Diskusjon - en arbeidsmåte som utvikler elevers begrepsforståelse av ekvivalens?

Discussion - a way to develop students' conceptual understanding of equality?

Ina Kristine Karlsen-Moum

UNIVERSITETET FOR MILJØ- OG BIOVITENSKAP
Institutt for matematiske realfag og teknologi (imt)
Masteroppgave 30 stp. Våren 2013

Forord

Etter et langt studieløp innenfor flere ulike retninger startet jeg på lektorutdanningen i realfag på UMB, Universitetet for miljø- og biovitenskap høsten 2010. Jeg ble tatt opp ved utdanningen på høyere årstrinn og startet rett på et spennende år med praktisk-pedagogisk utdanning. Allerede den høsten begynte tanker å forme seg om en masteroppgave i matematikkdidaktikk. Gjennom de forberedende fagene på høsten 2012, ble mitt interesseområde tydeligere for meg og en problemstilling ble dannet. Dette var starten på denne masteroppgaven. Årene som student har vært både spennende, utfordrende og lærerike og det er både med vemod og glede at jeg ser meg selv avslutte studenttilværelsen for denne gang, selv om jeg aldri blir ferdig med å utvide horisonten. Nå ser jeg frem mot nye utfordringer i min nye jobb som lektor ved Greåker videregående skole.

Jeg vil starte med å takke rektor, lærere og elever på skolen der jeg skrev min masteroppgave. Læreren til matematikkgruppa i utvalget har stilt opp både selv og med klassen og gjort alt i sin makt for at jeg skal få til en interessant oppgave ved deres skole. De 9 elevene i utvalget har tatt alle utfordringer på strak arm og bidratt til at jeg har hatt en flott tid på skolen, med gjennomføringen av oppgaven. Tusen takk! Jeg hadde ikke fått til dette uten dere.

Margrethe Naalsund har vært min enestående veileder på masteroppgaven. Jeg hadde ikke klart å gjennomføre dette uten hennes hjelp, engasjement og konstruktive tilbakemeldinger. Hennes genuine interesse for fagområdet og hennes sterke engasjement har trukket meg videre og hjulpet meg både i medgang og motgang. Tusen takk, Margrethe!

Jeg vil også takke min fantastiske ektemann, Svend Anders Karlsen-Moum, bare fordi han er den han er. Gjennom ti år med utdanning har han støttet meg, oppmuntret meg og trodd på meg. Hans engasjement smitter og hans glade vesen kan få meg igjennom alt. Jeg vil også rette en takk til mine foreldre, mine søsken, mine besteforeldre og resten av min familie og svigerfamilie som alltid er støttende, oppmuntrende og som har formet meg til den jeg er i dag.

Fredrikstad, mai 2013
Ina Kristine Karlsen-Moum

Sammendrag

Mange elever synes at algebra er det temaet i matematikkfaget som det er vanskeligst å fatte. Det er også tydelig at en del elever har misoppfatninger, spesielt knyttet til algebraiske begreper som likhetstegnet. Forskning viser at diskusjon omkring slike begreper er med på å utvikle forståelsen av begrepene. Derfor ønsker jeg å stille følgende problemstilling: Hvordan kan diskusjon være med på å utvikle en relasjonell forståelse av ekvivalens?

Diskusjon legger til rette for at elever kan dele sine matematiske tanker og ideer. Dette kan være med på å identifisere, belyse og oppklare ulike misoppfatninger som elevene har knyttet til begrepet. En av de vanligste misoppfatningene elever har knyttet til likhetstegnet er at det betyr at det neste som kommer er et svar, eller at det betyr at man skal utføre noe, en operasjon. Elever som har en slik forståelse av likhetstegnet innehar en instrumentell forståelse. De elevene som heller betrakter likhetstegnet som at høyre og venstre side av tegnet er likeverdige, innehar en relasjonell forståelse.

For å belyse ulike sider ved min problemstilling har jeg observert fire elevers diskusjon omkring likhetstegnet. De fire elevene som ble valgt ut til å bygge opp denne diskusjonsgruppa ble valgt ut på bakgrunn av resultatene på en pretest, som ble utført på en litt større gruppe elever. Tre av disse fire elevene har en instrumentell forståelse og en av dem har en relasjonell forståelse. Diskusjonen mellom elevene ble filmet med videokamera og resultatene fra diskusjonen ble analysert. Deretter ble det gjennomført en posttest av samme type som pretesten for å se etter en utvikling i elevenes forståelse. Under diskusjonen ble flere av elevenes misoppfatninger synlige og elevenes forståelse ble utfordret.

Resultatene viste at to av de tre elevene som startet med en instrumentell forståelse av likhetstegnet hadde utviklet denne forståelsen til å være relasjonell i perioden mellom pretest og posttest. En av elevene hadde ikke den samme utviklingen. Den siste av elevene startet med en relasjonell forståelse og denne ble enda tydeligere igjennom diskusjonen og på posttesten. Mine resultater indikerer også at elevene utviklet sine løsningsstrategier etter diskusjonen.

Abstract

Many students find algebra hard to grasp. It is also obvious that some students have misconceptions about algebraic concepts, like the equal sign. Earlier research show that discussion about algebraic concepts plays an important part in developing students conceptual understanding. Therefore my research question is: How can discussion play a part in developing a relational understanding of the equal sign?

Discussion arrange for students to share their mathematical thoughts and ideas. This can be a part of identifying, illuminate and correct the different misconceptions the students possess. One of the most frequent misconceptions that students possess about the equal sign is that it means that ”the answer follows” or that it is an order to ”do something”, an operation. Students that have this definition about the equal sign is characterized as having an instrumental understanding. Those students that consider the equal sign to hold information about the equality between the left and right side, possess a relational understanding.

To shed a light on different aspects of my research question, I have observed a discussion between four students about the equal sign. Those four students was chosen based on results on a written pretest, performed on a bigger group of students. Three of the four students possess an instrumental understanding of the equal sign and one possess a relational understanding. The discussion among the students was taped with a video camera and the results from the session was analyzed. Then the students answered a written posttest of the same kind as the pretest, and their development was assessed. Through the discussion, many of the students’ misconceptions became visable and they were challenged and addressed.

My results show that two of the three students who started out with an instrumental understanding, developed this understanding towards a relational understanding between the pretest and the posttest. One of the students did not show the same development. The last student started out with a relational understanding and this understanding became more and more evident. My results also indicates that the discussion played a role in the development of the students’ solution strategies.

Innholdsfortegnelse

1. Innledning **8**

2. Teori **12**

2.1 MATEMATISK KOMPETANSE 12
2.2 FORSTÅELSESTYPER 13
2.2.1 Instrumentell forståelse *13*
2.2.2 Relasjonell forståelse *15*
2.3 EKVIVALENS 18
2.4 MISOPPFATNINGER 19
2.4.1 Misoppfatninger om ekvivalens *21*
2.5 DISKUSJON SOM ARBEIDSMETODE 23
2.5.1 Diagnostisk undervisning *25*
2.5.2 Adaptiv resonnering *27*
2.6 MOTIVASJON OG LÆRING 27

3. Metode **30**

3.1 FORSKNINGSDESIGN 30
3.1.1 Innhenting av samtykke *30*
3.1.2 Drøfting av forskningsdesign *31*
3.2 UTVALG AV OPPGAVER 36
3.2.1 Utvalg av oppgaver til pretest *36*
3.2.2 Utvalg av oppgaver til diskusjonen *39*
3.2.3 Utvalg av oppgaver til posttest *43*
3.3 UTVALG AV GRUPPE 44
3.4 ANALYSE AV RESULTATER 46
3.4.1 Analyse av resultater fra pretest *46*
3.4.2 Analyse av resultater fra diskusjonsoppgaven *47*
3.4.3 Analyse av resultater fra posttest *47*

4. Resultat **50**

4.1 RESULTATER FRA PRETEST 50
4.1.1 Elevene i diskusjonsgruppa *52*
4.2 RESULTATER FRA DISKUSJONSOPPGAVEN 53
4.3 RESULTATER FRA POSTTEST 59

5. Diskusjon **62**

5.1 DRØFTING AV RESULTATER 62
5.1.1 Elevenes personlige utvikling *62*
5.1.2 Elevenes evaluering av undervisningsopplegget *69*
5.2 HOVEDFUNN 70

6. Konklusjon **74**

6.1 VEIEN VIDERE 75

1. Innledning

Algebra er et stort og svært viktig område i dagens matematikkundervisning. Forskere går så langt som å si at det en "gatekeeper" til videre utdanning og jobbmuligheter, og at vanskeligheter med algebra kan bli en hindring for mange når det kommer til å ta høyere utdannelse (Grønmo & Onstad, 2012; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg & Stephens, 2005; Knuth, Stephens, McNeil & Alibali, 2006). Samtidig opplever mange elever algebra som vanskelig og lite tilgjengelig (Kieran, 1992). Dette knyttes ofte til abstraheringer og generaliseringer som gjøres innen algebra (Utdanningsdirektoratet, 2012). En del elever har også misoppfatninger omkring algebraiske begreper, som sitter dypt og som det kan være vanskelig å oppklare. Dette blant annet fordi det ikke blir tilrettelagt for identifisering og oppklaring av slike misoppfatninger i matematikktimene. Begreper og temaer som det antas at elevene kan, blir ikke tatt opp igjen på en slik måte at misoppfatninger kommer til syne (Knuth et al., 2006), og det er vanskelig å finne tid til å jobbe videre med dem, slik at de kan oppklares. Et av begrepene som elevene har misoppfatninger om er begrepet likhet. I TIMMS-undersøkelsen fra 2007 viser resultatene at norske 8. klassinger presterer lavere enn referanselandene i formell algebra (Grønmo & Onstad, 2012) og en ufullstendig forståelse av viktige algebraiske begrep som likhet og variabel, kan være en av årsakene til dette.

Jeg har selv erfart at elever på ungdomsskolen har misoppfatninger knyttet til likhetsbegrepet. Selv om dette var svært tydelig hos noen, både ved å høre på deres muntlige resonnementer og se deres skriftlige oppgaveløsning, var det ikke lagt inn noe tid til å jobbe mer med forståelsen av dette begrepet, spesielt i fellesskap med resten av klassen. Dette på tross av at forskning viser at likhet som begrep er komplekst og vanskelig for elever å fatte (Knuth et al., 2006) og at en god forståelse av begrepet likhet er grunnleggende for å forstå algebra (Carpenter & Levi, 2000; Falkner, Levi & Carpenter, 1999).

Det vil si at for å forstå algebra er det avgjørende at elever forstår hva som ligger i begrepet likhet. Likhetstegnets viktighet kommer også klart til syne hvis en ser på nærværet av dette tegnet i de aller fleste matematiske situasjoner (Knuth et al., 2006). Det viser seg også at det finnes en tydelig avstand mellom forskningen på hvordan elever lærer algebra og hvordan algebra undervises (Kieran, 2007). Forskning på hvordan elever lærer best blir ikke nært nok knyttet til hvordan det undervises. Jeg ønsker derfor å ta utgangspunkt i undervisningen, som er det som knytter lærer og elev sammen.

For at elever skal få en bedre begrepsforståelse av likhetstegnet er det viktig at de får bruke tid på å fatte det komplekse begrepet, spesielt siden forståelsen av det er så viktig for å kunne forstå mange aspekter ved algebra. Forskning viser at diskusjon omkring matematiske konsepter er med på å bedre begrepsforståelsen. "Discussion allow students to test ideas, to hear and incorporate the ideas of others, to consolidate their thinking by putting their ideas into words, and hence, to build a deeper understanding of key consepts" (McCrone, 2005, s.1). Det er altså mange fordeler med å diskutere og argumentere omkring matematikk og matematiske begreper (Maher, 2005; McCrone, 2005). Derfor ønsker jeg å stille følgende problemstilling:

Hvordan kan elever gjennom diskusjon utvikle en begrepsforståelse av ekvivalens?

En korrekt forståelse av et så viktig begrep vil være avgjørende for algebraundervisningen og også de aller fleste andre delene av matematikkundervisningen. For å undersøke dette vil jeg ta utgangspunkt i en gruppe ungdomsskoleelever på 9. trinn. Elevene som starter på ungdomsskolen har allerede blitt godt kjent med likhetstegnet igjennom årene på barneskolen og de skal nå benytte seg av forståelsen av tegnet når den formelle algebraen introduseres. Ved å ha fokus på elever i denne aldersgruppen vil jeg kunne få informasjon om hvor elevene befinner seg når det gjelder forståelse av begrepet og forhåpentligvis også kunne bidra til å finne ut hva som kan gjøres for å utvikle elevenes forståelse slik at de er bedre rustet til den formelle algebraen som det er så viktig at de forstår. Matematikkfaget har en hierarkisk oppbygning, der all kunnskap knyttes sammen og bygger på hverandre. Et hull i kunnskapen vil kunne påvirke forståelsen av nye elementer som bygger på den kunnskapen som skulle vært der eleven har et hull.

Utgangspunktet for min problemstilling er et ønske om å finne ut om det er mulig å knytte sammen ideer om hvordan elever lærer algebra og hvordan algebra undervises. Og det er nettopp her Kieran (2007) mener at det er en stor avstand. Jeg tar utgangspunkt i en diskusjon mellom elever for å undersøke om denne diskusjonen kan bidra til at elevene utvikler en relasjonell forståelse av begrepet ekvivalens. Ordet utvikling kan ha flere ulike betydninger som danne, frembringe, få frem, progresjon, omdanne, gradvis endre, modne eller legge frem. I denne oppgaven er det et ønske å studere en utvikling mellom to ulike punkter. Denne utviklingen er en omdanning av elevenes forståelse av ekvivalens, fra å være instrumentell til

å bli relasjonell. I den forbindelse defineres så utvikling som en omdanning og en gradvis endring. Men i ordet utvikling ligger det ikke inneforstått årsaker til denne utviklingen. En personlig utvikling innebærer positive endringer hos en selv, innen kunnskap, selvtillit, motivasjon eller andre egenskaper som ledelse og sosial interaksjon.

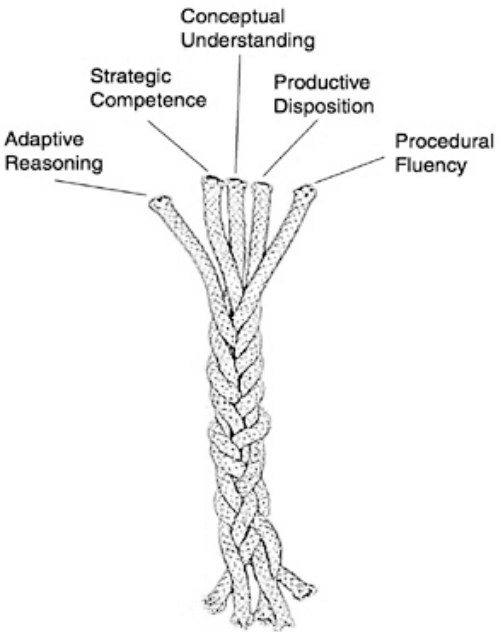
I denne masteroppgaven vil jeg i kapittel 2 ta for meg noen viktige nøkkelbegreper og relevant teori knyttet til forståelse av matematiske begreper, misoppfatninger og diskusjon som arbeidsmetode. I kapittel 3, Metode, vil jeg vise ulike aspekter ved min metode som har et pretest/posttest design. Hoveddelen av metodekapittelet vil allikevel omhandle diskusjon og min observasjon av denne. Dette materialet vil utgjøre hovedtyngden i mine data, som presenteres i kapittel 4, Resultat. Disse resultatene diskuteres videre i kapittel 5, Diskusjon, der mine funn knyttes opp mot teorien som ble presentert i kapittel 2. Avslutningsvis, i kapittel 6 Konklusjon, samles trådene og problemstillingen besvares.

2. Teori

2.1 Matematisk kompetanse

I læreplanen Kunnskapsløftet (Utdanningsdirektoratet, 2012) under grunnleggende ferdigheter i matematikk står det at grunnleggende ferdigheter i matematikkfaget inkluderer ferdigheter som å kunne beskrive, tolke, analysere, argumentere, forklare, vurdere, regne, løse problemer og bruke ulike strategier. Det er store krav å fylle for å kunne si at en elev har grunnleggende ferdigheter i matematikk. Kilpatrick, Swafford & Findell (2001) hevder at det er fem ulike tråder som bygger opp det de kaller "mathematical proficiency" eller matematisk kompetanse. "Recognizing that no term captures completely all aspects of expertise, competence, knowledge, and facility in mathematics, we have chosen mathematical proficiancy to capture what we believe is necessary for anyone to learn mathematics successfully (Kilpatrick et al., 2001, s. 116). De definerer altså matematisk kompetanse som de evnene eller egenskapene som man trenger for å kunne lære matematikk på en god måte.

De trådene som bygger opp den matematiske kompetansen er begrepsforståelse (conseptual understanding), ferdigheter innen prosedyrer (procedural fluency), strategisk kompetanse (strategic competence), adaptiv resonnering (adaptiv reasoning) og evnen til å se matematikken som noe nyttig og meningsfullt (productive disposition). Alle disse delkompetansene av den matematiske kompetansen er nøye flettet sammen (se figur 1).



Figur 1. Matematisk kompetanse består av fem delkompetanser som er flettet i hverandre (Kilpatrick et al., 2001. s 117).

For at elever skal kunne utvikle sin matematiske kompetanse må de kunne utvikle seg på alle områdene, det holder ikke å bare utvikle seg på ett. Disse delkomponentene av matematisk kompetanse fanger mange av de samme ferdighetene som Kunnskapsløftets grunnleggende ferdigheter i matematikk. Det handler om å kunne utføre regneoperasjoner nøyaktig og effektivt, kunne bruke flere ulike strategier i problemløsning, forstå matematiske begreper, formulere problemer, reflektere, vurderer svar, tolke og argumentere for seg. Kilpatrick et al. (2001, s. 116) sier også at "mathematical proficiency is not a one-dimensional trait, and it cannot be achieved by focusing on just one or two of these strands". Det er derfor svært viktig at elever utvikler seg på alle områdene slik at de kan oppnå en matematisk kompetanse. Allikevel stikker begrepsforståelse (se 2.2.2) og adaptiv resonnering (2.5.2) seg ut som to svært viktige kompetanser knyttet til min problemstilling. Begrepsforståelse omfatter en integrert og funksjonell gripen av matematiske konsepter, mens adaptiv resonnering handler om å kunne tenke logisk om forholdet mellom disse begrepene (Kilpatrick et al., 2001). Jeg velger derfor å kun gå i dybden på disse to fordi det er disse to kompetansene som er nærest knyttet opp til min problemstilling, om utvikling av begrepsforståelse ved hjelp av diskusjon. Det er svært viktig å fremheve at disse to alene, som nevnt, ikke kan bygge opp en matematisk kompetanse (Kilpatrick et al, 2001). Men at både erfaring og forskning viser at elever ofte ikke har en fullstendig begrepsforståelse av viktige matematiske begreper, som for eksempel begrepet ekvivalens, og at de heller ikke er vant til å bruke diskusjon som arbeidsmåte i matematikkundervisningen.

2.2 Forståelsestyper

Ordet forståelse kan ha mange ulike betydninger. "Å forstå noe er å kunne assimilere det inn i et eksisterende skjema" (Solvang, 1992, s. 80), og det finnes flere ulike forståelsestyper. Et viktig hovedskille mellom to ulike typer av forståelse er, i følge Skemp (1976), instrumentell forståelse og relasjonell forståelse. Jeg vil nå gå inn på hver av disse for å senere se disse forståelsestypene i sammenheng med forståelse av begrepet ekvivalens.

2.2.1 Instrumentell forståelse

En instrumentell forståelse er av typen: å ha forståelse for prosedyrer og operasjoner. Solvang (1992, s 96) definerer instrumentell forståelse slik: "Vi sier at en elev viser instrumentell forståelse dersom hun på en utfordring bare svarer med en konkretisering". Hvis en elev kan formelen for arealet av en trekant og klarer å finne ut arealet av en gitt trekant der grunnlinjen

og høyden er oppgitt, sier vi at eleven har en instrumentell forståelse. Eleven husker formelen og vet hvordan den skal benyttes for å kunne svare på en gitt oppgave, men vil ikke kunne forklare hvorfor det er slik. En del elever vil heller ikke se vitsen med å arbeide for å oppnå noe mer enn en instrumentell forståelse, spesielt hvis de kan oppnå riktig svar på oppgavene ved å huske prosedyrer og ved å gjenta oppskrifter de har gjort flere ganger før (Skemp, 1976). For det krever nettopp mer arbeid, hvis en skal oppnå en dypere forståelse. Men det har helt klart mange uomtvistelige fordeler (se 2.2.2 Relasjonell forståelse).

I klasserommet møter vi både elever som har relasjonell og instrumentell forståelse og lærere som underviser med ønske om å oppnå enten relasjonell eller instrumentell forståelse. Men det kan oppstå problemer når læreren underviser med tanke på en type forståelse og elevene forventer en annen type forståelse. Det er heller ikke sikkert at elevene ser dette skillet mellom ulike typer av forståelse og det vil kunne føre til en mis-match mellom det eleven får av undervisning og det eleven forventer. Den mest skadelige mis-matchen har vi hvis eleven ønsker å oppnå en relasjonell forståelse, men kun opplever trykk på instrumentell læring. Og det er en tydelig forskjell på undervisning der fokuset er instrumentell forståelse og en undervisning der fokuset er en relasjonell forståelse (Skemp, 1976; Solvang, 1992). Den forskjellen er så stor at Skemp ser det som to ulike fag, ikke bare to ulike former for undervisning.

Det er utvilsomt noen fordeler med å undervise med mål om at elevene skal oppnå en instrumentell forståelse. Skemp (1976) skisserer tre slike fordeler med en slik undervisning.

1. Instrumentell matematikk er som regel lettere å forstå.
2. Belønningen er ofte umiddelbar og vises ved at eleven svarer rett på oppgaver innenfor temaet.
3. Eleven får ofte raskt rett svar og et svar som er til å stole på, fordi mindre kunnskap er involvert.

Allikevel er det ikke slik at disse fordelene er så tungtveiende at det lønner seg på lenger sikt. Ofte er det slik at kortsiktige løsninger ikke er det rette i lengden. Det viser seg også at det er lettere å glemme kunnskap som ikke er relasjonell. Jo mer en må huske uten å knytte det til annen kunnskap, jo lettere er det å glemme det eller huske det feil.

2.2.2 Relasjonell forståelse

En del elever uttrykker at de ønsker å forstå hvorfor ting er som de er i matematikken. Ta utgangspunkt i eksemplet over med arealet av en trekant. De vil ikke slå seg til ro med formelen A = (g x h) / 2, men ønsker å forstå hvorfor arealet av en trekant kan skrives på denne måten. De ønsker å oppnå en relasjonell forståelse. Det er svært viktig å møte slike elever slik at de kan oppnå en slik forståelse. En relasjonell forståelse er en forståelsestype som er dypere og som er koplet til allerede eksisterende kunnskap. "En elev viser relasjonsforståelse dersom hun når hun løser en passende utfordring, kan forklare sammenhengen mellom premissene i utfordringen og den endelige løsningen" (Solvang, 1992, s. 97).

Skemp (1976) ser fire viktige fordeler med en relasjonell forståelse.

1. Den er mer adaptiv til nye oppgaver.
2. Den er lettere å huske, selv om den er vanskeligere å lære. Dette fordi kunnskapen er flettet sammen og koplet med annen beslektet kunnskap. Jo flere knagger å henge kunnskapen på og jo dypere den har blitt forstått, jo lettere er den å hente frem igjen. Kunnskapen kan lettere rekonstrueres hvis den glemmes. Det er fortsatt nyttig med regler og formler slik at en slipper å rekonstruere kunnskapen hver gang. Men det er viktig at formler og regler har blitt forstått.
3. Relasjonell kunnskap kan være effektivt som et mål i seg selv. Det å forstå noe er et mål i seg selv og gir elever en følelse av mestring, og dette gir elever en motivasjon for å lære enda mer. En indre motivasjon er når aktiviteten i seg selv blir så morsom at det er belønning nok (Imsen 2003).
4. Relasjonelle skjemaer er organiske i kvalitet. Med det mener Skemp at det å oppnå en relasjonell forståelse virker som en agent for egen vekst. Altså at det gjør at elevene videre søker egen kunnskap utover dette. De får et ønske om å forstå og vite mer.

Relasjonell forståelse er derfor mer langsiktig, selv om det ofte tar lenger til å lære noe relasjonelt og at det krever mer av både lærer og elev (et eksempel på dette presenteres i 2.5.1 Diagnostisk undervisning). Det er et problem videre i matematikkforløpet at elever har tydelige hull i kunnskapen. Dette kan skyldes at et tema ikke er blitt forstått relasjonelt og at det etter en viss tid glemmes. Men matematikkfaget er bygget opp slik at det meste bygger på hverandre, så det er svært viktig at en ikke får hull underveis. Disse kan det bli svært

vanskelig å tette. Det vil også ta lang tid for en lærer å legge om all sin undervisning og sin tankegang fra å være instrumentell til å bli relasjonell.

Skemp (1976) mener at et viktig skille mellom elever som forstår relasjonelt og elever som forstår instrumentelt, er hva som skjer hvis de gjør noe feil på veien til svaret. De elevene som kun har en instrumentell forståelse vil ofte kunne løse de enkle oppgavene ved hjelp av prosedyrer som tar dem til svaret. Men hvis de går feil på den veien vil de gå seg bort. I denne situasjonen vil elever med en relasjonell forståelse ha et større mentalt kart over ruter som tar dem til svaret. Hvis de går seg bort vil de fortsatt vite hvor de er og derfra finne tilbake til rett vei og hva de må gjøre for å komme videre mot løsningen. Det mentale kartet er uendelig og kan bygges på i alle retninger. Disse fordelene er også nært knyttet til det Kilpatrick et al. (2001) hevder om fordeler knyttet til en god begrepsforståelse (omtaltes i 2.2.2).

En ting det er viktig å notere seg om relasjonell forståelse er at det kan være svært vanskelig å vurdere om en elev forstår instrumentelt eller relasjonelt (Naalsund 2012; Skemp, 1976). Spesielt hvis det skal trekkes konklusjoner om dette ut fra hvordan elever har løst oppgaver skriftlig. Det er ikke nødvendigvis slik at en elev har en relasjonell forståelse selv om eleven produserer svar som ”en må gjøre det samme på begge sider” eller ”at det er likt på begge sider”. Saldanha & Kieran (2005) viser til en studie der det viser seg at selv om elever vet hvordan de skal benytte seg av transformasjoner for å løse enkle lineære likninger, så relaterer de ikke denne kunnskapen til produksjon av ekvivalente uttrykk. Den enkleste måten å finne ut om elever har oppnådd en relasjonell forståelse på, er å ha en diskusjon med eleven. Men det er ikke lett å finne tid til å ta den diskusjonen med alle av elevene i en klasse. Kilpatrick et al. (2001) hevder at en god indikator på om en elev innehar en god begrepsforståelse vil være at eleven kan presentere matematiske situasjoner på ulike måter og vite noe om hvordan ulike representasjoner kan være nyttige i ulike situasjoner. Når en har flere måter å kunne tilnærme seg et problem på, vil det være lettere å kunne løse det og mindre sannsynlig at det vil gjøres grove feil. En god begrepsforståelse vil ha positive ringvirkninger innenfor flere aspekter i matematikkundervisning og utvikingen av matematiske ferdigheter. Derfor mener Kilpatrick et al., (2001, s. 120) at ”conceptual understanding is a wise investment that pays off for students in many ways.

Begrepsforståelse

I Kunnskapsløftet står ikke begrepsforståelse som en del av de grunnleggende ferdighetene, i alle fall ikke direkte. En del av begrepet er bakt inn i ”sette ord på oppdagelser og ideer” og ”benytte seg av matematiske symboler og det formelle språket i faget”. Det står også videre at en skal kunne tolke og benytte seg av matematiske tekster som inneholder uttrykk og symboler (Utdanningsdirektoratet, 2012). Men siden begrepsforståelsen er en så viktig del av å kunne forstå matematikk og for å tilegne seg en matematisk kompetanse, burde det ikke da være en eksplisitt del i de generelle ferdighetene? Det jeg selv erfarte i undervisning var at mange elever ikke hadde en fullstendig forståelse av begrepet likhet eller ekvivalens. Dette gjorde at elevene både førte matematikkoppgavene feil, brukte likhetstegnet på feil sted og hadde problemer med å løse oppgaver nøyaktig og effektivt i mange temaer i matematikkfaget. Jeg så eksempler på dette både i prosentregning og spesielt innen algebra. Der er forståelsen av likhet og ekvivalens svært viktig for å kunne løse algebraiske oppgaver og likninger. Jeg kommer nærmere tilbake til dette i kapittel 2.3.

Kilpatrick et al. (2001, s.118) definerer begrepsforståelse som ”… an integrated and functional grasp of mathematical ideas. Students with conceptual understanding know more than isolated facts and methods”. Når elever har god begrepsforståelse vil de se begrepet i en større sammenheng og de vil kunne kople andre ting de har lært og forstått til dette. Det gjør det også lettere og forstå nye ting som er knyttet til begrepet. Elevene vil ha flere knagger å henge den nye kunnskapen på. Når et begrep eller en metode er fullstendig forstått vil elevene selv kunne rekonstruere kunnskapen hvis den har blitt glemt. En god begrepsforståelse dreier seg ikke om å pugge formler eller definisjoner, men mer om å kunne konstruere disse formlene selv ved en god forståelse av begrepet eller metoden. Med dette mener jeg at hvis elevene skal beregne areal av en trekant, vil formelen $A = (g \times h)/2$ lett kunne rekonstrueres hvis elevene har gode kunnskaper om begreper som areal, trekant, firkant, grunnlinje, høyde og så videre. Når ferdigheter læres uten forståelse læres den som isolerte biter av kunnskap. Den vil ikke være en del av det store bildet og vil derfor kunne oppfattes som meningsløs og uviktig. Den kunnskapen som føles viktig for oss, vil være en del at et nettverk med kunnskap, det Piaget kaller skjemaer som er knyttet sammen (Solvang, 1997) og Brekke (2002) kaller slike nettverk for begrepsstrukturer. Det at den er del av et slikt nettverk vil også gjøre at den ikke vil glemmes så lett og at den lettere kan hentes frem. Brekke sier også at det

er ”strukturene [les: begrepsstrukturene/skjemaene] som gjør matematikken meningsfull og støtter opp under ferdighetene. Det at slike strukturer eksisterer, viser seg blant annet ved at en har evne til å rette noe når en har husket feil, og å overføre eller tilpasse prosedyrer en har lært i en sammenheng, til nye situasjoner” (Brekke, 2002, s. 5).

Det er også slik at jo flere matematiske begreper elever forstår, jo lettere er det å se matematikken som forståelig (Kilpatrick et al., 2001). Jeg ser også klare paralleller til språklære og det å kunne lese. Man må forstå hva ordene betyr for å kunne få en mening ut av en setning. Hvis man kun kan bokstavene og ikke forstår meningen med ordene, vil en setning kun bli stående som en rekke av bokstaver. Det vil også kunne gi opphav til en del feiltolkninger eller gjetninger hvis man kun forstår noen av ordene i en setning. Det vil da være vanskelig å trekke en kvalifisert gjetning av hva hele setningen betyr. I den forbindelse er det heller ikke rart at elever gjør feil i sine løsninger hvis de ikke forstår det matematiske språket og har et godt grunnlag av forståtte matematiske begreper.

For å bedre elevers begrepsforståelse er det viktig at de får forklare, argumentere og reflektere over det de har lært om begrepene og hvordan de henger sammen med andre ting de har lært (Brekke, 2002; Kilpatrick et al., 2001; McCrone 2005). Og jo flere begreper de har kunnskap om og ikke minst forståelse for, jo mer forståelig vil matematikkfaget virke. Her er det passende å ta opp igjen et viktig sitat fra innledningen ”Discussion allow students to test ideas, to hear and incorporate the ideas of others, to consolidate their thinking by putting their ideas into words, and hence, to build a deeper understanding of key consepts” (McCrone, 2005, s.1). I sammenheng med dette sier Brekke (2002) at for å utvikle sin relasjonelle begrepsforståelse i matematikk er det bedre å arbeide grundig med et fåtall velvalgte aktiviteter enn å gjennomføre en lang rekke øvelser. Dette gjelder da spesielt for utvikling av begrepsforståelse og ikke nødvendigvis for innlæring av faktakunnskaper og ferdigheter.

2.3 Ekvivalens

Som nevnt tidligere er ekvivalensbegrepet ett av de viktigste matematiske begrepene vi benytter i dag. Dette kapittelet vil omhandle dette begrepet generelt, mens jeg senere (i kapittel 2.4) vil komme tilbake til misoppfatninger, spesielt knyttet til dette begrepet. Ordet ekvivalens kommer fra de latinske ordene aequus (lik) og valere (å gjelde) og betyr likeverdig. Likhetstegnet er et matematisk symbol som benyttes i svært mange områder innen

matematikk, kjemi og fysikk og andre fagområder som benytter matematiske beregninger som hjelpemiddel, og det å ha en god forståelse for at slikt begrep er utrolig viktig. Likhetstegnet er et symbol som viser ekvivalens. Selv om viktigheten av dette begrepet nesten sier seg selv, er det blitt gjort lite forskning på det, spesielt på rollen det har innen elevers forståelse av algebra og transformasjoner i algebra (Saldanha & Kieran, 2005). Likhetstegnet og forståelsen av det påvirker også mange deler av elevers problemløsningsevner i matematikk. ”The data suggests that students’ understanding of these core ideas (equivalence and variable) influenses their success in solving problems, the strategies they use in the solution processes, and the justification they provide for their solutions” (Knuth et al., 2005, s.68). Forståelsen av begrepet ekvivalens påvirker både strategiene elevene bruker for å løse problemer og hvordan de begrunner sine løsninger. Det viser seg også at en innsats for å øke elevers forståelse av likhetstegnet, vil gjøre at elever presterer bedre i algebra (Knuth et al., 2006).

Mange lærere på ungdomsskolen forventer at elevene forstår begrepet likhet, siden elevene har vært kjent med dette algebraiske begrepet over så lang tid. Men det er ofte ikke tilfellet. En stor andel av elever har ikke en fullstendig forståelse av begrepet likhet. Samtidig sier forskere at en god forståelse av begrepet likhet er grunnleggende for å forstå algebra (Falkner et al., 1999). Likhetstegnet som symbol introduseres tidlig på barneskolen og etter at det er introdusert blir det ikke tatt eksplisitt opp igjen på senere stadier. Dette til tross for at flere forskere hevder at likhet som begrep er komplekst og vanskelig for elever å fatte (Knuth et al., 2006), og at å få elever til å utvikle en fullstendig og korrekt forståelse av likhet krever en dedikert innsats over lenger tid (Falkner et al., 1999).

2.4 Misoppfatninger

I denne oppgaven tar jeg for meg elevers forståelse av begrepet likhet, da er det også naturlig å ta opp hva det er ved begrepet som mange elever ikke forstår og hvilke misoppfatninger de har knyttet til dette begrepet. Med misoppfatninger menes ufullstendige tanker knyttet til et begrep (Brekke, 2002). Misoppfatninger manifesterer seg og kommer ofte til syne ved at elever gjør feil fordi de har en ufullstendig forståelse av et begrep. Det er viktig å merke seg at det at elever gjør feil, ikke bør bety at de har misoppfatninger. Ofte skjer det tilfeldige feil, disse kommer ikke på grunn av at elever har misoppfatninger. Feil som gjøres på bakgrunn av misoppfatninger er systematiske og de skyldes ofte at elever overgeneraliserer tidligere kunnskaper til nye områder der de ikke gjelder lenger. Tilfeldige feil kan for eksempel være at en oppgavetekst blir lest feil etter at eleven gjør slurvefeil i utregningen.

MacGregor & Staceys (1997) studie viser at elever begynner å blande inn ny læring fra andre deler av matematikken og de har vanskeligheter med å godta at svaret på en oppgave kan være et uttrykk. Noen elever prøver å manipulere med uttrykket de finner for å kunne forkorte bort noe, slik at de kommer til et konkret svar. Andre elever blander inn elementer fra andre områder, som for eksempel Pytagoras. Oppgaven går ut på at elevene skal skrive et uttrykk for omkretsen av en trekant der alle sidene er x cm lange. Et flertall av elevene som svarte på oppgaven, ga x^3 som svar. På en tilsvarende oppgave skulle elevene regne ut omkretsen av en femkantet figur der tre av sidene var oppgitt til å være 5 cm, 8, cm og 5 cm. De to siste sidene var x cm lange. Elevene gjorde de samme her. De svarte $x^2 + 5^2 + 8$. De blir usikre på hvordan de skal skrive x to ganger, og dette smitter også over på at de blir usikre på hvordan de skal skrive 5 to ganger. Akkurat som om svaret ikke kan være så enkelt som å legge sammen eller multiplisere, nå som de går i 10.klasse. Dette til tross for at elevene enkelt klarer å finne omkretsen av enkle figurer når alle sidene er oppgitt. I følge MacGregor og Stacey (1997) har elevene en forventning om at de bør kunne bruke mer avansert kunnskap, og at dette er noe læreren også forventer.

MacGregor & Stacey (1997) går også inn på misoppfatninger som kan knyttes til en bestemt lærer eller til undervisningsmateriellet. Den andre figuren var femkantet med form som et hus (to 90 graders vinkler) der sidene var 5 cm, 8 cm, 5 cm, x cm og x cm. Flere av elevene antok at x var 1, satte inn dette for x og så regnet ut omkretsen i cm. Dette i forbindelse med at læreren har sagt til elevene ting som ”hvis det ikke står noen verdi foran x, så betyr dette 1x, og at x er lik x^1”. Elevene var da usikre på hvordan de skulle finne omkretsen, husket at læreren hadde sagt noe om x og 1 og satte da inn dette. Som lærer har man et stort ansvar og det man sier kan være rot til misoppfatninger hos noen elever. Derfor er det svært viktig at elevene får arbeide, diskutere og reflektere over den informasjonen som blir gjennomgått slik at slike enkle misoppfatninger lett blir identifisert og oppklart.

Undervisningsmateriellet kan også være med på å skape og bygge opp under misoppfatninger. I studien til MacGregor og Stacey (1997) var det én skole der elevene hadde en betydelig større andel av elever med vanskeligheter i algebra. Denne skolen hadde konsekvent benyttet eksempler og undervisningsmateriell som for eksempel at 5c står for ”5 cats” og A står for areal. Elevene hadde da vanskeligheter med å akseptere at hvilken som helt bokstav kunne benyttes og at bokstavene var variabler. Misoppfatningene elevene har knyttet til algebra, gjør

det vanskelig å forstå uttrykk som inneholder bokstaver. Mange av disse misoppfatningene er svært seiglivede og kan vare over svært langt tid hvis de ikke identifiseres og rettes opp. Algebra ses ofte av elever som den delen i matematikken som er mest unyttig og minst knyttet opp til resten av faget (MacGregor & Stacey, 1997). Jeg vil videre kun konsentrere meg og misoppfatninger knyttet til begrepet likhet og derfor også til likhetstegnet, symbolet som viser likhet. Men det er tydelig at mange elever også har misoppfatninger knyttet til variabelbegrepet.

2.4.1 Misoppfatninger om ekvivalens

Det kan være at den, ofte ensartede formen for oppgaver som likhetstegnet introduseres med kan være med å skape misoppfatninger omkring begrepet. Dette ved å regne mange oppgaver av typen 3 + 4 = , 7 - 2 = , 6 x 5 = og så videre. Misoppfatningene viser seg også tydelig i flere ulike klassetrinn med det som kalles ”equality strings”. Det vil si utregninger av typen 3 + 5 = 8 + 2 = 10 + 5 = 15, der mange mellomregninger er utført i en lang rekke med likhetstegn imellom hvert ledd, og disse leddene ikke er lik hverandre. Det var nettopp dette jeg erfarte i mine første møter med undervisning. Forskning viser også at mange elever ikke har en riktig forståelse av begrepet. ”That many students lack a sophisticated undersanding of the equal sign and that their understanding of the equal sign is associated with performance on equation-solving items” (Knuth et al., 2006, s. 297). I og med at det forventes at elevene har en god forståelse av begrepet ekvivalens fra tidligere, blir der heller ikke arbeidet videre med begrepet for eksempel på ungdomsskolen. Og selv om elevene møter likhetstegnet i neste alle matematikkoppgaver vil ikke forståelsen av likhetstegnet bli bedre. Dette viser også funnene til Knuth et al. (2006). Elevene i studien viser ingen økt grad av relasjonell forståelse for likhetstegnet, over tiden studien strekker seg over.

Falkner et al. (1999) utførte en studie der de undersøkte 2. klasse-elevers forståelse av begrepet likhet. Elevene skulle løse oppgaver av typen 8 + 4 = $\square$ + 5 og finne ut hvilket tall som skulle stå inne i firkanten. De aller fleste sa 12, nemlig svaret hvis du legger sammen tallene på venstre side. Noen svarte også 17, de la altså til det tallet som stod på høyre side. Elevene hadde tydelige misoppfatninger om likhetsbegrepet allerede. De utførte også undersøkelser med barn helt ned i barnehagealder. Selv disse barna viste at misoppfatninger begynte å rotfeste seg. I løpet av et skoleår ga læreren i 2. klassen elevene tilsvarende oppgaver, samt andre oppgaver der de skulle drøfte om følgende setninger var sanne eller usanne; 4 + 5 = 9 , 12 – 5 = 9 , 7 = 3 + 4, 8 + 2 = 10 + 4 , 8 = 8. Klassen diskuterte seg frem

til den riktige løsningen sammen med læreren, og de utviklet sakte, men sikkert, sin forståelse av likhetsbegrepet. Elevene viser altså tegn til å danne misoppfatninger om begrepet svært tidlig. Derfor bør lærere være opptatt av å hjelpe elevene til en fullstendig forståelse av symbolet så snart som det introduseres. Hvis ikke så kan dype misoppfatninger slå rot (Falkner et al., 1999).

En vanlig misoppfatning når det gjelder likhetstegnet er at elever ser på likhetstegnet som et symbol som betyr "her kommer svaret" (Carpenter & Levi, 2000; Knuth et al., 2005; Knuth et al., 2006) i stedet for et symbol som viser ekvivalens. Disse elevene ser på likhetstegnet som et operasjonelt symbol, i stedet for et relasjonelt. Det vil si at de ser på likhetstegnet som et symbol som betyr gjør noe (Booth, 1988; Carpenter & Levi, 2000), i stedet for et symbol som viser relasjonen mellom høyre og venstre side, nemlig at de er like. Noen elever har også misoppfatninger knyttet til likhetstegnet som et symbol med en bestemt retning (Booth, 1988). Det vil si at bruken av et slik tegn peker mot et svar som må stå på høyre side av tegnet. Som nevnt kan det være slik at den formen som mange av de tidlige regneoppgavene blir gitt på, bidrar til denne formen for misoppfatning. Det er ikke alltid denne typen misoppfatninger omkring likhetstegnet kommer til syne de første årene. Da er ofte mange av oppgavene på denne formen, og misoppfatningen får ingen konsekvenser. Det er først når elevene skal løse likninger og arbeide med algebraiske uttrykk at slike misoppfatninger kan bli oppdaget. En relasjonell forståelse er svært viktig for at likninger og transformasjoner av algebraiske uttrykk skal gi mening (Knuth et al., 2005).

En del elever klarer også å utføre de grunnleggende regneoperasjonene som trengs for å kunne løse likninger, noe som kan tyde på at de har en relasjonell forståelse av likhetstegnet. Allikevel viser de at denne forståelsen ikke er fullstendig. De har nemlig vanskelig for å forstå at uttrykkene er ekvivalente. Knuth et al. (2005) hevder at en relasjonell forståelse av likhetstegnet påvirker elevenes prestasjoner i oppgaver som likninger, både når det gjelder dømmekraften de bruker i forhold til problemet og når det gjelder strategiene de bruker. De elevene som har en relasjonell forståelse av begrepet presterer bedre, spesielt når problemet er på den formen der en relasjonell forståelse er tydelig. De ser også at det er tydelig flere elever på ungdomskoletrinnene som har en instrumentell forståelse, sammenliknet med en relasjonell forståelse.

Det er ikke mulig å unngå at misoppfatninger dannes hos elever. Det er en naturlig del av den læringsprosessen de går igjennom. ”Nye ideer blir tolket ut fra eksisterende erfaring” (Brekke, 2002, s. 11). Derfor er det svært viktig at elever får arbeidet med nye begreper og metoder på en god måte slik at ikke disse misoppfatningene slår rot, og dermed blir mye vanskeligere å kvitte seg med. Det viser seg at våre vanlige undervisningsmetoder ofte er ineffektive når det gjelder å få has på en del misoppfatninger. ”Dette gjelder både metoder hvor en ignorerer misoppfatningene, og metoder hvor en forsøker å unngå misoppfatninger ved å definere begrepene nøyaktig og fullstendig ved den første innføringen” (Brekke, 2002, s. 11). Derfor trenger en nye metoder for å oppklare dype misoppfatninger. Som nevnt tidligere er det også viktig at man arbeider med dette over tid, siden det viser seg at en god introduksjon av ett nytt begrep nødvendigvis ikke er nok for å unngå at misoppfatninger dannes.

2.5 Diskusjon som arbeidsmetode

I denne oppgaven ønsker jeg videre å knytte sammen begrepsforståelse av ekvivalens og diskusjon som arbeidsmetode, fordi forskning viser at diskusjon har en positiv innvirkning på begrepsforståelsen (McCrone, 2005). Det viser seg også at elever ikke har en relasjonell forståelse av ekvivalens, et begrep som er avgjørende for forståelsen av algebra (Knuth et al., 2006; MacGregor & Stacey, 1997). Dette kapittelet vil derfor omhandle ulike sider ved diskusjon som arbeidsmetode.

Forskning viser at elever vil ha et utbytte av at det skjer et skifte i tradisjonell matematikkundervisning til å inkludere mer tid til diskutere og reflektere omkring viktige matematiske begreper (Brekke, 2002; McCrone, 2005). Med diskusjon menes den faglige meningsutvekslingen i en gruppe, for eksempel mellom noen elever eller hele klassen samlet. Et slikt skifte i undervisningsform kommer til å kreve mye av både elever og lærere, spesielt i innføringsfasen. Det vil være slik at læreren er nødt til å endre sitt undervisningsopplegg i stor grad, og dette vil både ta tid og krefter. I tillegg til at nye arbeidsopplegg må lages krever det også en endring i lærerens rolle i undervisningen. Læreren må være den personen som fasiliterer og bidrar til fruktige diskusjoner mellom elevene. Dette vil også kreve en endring i lærerens måte å stille spørsmål på. Det å stille undersøkende spørsmål og hjelpe elevene på vei i sin egen utforskende læring er ikke bare lett og det vil kreve endel øvelse. Knuth et al., (2006) oppfordrer lærere til å lete etter muligheter i undervisningssituasjoner der elevene kan ha diskusjoner om likhetstegnet og legge inn tid til slike diskusjoner i sin undervisningsplan. Dette vil kunne bidra til at eleven utvikler en relasjonell forståelse av begrepet.

En endring av arbeidsmetode vil også være utfordrende for elevene. Det krever også elevens tid og krefter for å sette seg inn i en slik måte å jobbe på. Det vil være uvant for elevene og noen vil kanskje også motsette seg dette. Men elevene trenger også bare øvelse. For endel elever vil det også kunne føles som rart å utlevere sine resonnementer høyt å klassen, måtte høre på at deres resonnementer blir stilt spørsmål ved og kanskje også måtte forsvare sin tankegang. Etter hvert vil elevene få eierskap til sine bidrag i diskusjonen og det vil bli lettere for dem å rettferdiggjøre sine resonnementer. For at denne meningsutvekslingen og disse diskusjonene skal fungere er det viktig at lærere og elever samarbeider med å utvikle normer for diskusjonene, utvikle sine evner for å verbalt uttrykke sine matematiske ideer og å lære hva som er forventet av et fullverdig medlem i diskusjonene (McCrone, 2005).

Weber, Maher, Powell & Lee (2008) peker på en viktig ting som kan gjøre at elever blir mer mottakelige for å dele sine argumenter med andre. Elever er vant til at læreren er autoriteten i klasserommet og at det er lærerens oppgave å vurdere svarene og argumentene til elevene. Læreren er det overhodet som bedømmer det elevene sier. Dette vil kunne føre til at elevene kvier seg for å delta i diskusjoner. Både fordi de ikke ser det som sin oppgave å utfordre andre elevers svar, det er lærerens oppgave, og fordi at de er redd for at læreren skal bedømme det de selv sier og at de skal måtte stå til ansvar for noe læreren mener er feil. Det er derfor viktig at elevene får tid til å venne seg til at det er de som er hovedaktørene i disse diskusjonene, at læreren ikke er en dømmende makt som vurderer korrektheten i alt som sies og at det er lov å komme med konstruktive og utfordrende spørsmål til andre elevers konklusjoner og resonnementer. Det at elevene er villige til å delta i diskusjonen og utfordre hverandres løsninger og resonnementer er avgjørende for å få til en god og lærerik diskusjon.

McCrones studie viste en tydelig endring både hos elevene og læreren. Etter at elevene hadde blitt vant til arbeidsmåten tok læreren en mer tilbaketrukket rolle i diskusjonene. Mens læreren i starten var en svært synlig deltaker i diskusjonene og aktiv i å vise elevene mulige måter å spørre utforskende spørsmål på og mulige måter å svare på, tok læreren seinere en rolle der hun var mer tilbaketrukket og bidro kun til å holde liv i diskusjonene, hjalp til å tolke elevenes løsninger og oppmuntrer dem til å utforske hverandres løsninger videre. Denne arbeidsmåten vil også påvirke elevenes relasjonelle forståelse av begreper på en positiv måte. Utviklingen av matematiske begreper blir forsterket av klasserom der elever uttrykker ideer, utfordrer andres ideer og presenterer overtalende argumenter (McCrone, 2005).

En vanlig matematikktime er vanligvis bygget opp av en del tavleundervisning, der nytt stoff gjennomgås, og en del oppgaveløsning der elever trener ferdigheter, mens det er satt av mindre tid til å diskutere og reflektere temaene som tas opp (Grønmo et al., 2012), selv om det, som tidligere nevnt, er kjent at diskusjon om matematiske begreper, er med på å utvikle en mer omfattende og korrekt forståelse av viktige begreper. Dette viser også resultatene fra TIMSS 2007. Resultatene viser at for 8. trinn består matematikkundervisningen som regel av at læreren gjennomgår teori på tavla, etterfulgt av individuell oppgaveregning. Det gir lite tid til muntlig trening i gruppearbeid eller i helklassesamtaler. Det er også funnet at undervisningen i noe mindre grad er knyttet til dagliglivet enn i andre land (Bergem & Grønmo, 2009).

2.5.1 Diagnostisk undervisning

Diagnostisk undervisning kan brukes som arbeidsmåte i matematikkundervisningen og den tar sikte på å bygge opp solide begreper som er viktige i et langtidsperspektiv (Brekke, 2002). I norsk skole er det tydelig at undervisningen legger mer opp til å lære elever faktakunnskaper og trene på ferdigheter, enn å bygge opp begrepsstrukturer. Selv om forskningen viser at denne arbeidsmåten ikke er tilstrekkelig når det gjelder å utvikle en relasjonell forståelse av begreper hos elevene. Det som glemmes er at elever trenger tid til å stoppe opp ved begreper, diskutere og argumentere for å bedre sin begrepsforståelse (Brekke, 2002; McCrone 2005).

Diagnostisk undervisning bygges opp på bakgrunn av det vi vet om elevers misoppfatninger og delvise begreper. Undervisningen skal få frem elevers misoppfatninger og arbeide med begrepet fra ulike vinkler slik at elevene får utfordret sin forståelse. Det er viktig at denne typen undervisning skaper det Brekke (2002) kaller kognitive konflikter hos elevene. Det vil si at elevene skal møte konflikter der en ser utilstrekkeligheten av sine egne definisjoner og disse skal være med på å rydde misoppfatningene av veien. Et eksempel på dette kan være kan være slik Falkner et al. (1999) utfordret en klasse med ulike aspekter ved likhetstegnet. I deres studie fikk elevene blant annet i oppgave å drøfte om følgende utsagn var korrekte:

$4 + 5 = 9$ $\quad$ $12 - 5 = 9$ $\quad$ $7 = 3 + 4$ $\quad$ $8 + 2 = 10 + 4$

$7 + 4 = 15 - 4$ $\quad$ $8 = 8$

Elevene fikk da utfordret mange sider ved sin forståelse av likhetstegnet og utfordret sine egne definisjoner. Det å snu oppgavene en annen vei i forhold til det elevene var vant til skapte kognitive konflikter hos mange. Elevene hadde en oppfattelse om at $7 = 3 + 4$ var riktig, men feil vei. Dette viser et eksempel på det Booth (1988) nevner som en vanlig misoppfatning, nemlig at likhetstegnet er et symbol med en bestemt retning. Dette arbeidet klassen videre med vet at læreren stilte seg opp mellom to elever som holdt bøker i hendene. Eleven på den ene siden holdt syv bøker i begge hendene, mens den andre eleven holdt fire bøker i den ene hånden og tre bøker i den andre. Elevene hadde så en diskusjon om de to elevene hadde like mange bøker og hvorvidt det spilte noen rolle om hvilken side av læreren de sto på, når det gjaldt antall bøker de hadde.

Brekke (2002) inndeler den diagnostiske undervisningen i faser som inkluderer identifisere misoppfatningene elevene har, tilrettelegge undervisningen slik at misoppfatningene blir fremhevet og skape slike kognitive konflikter, løse disse konfliktene gjennom diskusjon og refleksjon og ikke minst bruke det utvidete (eller nye) begrepet i andre sammenhenger. Det viser seg også at de elevene som har blitt engasjert i diskusjoner og refleksjoner omkring begrepet ikke bare har fått et kortsiktig utbytte, men et langsiktig et. Flere studier har blitt gjort der elever er delt inn i konfliktgrupper og vanlige lærebokgrupper, der konfliktgruppen har jobbet med begreper på den nevnte måten, mens lærebokgruppen ikke har blitt engasjert i slike diskusjoner. En før- og etterprøve blir gitt og begge gruppene viser en økning. Den største forskjellen ligger i en ny etterprøve som blir gjort en stund i etterkant. Da viser det seg at elevene som hadde deltatt i diskusjoner som skapte kognitive konflikter hadde opprettholdt sine resultater over tid. Lærebokgruppen hadde gått kraftig tilbake (Brekke, 2002). En interessant oppdagelse som også ble gjort var at elevene ikke ble påvirket av å få presentert en hel masse misoppfatninger som de i utgangspunktet ikke hadde. En skulle kunne være redd for at elever som ikke har en type misoppfatning, skal bli forvirret hvis de blir presentert for flere slike misoppfatninger, men det var ikke tilfellet.

Tall fra TIMSS 2011 (Grønmo et al., 2012) viser at lærere i større grad (enn i 2007) bruker diskusjon for eksempel i forbindelse med lekser. Det er en relativt stor økning i antall lærere som svarer at de alltid eller nesten alltid bruker lekser som grunnlag for diskusjoner omkring faget. Og det er en stor nedgang i de lærerne som bruker lekser som bakgrunn for å sette karakterer i faget. Feilene og utfordringene med leksene brukes for å fremme læring, blant annet ved at feilene blir temaer for diskusjon. Dette er en positiv trend, der det viktigste med

leksene ikke er at læreren skal sjekke hvor mange feil som har blitt gjort, men at disse feilene skal utnyttes til fordel for elevene. Det er som om det har blitt enda tydeligere at lekser er til for elevene, og ikke lærerne. Og lærerne må ha et mål om å unngå at elever kun har en instrumentell forståelse av begreper. Det er relasjonsforståelse som gir elevene et utgangspunkt for nye erobringer (Solvang, 1992).

2.5.2 Adaptiv resonnering

Adaptiv resonnering er en svært viktig komponent av det Kilpatrick et al. (2001) en matematisk kompetanse og handler om evnen til å tenke logisk om forhold mellom begreper og bestemte situasjoner. Et slikt resonnement kan regnes som fasiten på en oppgave. Det er slik at en elev ikke trenger å sjekke sitt svar mot læreren, læreboken eller andre elevers svar, men kan kun se på sitt eget resonnement. Hvis svaret følger av et sett med logiske antakelser og at resonnementet er gyldig, så er svaret rett.

Adaptiv resonnering manifesterer seg ved at elever må rettferdiggjøre og argumentere for sin løsning. Det er jo alltid et eller annet resonnement bak en løsning, men gyldigheten blir tydeligere når man er nødt til å forsvare sitt matematiske resonnement og sette dette på prøve. En god følge av å måtte argumentere for sitt resonnement vil være at eleven vil kunne oppnå en bedre begretsforståelse. ”Students need to be able to justify and explain ideas in order to make their reasoning clear, hone their reasoning skills, and improve their conseptual understanding (Kilpatrick et al., 2001, s. 130). Det er heller ikke nok å begrunne sitt resonnement en gang. Det må gjøres over tid, slik at man kan oppnå en matematisk kompetanse. Elever må benytte seg av nye begreper og prosedyrer over lenger tid, og knytte disse til andre begreper og prosedyrer som de allerede har forstått.

2.6 Motivasjon og læring

”Motivasjon defineres gjerne som det som forårsaker aktivitet hos individet, det som holder denne aktiviteten ved like og det som gir den mål og mening. Motivasjon står derfor helt sentralt når det gjelder å forstå menneskelig atferd” (Imsen, 2003, s. 226). Motivasjonen kan altså forstås som den drivkraften som får oss til å gjøre noe. Vi mennesker opplever situasjoner der vi er motiverte eller umotiverte hele tiden. Og det er ikke alltid like opplagt hva som gjorde at vi akkurat den gangen var svært motivert og en annen gang ikke klarer og motivere oss selv om en prøver. Mange faktorer spiller inn på motivasjonen. Dette ser vi også hos elevene.

Det er vanlig å dele motivasjon inn i indre og ytre motivasjon. Ytre motivasjon er når motivasjonen kommer av ytre faktorer som for eksempel ulike belønninger, unngå straff, gode karakterer, et ønske om å gjøre foreldre eller lærere stolte eller få anerkjennelse av medelever. En del elever blir også særlig motivert av det som kan være nyttig i fremtiden, for eksempel i den jobben man ønsker å få. Indre motivasjon er mer et driv der ønsket og å lære er selve motivasjonen. Dette gir ofte en følelse av å være i en flytsone der aktiviteten blir gøy når en lærer, og man har lyst til å lære mer. Den indre motivasjonen kan også drives av en nysgjerrighet om å lære, oppdage og finne ut av ting. En indre motivasjon er når aktiviteten i seg selv blir så morsom at det er belønning nok (Imsen, 2003). De fleste opplever nok å bli motiverte av både indre og ytre faktorer, og har en begge formene for motivasjon er det kanskje da en opplever og være aller mest motivert. Allikevel mener mange at det er den indre motivasjonen som er den mest drivende og den som fører til størst mulig aktivitet hos mennesker.

3. Metode

3.1 Forskningsdesign

En forskningsprosess starter gjerne med et ønske om å få vite mer om et konkret tema, og foremålet med denne studien er å undersøke hvordan diskusjon kan bidra til å utvikle den relasjonelle forståelsen av ekvivalens. En forskningstilnærming er en grunnleggende måte å tilnærme seg det valgte forskningsfeltet på (Østergaard, 2010). Eksempler på ulike forskningstilnærminger eller forskningsstrategier er aksjonsforskning, survey, casestudie, eksperiment og kildeanalyse. Den valgte forskningstilnærmingen i denne studien er et slags kvalitativt eksperiment. "Eksperimentet fokuserer på virkning av en eller noen få variabler under kontrollerte betingelser" (Østergaard, 2012, s.3). Eksperimenter benyttes ofte innen naturvitenskaplige fagområder, men eksperimentelle strategier har også blitt mer og mer benyttet i psykologisk og pedagogisk forskning. Denne studien har et eksperimentelt design ved at den tar utgangspunkt i en gruppe elevers forståelse av likhetstegnet. For å få en forståelse av dette utgangspunktet gjennomføres en pretest. Deretter studeres en mulig endring i forståelsen til en gruppe elever, etter gjennomføring av en faglig diskusjon. Etter diskusjonen gjennomføres en posttest. Min forskningsmetode består altså av et pretest/posttest-design. I denne lille studien er det ikke mulig å kontrollere alle de andre betingelsene rundt opplegget, men det vil være mulig å se en indikasjon på hvilken effekt det endrede opplegget vil ha på elevenes forståelse (dette diskuteres videre i kapittel 5. Diskusjon).

Studien vil ta utgangspunkt i observasjon av en diskusjon knyttet til begrepet ekvivalens og den vil frembringe en del kvalitative data. Når en observasjon gjennomføres er det ønskelig at den forskeren som skal analysere dataene, er tilstede under observasjonen (Brinkmann & Tanggaard, 2012). Da vil denne forskeren ta del i situasjonen, mens den foregår. Derfor vil jeg være med som deltakende observatør, slik at de spørsmål som måtte dukke opp underveis kan tas opp og at situasjonen kan oppleves i det den utspiller seg.

3.1.1 Innhenting av samtykke

Før innsamlingen av data kunne starte måtte det innhentes samtykke fra elevenes foreldre og foresatte. Elevene i den utvalgte klassen var 25 i antall og var en nivådelt klasse på middels nivå fra 9. trinn (utvalget forklares videre i kapittel 3.3 Utvalg av gruppe). Samtykkeskjemaer (se vedlegg 1) ble delt ut i klassen og elevene ble informert om prosjektet muntlig av deres

lærer. Elevene virket positive til prosjektet, men det skulle vise seg å være svært vanskelig for læreren å få samtykkeskjemaene levert inn igjen, selv fra de elevene som kunne tenke seg å delta i prosjektet. Tilslutt var det 9 elever som leverte inn samtykkeskjema og samtidig ønsket å delta i studien. Dette var mange færre enn ønskelig. Flertallet av disse elevene var elever som faglig lå i det øvre sjiktet i sin matematikkgruppe. I og med at denne studien tar utgangspunkt i de elevene som mangler en relasjonell forståelse av likhetstegnet hadde det vært ønskelig å fått et bredere spekter av elever til å delta. Men det var også svært viktig å ikke presse elevene for hardt til å delta, da det var tydelig gitt beskjed til dem om at studien var frivillig og det skulle den også være.

I og med at det var færre som ville delta enn både forventet og ønsket ble det nødvendig å kutte ut en planlagt pilotgruppe som skulle løse diskusjonsoppgavene før diskusjonsgruppen. Pilotgruppen var i hovedsak til for å teste ut om oppgavene var gode til å skape kognitive konflikter hos elevene og som øvelse for meg som deltakende observatør og som øvelse til å stille gode spørsmål. Det var ønskelig at også pilotgruppen skulle bestå av elever som hadde en instrumentell forståelse av likhetstegnet, for at forholdene under diskusjonen i pilotgruppa skulle bli så like som mulige forholdene under diskusjonen mellom elevene i diskusjonsgruppa. Men i og med at bare 9 elever meldte seg frivillige til å delta i studien, så var det ikke mange nok elever. I stedet for pilotgruppen ble oppgavene i stedet diskutert sammen med læreren til elevene, og utfordrende og søkende spørsmål skrevet ned i en uformell intervjuguide som var ment til å åpne diskusjonen omkring oppgavene hvis den stod fast og til å sette fokus på områder ved oppgavene som kunne få de ufullstendige eller feilaktige forestillingene omkring likhetstegnet frem i lyset.

3.1.2 Drøfting av forskningsdesign

I og med at problemstillingens fokus er en utvikling hos elever, ligger det implisitt i denne formuleringen at en må ha et startpunkt og et sluttpunkt. For å vite noe om elevenes startpunkt ble det utført en pretest med tre oppgaver om likhetstegnet. Disse oppgavene ble nøye valgt ut for å kunne gi best mulig informasjon om eleven hadde en relasjonell eller instrumentell forståelse av likhetstegnet (se kapittel 3.2.1 Utvalg av oppgaver til pretest). Pretesten ble gjennomført i skoletiden, og 8 av elevene som hadde levert inn samtykkeskjema var tilstede på skolen denne dagen. Disse elevene gjennomførte pretesten etter en kort informasjon om meg og studien. Elevene ble informert om at resultatene kun skulle vurderes av meg og at resultatene ikke ville telle inn på deres karakter i faget. Testen var designet slik at den skulle

ta 15-20 minutter for elevene og at de da skulle ha god tid til å løse alle de tre oppgavene på testen. Elevene fikk vite at de fikk bruke så lang tid de ønsket på å besvare oppgavene og de ble oppfordret til å bruke tid til å tenke igjennom oppgavene, spesielt hvis de stod fast. Før testen ble utlevert ble oppgave 3 (se vedlegg 4) fremhevet og foremålet med den oppgaven ble forklart muntlig. Etter dette ble testen utlevert og gjennomført av de 8 elevene. Ingen av elevene brukte mer enn 20 minutter på å gjennomføre testen. En av elevene ble sittende litt lenger enn de andre. Denne eleven ble litt stresset når de andre elevene forlot rommet, men ble forsikret om at han skulle benytte den tiden han trengte for å svare på oppgavene på en tilfredsstillende måte. Den eleven som ikke var tilstede på pretesten gjennomførte den samme testen alene ved et senere tidspunkt. Denne gjennomføringen ble styrt av læreren i klassen. Denne læreren ble fortalt på forhånd hva slags informasjon som var gitt til de andre elevene da de tok testen, spesielt når det gjaldt fremhevingen av oppgave 3.

Resultatene på pretesten dannet utgangspunkt for en utvelgelse av fire elever til en diskusjonsgruppe, og det er diskusjonen i denne gruppen som dannet hovedinnsamlingen av data til studien. De fire elevene som velges ut til diskusjonsgruppen er elever som ikke har en fullstendig, relasjonell forståelse av ekvivalens (se kapittel 3.3 Utvalg av gruppe). Diskusjonen er en faglig diskusjon omkring tre oppgaver som er designet for å utfordre elevenes eksisterende forståelse av likhetstegnet. Diskusjonsgruppen ble tatt ut av den ordinære matematikkundervisingen og deltok i den faglige diskusjonen i omtrent 30-45 minutter. Denne diskusjonen foregikk i et grupperom på skolen. Der ble elevene plassert rundt et bord. De kunne selv velge plasser, men stoler var satt frem slik at de ble sittende to og to ovenfor hverandre. Jeg plasserte meg selv på den ene enden av bordet og et videokamera på den andre.

Diskusjonen skulle være slik at elevene er de som utfordrer hverandres forståelse, med bakgrunn i oppgavene. Min rolle var å observere diskusjonen mellom elevene og være en moderator som stilte spørsmålene som fikk diskusjonen i gang igjen hvis den stod fast. Dette var derfor en form for deltakende observasjon. McCrone (2005) mener at læreren må være den personen som fasiliterer og bidrar til fruktige diskusjoner mellom elevene. Dette vil også kreve en endring i lærerens måte å stille spørsmål på. Det å stille undersøkende spørsmål og hjelpe elevene på vei i sin egen utforskende læring er ikke bare lett og det vil kreve endel øvelse.

Diskusjonsgruppen ble filmes under diskusjonen. Dette er hensiktsmessig i en slik kvalitativ studie, da det er mulig å se situasjonen flere ganger i ettertid. Videokameraet fanger situasjonen utenfra og vil også fange opp den visuelle situasjonen, i motsetning til et lydopptak. Det er også en fordel at en kan se hvem som sier de ulike tingene og at en kanskje oppdager ting en ikke oppdaget som deltaker i situasjonen (Postholm, 2005). I den forbindelse ble det bli innhentet et skriftlig samtykke fra foreldre og foresatte slik at elevene frivillig kunne velge om de ville være med i studien (se vedlegg 1). Det er viktig at alle deltakere i en videoobservasjon underskriver et skjema der de får vite hva dataene skal benyttes til og hvordan de behandles (Brinkmann & Tanggaard, 2012). Dette er spesielt viktig også her, da utvalget i studien bestod av barn. Derfor ble ikke bare elevene informert om undersøkelsen og dens mål, men også foreldrene.

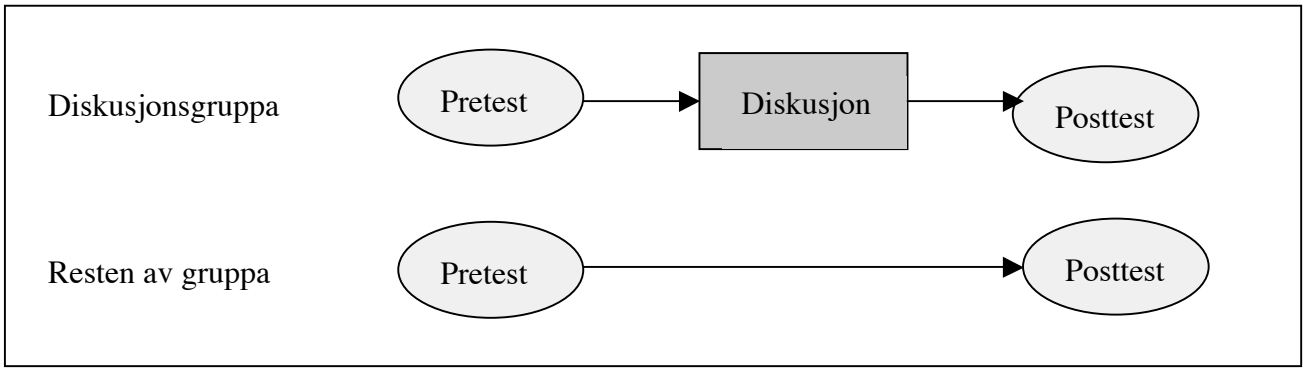
Samtidig er det også viktig å merke seg at videoopptak av situasjoner med mennesker, kan endre disse personenes atferd (Brinkmann & Tanggaard, 2012). I denne studien skal elevene igjennom en faglig diskusjon omkring likhetstegnet og dets egenskaper. I den forbindelse tror jeg ikke at videokameraet vil endre elevenes atferd i den grad at det vil påvirke konklusjonen i den ene eller andre retningen. Elevene vil ikke kunne tilpasse sin instrumentelle eller relasjonelle forståelse ut ifra at de blir filmet. Det som allikevel vil kunne påvirke studien med hensyn til at elevene vil videofilmet, er hvis elevene kvier seg for å uttrykke seg muntlig fordi de vet at det som blir sagt blir tatt opp. De elevene som blir valgt ut til diskusjonsgruppa er jo de elevene som ikke har en relasjonell forståelse. Hvis elevene selv føler at de ikke har forstått oppgavene og ikke har en faglig trygghet innenfor temaet, kan kameraet påvirke dem til å ikke bidra i diskusjonen.

For å oppleve en fruktbar diskusjon i en gruppe er det viktig å etablere noen gode grupperegler som deltakerne må følge. Gruppereglene for denne diskusjonsgruppen er vist i vedlegg nummer 3. Gode grupperegler vil kunne bidra til en økt trygghet for elevene, slik at de ikke blir redd for å ytre sin mening i tilfelle de skal kunne si noe feil. Et gruppearbeid er spesielt ved at det utføres både fagarbeid og lagarbeid, hvor bedre ferdigheter i lagarbeidet hever læringen i faget (Johnsen, Johnsen, Haugaløkken & Aakervik, 2006). Det er mange store utfordringer for elever i et gruppesamarbeid og i diskusjoner, og det viser bare hvor viktig det er at rammene og reglene for diskusjonen er tydelige. Gruppereglene ble presentert for elevene før diskusjonen startet, men de var utformet av meg. Hvis det hadde vært mulig å treffe elevene før pretesten, kunne det vært ønskelig at elevene hadde vært med på å utforme

gruppereglene, men det hadde vi dessverre ikke tid til.

Etter at diskusjonsgruppen hadde fullført sitt opplegg ble det gjennomført en posttest. Denne ville kunne vise om det har vært en utvikling i elevenes forståelse, mot målet om en relasjonell forståelse. Et slikt pretest/posttest design er en foretrukket metode for å sammenlikne deltakergrupper eller vurdere effekten av en intervensjon (Dimitrov & Rumrill, 2003). Det er en metode som også benyttes svært mye i pedagogikken for å evaluere effekten av et endret undervisningsopplegg.

Posttesten bestod også av tre diagnostiske oppgaver, og oppgavene var av samme type som i pretesten (se 3.2.3 Utvalg av oppgaver til posttest). Denne posttesten ble gjennomført av de fire elevene i diskusjonsgruppa, på samme måte som pretesten. Resten av gruppa på 9 gjennomførte også posttesten og vil på den måten fungere som en slags kontrollgruppe. For å kunne vurdere om diskusjonen har spilt en rolle for utviklingen av elevenes forståelse av likhetstegnet vil det være en styrke å kunne sammenlikne utviklingen med resten av gruppa, som ikke har vært igjennom undervisningsopplegget med en gruppediskusjon (se figur 2). Siden dette prosjektet tar sikte på å vise en utvikling hos elevene, forhåpentligvis en utvikling mot en relasjonell forståelse, vil det som Brekke (2002) nevner være viktig å benytte samme type oppgaver på tester som utføres før og etter den studerte undervisningen. Derfor inneholdt pretesten og posttesten i denne studien samme type oppgaver.



Figur 2. Forløpet til et pretest/posttest design.

Resultatene på de to ulike testene vil kunne sammenliknes for hver elev. Det bør ikke være altfor stor endring av resultatene fra pretest til posttest hos de elevene som ikke har vært igjennom noen endring i undervisningsopplegg mellom de to testene. I og med at det heller

ikke går så lang tid (2 uker) mellom utføringen av de to testene vil heller ikke den ordinære undervisningen ha så stor innflytelse på forståelsen av likhetstegnet hos elevene. Oppgavene endres noe fra pretest til posttest og derfor vil det også være hensiktsmessig å la hele gruppa svare på posttesten som en kontroll på at ikke oppgavene er mye vanskeligere eller lettere. Men i og med at det bare er noen små justeringer på de konkrete tallene i oppgavene og ikke direkte på oppgavetypene er det grunn til å tro at det ikke vil være store forskjeller i oppgavenes vanskelighetsgrad.

I tradisjonelle pretest/posttest design er det også viktig at utvalget av de som deltar i kontrollgruppe og eksperimentgruppen er trukket tilfeldig. Det vil ikke jeg kunne utføre i og med at de elevene som deltar i diskusjonsgruppen velges ut på bakgrunn av noen bestemte kriterier om elevenes forståelse. Diskusjonsgruppen vil også bare ha 4 elever mot resten av gruppas 5 elever. Allikevel vil studiens design kunne gi en indikasjon på om diskusjon som arbeidsmåte er med på å utvikle en relasjonell forståelse, men jeg vil ikke kunne si direkte noe om en årsak/virkning sammenheng. Til dette har jeg for lite kontroll på andre betingelser rundt studien. Det kunne også vært ønskelig at elevene hadde øvet seg på matematiske diskusjoner og samarbeid før studiens start. Spesielt når forskning (Grønmo et al., 2012) viser at diskusjon ikke er en stor del av matematikkundervisningen og at elever ikke er vant til å få tid til å reflektere rundt matematiske begreper i matematikktimene. I og med at oppgavens rammer når det gjelder tid ikke tillater dette ble det ikke bli mulighet til å øve dette med elevene på forhånd, men gode grupperegler vil bedre mulighetene for å få til en god, faglig diskusjon mellom elevene.

Brekke (2002) sier at elevene som hadde deltatt i diskusjoner som skapte kognitive konflikter hadde opprettholdt sine resultater over tid. Hvis studien hadde gått over lenger tid ville det også vært ideelt å teste elevene ved et seinere tidspunkt. Dette ville også kunne være med på å korrigere for påvirkninger fra diskusjonsgruppen på resten av utvalget. Posttesten ble utført fire dager etter den faglige diskusjonen. Det vil si at 4 av elevene i klassen har vært involvert i en form for diskusjon omkring likhetstegnet. Etter dette sosialiserer de med resten av klassen og det er ikke til å unngå at elever opplyser hverandre om hva som har hendt på deres opplegg. Det er ikke mulig å isolere elevene fra hverandre i tiden som studien pågår. Elevene har likevel kun hatt en skoledag imellom diskusjon og posttest. Dette gjør at de ikke har hatt mye tid til å omgås hverandre imellom diskusjon og posttest. Men det at det er så kort tid mellom diskusjon og posttest vil også kunne gjøre det letter for elevene å huske det de har

lært, selv uten en fullstendig forståelse. Derfor kunne det vært ønskelig og teste elevene igjen ved et seinere tidspunkt. Da vil nok ikke små påvirkninger på resten av klassen lenger være synlige, siden det er vist at det kun er de elevene som har deltatt i diskusjoner som har utfordret deres forståelse, som opprettholder sine resultater over tid.

3.2 Utvalg av oppgaver

Forskning viser, som nevnt tidligere, at en del elever har misoppfatninger knyttet til begrepet likhet (Falkner et. al., 1999; Knuth et. al., 2005; Knuth et. al., 2006) og diagnostisk undervisning tar sikte på å avsløre slike misoppfatninger og videre utfordre dem. Bell (1993) forklarer diagnostisk undervisning ved at "diagnostisk undervisning fokuserer på å avsløre misforståelser og feilmønstre eller ufullstendige begreper først – for så å provosere elevene til å justere sine begreper og oppfatninger" (bl.a. sitert av Fuglestad, 2003, s. 212). For å undersøke om elever har en relasjonell forståelse av likhet gis diagnostiske oppgaver. Dette er oppgaver som er formet slik at elever ikke kan få riktig svar hvis de har feilaktige ideer og en ufullstendig forståelse av begrepet (Brekke, 2002). I denne forbindelse er det også svært viktig å vite om hvilke misoppfatninger som kan forventes at knyttes til begrepet. Oppgavene utformes så på den måten at elevene opplever kognitive konflikter der deres misoppfatninger blir konfrontert. Det er kun slik misoppfatningene vil kunne belyses og oppklares.

Brekke (2002) identifiserer en rekke områder der diagnostiske oppgaver ofte er å foretrekke. De av disse oppgavene som er svært sentrale i min studie er at diagnostiske oppgaver har til hensikt å:

- å identifisere misoppfatninger hos elever.
- å utvikle elevenes løsningsstrategier.
- å måle hvordan undervisningen har bidratt til å oppklare disse misoppfatningene ved å benytte samme type oppgaver før og etter en undervisningssekvens.

3.2.1 Utvalg av oppgaver til pretest

Når oppgaver skal velges ut til å teste elevenes forståelse av likhetstegnet er det ønskelig å både teste hva elevene selv sier at tegnet betyr og hva deres oppgaveutføring viser at de har av forståelse. Derfor er det viktig at pretesten inneholder oppgaver som tester både deres definisjoner og der de får mulighet til å vise sin forståelse i praksis. Oppgave 1 inneholder spørsmål direkte knyttet til likhetstegnet og dets betydning (se figur 3).

Spørsmålene under gjelder setningen $3 + 4 = 7$

a) Pilen over peker på et symbol. Hva heter dette symbolet?

b) Hva betyr dette symbolet?

c) Kan dette symbolet bety noe annet? Hvis ja, forklar?

Figur 3. Figuren viser oppgave 1. fra pretesten.

I oppgave 1 a) skal elevene navngi likhetstegnet, altså symbolet som pila peker på. Deretter skal de i b) vise hvordan de definerer tegnet. I c) får elevene mulighet til å komme med flere svar på hva tegnet betyr. En av de vanligste misoppfatningene knyttet til likhetstegnet er at symbolet betyr ”her kommer svaret” (dette er allerede beskrevet i 2.4.1 misoppfatninger om ekvivalens). Ved å benytte denne oppgaven, som også er benyttet av andre forskere (Knuth et. al., 2006) vil en få en indikasjon på hvordan elevene forstår likhetstegnet og hva de legger i begrepet. De elevene som har en relasjonell forståelse av likhetstegnet vil kunne komme til å forklare betydningen av likhetstegnet som en bestemt relasjon mellom begge siden av tegnet, nemlig at tegnet viser at de to sidene er ekvivalente. En del elever vil nok også angi betydningen av tegnet til å være en variant at ”her kommer svaret”. Oppgaven er interessant og viser hva slags definisjoner elevene har av tegnet, men vil ikke ene og alene kunne si noe om hvorvidt eleven har en relasjonell eller instrumentell forståelse av likhetstegnet. Elever vil kunne komme med en relasjonell definisjon som bygger på en instrumentell forståelse (et eksempel på dette vises i 5.1 Drøfting av resultater). En instrumentell forståelse vil jo ikke si at eleven ikke har en forståelse i det hele tatt. For å forklare dette repeteres et eksempel fra teorikapittelet. Hvis en elev kan formelen av arealet av en trekant og klarer å finne ut arealet av en gitt trekant der grunnlinjen og høyden er oppgitt, sier vi at eleven har en instrumentell forståelse. Eleven husker formelen og vet hvordan den skal benyttes for å kunne svare på en gitt oppgave, men vil ikke kunne forklare hvorfor det er slik. Det samme kan jo gjelde denne oppgaven som omhandler definisjonen av likhetstegnet. Eleven kan huske definisjonen uten å ha forståelse for hvorfor den gjelder. Da vil de jo fortsatt ha en instrumentell forståelse, selv om svaret har en relasjonell karakter.

I oppgave 2 a) blir elevene bedt om å løse en enkel likning (se figur 4). De får også muligheten i b) til å vise sin relasjonelle forståelse ved at de forklarer hvordan de løste likningen og hvorfor de benytter reglene som de bruker for å løse likningen i a). Kilpatrick et al. (2001) hevder at en god indikator på om en elev innehar en god begrepsforståelse vil være at eleven kan presentere matematiske situasjoner på ulike måter og vite noe om hvordan ulike representasjoner kan være nyttige i ulike situasjoner. De har akkurat blitt introdusert for formell løsning av likninger, så det var ønskelig å ta en likning som ikke var altfor vanskelig. Det er også med hensikt valgt en likning der elevene kanskje vil kunne se løsningen ut ifra å bare betrakte likningen. Derfor ble de også spurt om å forklare hvordan de løste likningen og hvorfor de gjorde det på akkurat den måten. Elevene kan løse likningen på ulike måter, for eksempel ved "gjett-og-sjekk", prøving og feiling eller ved å benytte seg av formell algebra.

a) Løs likningen $2x + 3 = 9$

b) Forklar med ord hvordan du løste likningen og hvorfor du gjorde det på denne måten?

Figur 4. Figuren viser oppgave 2 fra pretesten.

I oppgave 3 skal elevene finne ut om par av likninger er ekvivalente (se figur 5).

Vurder om de to likningene i hver oppgave er like. Det at de er like vil si at de har samme verdi for x. Forklar hva som gjør dem like eller ulike.

a) $x + 2 = 5$	og	$x + 2 - 2 = 5 - 2$
b) $x + 2 = 5$	og	$x + 2 - 5 = 5$
c) $x + 2 = 5$	og	$x + 2 - 5 = 5 - 5$
d) $x + 2 = 5$	og	$x + 2 - 99 = 5 - 99$
e) $x + 2 = 5$	og	$x + 2 - 5 = 0$

Figur 5. Figuren viser oppgave 3 fra pretesten.

Denne oppgaven viser mye om elevenes forståelse av ekvivalens, men den delen som ikke er så bevisst som den eksplisitte definisjonen elevene har. Steinberg, Sleeman & Ktorza (1990) mener at mange elever mestrer prosedyrene som er nødvendige for å løse likninger, uten at de forstår hvorfor man kan utføre disse operasjonene uten å endre likningen. Derfor vil dette være en god oppgave for å grave dypere i elevenes begrepsforståelse av ekvivalens (Naalsund, 2012; Steinberg, Sleeman & Ktorza, 1990). De skal i tillegg til å finne ut hvilke likningssett som er ekvivalente, forklare hvorfor de er ekvivalente eller ikke. Å forstå at man ikke endrer likningen uansett hvilket tall man trekker ifra, bare det er det samme på begge sider, er en viktig idé for å forstå den relasjonelle egenskapen til likhetstegnet og for å forstå de transformasjonene en gjør når en løser likninger. Det er svært viktig å forstå de transformasjonene vi benytter i likninger, ikke bare benytte regler en har lært blindt (Steinberg, Sleeman & Ktorza, 1990). En del elever klarer også å utføre de grunnleggende regneoperasjonene som trengs for å kunne løse likninger, noe som kan tyde på at de har en relasjonell forståelse av likhetstegnet. Allikevel viser de at denne forståelsen ikke er fullstendig. De har nemlig vanskelig for å forstå at uttrykkene er ekvivalente. Man kan også lære endel av elevenes fremgangsmåte for å finne ut om slike likningssett er ekvivalente. Noen elever vil kanskje se det at det samme tallet er trukket fra på begge sider, som at likningen ikke er forandret. Andre vil trenge å løse likningen for å finne ut om x har samme verdi for begge likningene i likningssettet. For å forklare elevene hva som menes med at de to likningene i hvert par er like eller ekvivalente benyttes den samme definisjonen som hos Steinberg, Sleeman & Ktorza (1990). De to likningene er ekvivalente hvis de har samme verdi for x.

3.2.2 Utvalg av oppgaver til diskusjonen

Til diskusjonen velges oppgaver som vil kunne belyse ulike sider ved likhetstegnet og elevenes forståelse av det. Det legges også vekt på oppgaver som ikke nødvendigvis har et fasitsvar, men som det er mulig å diskutere seg frem til ulike svar på. Under løsningen av diskusjonsoppgavene er fokuset på elevenes forståelse av likhetstegnet. Til løsningen av diskusjonsoppgavene medbringes en liste med spørsmål som er tenkt ut på forhånd og som vil kunne hjelpe til å utfordre elevenes eksisterende forståelse av likhetstegnet og for å åpne en diskusjon som står fast.

Utformingen av oppgave 1 (se figur 6) er hentet fra LAMIS Østfold sitt hefte med ideer til matematikkdagen 2013 (Hågensen, Karlsen & Nordbakke, 2013). I denne oppgaven skal

elevene finne ut hvilket av de fire likningene som skiller seg ut fra de andre tre. Elevene skal få tid til å reflektere og analysere uttrykkene før de skal samarbeide og diskutere for å finne frem til ett uttrykk som skiller seg ut. De skal også begrunne hvorfor akkurat denne likningen er den som skiller seg ut fra de andre. Hågensen, Karlsen & Nordbakke (2013) legger vekt på at analyse og refleksjon av slike typer oppgaver bør foretas i plenum slik at flest mulig løsninger gjøres kjent for elevene. Denne oppgaven er et eksempel på det som kalles en Tren Tanken-oppgave. Felles for denne typen oppgaver er nettopp at den ikke har et entydig svar, men at flere ulike svar vil bringes frem i lyset. "Dette stimulerer elevenes refleksjonsevne, og erfaringsmessig vil elever som strever med faget i langt større grad delta aktivt i denne type aktivitet" (Hågensen, Karlsen & Nordbakke, 2013, s. 47).

De ulike likningene er valgt ut med omhu. I denne oppgaven er det tatt utgangspunkt i en enkel likning som vises i rute 1. Likningen er på lik form som likningene i oppgave 2 og oppgave 3 fra pretesten. Dette for å ta tak i de oppgavene som hovedsaklig gjorde at elevene havnet i kategorien, elever med instrumentell forståelse av likhetstegnet. Derfor løftes denne oppgaven frem slik at elevene kan møte sine misoppfatninger. Tallene er endret i forhold til pretesten, slik at oppgavene ikke er identiske og elevene blir stående fast ved å prøve å huske hva de gjorde på pretesten.

Alternativene er også valgt slik at de konsentrerer seg om misoppfatninger knyttet til likhetstegnet. Det er bevisst ikke tatt med likninger som for eksempel inneholder brøkledd, slik at andre misoppfatninger påvirker elevenes svar. Det er ikke til å komme utenom bruk av x som bokstav, og man kommer derfor også innom variabelbegrepet. Allikevel benyttes ikke andre bokstaver i disse likningene. Dette for å være sikker på at det er likhetsbegrepet som står i fokus og ikke variabelbegrepet. Elevene har også akkurat startet på temaet algebra og likninger så det er viktig at likningene ikke er for vanskelige å løse. Det er valgt tre likninger der $x = 5$ (1, 2 og 4). I den siste likningen, altså likning 3, er $x = -4$. den ene av likningen har et stort tall trukket fra på begge sider av likhetstegnet. Denne likningen skiller seg visuelt sett ut fra de andre, men er allikevel ekvivalent med likning 1 og 2. I likning 2 er tallet 9 trukket fra på begge sider av likhetstegnet, og ikke tallet 4 som er det tallet man naturlig ville trukket fra hvis man skulle løse likningen. I likning 3 er tallet 9 trukket ifra på kun en side, noe som endrer innholdet i likningene og verdien av x vil også endres.

Oppgave 1. Hvem skal ut?

Se på de 4 likningene og finn ut hvilken av dem som skiller seg ut. Begrunn hvorfor det valgte uttrykket er det som skal ut.

1. $x + 4 = 9$	2. $x + 4 - 9 = 9 - 9$
3. $x + 4 = 9 - 9$	4. $x + 4 - 1045 = 9 - 1045$

Figur 6. Figuren viser oppgave 1 fra diskusjonsoppgavene

Oppgave 2 (se figur 7) er en oppgave jeg selv har tenkt ut for å møte elevene med deres uvane med å skrive ”equality strings”. Jeg ønsker å bringe frem flere aspekter ved likhetstegnet og måten elevene benytter dette tegnet på. På denne måten vil elevene konfronteres med likhetstegnets egenskaper og hvorfor det blir feil og benytte slike ”eguality strings”. De ulike leddene i tråden er valgt bevisst for å belyse blant annet misoppfatningen om at likhetstegnet betyr ”her kommer svaret”. Ved det første likhetstegnet blir summen av de to leddene til venstre for tegnet lik tallet umiddelbart til høyre for det, men summen på de to sidene av tegnet er ulik. I neste ledd er det gjort en regnefeil slik at de to tallene før likhetstegn 2 ikke blir 15 som står på høyre side av tegnet. Der er kun likhetstegn nummer 4 som er benyttet slik at høyre side og venstre side av likhetstegnet er likt. Men allikevel er det ikke likt alle de forestående leddene.

Oppgave 2. Hvilke(t) likhetstegn er brukt på riktig måte?

Vurder likhetstegnene hver for seg, og bestem om de er benyttet ”riktig”.

$$2 + 7 = 9 + 7 = 15 - 3 = 12 + 10 = 22$$

1. 2. 3. 4.

Figur 7. Figuren viser oppgave 2 fra diskusjonsoppgavene.

Oppgave 3 (se figur 8) har samme form som oppgave 1. Etter at oppgave 1 er gjennomført har elevene nå blitt litt kjent med en Tren Tanken-oppgave. På samme måte som i oppgave 1 skal elevene finne ut hvilken av de 4 likningene som skiller seg ut fra de andre og begrunne dette valget. Likningen som denne oppgaven tar utgangspunkt i er på formen $ax + b = cx + d$ og står som likning nummer 1.

Oppgave 3. Hvem skal ut?

Se på de 4 likningene og finn ut hvilken av dem som skiller seg ut. Begrunn hvorfor den valgte likningen er den som skal ut.

1. $5x + 4 = 2x + 10$	2. $3x = 6$
3. $5x + 4 - 4 = 2x + 10 - 4$	4. $5x + 4 = 2x + 10 - 4$

Figur 8. Figuren viser oppgave 3 fra diskusjonsoppgavene.

Denne likningstypen er litt vanskeligere for elevene og det er også litt mer utfordrende for dem å umiddelbart se hvilken verdi x har. Dette kan også fordre til at elevene blir nødt til å benytte seg av de reglene de har lært om løsning av likninger for å finne ut om x har samme verdi i flere av likningene, slik som i oppgave 1. Likningene 1, 2 og 3 er ekvivalente og er alle en del av de stegene som elevene benytter seg av når de løser likninger. I den forbindelse vil en av likningene (nr 4) løses i fellesskap etter at elevene har funnet ut hvilken av de 4 likningene som skiller seg ut. Dette for å knytte det vi gjør i denne oppgaven, med det de gjør når de løser likninger. Også i denne oppgaven er de fire alternativene valgt med omhu. Likning nummer 2 skiller seg visuelt sett mest ut fra de andre likningene og er den eneste likningen som ikke har 5x som et ledd. I likning nummer 3 har tallet 4 blitt trukket fra på begge sider av likhetstegnet. I den siste likningen har også tallet 4 blitt trukket fra, men kun på en side av likhetstegnet. Tallet 4 har blitt ”flyttet” over likhetstegnet og fortegnet er ”byttet”. Men samtidig står tallet 4 igjen på venstre side. Etter at gruppa har diskutert seg igjennom de tre oppgavene i diskusjonen vil en kort evaluering av opplegget gjennomføres muntlig.

3.2.3 Utvalg av oppgaver til posttest

For å få en indikasjon på om det har skjedd en utvikling i forståelsen til elevene gjennomføres en posttest på samme form som pretesten. Som nevnt tidligere vil det som Brekke (2002) nevner være viktig å benytte samme type oppgaver på tester som utføres før og etter den studerte undervisningen. Siden oppgavene på posttesten er så like oppgavene på pretesten vil oppgavene ikke presenteres i sin helhet her, men oppgavene kan ses i vedlegg 6. Oppgave 1 på posttesten er identisk med oppgave 1 på pretesten. Her kan elevene komme med sin definisjon av likhetstegnet og jeg kan se om denne definisjonen har blitt forandret. Allikevel vil ikke denne oppgaven, som på pretesten, si om elevenes forståelse har blitt endret. Definisjonen deres av likhetstegnet vil kanskje være det letteste å huske, samt endre så kort tid etter den gjennomførte diskusjonen.

Oppgave 2 består av to likninger som skal løses og deretter skal metoden for å løse disse forklares. Det er altså to likninger som skal løses på posttesten, i forhold til en på pretesten. Den første er på samme form som likningen på pretesten ($ax + b = c$), den andre er på formen $ax + b = cx + d$. Likninger på denne formen er en del av diskusjonsoppgave 3 og det vil være interessant å se om elevene kan løse slike likninger, som det ikke vil være like lett å bare se løsningen til, selv om denne deloppgaven ikke har noe sammenlikningsgrunnlag fra pretesten.

I oppgave 3 skal elevene på samme måte som i oppgave 3 på pretesten vurdere om to og to likninger er ekvivalente. Den siste av deloppgavene skiller seg litt ut. Der skal elevene vurdere om $5x + 4 = 2x + 10$ er ekvivalent med $3x = 6$. Dette er to av likningene som var med i diskusjonsoppgavene. Da kan jeg få en indikasjon på hvor mye elevene husker fra oppgaven de var med på sammen, og sammenlikne det med hva de klarer på de nye oppgavene alene.

Posttesten gjennomføres 4 dager etter diskusjonen. Da får elevene noen dager på å fordøye det de har lært under diskusjonsopplegget. Hadde studien gått over lenger tid ville det også, som tidligere nevnt, vært ønskelig å teste elevene ved et seinere tidspunkt for å se om utviklingen av forståelsen har vedvart over tid.

3.3 Utvalg av gruppe

Utvalget i studien består av en matematikkgruppe fra en ungdomsskole på Østlandet, og gruppen er en del av 9.trinn på skolen og inneholder 25 elever. Skolen praktiserer nivådeling i matematikk på bakgrunn av elevenes tidligere resultater, elevenes egen faglige vurdering og målsetting og lærerens helhetlige vurdering av eleven og elevens kunnskapsnivå. Ut i fra dette deles elevene på hvert trinn inn i svake-, middels- og sterke grupper, og disse gruppene er i praksis levende slik at elevene kan bevege seg mellom gruppene i løpet av skoleåret. Systemet er bygget opp slik at undervisningen best mulig skal tilpasses elevenes forutsetninger i de ulike temaene i matematikkfaget.

Gruppen som deltar i studien er en gruppe på middels nivå. Årsaken til at en gruppe på middels nivå ble valg er at det ønskes en gruppe der det finnes elever som ikke har en relasjonell forståelse av likhetstegnet. I de sterke gruppene vil det sannsynligvis være færre av disse elevene. Allikevel velges en middels gruppe fremfor en svak gruppe. Dette fordi at diskusjonen er en svært viktig del av studien. I diskusjonsgruppen ønskes elever som samtidig som de ikke har en relasjonell forståelse av likhetstegnet, har middels til gode muntlige evner. Samt at de har nok faglig tro på seg selv til å delta i en faglig diskusjon i en gruppe, med andre medelever. Det vil også være min oppgave under informasjonen og som deltakende observatør i gruppa, å gi elevene en trygghet til å ytre seg i diskusjonen. Dette ved å informere elevene om at dette ikke er en del av deres karakter i faget, at alle svar er ønsket slik at mange sider ved oppgaven kan diskuteres og ta i bruk og følge de gruppereglene som er satt i forkant av diskusjonen.

Det var igjennom undervisningserfaring ved denne skolen at misoppfatninger omkring likhetsbegrepet ble synliggjort for meg. Derfor synes jeg det er spennende å utføre studien på den samme skolen som mine erfaringer ble gjort, og der min nysgjerrighet innenfor temaet virkelig slo rot. Denne skolen ble også valgt fordi den ligger nært mitt bosted og fordi skolen ønsket å delta i studien. I norsk skole introduseres formell algebra på 8. trinn og det er på ungdomsskoletrinnet at algebra blir en sentral del av matematikkfaget (Grønmo & Onstad, 2012). 9. trinn ble valgt fordi elevene har blitt introdusert for temaet algebra og likninger i ordinær undervisning. Det er ønskelig å bruke oppgaver om likninger for å belyse ulike sider ved likhetstegnet og det benyttes ulike diagnostiske oppgaver for å avdekke delvise begreper og en ikke-relasjonell forståelse hos disse elevene.

Den valgte matematikkgruppen fra 9.trinn ble valgt ut i samarbeid med skolen, med tanke på elevenes og lærerens ønske om å delta og hvordan det passet i det vanlige undervisningsløpet til matematikkgruppen. I denne gruppen ble det så delt ut et informasjonsskriv med en svarslipp (se vedlegg 1), slik at elevene som skulle delta måtte innhente et skriftlig samtykke fra sine foreldre eller foresatte. Det ble fremhevet for elevene og foreldrene at deltakelse i studien var frivillig og at de når som helst kunne trekke seg uten å måtte oppgi en årsak til dette. Etter samtykket var innhentet ble pretesten utført hos de elevene som hadde samtykket til å delta i studien. Resultatene fra pretesten ble kodet (beskrevet i 3.4 Koding av resultater) og på bakgrunn av disse resultatene ble fire elever valgt ut til diskusjonsgruppen. Det er hensiktsmessig med en gruppestørrelse på to til seks deltakere hvis en skal få til et godt samarbeid (Johnsen et al., 2006). Jeg ønsket å ha med flere enn to elever for å få til en rikere diskusjon der flere ulike synspunkter ble delt og at elevene satt inne med litt ulike kunnskaper. Samtidig så er ikke elevene vant til å diskutere seg imellom på denne måten og det vil være utfordrende for dem. Jeg ønsket også at alle elevene skulle få delta i diskusjonen og synes derfor seks elever hadde blitt litt mange i denne gruppen. Derfor endte jeg på fire elever, noe som var midt i mellom.

De fire elevene som ble valgt ut til diskusjonsgruppen var elever som ikke har en fullstendig relasjonell forståelse av likhetstegnet og var elever som læreren mente ville ha gode nok diskusjons- og samarbeidevner til å delta i diskusjonen. Noen dager etter at diskusjonen var utført svarte hele matematikkgruppa på posttesten. I og med at alle elevene i utvalget kommer fra den samme matematikkgruppen på skolen, har elevene hatt den samme undervisningen når temaet algebra og likninger ble introdusert og de har gjennomgått det samme

undervisningsopplegget. Dette er en fordel slik at elevene i utvalget har likest mulige forutsetninger for å svare på testen.

3.4 Analyse av resultater

Etter at resultatene er samlet inn må de analyseres. Resultatene fra pretesten analyseres direkte etter at pretesten er gjennomført. Disse resultatene danner grunnlaget for utvelgelse av de fire elevene som utgjør diskusjonsgruppa. Resultatene fra pretesten benyttes for å kategorisere elevenes forståelse som enten instrumentell eller relasjonell. Deretter gjennomgår diskusjonsgruppa opplegget for diskusjonen og disse resultatene transkriberes. De viktigste hendelsene presenteres i 4.3 Resultater fra diskusjonsoppgaven. Etter dette gjennomføres også posttesten og elevenes besvarelser klassifiseres som enten instrumentelle eller relasjonelle på samme måte som for pretesten.

3.4.1 Analyse av resultater fra pretest

Ut i fra Skemps (1976) skille mellom instrumentell forståelse og relasjonell forståelse klassifiseres elevene i den kategorien til den forståelsestypen svarene på pretesten hovedsaklig tilhører. En elev viser instrumentell forståelse dersom elevene på en utfordring bare svarer med en konkretisering og hvis eleven viser forståelse for hvilke operasjoner som må til for å løse en gitt oppgave. En relasjonell forståelse er dypere og vises ofte ved at eleven har en forståelse for hvordan ting henger sammen i et litt større bilde og vet at de vet hvorfor en bruker disse operasjonene for å komme frem til svar på oppgaven.

Elevenes svar klassifiseres først som instrumentelle eller relasjonelle for hver av de tre oppgavene. Deretter sammenfattes disse klassifikasjonene og elevene vurderes totalt sett til å tilhøre en av to grupper av elever; de som viser en relasjonell forståelse av likhetstegnet og de som viser en instrumentell forståelse av likhetstegnet. I oppgave 1 skal elevene i a) navngi likhetstegnet og i b) og c) vise hva slags definisjon de har av likhetstegnet. De elevene som svarer på denne oppgaven ved å vise at likhetstegnet sier noe om relasjonen mellom de to sidene av tegnet klassifiseres som relasjonelle. De som kun svarer med en konkretisering eller en misoppfatning klassifiseres som instrumentelle. Hvis noen av elevene viser hovedsaklig en relasjonell definisjon i b), men legger til en konkretisering i c), vil resultatene hovedsaklig klassifiseres som om de har en relasjonell forståelse i denne oppgaven. Men svaret i oppgave 1 vurderes spesielt opp mot oppgave 3 og hvordan de bruker denne forståelsen. Tegnets navn (”er lik” eller ”likhetstegnet”) vil kunne gi elevene en pekepin på en relasjonell definisjon av

likhetstegnet i oppgave 1. Men det er først ved korrekt løsning av oppgave 2 og 3 at elevene virkelig viser om det innehar en slik forståelse. Hvis eleven viser svar som spriker, ved at de inneholder både relasjonelle og instrumentelle elementer legges vekten derfor på oppgave 2 og spesielt 3. Disse to oppgavene viser hvordan elevene bruker sin forståelse i praksis, noe som bør vektes mer enn den definisjonen de oppgir i oppgave 1. Alle de tre oppgavene tas i betraktning når elevene klassifiseres etter deres forståelsestype.

3.4.2 Analyse av resultater fra diskusjonsoppgaven

Resultatene fra diskusjonsoppgavene består av videofilen fra den gjennomførte diskusjonen. Etter at diskusjonen er gjennomført transkriberes videoen til en tekstfil der hele samtalen skrives ned og viktige deler av kroppsspråk noteres ned. Deretter analyseres dataene ved å se etter endringer i elevenes forståelse av likhetstegnet igjennom diskusjonen og nettopp hva det er ved denne diskusjonen som fører til en slik endring. Viktige utdrag fra diskusjonen som viser ulike aspekter ved dette gjengis i 4.3 Resultater fra diskusjonsoppgaven. En kort analyse av episoden presenteres direkte etter hvert avsnitt. Mens den fullstendige tolkningen av resultatene og resultatenes betydning presenteres i kapittel 5. Diskusjon.

Det kan være svært vanskelig å vurdere om en elev forstår instrumentelt eller relasjonelt (Naalsund 2012; Skemp, 1976). Ideelt sett ville jeg samtalt med elevene om likhetstegnet for å bli enda sikrere på klassifiseringen som relasjonell eller instrumentell. Utvelgelsen av de fire elevene ble gjort på bakgrunn av resultatene fra pretesten, men diskusjonen benyttes også som et ledd i å bekrefte disse resultatene. Resultatene fra diskusjonen ble derfor analysert med tanke på å klassifisere elevenes tidlige utsagn som instrumentelle eller relasjonelle, for å styrke tolkningen av resultatene fra pretesten. Det samme ble gjort for resultatene på posttesten. Der ble de utsagnene fra elevene, utover i diskusjonen benyttet som et ledd i å kontrollere resultatene fra posttesten. Allikevel ble resultatene fra pretest og posttest først analysert alene, og kun støttet vet å se på resultatene fra diskusjonen. Det var også lettere å se på forskjellen mellom tidlige og seine utsagn hos elevene i diskusjonen fordi oppgave 1 og oppgave 3 på diskusjonen hadde samme form. Det var allikevel elementene i diskusjonen som bidro til den utviklingen jeg så mellom testene, som utgjorde hoveddelen av analysen.

3.4.3 Analyse av resultater fra posttest

Resultatene fra posttesten klassifiseres på samme måte som resultatene fra pretesten, med bakgrunn i Skemps (1976) definisjoner av de to forståelsestypene. Oppgavene på posttesten er

av samme type som på pretesten. Derfor vil også resultatene tolkes og vektes på samme måte. I mellom posttest og pretest er det nøyaktig 2 uker. I løpet av denne tiden følger elevene sin ordinære undervisning. De vil ikke ha mer undervisning i denne perioden om temaet likninger, allikevel kan det være mulig at noe vil kunne skje mer elevenes kunnskaper i denne perioden. I og med at temaet likninger svært nylig har blitt introdusert for elevene vil denne kunnskapen modnes hos elevene i perioden. Det vil kunne føre til at elevene har bearbeidet kunnskapen over tid og enklere vil kunne løse likningene i oppgave 2. Denne endingen hos elevene vil da kunne skyldes denne modningsprosessen og ikke direkte diskusjonsopplegget. Derfor er det like viktig å studere elevenes forklaringer på hvorfor de gjør som de gjør når de løser likninger og hvordan de vil argumentere for sine svar i oppgave 3. Det vil allikevel ikke være sannsynelig at elevenes forståelse av likhetstegnet vil endre seg nevneverdig i løpet av disse ukene på bakgrunn av modning. Det er jo mange år siden likhetstegnet ble introdusert for dem og derfor også mange år siden disse misoppfatningenes dannelse startet.

4. Resultat

I dette kapittelet presenteres først resultatene fra pretesten, som legger grunnlaget for utvelgelse av de fire elevene som deltar i diskusjonsgruppa, og så presenteres de fire elevene i diskusjonsgruppa kort. Deretter vil de viktigste situasjonene fra diskusjonen presenteres og tilslutt vil disse fire elevenes resultater på posttesten sammenliknes med resultatene på pretesten for å undersøke om det har skjedd en utvikling.

4.1 Resultater fra pretest

Resultatene fra pretesten er presentert i tabell 1. Her fremheves kun totalvurderingen av elevenes forståelse av likhetstegnet, siden resultatene av denne testen kun var til for å velge ut de elevene som deltok i diskusjonen. Det er resultatene fra denne diskusjonen som utgjør hoveddelen av datamaterialet i studien. Et kort grunnlag for klassifiseringen av resultatene ble presentert i 3.4.1 Analyse av resultater fra pretest. Noen eksempler fra elevenes pretester tas allikevel frem og diskuteres i kapittel 4.1.1 Elevene i diskusjonsgruppa og når de sammenliknes med resultatene fra posttesten. Disse sammenlikningene av elevenes svar vises i kapittel 5. Diskusjon.

Tabell 1. Resultater fra pretesten der elevene klassifiseres ved at de enten har en relasjonell eller instrumentell forståelse av likhetstegnet.

Elev nr	**Fiktive navn**	**Relasjonell/instrumentell forståelse**	**Bemerkninger**
1	Sara	Relasjonell	Men instumentell definisjon.
2	Anders	Instrumentell	
3	Peter	Relasjonell	
4	Lisa	Instrumentell	
5	Nicolay	Relasjonell	Viser svært god ekvialensforståelse.
6	Emma	Relasjonell -	Viser noen små tegn til misoppfatning?
7	Daniel	Relasjonell	
8	Fredrik	Instrumentell	Viser i tillegg equality strings.
9	Siri	Relasjonell	Svært god kontroll på ”flytt og bytt”.

Ut i fra resultatene på denne pretesten ble fire elever valgt til å være en del av diskusjonsgruppa. Tre av disse elevene viser tydelig at de har en instrumentell forståelse av ekvivalens; Anders, Lisa og Fredrik. Den siste eleven som ble valgt ut til å være en del av diskusjonsgruppa var Emma. Hun viser hovedsaklig tegn til å ha en relasjonell forståelse av likhetstegnet. Allikevel virker hun noe usikker på dets betydning i praksis. Samtidig viser Emma at hun har gode skriftlige evner og hun forklarer godt hvordan hun tenker på oppgavene på pretesten. Det kan derfor være hensiktsmessig å ha Emma med i diskusjonsgruppen som en person som er faglig litt sterkere enn de andre i gruppen og forhåpentligvis også har gode muntlige evner. En elev som kan litt mer enn de andre elevene kan fungere som en medierende hjelper for de elevene som kan litt mindre (Imsen, 2003). Den eleven som faglig har et litt høyere nivå vil kunne bidra med viktige innspill og diskusjonen og samtidig få de andre elevene i gruppa til å strekke seg litt lenger. Hadde man valgt ut en elev som lå på et mye høyere nivå enn de tre andre ville det kunne ført til frustrasjon for begge parter. Eleven som lå på et mye høyere nivå vil ikke få noe særlig faglig utbytte og vil kunne betrakte arbeidet som meningsløst. For de elevene som ligger et stort sprang under vil der kanskje være vanskelig å føle seg på lik linje som den flinke, det vil kanskje være vanskelig for dem å forstå hverandre og det vil også føre til at det føles meningsløst for de på et lavere nivå også. En slik gruppesammensetning, der elevene er på litt ulikt nivå, vil være det man kan kalle en heterogen gruppe.

> *I heterogene grupper ser vi at en mer utførlig og komplisert tenkning finner sted, elevene engasjerer seg oftere i å forklare for hverandre, de tar oftere andres perspektiv når de diskuterer lærestoff. Alt dette øker forståelsen, kvaliteten på tenkningen og nøyaktigheten av langtidsminnet (Johnsen et al., 2006, s. 69).*

En kort karakteristikk av de fire elevene i diskusjonsgruppa følger etter dette avsnittet. Som deltakende observatør ønsket jeg å vite minst mulig om elevenes væremåter og faglige nivå underveis i prosessen. Dette for å sikre at de tankene som gjøres opp om elevene som deltakere i diskusjonen ikke var påvirket av lærerens tolkninger. Læreren ble kun spurt om de fire elevene som utgjorde diskusjonsgruppa ville fungere godt sammen, og om det var en gruppe som det kunne forventes å få til en diskusjon i. I ettertid ble det samarbeidet med deres lærer om en kort karakteristikk av hvordan elevene tok del i den ordinære undervisningen. Både disse karakteristikkene fra deres lærer og mine egne tolkningen presenteres i 4.1.1 Elevene i diskusjonsgruppa.

4.1.1 Elevene i diskusjonsgruppa

De fire elevene som utgjorde diskusjonsgruppa var Lisa, Fredrik, Anders og Emma. Disse fire elevene ble valgt ut på bakgrunn av deres resultater på pretesten.

Lisa: Lisa leverte en besvarelse bestående utelukkende av instrumentelle svar på de tre oppgavene. Hun svarte på de fleste spørsmål med en konkretisering, dette vises også i diskusjonen. I løsningen av likningen har Lisa tydelig bare gjettet på hvordan hun husker at noen tall skal trekkes fra og divideres. Svaret er riktig, men likningen er såpass lett at hun har sett det i likningen. Det var vanskelig for henne å se noen mening med oppgave tre. De to likningene er jo ikke identiske å se på. Hun ligger faglig i det nedre sjiktet i sin matematikkgruppe og viser svært varierende innsats i faget. Hun er den av de fire elevene som vanligvis deltar minst i muntlige aktiviteter i timene og hun blir ofte lett distrahert. Lisa gjør oppgaver i timen og lekser hovedsaklig for ikke å få anmerkning i stedet for det faktiske læringsutbyttet.

Fredrik: Oppgaven til Fredrik er også preget at kun instrumentelle svar på oppgave 2 og oppgave 3, men han er innom en relasjonell definisjon av likhetstegnet på oppgave 1c). Han er opptatt av hvordan likningene ser ut visuelt sett når han skal finne ut om likningene er like, ikke innholdet i dem. I diskusjonen er han også raskt ute med å komme med forslag, ofte knyttet til det visuelle. Fredrik er svært aktiv i diskusjonen og læreren sier at det også ofte gjelder i timene.

Anders: Anders kommer også med mange konkretiseringer på pretesten og hans besvarelse har også blitt klassifisert som instrumentell. Han har også på samme måte som Lisa gjettet seg til noen rare regler for løsning av likningene. Anders har prøvd seg på utfyllende svar på pretesten og besvarelsen er et hakk sterkere enn Lisa og Fredriks besvarelse. Anders tar sjelden initiativ til å svare på spørsmål i timen, men svarer hvis han blir spurt. Han er flink til å spørre om hjelp under oppgaveløsning hvis han står fast.

Emma: Oppgaven til Emma skiller seg ut som den sterkeste besvarelsen av de fire i diskusjonsgruppa. Hennes besvarelse er hovedsaklig relasjonell og hun gir gode forklaringer på hvorfor hun gjør det hun gjør. Hun gir også de mest utfyllende svarene av de fire elevene i gruppa og hun har et godt matematisk språk. Emma er ganske sjenert og stille, men kommer

med mange gjennomtenkte svar og hun klarer godt å forsvare sine påstander. I matematikktimene er hun svært pliktoppfyllende og arbeidsom.

4.2 Resultater fra diskusjonsoppgaven

I dette avsnittet presenteres flere episoder fra den faglige diskusjonen mellom elevene. Disse episodene er valgt ut fordi de illustrerer ulike poenger knyttet til problemstillingen. Oppgavene som ble benyttet i diskusjonen er vist samlet i vedlegg 5. Diskusjonsoppgaver. Elevene fikk utdelt en og en oppgave av gangen. Oppgavene de skulle løse var skrevet inn på toppen av et A4 ark og de kunne benytte resten av arket til notater. Deretter fikk elevene et par minutter til å gjøre seg opp noen tanker om oppgaven før diskusjonen startet.

Episode 1

Episode 1 og 2 er knyttet til den første Hvem skal ut- oppgaven. Elevene prøver å komme opp med ulike begrunnelser for hvorfor en av de fire likningene skiller seg ut.

Jeg: Har dere gjort dere opp noen tanker om hvem som skal ut?

Fredrik: (Peker på boks nr 4) Den ser litt annerledes ut. Den har liksom plutselig et stort tall på hver side. Kanskje den skal ut?

Emma: (peker umiddelbart på nr 3) Og på den der er det ikke –9 på andre siden av likhetstegnet.

Fredrik: (sammenlikner nr 4 og nr 1). Men den der (4) blir jo den samme som den (1) hvis vi fjerner det store tallet på den (4). Men det vil jo stå en minus bak 9'ern på nr 4?

Anders: Kanskje den skal ut (peker på nr 1). Alle de andre har både plusser og minuser som fortegn.

Fredrik: Men 1 og 4 er jo like. Vi kan jo bare fjerne det store tallet som står på begge sider. De nuller hverandre ut. Da vil vi stå igjen med det samme ($x + 4 = 9$).

Emma: (peker på nr 3 igjen) Men på den her er det jo bare –9 på den ene siden av likhetstegnet.

Jeg: Hva har det å si for likningen? Har det noe å si?

Emma: Det har jo det! Det blir jo bare null hvis vi regner ut det på høyre side.

Lisa: (har sittet lenge uten å delta aktivt i diskusjonen). Men er det ikke sånn at når man har en likning så skal man finne ut hva x er, eller no? Og da må jo den over dit (peker på tallet på venstre side i nr 1, altså 4), eller noe?

Fredrik: Du tenker på at 4 skal over likhetstegnet?

Lisa: Mmm!

Flere av elevene startet med å foreslå likninger som skilte seg på en eller flere måter og de aller fleste av disse årsakene var koplet til visuelle egenskaper ved likningene. For eksempel at den ene hadde et mye større tall trukket fra på begge sider enn de andre, eller at tre av likningene både hadde minus og pluss som fortegn, mens den siste bare hadde ett fortegn. Emma la merke til at det i likning 3 kun hadde blitt trukket fra ni på den ene siden av likhetstegnet og hun prøvde å foreslå dette for gruppa flere ganger. I tillegg så Fredrik en sammenheng mellom to av likningene. Han oppdaget at han kunne fjerne det store tallet fra begge sider og at det ikke endret likningen. Lisa kom med en konkretisering. Hun var vant til at når man har en likning så skal man finne verdien til x. Emma ga tydelig uttrykk for at hun visste at innholdet i likningen har blitt endret når en bare fjerner ni fra en side av likhetstegnet. Etter at Lisa hadde ledet gruppa inn på at de skal prøve å se hva x er i likningene begynte to av elevene og notere tall ved siden av x i de ulike boksene som likningene står i.

Episode 2

Elevene har kommet frem til at i alle fall to av likningene gir svaret x = 5. Emma hadde allerede forstått at likning 3 skilte seg ut, men har ikke kommet til for å forklare akkurat hva hun mener, men hun har nevnt det flere ganger. Jeg la merke til at Fredrik spesielt var usikker på likning nr 3. Han var ikke helt med på at x ikke var lik 5 i likningen x + 4 = 9 – 9. Derfor spurte jeg elevene om denne likningen nok en gang.

Jeg: Er det noen som mener at x er lik 5 i den nede til venstre? (altså nr 3)
Fredrik: Ja, blir det ikke det da? Hvis vi setter inn 5 så blir jo 5 + 4 lik 9.
(elevene er helt stille, virket som om flere var usikre)
Jeg: Er det noen som vet hva likhetstegnet egentlig betyr?
Fredrik: At det skal være likt på begge sider.
Lisa: Det er jo den derre vippeskåla! (viser en slags likevekt med hendene)
Emma: Men da passer jo ikke den der inn da (peker på nr 3) for hvis x er 5 så blir det jo bare 9 og det står jo –9 der å!
Anders: Aja!
Fredrik: Ja, du må jo ta med alt på den siden å!

I denne situasjonen ble Fredrik konfrontert med sin misoppfatning om at det som står direkte til høyre for likhetstegnet, skal være summen av de to leddene foran, altså at likhetstegnet betyr at nå kommer det et svar. Lisa var generelt lite aktiv i diskusjonen, men kom innimellom med noen konkretiseringer. Hun så for seg en skålvekt og sammenliknet denne med likhetstegnet. Når jeg spurte gruppa om hva likhetstegnet betyr var Fredrik den første til å svare at likhetstegnet betyr at det skal være likt på begge sider, noe han ikke engang hadde nevnt på sin skriftlige besvarelse. Det begynte sakte men sikkert å gå opp for han at x= 5 i denne likningen ikke er forenelig med at likhetstegnet betyr at det skal være likt på begge sider. Emma prøvde så å argumentere for sitt forslag om at likning 3 skal ut. Hvis x = 5 så blir det jo 9 som Fredrik sa, men det står ikke bare 9 på høyre side, det står –9 der også. Anders og Fredrik ble plutselig klar over at man må ta med alt som står på begge sider for å kunne si at det er likt.

Episode 3

Episode 3 er en del av diskusjonen rundt oppgave 2. Både ved tidligere erfaring ved skolen og ved å se på svarene fra pretesten ble jeg bevisst på at noen av elevene benyttet slike equality strings i sine svar og jeg ønsket å få til en diskusjon rundt dette og bevisstgjøre disse elevene på bruken av likhetstegnet.

Jeg: Hvor mange betydninger av likhetstegnet klarer dere å se for dere?

Lisa: 2.

Anders og Fredrik: Mm.

(Emma svarer ikke, men sier seg ikke enig i at det er 2)

Jeg: Hvilke to betydninger er det da?

Anders: Svar og at det er likt på begge sider.

Lisa: Hvis man setter likhetstegnet i midten så skal man finne x eller vektskåla da (konkretiserer) og hvis det står bak så skal man telle sammen det som står foran.

Emma: Men det blir jo på en måte det samme. Selv om det står bak så blir det jo likt på begge sider (viser en likevekt med hendene). Hvis vi for eksempel har 4 + 7 så blir jo det det samme som svaret. Og det er jo 11.

Jeg: Og hva betyr likhetstegnet nå da? Når vi har for eksempel 4 + 7 = ?

Emma: At det skal være likt på begge sider.

Anders: Men det tyder på at det kommer et svar da.

Fredrik: Men det betyr jo fortsatt at det er likt på begge sider. Det er jo fortsatt det samme.

Jeg: Emma, kan du forklare en gang til hvordan du tenkte?
Emma: Det du gjør når du legger sammen er jo bare å gjøre at det blir likt på begge sider. (viser er vekt med hendene en gang til). Hvis du ser for deg vekta så veier det jo like mye liksom. Da er det jo bare en betydning.
Jeg: Og hva er den ?
Elevene ler litt oppgitt og sier i kor: At det skal være likt på begge sider.

Under diskusjonen av oppgave 2 ble det enda klarere for Fredrik hvorfor det blir feil å skrive en rekke delsvar som en slik equality string. Da han så det skrevet på denne måten ble han veldig oppmerksom på at dette ikke var en korrekt bruk av likhetstegnet. Han var den eneste som benyttet seg av slike svar på pretesten. Tre av elevene var enige i at likhetstegnet har to betydninger. Dette til tross for at dette skilte seg fra deres skriftlige svar på pretesten for flere av disse elevene. To av dem har ramset opp enda flere betydninger enn to på pretesten. Lisa viste også i denne situasjonen at hun ser på likhetstegnet som en konkretisering av hva hun skal gjøre videre. Hun fortalte at hvis likhetstegnet stod i midten, så hadde man en likning og da skulle man finne x. Emma var ikke enig i at likhetstegnet hadde to betydninger. Etter hvert prøvde hun å forklare de andre hvorfor hun mente at det bare hadde en betydning. dette var nettopp fordi at det å finne svaret på en oppgave som 4 + 7 = faktisk var å sørge for at man opprettholdt likhetegnets relasjonelle egenskap. Gruppa repeterte likhetstegnets betydning flere ganger.

Episode 4

Den siste episoden fra oppgavediskusjonen, er hentet fra diskusjonen av oppgave 3. Elevene hadde allerede kommet opp med endel forslag til hvilken likning som skulle ut. De hadde vært inne på flere årsaker til at likning 2 skulle ut. Emma oppdaget med en gang at likning 4 skilte seg ut fordi tallet 4 kun var trukket ifra på den ene siden. De hadde også nevnt at x kunne være lik 2 i flere av likningene. Fredrik var fraværende i store deler av diskusjonen rundt denne oppgaven frem til dette tidspunktet. Han hadde konsentrert seg om å regne ut likningene algebraisk og kommet frem til at i alle fall to av likningene også kunne skrives som $3x = 6$.

Anders: Kanskje den der skal ut (peker på nr 2) for alle de andre inneholder 5x. Og alle de andre har x i to ledd.

Fredrik: Både leddene…. Altså nå har jeg ikke regna ut men…. Men det er jo flere ledd i de to her. Altså på hver sin side. Men det kommer jo litt an på hva det blir på hver side da. Men jeg ser jo at de to blir like (peker på 1 og 2, viser frem sin oppgave til de andre og peker nå på det han har regnet ut på arket sitt). Begge blir 3x = 6. Og i den også (peker på nr 4. Der har han regnet feil, men ikke oppdaget det enda).

Jeg: Kan du forklare de andre hvordan du tenkte når du kom frem til at alle de ble 3x = 6?

Fredrik: Jeg prøvde bare å få det likt på begge sidene. Jeg fikk x'ene over på en side og talla over på den andre. Og så regna jeg det ut. Det gjorde jeg på alle 3.

Anders: Vi kunne for eksempel tatt den (peker på likning 2) og så delt 3 på 6.

Fredrik: Nå er jo den der veldig lett da. Du ser jo at det er 2. Da hadde jeg bare tatt ganger 2, fordi de står inntil hverandre og da er det gangetegn og 3 ganger 2 er 6.

Anders: Men vi kan vel også dele på 6?

Emma: Da får vi vel verdien av 1 x.

Fredrik: Og da ville du fått ett eller annet svar og så skal du gange med 1 eller noe sånt. Var det ikke det Heidi (læreren) sa.

Fredrik: 0, ville vi fått da??

Anders: Nei, 1.

Fredrik: Ja, 1 er det.

Anders: Men da ville du jo fått 1/2 på den andre siden.

Fredrik: Da blir det ulikt på begge sidene.

Anders: Men da står det jo 1/2 x = 1 og vi vil jo ha en hel x.

Fredrik: Ja, men da er jo fortsatt x = 2.

Emma: Vi kunne delt på 3 da. For hvis du tar 3x og deler på 3 så får du jo x. og så får du 6 delt på 3 og det er jo 2. Da får du jo svaret med en gang.

Anders: Skal vi alltid deler på det tallet som har x i seg?

Emma: Ja, skal vi ikke det da?

(Fredrik driver fortsatt å regner litt på egenhånd for hver ting som blir oppklart for han)

Fredrik: Jeg tror jeg regna feil istad. På den (nr 4) så blir det 3x = 2. for her er det –4 + 10 – 4. Men den (nr 3) blir også 3x = 6. Og da er det jo den som skiller seg ut (peker på nr 4). Alle de andre blir 3x = 6 bortsett fra den. Der blir det 3x = 2. Jeg regna feil på den istad.

Diskusjonen begynte og nærme seg slutten og elevene ble også tryggere på hverandre og på meg, og det ble lettere og få den til å forklare hva de mente. De ble også tøffere på å utfordre hverandre og se saken fra ulike vinkler. Fredrik startet diskusjonsoppgaven med å se på

oppgavene og sette inn et mulig tall for x. Da diskusjonen nærmet seg slutten benyttet han seg av kjente regneregler for å ikke bare konkludere med at x ble 2 i tre av likningene. Han fant også ut at tre av likningene kunne skrives som 3x = 6, mens den siste kunne skrives som 3x = 2. I løpet av diskusjonen rundt oppgave 3 begynte elevene også å trekke frem og vurdere de regnereglene de hadde lært for å løse likninger. Anders foreslo at de skal dele på 6 i likningen 3x = 6. men fant selv ut at han da ville stå ingen med likningen 1/2x = 1. Fredrik svarte med at dette fortsatt ikke ville endre likningen for x vil fortsatt være 2. Emma foreslo så at de kunne dele begge sider på 3 for å finne svaret direkte og elevene kom frem til en regel om at hvis de alltid delte på tallet foran x så ville de finne verdien av 1x.

Episode 5. Elevene vurderer opplegget

Etter at elevene var ferdige med å diskutere de tre oppgavene ble de spurt om å svare på noen få spørsmål i fellesskap for å evaluere opplegget de hadde deltatt i.

Jeg: Hva synes dere om å diskutere oppgaver sånn som vi har gjort nå?

Fredrik: Det er mye bedre enn å jobbe hver for seg og sånn.

Lisa: Man lærer liksom mye mer av det.

Jeg: Dere lærer mer av det?

Et enstemmig ja fra alle fire.

Fredrik: Vi får høre andres meninger og sånn.

Lisa: Det kan jo godt hende du tar feil selv ikke sant?

Anders: Jeg lærte noe jeg ikke visste i dag.

Jeg: Å, Hva lærte du da?

Anders: Neste ALT om algebra. Jeg kunne ikke en dritt.

Fredrik: At likhetstegnet liksom bare hadde en betydning.

Lisa: Ja, det lærte jeg også.

Jeg: Hva tenker dere at fordelene med et sånt gruppearbeid som dette er da?

Lisa: At man får høre andres meninger.

Anders: Og diskutere dem.

Lisa: Det kan bli litt kjedelig å alltid sitte alene å jobbe med sånne ting.

Anders: Man blir mer engasjert.

Emma: Og når man sitter alene så tenker man bare på en måte. Og når man sitter sammen med flere så tenker alle på litt forskjellige måter.

Alle de fire elevene i diskusjonsgruppa var enige i at de lærte mer av å få lov til å diskutere og reflektere rundt viktige begreper som dette. Det var det første punktet som ble nevnt da de ble spurt om hva de synes om å diskutere oppgave på samme måte som de hadde gjort i diskusjonsgruppa. Grunnene til at de lærte mer var at de fikk høre andres meninger om oppgavene og at man fikk diskutere de ulike forslagene som kom opp. Da fikk de bekreftet eller avkreftet ideer de hadde knyttet til oppgavene og begrepene. Det var også en fordel at det kom frem flere ulike måter og løse oppgaven på, noe som ga dem en følelse av at det var mange ulike løsningsstrategier man kunne benytte til problemløsningen. I tillegg synes elevene at slike opplegg og små diskusjoner i undervisningen ga sårt tiltrengt variasjon i timene. Variasjon, samarbeid og diskusjoner førte til gleder, mestring, motivasjon og engasjement. Anders var veldig fornøyd med at han lærte omtrent alt om algebra. Han sa selv at han hadde lært mange ting han ikke hadde forstått tidligere og best av alt så hadde det vært morsomt. Han presiserte også flere ganger at han i utgangspunktet ikke synes at matematikk var gøy.

4.3 Resultater fra posttest

Resultatene fra posttesten presenteres sammen med resultatene fra pretesten i tabell 2.

Tabell 2. Tabellen viser elevenes resultater fra posttesten sammenliknet med resultatene fra pretesten.

Elev nr	**Fiktive navn**	**Resultat pretest**	**Resultat posttest**	**Bemerkninger**
1	Sara	Relasjonell-	Relasjonell-	Instrumentell definisjon
2	Anders	Instrumentell	Relasjonell	
3	Peter	Relasjonell	Relasjonell	
4	Lisa	Instrumentell	Instrumentell +	
5	Nicolay	Relasjonell	Relasjonell	God ekvivalensforståelse
6	Emma	Relasjonell -	Relasjonell	
7	Daniel	Relasjonell	Relasjonell	Setter prøve på svaret.
8	Fredrik	Instrumentell	Relasjonell	Viser equality strings på pretest, ikke posttest.
9	Siri	Relasjonell	Relasjonell	Svært god!

Først vil jeg kort sammenlikne resultatene til elevene som var en del av diskusjonsgruppa, deretter vil jeg kort si noe om resultatene til de resterende elevene. De mulige årsakene til utviklingen vi ser her vil diskuteres videre i diskusjonen. Av disse ni elevene var det Anders, Lisa, Emma og Fredrik som var en del av diskusjonsgruppa og derfor hadde gjennomført undervisningsopplegget med en gruppediskusjon. Anders har hatt en kraftig utvikling fra å utelukkende gi instrumentelle svar til å både definere likhetstegnet relasjonelt og vise en relasjonell forståelse ved løsning av likninger. Lisa har ikke hatt den samme utviklingen. Men hun var også den som minst deltakende i diskusjonen. Hun svarer på oppgave 1 med at likhetstegnet betyr at det skal være likt på begge sider, i motsetning til pretesten hvor hun svarer kun med konkretiseringer. Der sier hun at likhetstegnet betyr at det neste som kommer er et svar og kommer med flere andre betydninger som at likhetstegnet også betyr at vi skal legge sammen, trekke fra og at vi har en likning, og dette er avhengig av hvor likhetstegnet er plassert. Men selv om hun viser en relasjonell definisjon i oppgave 1, viser hun ikke det samme i oppgave 2 og 3. Hun gjør fortsatt en del av de samme feilene og har noen av de samme misoppfatningene som på pretesten.

Emma var den av elevene i gruppa som var nærmest en fullstendig, relasjonell forståelse av likhetstegnet på pretesten. På posttesten viser hun en tydelig relasjonell forståelse, svarene har blitt mer fullstendig og hun er tydeligere i sine forklaringer på hvorfor hun gjør som hun gjør. Fredrik har også hatt en god utvikling mot en relasjonell forståelse, Han har også gått fra å benytte seg av å kun ”se” svaret i likningene, til å løse likningene ved hjelp av formell algebra. Han har fått alle de fire første deloppgavene i oppgave 3 rett. Det som er litt overraskende er at han har svart feil på oppgave 3e). Denne oppgaven var en direkte kopi av en del av diskusjonsoppgaven. Og på nettopp denne oppgaven begynte Fredrik å se sammenhengen i de ulike likningene i Hvem skal ut- oppgaven. Han var den eneste som regnet ut at tre av likningene faktisk kunne skrives som $3x = 6$. I denne deloppgaven har han heller ikke skrevet et forklaring på hvorfor de ikke er like, så det er ikke lett å tolke hvorfor han har ikke har fått til denne deloppgaven. Fredrik var den også den eneste eleven som viste ”equality strings” på pretesten. Det gjør han ikke lenger på posttesten, selv ikke på den oppgaven som tilsvarer oppgaven på pretesten.

Når det gjelder de fem elevene som ikke gjennomførte diskusjonen har alle disse opprettholdt sin relasjonelle forståelse mellom de to testene, noe som ikke er overraskende. Hvis en først

har opparbeidet seg en relasjonell forståelse så er jo det en type forståelse som vedvarer over tid (Brekke, 2002). To av disse fem elevene har en ekstremt god relasjonell forståelse og deres forklaringer er like veloverveid i begge de to testene. Sara var den eneste av de resterende fem elevene som ikke utelukkende viste relasjonelle svar på pretesten. Hun svarte på oppgave 1 med en instrumentell definisjon av likhetstegnet, men visste en såpass stor trygghet ved møtet med likhetstegnet i de to neste oppgavene at hun ble klassifisert som en elev med en relasjonell forståelse. Hun viser nøyaktig det samme i posttesten. Det som hadde vært ønskelig var om noen av resterende elevene som ikke tok del i diskusjonen, hadde hatt en instrumentell forståelse. Dette for å kunne sammenlikne deres utvikling med de elevene som hadde en instrumentell forståelse og var en del av diskusjonsgruppa. Men fordi det bare var 9 av elevene i matematikkgruppa som deltok i studien og som husket på å levere inn samtykkeskjema var det ingen slike elever blant de resterende elevene.

5. Diskusjon

I dette kapittelet ønsker jeg å løfte frem ulike sider av mine resultater i lys av den teorien og metoden omtalt i kapittel 2 og 3. I den forbindelse vil jeg bare minne om årsaken til at oppgaven har ført meg til dette punktet, nemlig foremålet med oppgaven. Innledningsvis forklares bakgrunnen for den valgte problemstillingen, nemlig at forståelsen av algebra blir vurdert til å være en "gatekeeper" til videre utdanning og jobbmuligheter. Det viser hvor viktig forståelse er i matematikkfaget og hvor tidlig grunnlaget for videre utdanning og karriere blir lagt. Derfor ønsket jeg å utføre en studie som skulle undersøke aspekter ved elevers algebraforståelse, ved å ta utgangspunkt i diskusjon som en arbeidsmåte for å utvikle en relasjonell forståelse av likhetstegnet. Jeg stilte følgende problemstilling: Hvordan kan elever gjennom diskusjon utvikle en begrepsforståelse av ekvivalens? Underveis i studien har jeg også stilt meg selv følgende spørsmål: Hva er det ved dette undervisningsopplegget som kan bidra til en utvikling av elevenes begrepsforståelse? Og hvilken rolle har diskusjon i denne utviklingen? I diskusjonen som følger vil jeg også prøve å besvare disse spørsmålene.

5.1 Drøfting av resultater

Resultatene fra denne studien viser at alle de fire elevene i diskusjonsgruppa har hatt en utvikling av sin forståelse, mellom pretesten og posttesten. Denne utviklingen har vært spesielt positiv for tre av de fire elevene. Når ordet positiv benyttes i denne sammenhengen ses det i forhold til problemstillingen og studiens foremål. Det vil si en utvikling hos elevenes forståelse mot en relasjonell forståelse av begrepet ekvivalens (se også definisjon av utvikling i kapittel 1 Innledning). Denne utviklingen har allikevel vært veldig ulik hos elevene i diskusjonsgruppa. Jeg vil drøfte ulike aspekter ved diskusjon som metode igjennom de ulike elevenes personlig utvikling, og så oppsummere mine hovedfunn mot slutten av kapittelet.

5.1.1 Elevenes personlige utvikling

Fredrik er den av elevene i diskusjonsgruppa som har endret sin forståelse av likhetstegnet mest. Fra å gi en instrumentell definisjon av likhetstegnet, kun se på likningene og "gjette" seg til svaret og samtidig vise en generell instrumentell forståelse av begrepet, fikk Fredrik rett på alle oppgaven på posttesten bortsett fra én deloppgave. Han forklarer likhetstegnets betydning på en relasjonell måte i oppgave 1 på posttesten. I oppgave 2 klarer han å løse begge likningene. Når han nå skal løse disse likningene viser han en variasjon i sine løsningsmetoder. Posttestens andre oppgave har to likninger. I den første likningen er det

ganske enkelt se hva verdien til x er uten at man må regne det ut. På denne oppgaven benytter Fredrik seg av én metode, ”gjett og sjekk”. Han ser ut i fra likningen at x må være 2 for at begge sidene av likhetstegnet skal bli like. Han setter deretter inn verdien for x og sjekker om han får det samme svaret på begge sider. Han forklarer godt hva han gjør for å løse likningen og hvorfor han gjør det på denne måten. Han er effektiv og bruker den enkleste metoden han kan for å komme frem til rett svar.

Den neste likningen som skal løses er $3x - 7 = x + 1$. Det er ikke like lett å se hva verdien for x må være i denne likningen. Derfor løser Fredrik denne likningen algebraisk. Han løser denne likningen uten problemer. Han har benyttet seg av to ulike løsningsstrategier for å løse de to likningene. I løpet av diskusjonen viste de fire elevene frem flere ulike løsningsmetoder for å komme frem til svaret både når det gjelder generell problemløsning og når det gjelder løsning av likninger. Det at elevene lærer seg ulike måter og løse et problem på gjør at det har mange flere muligheter når de møter nye utfordringer. Bare det å vite at man klarer å løse samme oppgave på flere ulike måter vil gjøre at en ikke gir opp like lett hvis en står fast på en oppgave. Det styrker kreativiteten og oppfinnsomheten og man vet at man kan starte på problemet fra en annen vinkel hvis man står fast. Når elevene selv skal vurdere diskusjonen og hvilke fordeler som finnes med å diskutere på denne måten trekker flere av elevene fram dette som en av de viktigste fordelene. De får høre andre elevers syn på ting og får nye vinkler som gjør at de ser oppgaven i et nytt lys. Kilpatrick et al. (2001) hevder at en god indikator på om en elev innehar en god begrepsforståelse vil være at eleven kan presentere matematiske situasjoner på ulike måter og vite noe om hvordan ulike representasjoner kan være nyttige i ulike situasjoner. Når en har flere måter å kunne tilnærme seg et problem på, vil det være lettere å kunne løse det og mindre sannsynlig at det vil gjøres grove feil.

Det er ikke bare gjennom å se på forskjellen på pretest og posttest at man kan registrere Fredriks utvikling. Hans utvikling er også tydelig igjennom hans deltakelse i diskusjonen. Han blir mer og mer ivrig igjennom diskusjonen. Jo mer han skjønner og lærer, desto ivrigere er han i å forklare det for de andre i gruppa. ”Mestring er sannsynligvis den viktigste kilden til arbeidslyst og pågangsmot i læring og arbeidsliv”, (Halland, 2005, s.47). Oppgave 1 og oppgave 3 på pretesten har samme form. Når gruppa arbeider med oppgave 1 er Fredrik mest opptatt av de visuelle egenskapene ved de ulike likningene og han skriver umotivert verdien x i de ulike likningene i hjørnet i ruta. Han er også inne på at flere av likningene i oppgave 1 er like og han ser noen klare fellestrekk ved dem uten helt å klare å forklare hvorfor. I løpet av

diskusjonen blir han mer og mer aktiv og engasjert. Noe av usikkerheten knyttet til starten av diskusjonen skyldes nok ikke bare det faglig, men også andre usikkerheter ved situasjonen. Som nevnt tidligere trenger både elever og lærere tid til å vende seg til en ny arbeidsmetode som inneholder mer diskusjon. Det vil være uvant for elevene å skulle forklare hvordan de tenker høyt for endre elever (Carpenter & Levi, 2000). De er også vant til at det er læreren som er autoriteten i timen, som vurderer alt som blir sagt og som skal ha fasiten på oppgaven. Dette kan gjøre at noen elever kvier seg for å være aktive i diskusjoner (Weber et al., 2008). Etter hvert vil elevene få eierskap til sine bidrag i diskusjonen og det vil bli lettere for dem å rettferdiggjøre sine resonnementer (McCrone, 2005). Dette kan også være en av grunnene til at Fredrik og de andre elevene blir mer aktive utover i diskusjonen. Hvis studien hadde gått over lenger tid ville det vært ideelt både for elevene, læreren og den deltakende observatøren og øve på slike matematiske diskusjoner og det å uttrykke seg muntlig.

Diskusjonen ble også videofilmet noe elevene ga uttrykk for at de var litt ukomfortable med. Etter hvert som elevene ble opptatt med å løse oppgaver og argumentere for sine synspunkter ble de mindre opptatt av kameraet. Men en kan allikevel ikke utelukke at elevene ble påvirket av at det var et kamera tilstede, for det er ikke uvanlig at dette påvirker de som blir filmet (Brinkman & Tanggaard, 2012). Jeg vil allikevel påstå at nærværet til videokameraet ikke påvirker min konklusjon nevneverdig. Konklusjonen baseres på en utvikling mellom en pretest og en posttest, disse videofilmes ikke. Videokameraet kan i så måte ha påvirket aktivitetsnivået til elevene i diskusjonen, men ikke det faglige innholdet i det de sier. Jeg tror også at hvis en elev i en gruppe ikke deltar nøyaktig like mye i en diskusjon som den ville uten et kamera tilstedet, så vil denne eleven uansett være med i diskusjonen i hodet. Hvis forståelsen av likhetstegnet på denne måten vil bli utfordret i kognitive konflikter allikevel, så vil dette være nok til at eleven vil få utfordret sine begreper og dermed utviklet dem videre. Det er også slik at hvis dette allikevel skulle ha en betydning for min studie så ville det i så fall være slik at eleven ikke har utviklet seg like mye som det var mulighet for. Dette vil si at utviklingen i så fall har vært dårligere enn mulig, og ikke motsatt.

En ting som også er bemerkelsesverdig når det gjelder Fredrik sin besvarelse er at han viste ”equality strings” når han løste oppgaver på pretesten. Dette gjør han ikke på posttesten. Under diskusjonen av oppgave 2 er Fredrik svært sikker på at man ikke kan skrive en lang linje med likhetstegn imellom og at dette er en ukorrekt måte å benytte likhetstegnet på. Allikevel er han igjen usikker på hvorfor det første likhetstegnet ikke (2 + 7 = 9 + 7). I denne

situasjonen blir han godt utfordret av Emma som minner Fredrik på at han har sagt at likhetstegnets betydning er at det skal være likt på begge sider av tegnet. Det må jo bety at man må ta med alt på høyre sine hvis man tar med alt på venstre side. Ved å utfordre Fredriks forståelse av likhetstegnet ved å ta tak i noe han selv gjør i oppgaveløsning ble han enda mer bevisst sin utilstrekkelige definisjon. Noe som har ført til en endring i hvordan han fører sine oppgaver. Han har også kommet til et nivå der han vurdere de ekvivalente likningene på den måten at det ikke bare er det at $x = 2$ som gjør at likningene i diskusjonsoppgave 3 er like. Hvis alle likningene kan skrives som $3x = 6$ så betyr også det at de må være like og at de har samme verdi for x. I den likningen der $3x = 2$, ville man derfor ikke trenge å regne ut verdien til x for å finne ut at den likningen ikke er ekvivalent med de andre tre.

Anders har også utviklet sin forståelse av ekvivalens fra å være instrumentell til relasjonell. I oppgave 1 på pretesten skriver Anders at den eneste definisjonen han har av likhetstegnet er at det neste som kommer er et svar. Han foreslår ingen alternative definisjoner. På posttesten foreslår han en relasjonell definisjon av likhetstegnet. Han har også endret sin metode for å løse likningene i oppgave 2. På pretesten prøver han seg på en algebraisk utregning av likningen, og det er det han forventer at læreren ønsker. Men han viser tydelig at han ikke ar forstått reglene han bruker, og han husker dem heller ikke riktig. Skemp (1976) viser at det er lettere å glemme kunnskap som ikke er relasjonell. Jo mer en må huske uten å knytte det til annen kunnskap, jo lettere er det å glemme det eller huske det feil. Det er svært viktig å forstå de transformasjonene vi benytter i likninger, ikke bare benytte regler en har lært blindt (Steinberg, Sleeman & Ktorza, 1990).

Anders har ikke forstått reglene han benytter og han har en instrumentell forståelse av likhetstegnet. Det fører til at alle hans mellomregninger i likningen er preget av hans misoppfatninger, men svaret er riktig. Det har han sett ut i fra likningen. Han forklarer i diskusjonen at han vet at det står et gangetegn mellom 2 og x i likningen $2x + 3 = 9$. Derfor klarer han enkelt og finne ut hvilken verdi x må ha for at likningen skal bli sann. Men han husker ikke reglene for å komme seg til svaret, så han bare prøver på noe. Han klarer heller ikke å forklare metoden han har benyttet seg av for å komme frem til svaret. Dette fordi at han heller ikke har forstått de ”reglene” han selv bruker. Han forklarer at han først flyttet 9 til der 2x sto og regnet det ut. Men han har verken flyttet tallet 9, kun byttet fortegn på det selv om det fortsatt står på samme side av likhetstegnet, eller flyttet 2x.

På posttesten har Anders mye større kontroll på det han gjør og han har endret sin strategi for å løse likningene i oppgave 2. Med endringen av strategi følger også en endring i begrunnelsen for den valgte metoden. Forståelsen av begrepet ekvivalens påvirker både strategiene elevene bruker for å løse problemer og hvordan de begrunner sine løsninger. Det viser seg også at en innsats for å øke elevers forståelse av likhetstegnet, vil gjøre at elever presterer bedre i algebra (Knuth et al., 2006; Saldanha & Kieran, 2005). Han benytter seg nå av ”gjett og sjekk” og alle utregningene er riktige og bruken av fortegn er riktig. Han kommer også frem til riktig svar og forklarer bedre hva han har gjort og hvorfor han har gjort nettopp det. Han klarer også å finne verdien til x i alle deloppgavene i oppgave 3. han vet både hvilke av likningsparene som er ekvivalente, hvorfor de er ekvivalente og hva verdien til x er i de ulike likningene. Han konkluderer med at likningene er like nettopp når de har samme verdi for x. På pretesten forklarer han at likningsparene har samme verdi for x, men at de ikke er like allikevel.

Lisa er vanligvis svært taus i matematikktimene, og er ofte opptatt av mye annet i undervisningen. Noen elever er redde for å avsløre at det er ting de synes er vanskelig og som de ikke får til. Derfor vil noen av disse elevene heller velge å være passive enn å avsløre at de ikke forstår. Noen av elevene vil også prøve å ta fokuset vekk fra læringen ved å være unnvikende, bråkete, eller tause (Halland, 2005). Under diskusjonen var Lisa den mest passive av de fire elevene. Hun kom med noen konkretiseringer både når det gjaldt likhetstegnet og likninger. Men virket usikker på sine faglige kvaliteter og var mest enig med de andre elevene, fremfor å fremme egne meninger. Da den siste Hvem skal ut- oppgaven startet ble hun spurt om hun så om noen av likningene hadde noen likhetstrekk. Hun var opptatt av at ingen av likningene var identiske. Da en av elevene motsa dette sa hun bare: ”ja, det ser jeg, men bortsett fra den da”. Hun var generelt bare enig med de andre tre.

De elevene som vanligvis ikke er så aktive i undervisningssituasjoner i plenum vil ofte ha en stor fordel av å diskutere og reflektere i litt mindre grupper. Lisa som ikke er aktiv i timene hvis hun ikke blir spurt, hadde noen grad av aktivitet under dette opplegget, spesielt mot slutten av diskusjonen. Slike opplegg ”stimulerer elevenes refleksjonsevne, og erfaringsmessig vil elever som strever med faget i langt større grad delta aktivt i denne type aktivitet” (Hågensen, Karlsen & Nordbakke, 2013, s. 47). Selv om Lisa var tidvis mer aktiv i denne diskusjonen i forhold til det inntrykket læreren har gitt meg av Lisa, virket hun opptatt av andre ting under diskusjonen. Dette kan ha ført til at hennes misoppfatninger ikke ble

utfordret på samme måte som hos de andre. For å få størst virkning av diagnostiske oppgaver og diagnostisk undervisning sier Brekke (2002) at det er viktig at oppgavene skaper kognitive konflikter hos elevene. Det vil si at elevene skal møte konflikter der en ser utilstrekkeligheten av sine egne definisjoner og disse skal være med på å rydde misoppfatningene av veien. Lisa som ikke konsentrerte seg om å utfordre seg selv på denne måten og kun fulgte etter de andre vil ikke ha møtt så mange kognitive konflikter hos seg selv. Dette vil nok være en an grunnene til at Lisa heller ikke hadde det samme utbyttet som de andre elevene.

Faglig er Lisa den svakeste av de fire elevene i gruppa. Hun leverte også den svakeste pretesten av de fire. Lisa leverte en besvarelse bestående utelukkende av instrumentelle svar på de tre oppgavene. Hun svarte på de fleste spørsmål med en konkretisering og likningen har Lisa tydelig bare gjettet på. Hun husker at noen tall skal trekkes fra og divideres. Svaret er riktig, men likningen er såpass lett at hun har sett det i likningen. Hvis jeg sammenlikner resultatene fra posttesten med pretesten har hennes svar endret seg noe. På oppgave 1 har Lisa nå endret svaret fra og være instrumentelt til å være det en vil definere som relasjonelt. Allikevel vil jeg definere Lisas relasjonelle svar som en instrumentell forståelse. Med dette mener jeg at hun husker definisjonen som de andre tre elevene gjentok utallige ganger i diskusjonen og hun vet også nå at det er det som er det ”riktige” svaret. Allikevel har hun ikke forståelsen for hva denne definisjonen egentlig betyr for forholdet mellom høyre side og venstre sida av tegnet. Dette viser hun når hun skal benytte seg av denne definisjonen i praksis.

I Lisas besvarelse skinner den instrumentelle forståelsen igjennom på oppgave 2 og oppgave 3 på posttesten. Hadde studien kun tatt utgangspunkt oppgave 1 for å vurdere om elevene hadde en relasjonell forståelse ville Lisas svar blitt kategorisert som relasjonelt. På begge likningene i oppgave 2 benytter Lisa nok engang sin gjettemetode. Hun trekker ifra noen tall og deler på noen tall. Det kan virke som hun noen ganger starter med svaret. Hvis hun da ser at $x = 2$ i den første likningen så begynner hun med det og trekker ifra og deler litt tilfeldig for å komme frem til riktig svar. Hun skriver det hun tror at læreren vil se og kanskje håper at læreren vil bli litt lurt av at det står rett svar og med to streker under. Det er også tydelig at Lisa har flere misoppfatninger og utfordringer, ikke bare de knyttet til likhetstegnet. Hun sliter også med de fire regneartene og har regnet feil i alle sine oppgaver, spesielt gjelder problemet divisjon.

I pretesten formulerer Lisa en egen regel når hun skal forklare hvordan hun har løst likningen i oppgave 2. ”Alle tall og alle x’er skal fordeles og da må jeg trekke fra om jeg flytter på noe”. Det gjør hun også på pretesten. Hun har formulert sin egen misoppfatning, som også stammer fra at hun har løst mange oppgaver der man som regel trekker ifra. Og det er nettopp dette som er definisjonen på en misoppfatning. At man har en ufullstendig definisjon og at man gjør systematiske feil fordi man overgeneraliserer eksisterende kunnskap til områder der den ikke gjelder lenger (Brekke, 2002). En annen misoppfatning som kommer til syne hos Lisa er at plasseringen til likhetstegnet har betydning for hva du skal gjøre. Hun mener at hvis likhetstegnet står mot slutten av oppgaven så betyr det at det kommer et svar, men hvis det befinner seg i midten så betyr det at en likning skal løses og man skal finne verdien til x. Det kan være at den, ofte ensartede formen for oppgaver som likhetstegnet introduseres med kan være med å skape misoppfatninger omkring begrepet (Knuth et al., 2006).

For å få til en god diskusjon mellom elevene var det viktig å holde diskusjonen i gang med gode spørsmål og gode innspill. Læreren må vanligvis være den personen som fasiliterer og bidrar til fruktige diskusjoner mellom elevene (McCrone, 2005). I og med at læreren til elevene ikke tok del i dette opplegget og at jeg selv helst ville bidra minst mulig i diskusjonen, og i alle fall ikke komme med svarene, så så jeg for meg Emma i denne rollen. Det at elevene er villige til å delta i diskusjonen og utfordre hverandres løsninger og resonnementer er avgjørende for å få til en god og lærerik diskusjon (Weber, Maher, Powell & Lee, 2008). Hun hadde vist på pretesten at hun hadde en kunnskap som var mer utviklet enn de andre tre. Hun viste også på pretesten at hun var god til å forklare sine handlinger skriftlig, og det kunne indikere at det også var mulig muntlig. I tillegg viste hun også på pretesten at hun var litt usikker og vaklende i sin forståelse av likhetstegnet. Derfor ville hun selv også ha et faglig utbytte av denne diskusjonen.

Emma svarer på pretesten med en relasjonell forståelse av likhetstegnet og hun opprettholder denne definisjonen på posttesten. Hun løser likningen i oppgave 2 korrekt på pretesten. Da benytter hun seg av fordelen av at hun kan se svaret på likningen, men hun forklarer hvorfor hun har gjort det slik og nevner også at det kunne ha vært gjort på en annen måte. I oppgave 3 klarer hun å identifisere hvilke av likningsparene som er ekvivalente, men hun sliter litt med å forklare hvorfor. Hun bruker likhetstegner på korrekt måte når hun forklarer og definerer. På posttesten er svarene til Emma mye mer utfyllende. Hun er sikrere og tydeligere i sin kunnskap. På oppgave 2 har hun gått fra å løse den enkleste likningen ved å se svaret til å løse

den algebraisk. Hun har ingen problemer med å løse begge likningene i oppgave to og hun forklarer at hun bruker regelen ”flytt og bytt” og at dette egentlig bare vil si at det samme tallet trekkes ifra på begge sider. Hun får igjen til å identifisere de likningsparene som er ekvivalente i oppgave 3, men denne gangen klarer hun også å forklare hvorfor. Emma har også fått utfordret sin forståelse ved å være den medierende hjelperen. Hun var ikke den mest aktive i diskusjonen, men fulgte nøye med og kom med det mest velargumenterte forslagene under diskusjonen. Hun ble også tryggere etter hvert og gikk fra å være taus når hun ikke var helt enig, til å si tydelig ifra hvis hun ikke var enig.

Når det gjelder gruppesammensetningen som helhet så fungerte denne veldig bra. Tre av elevene var svært aktive i diskusjonen og det var en god stemning i gruppa. Gruppereglene som elevene hadde fått presentert før diskusjonen startet, var de opptatte av å følge. Det var utfordrende å få Lisa til å delta aktivt i diskusjonen uten at jeg skulle delta for mye.

5.1.2 Elevenes evaluering av undervisningsopplegget

Da elevene ble spurt om å evaluere diskusjonen de hadde tatt del i var det første de nevnte at det hadde vært morsomt og at de hadde blitt mer engasjert. De var også opptatt av at slike opplegg bidro til litt etterlengtet variasjon i matematikkundervisningen. Forskning viser at elever vil ha et utbytte av at det skjer et skifte i tradisjonell matematikkundervisning til å inkludere mer tid til diskutere og reflektere omkring viktige matematiske begreper (Brekke, 2002; McCrone, 2005). Som elevene selv sier og deres resultater viser så har det en positiv effekt på både deres forståelse og på hvor morsomt de har det i faget. Hvis slike oppgaver også gjør at elevene utvikler sin begrepsforståelse, vil det føre til en følelse av mestring hos elevene. Denne mestringen vil igjen kunne føre til en motivasjon for å lære enda mer.

”Discussion allow students to test ideas, to hear and incorporate the ideas of others, to consolidate their thinking by putting their ideas into words, and hence, to build a deeper understanding of key consepts” (McCrone, 2005, s.1). Elevene er opptatt av nettopp dette som McCrone nevner her. Det at får utveksle tanker og ideer gjør at de blir klar over at de finnes flere veier til svaret. De tar også selv om at dette gjør at de får bekreftet eller avkreftet sine egne svar. ”Det kan jo godt hende at du har feil selv” sier Lisa. Det viser også at elevene selv har en følelse at både misoppfatninger og tilfeldige feil må konfronteres for at de skal oppdages (Brekke, 2002). Og først etter at de har blitt oppdaget kan de endres.

5.2 Hovedfunn

Den første delen av diskusjonen besvarer problemstillingen knyttet opp til hver enkelt elevs personlige utvikling. Nå vil jeg løfte opp mine viktigste funn knyttet til alle elevene samlet. Av de fire elevene som var en del av diskusjonsgruppa ses en tydelig utvikling hos tre av dem, Fredrik, Anders og Emma. Av disse tre så var det en som allerede hadde en relasjonell forståelse av likhetstegnet og to som ikke hadde det. Hos Lisa ses små tegn til utvikling, men allikevel har hun ikke oppnådd en relasjonell forståelse av likhetstegnet. For at det skal være mulig å ta tak i misoppfatninger hos elevene, og deretter ha mulighet for å oppklare disse er det svært viktig at elevene får arbeide, diskutere og reflektere over den informasjonen som blir gjennomgått slik at slike enkle misoppfatninger lett blir identifisert og oppklart (Brekke, 2002). Hvis ikke elevene får diskutere og reflektere rundt matematiske begreper vil ikke misoppfatningene bli oppdaget. Utviklingen av matematiske begreper blir forsterket av klasserom der elever uttrykker ideer, utfordrer andres ideer og presenterer overtalende argumenter (McCrone, 2005).

Pretesten indikerte at tre av elevene hadde misoppfatninger om likhetstegnet. Underveis i prosessen dukket flere misoppfatninger opp, spesielt hos Lisa. Hun formulerte disse misoppfatningene både skriftlig og muntlig og misoppfatningene var ikke bare knyttet til likhetstegnet, men også til variabelbegrepet og grunnleggende aritmetikk. Hadde dette vært en del av en undervisning kunne læreren nå arbeidet videre med Lisa og disse misoppfatningene. I denne studien ble oppklaringen av misoppfatninger konsentrert rundt likhetsbegrepet.

En ting det er viktig å notere seg om relasjonell forståelse er at det kan være svært vanskelig å vurdere om en elev forstår instrumentelt eller relasjonelt (Naalsund 2012; Skemp, 1976). Ideelt sett ville jeg samtalt med elevene om likhetstegnet for å bli enda sikrere på klassifiseringen som relasjonell eller instrumentell, både når det gjelder pretesten og posttesten. I løpet av diskusjonen fikk jeg hørt mye om elevenes forståelse knyttet til likhetstegnet og disse resultatene styrket min tro på at klassifiseringene fra pretesten var korrekt for de fire elevene i diskusjonsgruppa. Men jeg har ikke snakket med elevene etter at posttesten var gjennomført. Det kunne vært spennende å snakke med elevene i etterkant også, for å styrke min tolkning av at det har vært en utvikling hos to av elevene fra en instrumentell forståelse til en relasjonell forståelse. Allikevel støttet jeg som nevnt mine konklusjoner fra posttesten til elementer i siste del av diskusjonen.

For å bedre elevers begrepsforståelse er det viktig at de får forklare, argumentere og reflektere over det de har lært om begrepene og hvordan de henger sammen med andre ting de har lært (Brekke, 2002; Kilpatrick et al., 2001; Maher, 2005; McCrone 2005). I diskusjonen i denne studien fikk elevene gjort nettopp dette. De diskuterte likhetstegnets betydning både eksplisitt og implisitt, og førte denne betydningen over til løsning av likninger og vurdering av ekvivalens mellom likninger. Mine funn indikerer at de elevene som var aktive i diskusjonen, som utfordret andre elever og ble utfordret selv og som møtte begrensningene i sine definisjoner via kognitive konflikter, utviklet sin forståelse av ekvivalens mot en relasjonell forståelse. Dette har de gjort ved å delta i noen få velvalgte oppgaver spesielt designet for dette foremålet. I sammenheng med dette sier Brekke (2002) at for å utvikle sin relasjonelle begrepsforståelse i matematikk er det bedre å arbeide grundig med et fåtall velvalgte aktiviteter enn å gjennomføre en lang rekke øvelser. Nettopp dette er viktig siden forskning viser at likhetstegnet som begrep er komplekst og vanskelig å forstå (Knuth et al., 2006) og at en god forståelse av begrepet likhet er grunnleggende for å forstå algebra (Carpenter & Levi, 2000; Falkner, Levi & Carpenter, 1999).

Forståelsen av begrepet ekvivalens påvirker både strategiene elevene bruker for å løse problemer og hvordan de begrunner sine løsninger. Det viser seg også at en innsats for å øke elevers forståelse av likhetstegnet, vil gjøre at elever presterer bedre i algebra (Knuth et al., 2006). De to elevene som har utviklet sin forståelse fra instrumentell til å være relasjonell klarer å løse likninger som de ikke klarte å løse på pretesten, de presterer bedre i algebra. Men det jeg ikke kan si noe om er om de kommer til å opprettholde dette over tid. Allikevel er det forhåpninger om dette siden den relasjonelle forståelsen er mer langsiktig enn den instrumentelle (Brekke, 2002; Skemp, 1976). Elevene har nå fått flere knagger å henge sin kunnskap på og de har utvidet sine skjemaer og sine begrepsstrukturer. I studien til Knuth et al. (2006) viser resultatene også at elevene utvikler sine løsningsstrategier ved å benytte diskusjon som metode. Brekke (2002) forklarer også at det at elever blir presentert for flere typer misoppfatninger under en diskusjon, ikke påvirker dem til å bli mer usikker på sin forståelse. Snarere tvert imot. Mine funn indikerer også at elevene utvikler sine løsningsstrategier og sine begrunnelser. Anders, Fredrik og Emma har mer presise begrunnelser for sine valg i posttesten, og de har også endret sine strategier for hvordan de svarer på de samme oppgavene og hva de gjør hvis de står fast i problemløsningen.

I min studie ble elevene mer og mer aktive mot slutten av diskusjonen. Det var det lettere å holde diskusjonen i gang uten at jeg måtte være deltakende og stille de oppklarende spørsmålene. McCrones studie (2005) viste også en tydelig endring både hos elevene og læreren. Etter at elevene hadde blitt vant til arbeidsmåten tok læreren en mer tilbaketrukket rolle i diskusjonene. Mens læreren i starten var en svært synlig deltaker i diskusjonene og aktiv i å vise elevene mulige måter å spørre utforskende spørsmål på og mulige måter å svare på, tok læreren seinere en rolle der hun var mer tilbaketrukket og bidro kun til å holde liv i diskusjonene. Denne tendensen kan også sees igjennom mitt arbeidsopplegg. Men jeg tror nok at det ville vært mye tydeligere hvis elevene hadde blitt vant til å benytte seg av denne arbeidsmåten over en lenger periode. Den økende aktiviteten kan også skylde at de ble mer vant til videokameraet og mer trygge på hverandre og seg selv.

6. Konklusjon

Algebra er et av de viktigste emnene i matematikkfaget og kanskje det emnet med det mest frynsete ryktet blant elevene. Elever i Norge presterer under gjennomsnittet i algebra. En ting som det også er verdt å merke seg er at norske lærerstudenter også presterer under gjennomsnittet. "De norske allmennlærerne både med og uten ekstra matematikk presterer svakere enn nesten alle de andre landenes program for ungdomstrinnet […..] og det er verdt å legge merke til at de norske allmennlærerstudentene uten ekstra matematikk presterer på samme nivå som lærerstudenter i Botswana og i underkant av lærerstudenter på Fillipinene" (Grønmo & Onstad, 2012, s. 27). Hvis norske lærere behersker et så viktig tema som algebra dårlig, så er det elevene som rammes av dette. Men disse lærerne har vært elever en gang de også. Elever som kanskje ikke fikk utfordret sin forståelse nok og utviklet sin algebraiske forståelse så langt at de nå innehar en langsiktig, relasjonell forståelse av viktige algebraiske begreper.

Mange elever har misoppfatninger om likhetstegnet og for å få elever til å utvikle en fullstendig og korrekt forståelse av likhet krever en dedikert innsats over lenger tid (Falkner et al., 1999). Hvis en arbeider med likhetstegnet som relasjonelt tidlig, gir dette et godt utgangspunkt når en beveger seg fra aritmetikk og over til algebra (Kieran, 1992). Forskning viser at diskusjon og refleksjon rundt matematiske begreper har mange fordeler og en av disse uomtvistelige fordelene er at det utvikler begrepsforståelsen. I læreplanen Kunnskapsløftet (Utdanningsdirektoratet, 2012) under grunnleggende ferdigheter i matematikk står det at grunnleggende ferdigheter i matematikkfaget inkluderer ferdigheter som å kunne beskrive, tolke, analysere, argumentere, forklare, vurdere, regne, løse problemer og bruke ulike strategier. Ved engasjere elever en god gruppediskusjon vil de få øvet seg i alle disse grunnleggende ferdighetene og de vil få mulighet til å utvikle seg i retning av det Kilpatrick et al., (2001) kaller matematisk kompetanse. En god og fruktbar diskusjon fører til at elevene får øvet seg i alle disse ferdighetene.

Mine funn indikerer at diskusjon er en arbeidsmåte som kan være en pådriver for en utvikling fra en instrumentell forståelse til en relasjonell forståelse. Det at elever får legge frem sine synspunkter, argumentere, utfordre hverandre, revurdere, diskutere og reflektere utvikler den relasjonelle forståelsen av algebraiske begreper (Brekke, 2002; Falkner et al., 1999; Maher, 2005; McCrone, 2005). Elevene møter kognitive konflikter i løpet av en diskusjon og blir

tvunget til å utvikle og revurdere sine definisjoner kontinuerlig. Men for at elevene skal møte disse kognitive konfliktene er det viktig at de er aktive deltakere i diskusjonen. Dette krever øvelse, både hos elevene og hos læreren. Jeg hadde et underliggende mål om at undersvisningsopplegget ikke bare ville utvikle elevenes begrepsforståelse, men også utvikle elevenes løsningsstrategier. Mine funn indikerer nettopp at diskusjon som arbeidsmåte utvikler elevenes strategier og bedrer elevenes prestasjoner i algebra. Jeg kan ikke si at mine resultater direkte er et resultat at den utførte diskusjonen på grunn av faktorer som er diskutert tidligere, men forskning støtter mine indikasjoner (Falkner et al., 1999, Knuth et al,. 2005; Knuth et al., 2006). Hvis elevene presterer bedre i algebra og føler at de forstår mer vil dette kunne føre til en følelse av mestring hos elevene. ”Mestring er sannsynligvis den viktigste kilden til arbeidslyst og pågangsmot i læring og arbeidsliv” (Halland, 2005, s.47)

6.1 Veien videre

Forskning viser at elever vil ha et utbytte av at det skjer et skifte i tradisjonell matematikkundervisning til å inkludere mer tid til diskutere og reflektere omkring viktige matematiske begreper (Brekke, 2002; McCrone, 2005). Ved at elever utvikler sin begrepsforståelse og sine begrepsstrukturer vil de få en bedre forståelse for det matematiske språket. For det er nettopp det matematikken er, et eget språk. Mange elever sliter med å lese dette språket og de blir stresset jo større formler er og jo flere bokstaver og begreper som er tilstede. Nettopp fordi de har vansker med å forstå språket. En god begrepsforståelse og ett godt begrepsnettverk er nødvendig for å kunne trekke ut meningen i det matematiske språket. Dette kan blant annet gjøres ved å bruke alle de situasjonene som oppstår i matematikktimene som grunnlag for diskusjoner. Som lærer må man være klar over at det finnes mange elever i hver klasse som innehar misoppfatninger. Og når disse misoppfatningen identifiseres kan de være gjenstand for diskusjoner i klasserommet. Tall fra TIMSS 2011 (Grønmo et al., 2012) viser at lærere i større grad (enn i 2007) bruker diskusjon for eksempel i forbindelse med lekser. Vet å ta opp oppgaver i forbindelse med lekser har en en gylden mulighet til å ta opp feil elevere har gjort. Denne trenden må fortsettes.

Kieran (2007) viser at det finnes en tydelig avstand mellom forskningen på hvordan elever lærer algebra og hvordan algebra undervises. Forskning på hvordan elever lærer best blir ikke nært nok knyttet til hvordan det undervises. Med denne masteroppgaven har jeg hatt en underliggende intensjon om å fylle en liten del av dette hullet, ved å knytte sammen de fordelene vi vet at diskusjon har for utviklingen av en relasjonell begrepsforståelse. Deretter

har jeg tatt dette med meg når jeg har designet et lite undervisningsopplegg hvor dette er tatt hensyn til. Mine funn indikerer at dette har en betydning for elevenes forståelse av algebra. Og denne sammenhengen kunne det vært interessant og undersøke videre. En god begrepsforståelse har ikke bare betydning for forståelsen av algebra. En god begrepsforståelse vil også ha positive ringvirkninger innenfor flere aspekter i matematikkundervisning og utvikingen av matematiske ferdigheter. Derfor mener Kilpatrick et al., (2001, s. 120) at ”conceptual understanding is a wise investment that pays off for students in many ways”.

Min interesse for matematikk og matematikkdidaktikk stopper ikke her. Jeg tar med meg alt jeg har lært, når jeg starter i min nye jobb om lektor i august. Og jeg håper at denne oppgaven kan være med på å belyse viktige temaer, fordeler og utfordringer med å få til gode diskusjoner, med mål om å utvikle elevers relasjonelle forståelse. Både denne prosessen med å utvikle gode undervisningsopplegg og gjennomføringen av dem har mange fordeler både for elever og lærere. Og disse fordelene må man jo dra nytte av. Når alt kommer til alt så er det jo nettopp det man ønsker, for seg selv og for sine elever, at man utvikler sin forståelse.

Referanser

Bergem, O. K. & Grønmo, L. S. (2009). Undervisning i matematikk. I L. S. Grønmo & T. Onstad (Red.), *Tegn til bedring. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007*. Kapittel 4, (s. 113–138). Unipub.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford (Ed.). *The ideas of algebra, K-12* (pp.20-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Brekke, G. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning*. Oslo: Læringssenteret.

Brinkmann, S. & Tanggaard, L., (2012). *Kvalitative metoder. Empiri og teoriutvikling*. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.

Carpenter, T. P., & Levi, L. (2000). Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades. *Reasearch Report: NCISLA*, Wisconsin Center for Education Reasearch, University of Wisconsin, School of Education.

Dimitrov, D. M., & and Rumrill, P. D., (2003). Speaking of Research. Pretest-posttest designs and measurement of change, *Work,* 20, 159–165.

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999) Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra, *Teaching Children Mathematics*, 6, 56 – 60.

Fuglestad, A. B. (2003). *Konstruktivistisk perspektiv på datamaskiner i Matematikkundervisning*: I B. Grevholm (Ed)(2001). Matematikk for skolen. Bergen: Fagbokforlaget.

Grønmo, L.S., & Onstad, T. (2012). *Mange og store utfordringer. Et nasjonalt og Internasjonalt perspektiv på utdanning av lærere i matematikk basert på data fra TEDS-M 2008*. UniPub.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H., & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram – norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011*. Oslo: Akademika Forlag.

Halland, G. O. (2007). *Læreren som leder. Perspektiver og praksis for kontaktlærer og faglærer*. Bergen: Fagbokforlaget.

Hågensen, L., Karlsen, K. A. B., & Nordbakke, M. (2013). *Idéhefte – Matematikkdagen 2013*. LAMIS Østfold.

Imsen, G. (2003). *Elevens verden - Innføring i pedagogisk psykologi*. Oslo: Universitetsforlaget.

Johnsen, D. W., Johnsen, R. T., Haugaløkken, O. K., & Aakervik, A. O. (2006). *Samarbeid i skolen*. 4. utg. Namsos: Pedagogisk Psykologisk Forlag AS.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In T.D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp. 390 – 419). New York: Macmillian,

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). Charlotte, NC.: Information Age.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. Washington, D.C.: National Academy Press.

Knuth, E. J., Alibali, W. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle School Students' Understanding of Core Algebraic Consepts: Equivalence & Variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37, 68-76.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, W. W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(4), 297-312.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997) Students' Understanding of Algebraic Notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, 33(1), 1-19.

Maher, C. A. (2005). How students structure their investigations and learn mathematics: insights from a long-term study. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 1-14.

McCrone, S. S. (2005). The Development of Mathematical Discussions: An Investigation in a Fifth-Grade Classroom. *Mathematical Thinking and Learning An International Journal*, 7(2), 111-133.

Naalsund, M. (2012). *Why is algebra so difficult? A study of Norwegian lower secondary students' algebraic proficiency*. Avhandling for graden PhD. Oslo: Det utdanningsvitenskapelige fakultet, Universitetet i Oslo.

Olafsen, A. R., & Maugesten, M. (2009). *Matematikkdidaktikk i klasserommet*. Oslo: Universitetsforlaget.

Postholm, M. B. (2005). *Kvalitativ metode. En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier*. Oslo: Universitetsforlaget.

Saldanha, L., & Kieran, C. (2005). *A slippery slope between equivalence and equality: Exploring students' reasoning in the context of algebra instuction involving a computer algebra system*. Roanoke, VA.

Skemp, R. R., (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

Solvang, R. (1992). Kap. 5 *Kunnskaps- og forståelsestyper i matematikklæring*. Matematikkdidaktikk: NKI-Forlaget. s. 75-105.

Steinberg, R. M., Sleeman, D. H., & Ktorza, D. (1990). Algebra Students' Knowledge of Equivalence of Equations. *Journal for Research in Mathematics Education,* 22(2), 112-121.

Weber, K., Maher, C., Powell, A., & Lee, H. (2008). Learning opportunities from group discussions: warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics*, 68(3), 247-261.

Østergaard, E. (2010). *Forskningsprosessen og forskningsdesign,* Notat, SLL, IMT

Nettsider:

Utdanningsdirektoraktet (2012). *Tilpasset opplæring og algebra*. Hentet fra nettet 22.10.12: http://www.udir.no/Lareplaner/Veiledninger-til-LK06/Matematikk2/Matematikk/Artikler/Tilpasset-opplaring-og-algebra/

Vedlegg 1. Samtykkeskjema til foreldre/foresatte

Til foreldre/foresatte 12. april 2013

Informasjon om mastergradsprosjekt "Diskusjon – en arbeidsmåte som utvikler begrepsforståelsen"

Jeg ønsker med dette skrivet og informere om en undersøkelse som skal gjennomføres ved skolen og derfor vil jeg innhente samtykke fra deg/dere. Jeg er masterstudent på programmet Lektor i realfag ved Universitetet for miljø- og biovitenskap som ligger i Ås og jeg holder nå på med den avsluttende masteroppgaven. Temaet for oppgaven er begrepsforståelse i matematikk og hvordan diskusjon kan bidra til å utvikle denne forståelsen. I den forbindelse ønsker jeg at elevene skal svare på noen skriftlige oppgaver i matematikk. Deretter vil noen elever velges ut til å delta i en muntlig diskusjon i en gruppe, som videofilmes. Oppgaveløsningen og diskusjonen vil ta maks to skoletimer og utføres i skoletiden. De elevene som ikke deltar vil fortsatt være på skolen og arbeide med faglige aktiviteter. Tid avtales i samarbeid med elevenes lærer, så dette prosjektet vil ikke gå utover elevenes undervisning. Det er ment som en hjelp for elevene, læreren og til denne delen av forskningsfeltet.

Det er frivillig å være med og det er mulig å trekke seg når som helst underveis, uten å måtte begrunne dette, men jeg håper at så mange som mulig ønsker å delta. Alle elever som blir med i studien vil svare skriftlig på noen oppgaver og noen vil også delta i den faglig diskusjon. Underveis i studien vil all informasjon kun lagres på min personlige datamaskin og alle innsamlede data vil bli makulert og videofiler vil bli slettet etter oppgavens slutt. Opplysningene vil bli behandlet konfidensielt og ingen enkeltpersoner vil kunne gjenkjennes i den ferdige oppgaven. Studien er meldt til og datainnsamling godkjent av Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste (NSD).

Hvis du har noen spørsmål kan du/dere kontakte meg på tlf 95795873 eller sende en e-post til mina_kristine@hotmail.com. Dere er også velkomne til å kontakte min veileder Margrethe Naalsund på tlf 64965431 eller på e-post: margrethe.naalsund@umb.no med eventuelle spørsmål. Hvis det er greit at ditt/deres barn deltar på prosjektet fylles skjemaet ut og leveres inn til lærer så fort som mulig.

Ser frem mot en spennende tid med dere på xxx ungdomsskole.

Med vennlig hilsen Ina Karlsen-Moum

Jeg samtykker i at _____kan delta i undersøkelsen.

Foreldre/foresattes signatur Sted/dato

_____ _____

Vedlegg 2. Godkjenning fra NSD

Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS
NORWEGIAN SOCIAL SCIENCE DATA SERVICES

NSD

Harald Hårfagres gate 29
N-5007 Bergen
Norway
Tel: +47-55 58 21 17
Fax: +47-55 58 96 50
nsd@nsd.uib.no
www.nsd.uib.no
Org.nr. 985 321 884

Margrethe Naalsund
Institutt for matematiske realfag og teknologi, IMT
Universitetet for miljø og biovitenskap
Postboks 5003
1432 ÅS

Vår dato: 26.03.2013 Vår ref:33872 / 3 / AMS Deres dato: Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 14.03.2013. Meldingen gjelder prosjektet:

33872	*Diskusjon - en arbeidsmåte som utvikler begrepsforståelsen*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet for miljø- og biovitenskap, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Margrethe Naalsund*
Student	*Ina Kristine Karlsen-Moum*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, eventuelle kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 30.06.2013, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Vigdis Namtvedt Kvalheim

Anne-Mette Somby

Anne-Mette Somby tlf: 55 58 24 10
Vedlegg: Prosjektvurdering
Kopi: Ina Kristine Karlsen-Moum, Buskogen 89, 1675 KRÅKERØY

Avdelingskontorer / *District Offices:*
OSLO: NSD. Universitetet i Oslo, Postboks 1055 Blindern, 0316 Oslo. Tel: +47-22 85 52 11. nsd@uio.no
TRONDHEIM: NSD. Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim. Tel: +47-73 59 19 07. kyrre.svarva@svt.ntnu.no
TROMSØ: NSD. SVF, Universitetet i Tromsø, 9037 Tromsø. Tel: +47-77 64 43 36. nsdmaa@sv.uit.no

Vedlegg 3. Grupperegler for diskusjonsgruppa

- Vi avbryter ikke og snakker ikke i munnen på hverandre.
- Vi konsentrerer oss om det vi skal gjøre.
- Vi respekterer hverandre.
- Vi ler ikke av hverandres svar og argumenter.
- Ingen spørsmål eller svar er for dumme.
- Vi prøver å utfordre hverandres svar på en saklig måte.
- Vi deler våre synspunkter med hverandre.
- Alle er deltakere i diskusjonen på lik linje.
- Vi synes matematikk er gøy!!!

Vedlegg 4. Pretestoppgaver

Oppgave 1.

Spørsmålene under gjelder setningen $3 + 4 = 7$

a) Pilen over peker på et symbol. Hva heter dette symbolet?

b) Hva betyr dette symbolet?

c) Kan dette symbolet bety noe annet? Hvis ja, forklar?

Oppgave 2.

a) Løs likningen $2x + 3 = 9$

b) Forklar med ord hvordan du løste likningen og hvorfor du gjorde det på denne måten?

Oppgave 3.

Vurder om de to likningene i hver oppgave er like. Det at de er like vil si at de har samme verdi for x. Forklar hva som gjør dem like eller ulike.

a) $x + 2 = 5$ og $x + 2 - 2 = 5 - 2$

b) $x + 2 = 5$ og $x + 2 - 5 = 5$

c) $x + 2 = 5$ og $x + 2 - 5 = 5 - 5$

d) $x + 2 = 5$ og $x + 2 - 99 = 5 - 99$

e) $x + 2 = 5$ og $x + 2 - 5 = 0$

Tusen takk for at du deltar i mitt prosjekt og for at du bidrar til å gjøre meg til en bedre lærer!

Vedlegg 5. Diskusjonsoppgaver

Oppgavene ble delt ut en og en på A4 ark, en oppgave per side.

Oppgave 1. Hvem skal ut?

Se på de fire likningene og finn ut hvilken av dem som skiller seg ut. Begrunn hvorfor den valgte likningen er den som skal ut.

1. $x + 4 = 9$	2. $x + 4 - 9 = 9 - 9$
3. $x + 4 = 9 - 9$	4. $x + 4 - 1045 = 9 - 1045$

Oppgave 2. Hvilke(t) likhetstegn er brukt på riktig måte?

Vurder likhetstegnene hver for seg, og bestem om de er benyttet ”riktig”.

$$2 + 7 = 9 + 7 = 15 - 3 = 12 + 10 = 22$$

1. 2. 3. 4.

Oppgave 3. Hvem skal ut?

Se på de fire likningene og finn ut hvilken av dem som skiller seg ut. Begrunn hvorfor den valgte likningen er den som skal ut.

1. $5x + 4 = 2x + 10$	2. $3x = 6$
3. $5x + 4 - 4 = 2x + 10 - 4$	4. $5x + 4 = 2x + 10 - 4$

Vedlegg 6. Posttestoppgaver

Oppgave 1.

Spørsmålene under gjelder setningen $3 + 4 = 7$

a) Pilen over peker på et symbol. Hva heter dette symbolet?

b) Hva betyr dette symbolet?

c) Kan dette symbolet bety noe annet? Hvis ja, forklar?

Oppgave 2.

a) Løs likningen $4x - 2 = 6$

b) Forklar med ord hvordan du løste likningen i a) og hvorfor du gjorde det på denne måten?

c) Løs likningen $3x – 7 = x + 1$

d) Forklar med ord hvordan du løste likningen i c) og hvorfor du gjorde det på denne måten?

Oppgave 3.

Vurder om de to likningene i hver oppgave er like. Det at de er like vil si at de har samme verdi for x. Forklar hva som gjør dem like eller ulike.

a) $2x + 3 = 9$	og	$2x + 3 – 3 = 9 – 3$
b) $2x + 3 = 9$	og	$2x + 3 – 50 = 9 – 50$
c) $2x + 3 = 9$	og	$2x + 3 = 9 – 3$
d) $2x + 3 = 9$	og	$2x + 3 + 1 = 9 + 1$
e) $5x + 4 = 2x + 10$	og	$3x = 6$

Tusen takk for at du deltar i mitt prosjekt og for at du bidrar til å gjøre meg til en bedre lærer!