god del _______ Gjennomgående _______

Er argumentasjonen formulert etter konklusjonen?
Lite ________ Noe _______ En god del _______ Gjennomgående _______

Er strategivalg og implementering gitt på forhånd?
Lite _______Noe ________ En god del _______ Gjennomgående _______

Er argumenter forankret i de iboende matematiske egenskapene?

Lite ________ Noe ________ En god del _______ Gjennomgående _______
Er resonnementet realistisk for eleven?

Lite ________ Noe ________ En god del _______Gjennomgående _______

<u>Lærerens spørsmål:</u>

Spørsmålstype	Læreren spør	Elevens respons
1. ledende spørsmål.		
2. Innsetting av terminologi		
3. Utforske matematiske ideer og/eller sammenhenger		
4. Begrunnelser		
5. Generere diskusjon		
6. Se sammenhenger		
7.Utvidet tenkning		
8. Fokusering		
9. Etablere konteksten		

Lærerens handlinger:

		Lærer	Elev
1. Endrende handlinger	a. Sette til side		
	b. Foreslå en ny strategi		
	c. Korrigerende spørsmål		
2. Fremdrifts-handlinger	a. Demonstrasjon		
	b. Forenkling		
	c. Lukkede fremdriftsdetaljer		
	d. Åpne fremdriftstiltak		
3. Fokuserende handlinger	a. Etterspørsel etter elevens tanker i. Opplyse om detaljer ii. Begrunnelser iii. Bruk på like problemer iv. Etterspørre vurdering fra andre elever		
	b. Peke ut i. Oppsummering ii. Legge merke til		

Elevens resonnement:

- Plausibel/troverdig
    - Eksisterer det argumenter som støtter strategivalget?
    - Eksisterer det argumenter som støtter strategiimplementeringen?
    - Forklares konklusjonens troverdighet?
- Forankring
    - Er argumentene forankret i iboende matematiske egenskaper hos komponentene i resonneringen?

Norges miljø- og biovitenskapelig universitet
Noregs miljø- og biovitskapelege universitet
Norwegian University of Life Sciences

Postboks 5003
NO-1432 Ås
Norway