Hva karakteriserer evnerike elevers matematiske resonnement?

What characterises gifted students' mathematical reasoning?

Kristine Bordado Henriksen

UNIVERSITETET FOR MILJØ- OG BIOVITENSKAP
Institutt for matematiske realfag og teknologi
Masteroppgave 30 stp. 2013

FORORD

Å skrive denne masteroppgaven har vært en langvarig og krevende prosess, men samtidig svært givende og lærerik. Jeg vil takke alle som har gjort det mulig for meg å komme i mål.

Først vil jeg takke elevene som har deltatt i denne studien, for at de tok seg tid i en hektisk skolehverdag og for deres betydningsfulle bidrag.

Jeg vil takke min familie som alltid har vært der for meg. Spesielt mine foreldre som har inspirert og oppmuntret meg til å ta en god utdannelse. Takk til Jostein for din tålmodighet gjennom alle opp- og nedturene.

Den største takken går til Margrethe Naalsund, som har vært en utmerket veileder. Takk for uvurderlige råd, konstruktiv kritikk og god faglig støtte!

UMB, Ås 13.05.2013

Kristine Bordado Henriksen

SAMMENDRAG

Det er et manglende fokus og flere misforståelser rundt evnerike elever i Norge. Dette har ført til at denne elevgruppen ikke får den tilrettelagte opplæringen i skolen de har rett på. Lærerne trenger mer kompetanse og kunnskap om egenskaper og karakteristikker ved de evnerike elevene. Hvordan disse elevene resonnerer når de løser en matematikkoppgave, er en slik egenskap. Et matematisk resonnement kan fortelle noe om vedkommende har forståelse i faget eller om kunnskapen er basert på overfladisk læring. Jeg håper å kunne belyse noen aspekter ved evnerike elevers matematiske resonnement, slik at min forskning kan være et lite bidrag til lærere og samfunnet på dette området og samtidig rette fokuset mot de evnerike elevene.

For å gjøre dette har jeg valgt en kvalitativ studie bestående av en såkalt høyttenkningsmetode. Det ble gjort et utvalg på tre elever som har karakteristikker som evnerike. Denne karakteriseringen ble gjort med hjelp av intervju. De tre elevene fikk hver for seg utdelt to matematikkoppgaver, som de arbeidet med mens de uttrykte tankene sine verbalt. På den måten fikk jeg et innblikk i de kognitive prosessene bak oppgaveregningen. Da de var kommet frem til en løsning på oppgavene, ble de spurt om å forklare og argumentere for løsningsstrategiene deres. Høyttenkningssesjonen ble tatt opp med lydopptaker og de sentrale delene av opptaket ble transkribert.

Disse elevene er ikke representative for evnerike elever i Norge, men de tre elevene har flere fellestrekk som kan gi en indikasjon på hva som karakteriserer evnerike elevers matematiske resonnement. Analyser av resultatene viser at elevene først og fremst har et kreativt resonnement, som kjennetegnes av blant annet fleksibilitet og matematisk troverdighet. Kreativ resonnering er en indikator på at man har forståelse i faget. I tillegg viser resultatene at de tre elevene har et imitativt resonnement der det er hensiktsmessig. Imitativ resonnering er bygget på utenatlæring og overfladisk kunnskap.
Altså har disse evnerike elevene i utgangspunktet kreative resonnement, men ved oppgaver som krever puggede formler og algoritmer, tar de i bruk imitativ resonnering fordi det da er hensiktsmessig.

ABSTRACT

There is a lack of focus and several misconceptions about gifted students in Norway. As a result, these students do not get adapted education offered by the school, which they are entitled to. Teachers need more skills and knowledge about the characteristics and traits of gifted students. How these students resonate when they solve a problem in mathematics is one of such qualities. A mathematical reasoning can tell something about the person if he/she understands the subject or whether the knowledge is based on superficial learning. I hope to shed light on some aspects of gifted students' mathematical reasoning. So my research can be a small contribution to the teachers and to the community on this specific area, and at the same time give focus and attention to the gifted students.

To do my research, I have chosen a qualitative study consisting of a so-called think aloud method. A selection of three students, who have been characterized as gifted, was chosen. This process was done by interviewing the students individually. Each of them was given two mathematical tasks. While they were working on the task, they expressed their thoughts verbally. That way, I got an insight into the cognitive processes behind the problem solving. When they arrived on an answer, they were asked to explain and argue for their solution strategies. These think aloud sessions were documented by an audio recorder. The central parts of the recording were transcribed.

These students are not representative to gifted students in Norway, however they have several common features that can give an indication of what characterize gifted students' mathematical reasoning. Analysis of the results shows that students first and foremost have a creative reasoning, characterized by flexibility and mathematical credibility. Creative reasoning is an indicator that one has an understanding of the subject. In addition, the results show that these students prefer imitative reasoning when there is a need to do so. Imitative reasoning is based on memorization and superficial knowledge.

Thus, these gifted students have basically creative reasoning. However with tasks that requires memorized formulas and algorithms, they prefer to use imitative reasoning because it is then most likely appropriate.

INNHOLDSFORTEGNELSE

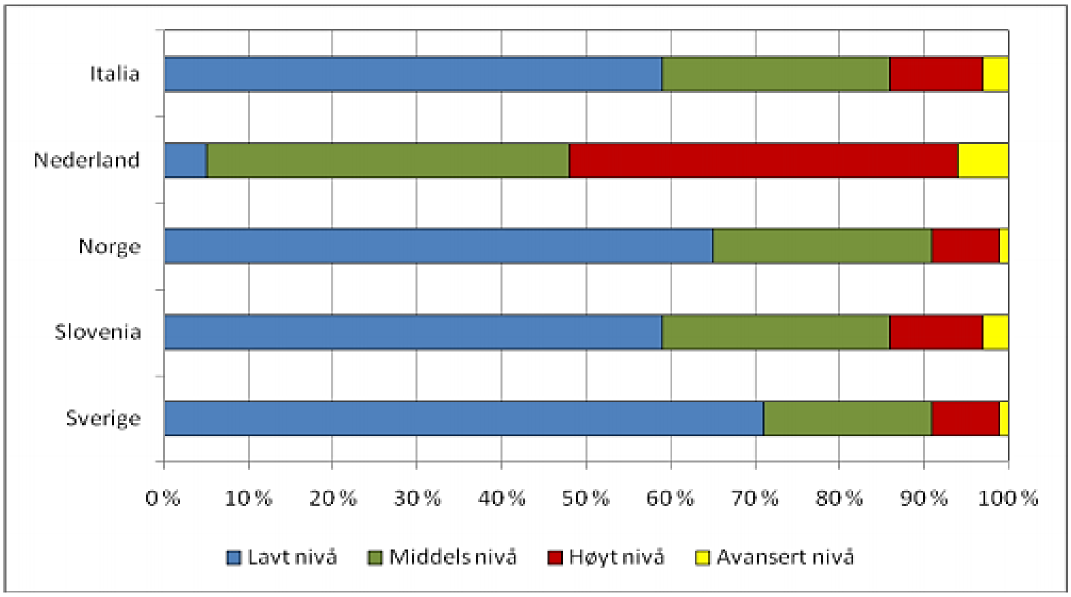
1. INNLEDNING

1.1 Bakgrunn og motivasjon

Det er flere misforståelser i Norge når det gjelder evnerike barn i skolen. Idsøe (2012) nevner blant annet at det er vanlig å tro at evnerike elever kan klare seg selv uansett læringsmiljø, at alle elever er like og at tilpasset undervisning av de evnerike vil føre til sosiale forskjeller. Slike misforståelser kan være grunnen til at disse elevene føler at de ikke blir sett; de fleste er ikke klar over at hver klasse har vanligvis en til to elever med helt spesielle egenskaper, og lærerne ser ofte kun problemene og ikke ressursene (Idsøe, 2011). For det er nettopp det evnerike elever er, ressurser. Professor ved institutt for spesialpedagogikk ved Universitetet i Oslo, Kjell Skogen (2012) trekker frem at Norge er en velferdsstat med høye ambisjoner og at vi derfor er avhengig av de evnerike i samfunnet. «Vi vanlige middelmådige kan ikke løse utfordringene vi står overfor alene. Vi trenger alle de briljante hjernene vi har i landet. Jeg vil si at våre menneskelige ressurser er viktigere enn oljefondet» (ibid.).

Misforståelsene kan også være grunnen til at de evnerike elevene ikke får den tilrettelagte undervisningen de har rett på, til tross for at det i opplæringsloven står at «opplæringen skal tilpasses evnene og forutsetningene til den enkelte eleven» (Opplæringsloven, § 1-3, 1998). Lærere i Norge trenger mer kompetanse om hvordan man møter evnerike elever. Lærerutdanningen må fokusere på trekk og egenskaper ved disse elevene, slik at man best mulig kan tilrettelegge undervisningen for dem (Idsøe, 2011). Matematisk resonnement er en slik egenskap, og er i tillegg en viktig del av helhetlig kompetanse i matematikkfaget (Kilpatrick et al., 2001). Ved å studere denne ferdigheten, kan man finne ut om elever har forståelse for matematikk. For hvis en elev ikke har evnen til å resonnere i faget, vil matematikk kun være pugging av eksempler og å følge oppskrifter, uten noen form for forståelse (Ross, 1998).

Det kan tyde på at norske elever ikke har denne forståelsen i matematikkfaget. Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) er, som tittelen sier, en internasjonal studie som viser utviklingen av elevers prestasjoner i matematikk (og fysikk). Prestasjonene er blitt delt inn i fire kompetansenivåer: avansert, høyt, middels og lavt nivå. Resultatene fra TIMSS Advanced, som har studert matematikkelever på videregående, viser blant annet at Norge har en svært lav andel (omtrent 1-2%) elever som klassifiseres på et avansert nivå (se figur 1) (Grønmo et al., 2010).



Figur 1: Fordeling av elever i ulike kompetansenivåer i matematikk i TIMSS Advanced.

Avansert nivå blir beskrevet slik: «Elevene viser begrepsforståelse og behersker prosedyrer. De demonstrerer evne til å gjennomføre resonnementer i algebra, trigonometri, geometri og differensial- og integralregning, og bruker dette til å løse problemer i komplekse situasjoner» (Grønmo et al., 2010, s.47). TIMSS Advanced trekker her sammenhengen mellom elever som presterer på det øverste nivået (se kap. 2.1 om evnerike elever) og ferdigheten til å gjennomføre matematiske resonnement.

1.1.1 Tilpasset opplæring

"Det forbliver et mysterium, at omsorgsfulde voksne, som ikke kunne drømme om at tvinge et barn, som vokser hurtigere end gennemsnittet, til at gå i for små sko, alligevel insisterer på, at et barn, hvis intellektuelle udvikling går hurtigere end gennemsnittets, skal følge undervisningsprogrammer, som er for 'små' til barnets fantasi og intellekt"
- Ole Kyed, dansk psykolog (2007).

Som nevnt tidligere er det vanlig å tro at alle elever er like (Idsøe, 2012), og det er her en stor del av utfordringen ligger; Vi må slutte å behandle alle som om de er like, og begynne å behandle alle likt. Utdanningsdirektoratet (2012) sier blant annet at «skolen har plikt til å tilrettelegge opplæringen slik at alle elever får faglige utfordringer og får brukt sine evner og forutsetninger». Og opplæringsloven § 1-3 lyder «Opplæringen skal tilpasses evnene og forutsetningene hos den enkelte eleven, lærlingen og lærekandidaten». Likevel tyder det på at de evnerike elevene i Norge ikke får denne undervisningen. Tidligere skolestatsråd Bård Vegar Solhjell innrømmer at når det har vært snakk om tilpasset opplæring har det vært med utgangspunkt i de svake elevene (Utdanningsforbundet, 2009).

Dagens situasjon i den norske skolen

Evnerike barn eller «gifted children» er en egen kategori elever i internasjonal spesialpedagogikk. I den norske faglitteraturen derimot, finnes det svært lite om denne gruppen. Også studieplanene for pedagogikk ved norske universiteter og høyskoler er mangelfulle på dette området (Skogen & Idsøe, 2011).
I tillegg til opplæringsloven §1-3 om tilpasset opplæring for alle elever, har vi § 5 som omhandler spesialundervisning. Der står det at elever som ikke får et tilfredsstillende utbytte av den ordinære opplæringen, har rett på å få spesialundervisning. Og at i denne undervisningen skal det legges vekt på utviklingsutsiktene til eleven og realistiske opplæringsmål for eleven. Ut i fra denne beskrivelsen skulle man tro at evnerike med særskilte opplæringsbehov også har rett til spesialundervisning. Dette blir midlertidig tilbakevist i veilederen til opplæringsloven fra 2009:

«Retten til spesialundervisning omfatter ikke elever som lærer raskere eller mer enn gjennomsnittet, og som derfor ikke får tilfredsstillende utbytte av opplæringen. Spesialundervisning må ses i sammenheng med prinsippet om likeverd og skal sikre at også elever som for eksempel lærer senere enn gjennomsnittet, får et forsvarlig utbytte av opplæringen. Særlig evnerike elever har allerede utbytte av opplæringen. For elever som lærer raskere eller mer enn gjennomsnittet, vil prinsippet om tilpasset opplæring, jf. opplæringsloven § 1-3 gjelde. Søknader om spesialundervisning fra elever som fordi de er særlig evnerike og derfor ikke får et tilfredsstillende utbytte av opplæringen, kan ikke innvilges.» (Utdanningsdirektoratet, 2009)

De evnerike elevene har altså på lik linje med andre elever rett til tilpasset opplæring, men ingen rett til å få spesialundervisning.

Skogen (2010) har gjennomført en empirisk studie i norsk skole som har tatt for seg karakteristikker ved evnerike barn, utfordringer ved tilpasset opplæring og negative konsekvenser av en manglende tilpasning. Resultatene fra alle tre områdene indikerer at den norske skolen ikke er et godt sted å leve og lære for de evnerike elevene (ibid.) Barn som føler de ikke blir sett og akseptert med sine særegenskaper, kan miste sin motivasjon, entusiasme og kreativitet. Mönks & Ypenburg (2008) peker på en rekke mulige konsekvenser for de evnerike elevene med manglende tilrettelagt undervisning, blant annet dårlig konsentrasjon, lavt innlæringstempo, negativ skolefaglig selvoppfatning og negativ oppfatning av lærerne og skolen.

EURYDICE-rapporten «Specific educational measures to promote all forms of giftedness at school in europe» fra 2006 konkluderer med det samme som Skogen, at tilpasset opplæring for de evnerike elevene er mangelfull i mange norske skoler. Rapporten mener at mye av grunnen ligger i den norske grunnskolens prinsipp om enhetsskolen, som innebærer å fokusere på en likeverdig opplæring for alle i et felles skolesystem, bygd på den samme lærerplanen. Enhetsskolen har et begrenset rom for differensiering, og hensynet til fellesskapet er svært ofte overordnet hensynet til den enkelte elev (Bachmann & Haug, 2006). Også Skogen (2008) peker på at problemet skyldes den norske skolepolitikken. Han sier at den bærer preg av at man ønsker å usynliggjøre de evnerike elevene med sine opplæringsbehov, av frykt for stigmatisering, og at det er «politisk ukorrekt» med individualisering og differensiering i skolen.

De siste læreplanene har forandret fokus når det gjelder felleskapet og individet. Reform 97 var sterkt preget av enhetsskolen; målet var å skape felles referansemuligheter, og det sentrale virkemidlet ble derfor en fellesskaps- og likhetsideologi. Individualiseringstiltak måtte først og fremst skje innenfor fellesskapets grenser på en slik måte at det ikke gikk på bekostning av deltakelsen i fellesskapet (Bachmann & Haug, 2006). Kunnskapsløftet gikk bort fra dette og over mot økende individualisering og resultatkvalitet. Tilpasset opplæring ut i fra de enkelte elevers forutsetninger, ble nå fremstilt som et alternativ til den sosialdemokratiske enhetsskolen (ibid.).

Det går altså i riktig retning når det gjelder tilrettelagt undervisning for evnerike elever, og oppmerksomheten rundt denne elevgruppen øker. Et eksempel på dette er at det i 2008 ble åpnet opp for at elever i grunn- og videregående skole kan ta fag på høyere nivåer i utdanningssystemet. Universitetet i Oslo har blant annet opprettet et tilbud for evnerike elever på videregående skoler som trenger ekstra utfordringer. Disse kan følge undervisning og gå opp til eksamen i emner ved UiO.

Tilnærminger for tilpasset opplæring for evnerike elever

Jeg vil her presentere de to mest sentrale tilnærmingene for å legge opp undervisningen for evnerike elever i Norge (Skogen & Idsøe, 2011). Dette er ikke direkte knyttet opp mot min problemstilling, men er likevel relevant i den grad at lærere trenger mer kunnskap om denne elevgruppen og tilpasset opplæring av den (Idsøe, 2011), som er en motivasjon bak problemstillingen (se kap. 1.1).

Akselerasjon blir brukt om prosessen der en elev blir undervist det tradisjonelle pensumet raskere enn normalt eller ved en lavere alder (Skogen & Idsøe, 2011). Denne metoden gir elevene utfordringer passende deres forutsetninger, og kan redusere tiden elevene tilbringer i utdanningssystemet. Et eksempel på dette er tilbudet Universitetet i Oslo opprettet for evnerike elever, nevnt i forrige avsnitt.
Det finnes flere typer akselerasjon. I rapporten «A Nation Descieved» skiller Colangelo, Assouline og Gross (2004) på 18 ulike former. Den mest aktuelle akselerasjonstypen i det norske skolesystemet kalles *Subject-Matter Acceleration/ Partial Acceleration* som innebærer for eksempel en evnerik matematikkelev på ungdomsskolen får undervisning i matematikk sammen med elever fra 1. året på en videregående skole. Altså når en elev får muligheten til å delta i deler av undervisning i ett eller flere fag på et høyere klassetrinn (Colangelo et al., 2004). Gjennomføring av dette kan møte motstand blant både foreldre og skolesystemet. Hovedsakelig fordi elevene som akselererer får undervisning som er tilpasset et høyere klassetrinn og eldre elever. Pensumnivå kan da være mer passende, men selve undervisningen er ikke rettet mot denne elevens forutsetninger. Dessuten vil heller ikke elevens sosiale og emosjonelle utvikling bli tatt hensyn til dersom han/hun opplever å bli tatt ut av trygge og vante omgivelser over i undervisning med eldre elever.

Berikelse innebærer fordypning, ved at elevene får arbeidsoppgaver som er supplerende og varierte, med innhold utover det som står i læreplanen (Skogen & Idsøe, 2011). Målet er å gi en opplæring som er kilde til fascinasjon og intellektuell tilfredsstillelse (Kunnskapsdepartementet, 2012). Deres evner og kreativitet skal utfordres, slik at de ser nytten av å lære seg gode arbeidsvaner og utvikle effektive læringsstrategier. På den måten bevarer man elevenes motivasjon for fagene og fremmer kreativitet og engasjement. Dette avhenger av at de evnerike elevene får den lærerstøtten de trenger, noe som betyr relevante utfordringer, tilbakemeldinger, og høye og realistiske forventninger (ibid.). Dette er i tråd med Bloom (1956) og Vygotskijs (1978) meninger om hvilken rolle tilpasset opplæring har for økt forståelse i faget og størst mulig læringsutbytte (se kap. 2.1.3).

1.2 Problemstilling

Ved å undersøke elevenes matematiske resonnement, kan man finne ut om elevene har forståelse for matematikk, eller om de kun memorerer regneoppskrifter og eksempler. Tilpasset opplæring av evnerike elever i Norge er som tidligere nevnt mangelfull. Franz J. Mönks (2008), professor i psykologi og pedagogikk for evnerike barn, påpeker at manglende tilrettelagt undervisning kan få disse elevene til blant annet å miste sin motivasjon, entusiasme og kreativitet. Internasjonal forskning viser at av alle elever er det mellom 5-10 % som kan karakteriseres som evnerike (e.g. Mönks & Ypenburg, 2008; NCTM, 2000). Dette tallet samsvarer med Arnold Hofset (1970) sine resultater etter hans studie i norsk skole. Samtidig viser TIMSS-studiene, at vi kun har rundt 1-2 % elever i Norge med prestasjoner på det øverste nivået i skolen. Dette kan konkluderes med at det er mange evnerike elever som ikke får utnyttet sitt potensiale og derfor viser et lavere ferdighetsnivå.
Ved å studere og få bedre innsikt i hva som karakteriserer evnerike elevers matematiske resonnement, kan vi tilrettelegge undervisningen etter deres forutsetninger og potensial. Slik at også disse elevene får den tilpassede opplæringen de har rett på, noe som trolig vil føre til bedre forståelse, høyere prestasjoner og en mer fullverdig matematisk kompetanse.

Jeg har derfor valgt følgende problemstilling for min forskning:
«Hva karakteriserer evnerike elevers matematiske resonnement?»

2. TEORI

I dette kapittelet vil jeg presentere det teoretiske grunnlaget for valgt problemstilling ved å ta for meg begrepene evnerike elever og matematisk resonnement. Jeg vil først presentere de vanligste kjennetegnene og beskrive to enkle modeller som definerer evnerike elever og evnerike elevers læreforutsetninger. Til sammen utgjør dette en beskrivelse av evnerike elever som er brukbar for min studie. Deretter vil jeg belyse hva som ligger i begrepet matematisk resonnement, ved å beskrive karakteristikker og underkategorier. På den måten vil jeg samtidig vise hvilken rolle resonnering har for forståelse i faget og en fullverdig matematisk kompetanse.

2.1 Evnerike elever

I internasjonale studier blir det ofte brukt begreper som «gifted» og «intelligent» om elevene min oppgave omhandler. Her i Norge er det vanlig å bruke blant annet smarte, høyt presterende, og begavede. I likhet med blant annet Hofset (1970), Skogen og Idsøe (2011), har jeg valgt å bruke betegnelsen evnerik. I denne oppgaven er det å være evnerik ikke synonymt med høy intelligens eller gode karakterer i skolen. Det ligger flere faktorer bak, som jeg vil beskrive i dette delkapittelet.

2.1.1 Kjennetegn

I følge den danske psykologen Ole Kyed (2007) er evnerike barn på mange måter akkurat som andre barn, men man må være klar over at de samtidig er annerledes i deres måte å tenke og være på. Det er ikke slik at evnerike elever utgjør en homogen gruppe, tvert imot kan de være ulike på mange områder (Skogen & Idsøe, 2011). Likevel er det enkelte karakteristikker i denne gruppen. Evnerike elever er ofte svært nysgjerrige og observante, de lærer raskt og har gjerne et tidlig velutviklet ordforråd. I tillegg blir god hukommelse og evnen til å tenke og resonnere tidligere utviklet i denne gruppen enn hos andre. Disse elevene kan også være ekstremt følsomme og perfeksjonistiske (Kyed, 2007, Skogen & Idsøe, 2011).
Det er vanlig å skille mellom de «flinke» og de evnerike elevene. Skogen og Idsøe (2011) har framsatt en oversikt over forskjellene mellom disse elevene:

Flinke elever	Evnerike elever
Kan svarene	Stiller spørsmålene
Er interesserte	Er ekstremt nysgjerrige
Arbeider hardt	Beskjeftiger seg med andre ting og klarer seg godt
Svarer på spørsmål	Diskuterer i detaljer og er omstendelige
Finner seg i toppen av klassen	Er forut for klassen
Lytter med interesse	Viser sterke holdninger og synspunkter
Lærer lett	Kan det allerede
Har det fint med jevnaldrende	Foretrekker voksne og likesinnede
Er mottagelige	Er intense
Kopierer nøyaktig	Skaper nytt
Liker å gå på skole	Liker å lære
Mottar informasjon	Bearbeider informasjon
Er teknikere	Er oppfinnere
Liker logisk oppbygget læring	Trives med kompleksitet
Er bevisste	Er ivrig observerende
Er tilfredse med egen læring	Er meget selvkritiske

Tabell 1: Forskjeller mellom «flinke» elever og evnerike elever (Skogen & Idsøe, 2011, s.96)

Lærere må kunne skille mellom elever som presterer bra og evnerike elever. For det er viktig å være klar over at mange evnerike ikke nødvendigvis fremviser dette ved fremragende prestasjoner (Skogen & Idsøe, 2011).

2.1.2 Definisjon

Det finnes svært mange ulike definisjoner på hva en evnerik elev er. De fleste av dem har lagt sin vekt på de kognitive aspektene som inngår i intelligens (Skogen & Idsøe, 2011). I denne studien bruker jeg en tredeling av begrepet evnerik, der man i tillegg til intelligens ser på egenskapene kreativitet og motivasjon. Dette valget er gjort på bakgrunn av at denne tredelingen brukes av mange spesialister på fagfeltet i dag, i likhet med mye internasjonal litteratur gjennom flere tiår (ibid.).

Psykologiprofessor Joseph Renzulli (1978) kalte denne oppdelingen for "The Three-Ring Conception of Giftedness". Som figur 2 viser, sier modellen at det å være evnerik (gifted) ikke kommer fra kun én kompetanse, men er en interaksjon mellom alle tre aktivitetsområdene kreativitet, over gjennomsnittlige egenskaper (above average ability), og oppgaveengasjement (task commitment). De tre kompetansene er likeverdige og det skal ikke legges større vekt på én av dem på bekostning av en annen (ibid.).

Figur 2: The Three-Ring Conception of Giftedness: Samspillet mellom de tre delkompetansene gir evnerike elever.

Mönks bygget videre på Renzullis ringmodell og utviklet det han kalte Flerfaktormodellen (The Multifactorial Model of Giftedness) (Mönks & Ypenburg, 2008). Den består av de samme egenskapene som Renzullis modellen, bare noe omformulert: kreativitet, betydelige intellektuelle evner og motivasjon. I tillegg mente Mönks at det sosiale miljøet rundt eleven har stor betydning; at skole, familie og venner bidrar like mye med å påvirke evnerikheten som personlighetsegenskapene (ibid.). Dette er i samsvar med Vygotskijs sosiokulturelle syn og den proksimale utviklingssonen, som blant annet innebar at det sosiale samspillet mellom elev og lærer fremmet læring og utvikling hos eleven (se kap. 2.1.3).

Intelligens

I Renzullis modellen går intelligens under det han kaller «over gjennomsnittlige egenskaper». Dette begrepet deles inn i generelle og spesielle egenskaper. Førstnevnte

kjennetegnes av et høyt nivå av abstrakt tenking og resonnering, og en rask, nøyaktig og selektiv innhenting av informasjon, som kan anvendes i nye situasjoner. Spesielle egenskaper går ut på det samme som generelle egenskaper, men kun i spesialiserte områder som for eksempel matematikk, ballett eller kunst (Renzulli, 1978).
Mönks og Ypenburg (2008) skriver om «betydelige intellektuelle evner» og definerer det som et testresultat på over 120 poeng, oppgitt i IQ (Intelligence Quotient), ved en intelligenstest. Men både Renzulli og Mönks var sterkt imot å definere evnerik utelukkende ved høy intelligenskvotient.

Motivasjon

Oppgaveengasjement beskrives av Renzulli (1978) som stor interesse og fascinasjon i et bestemt fagfelt, samt utholdenhet og tro på ens evne til å utføre et viktig arbeid. Med andre ord er oppgaveengasjement en form for sterk motivasjon. Dette ligger også tett opp mot Mönks og Ypenburgs (2008) forklaring av motivasjon: vilje og evne til å sette seg mål og fullføre arbeid, og samtidig være risikovillig.

Kreativitet

Begrepet kreativitet blir svært ofte nevnt når det er snakk om evnerike elever, og nevnes da gjerne i sammenheng med idérikdom, fleksibilitet og åpenhet (Skogen & Idsøe, 2011). Mens Mönks og Ypenburg (2008) har en klar definisjon på hva kreativitet er; evne til å finne løsninger på problemer på en selvstendig og original måte, kaller Renzulli (1978) kreativitet for et «restbegrep»; det som ikke går inn under de to andre begrepene, intelligens og motivasjon. Han påpeker også, som Skogen og Idsøe, at kreativitet og evnerik brukes om hverandre i litteratur og forskning, som om de er synonymer (ibid.).
Hofset (1970) sammenligner barn med høy IQ og barn som er svært kreative, og konkluderer med at det er mange barn som tilhører begge kategoriene, men ikke alle.
Det er viktig å huske på at skapende evner uten intelligens kan føre til ukritisk produktivitet: "Kreativitet uten generell intelligens frambringer intet av interesse eller verdi" (Hofset, 1970 s. 20).
Jeg vil komme mer inn på begrepet kreativitet i kapittel 2.2.1 om kreativt matematisk resonnement.

2.1.3 Evnerike elevers læreforutsetninger

Professor i pedagogisk psykologi, Benjamin Bloom (1956) utarbeidet et klassifiseringssystem for ulike nivåer av innlæring, og satt dem i relasjon til hverandre. Systemet blir kalt Blooms taksonomi. Fordypning eller berikelse er som beskrevet i kapittel 1.1.1, en mye brukt form for tilrettelagt undervisning for evnerike elever (Skogen & Idsøe, 2011). Fordypning innebærer at eleven arbeider med samme tema, men på et høyere nivå i Blooms taksonomi. Oppsettet av nivåene er hierarkisk ordnet og leses nedenfra og opp:

- Vurdering: Kvalitativ og kvantitativ bedømming av hva man har gjort
- Syntese: Kunne trekke egne slutninger og utlede abstrakte sammenhenger, en kreativ prosess
- Analyse: Dele opp kunnskapen og kunne se sammenhenger
- Anvendelse: Bruke kunnskap og forståelse til å finne løsninger i konkrete situasjoner
- Forståelse: Sette egne ord på kjent kunnskap
- Kunnskap: Gjengi innlært stoff, lære utenat

En evnerik elev som får muligheten til å fordype seg i et emne, vil altså kunne jobbe seg oppover og nå de øverste nivåene. Eleven vil da, som punktene over viser, blant annet få økt forståelse og kunne vurdere og argumentere for valgene sine.

I en sosiokulturell forståelsesramme er miljøet en fundamental aktør i læringsprosessen. Vygotskji (1978) mente at den sosiale aktiviteten er utgangspunktet for intellektuell utvikling, og brukte den proksimale utviklingssonen til å illustrere dette. Den viser at læring skjer mellom det eleven kan klare på egenhånd og hva den kan klare med støtte fra læreren. Hensikten er å veilede eleven tilstrekkelig, slik at eleven til slutt vil klare utfordringene alene, og flytte grensene for hva han/hun kan klare på egenhånd. (ibid.). Den proksimale utviklingssonen har altså stor relevans for tilpasset opplæring hvor læring hos eleven skjer i interaksjon med lærerens tilpasning. For at læringsprosessen skal gi resultater hos en evnerik elev i form av kunnskaper, ferdigheter og forståelse, må læreren lykkes i å gi en tilpasset opplæring som fremmer elevens potensiale og ferdigheter.

2.2 Matematisk resonnement

Kenneth A. Ross (1998) tidligere leder av Mathematical Association of America (MAA) mener at et av de viktigste målene i matematikktimer er å lære elevene å resonnere, at det er en fundamental evne og ikke kun innenfor matematikken. Resonnement er grunnlaget i matematikk fordi matematikk blir verifisert gjennom å resonnere. Hvis evnen til å resonnere ikke er utviklet hos en elev, vil matematikk kun være memorering av eksempler og å følge oppskrifter, uten noen form for forståelse og eleven vil ikke være i stand til å mestre matematikken (ibid.).
NCTM (2000) definerer også resonnering og argumentasjon som et fundamentalt punkt i matematikken. Ferdigheten til å resonnere går utover det å kunne konstruere et resonnement, det inkluderer også evnen til å argumentere; avdekke de grunnleggende ideene i et argument og utarbeide formelle og uformelle argumenter (ibid.)

Det finnes to typer argumentasjon som er sentrale i løsing av oppgaver (Lithner, 2012). Den første kalles prediktiv argumentasjon som går ut på å argumentere for hvorfor en valgt strategi vil løse oppgaven. En «strategi» kan i denne sammenhengen variere fra spesifikke prosedyrer til generelle tilnærminger, mens et «valg» vil være definert i vid forstand og være alt fra å velge, huske, konstruere og oppdage, til å anta og gjette (ibid.). Den andre typen er verifiserende argumentasjon som innebærer at eleven må argumentere for hvorfor valgt strategi løste oppgaven, altså å forsvare og begrunne gjennomføringen av arbeidet sitt (ibid.).

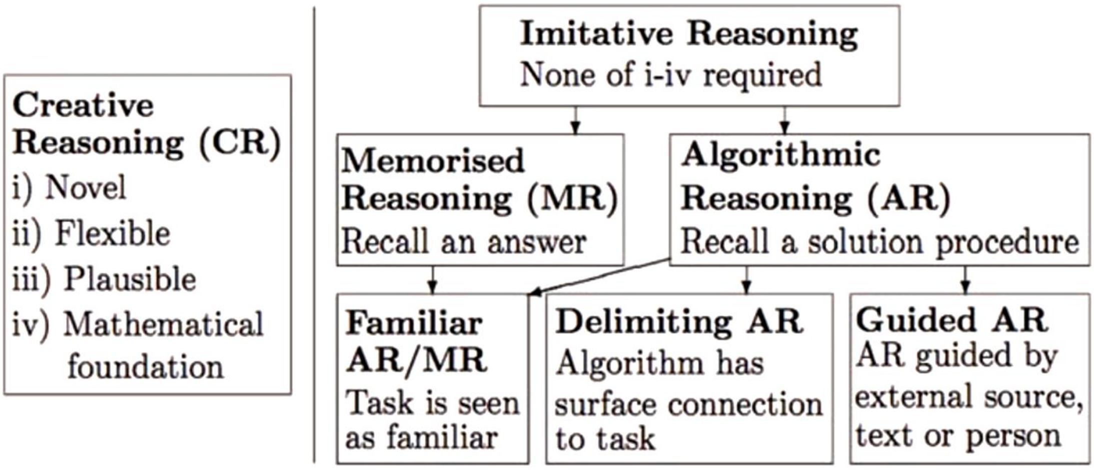
Hensikten med min studie er å undersøke de evnerike elevenes tankeprosesser som blir aktivert ved en læringssituasjon. Dette skal gjøres ved å se nærmere på elevenes forståelse gjennom deres matematiske resonnement. Ved å studere elevenes argumenter, strategier og deres skrevne arbeid, kan jeg altså få et innblikk i hva som karakteriserer deres tankegang og forståelse. I denne studien ser jeg på matematisk resonnement som en mental handling, den kognitive prosessen bak det å overbevise seg selv og andre om at en påstand er sann. Harel (2008) mener at metal handling sammen med måten å forstå og tenke på, utgjør matematisk aktivitet:
«*A person's statements and actions may signify cognitive products of a mental act carried out by the person. Such a product is the person's way of understanding associated with that mental act. Repeated observations of one's way of understanding may reveal that they*

share a common cognitive characteristic. Such a characteristic is referred to as a way of thinking associated with that mental act» (Harel, 2008, s. 5).

Resonnement blir ofte brukt av matematikere, forutsatt at det er en universal forståelse av begrepet (Lithner, 2012). I denne oppgaven kommer jeg til å bruke definisjonen til Johan Lithner, professor i matematikkdidaktikk, som sier at et resonnement er tanker og ideer som blir brukt til å produsere argumenter og trekke konklusjoner i oppgaveløsing (ibid.). Denne tankeprosessen kan være både matematisk og ikke, og den trenger ikke føre til et korrekt svar, så lenge den gir mening for personen selv.
Rammeverket for min studie kommer også til hovedsakelig å bygge på Lithners forskning (2006). Denne er basert på veldefinerte, generelle beskrivelser av ulike typer matematiske resonnement og empiriske data. Den vil la meg kvalitativt undersøke karakteristikker ved evnerike elevers forståelse og matematiske resonnement.
Lithner skiller på to motsetninger innenfor læring av matematikk: imitativ og kreativ resonnering. Der førstnevnte er utenatlæring og ligger til grunn for problemer og mangel på forståelse i matematikkfaget, og sistnevnte fører til det motsatte; mestring av matematikk (ibid.).

2.2.1 Kreativt og imitativt resonnement

Imitativt resonnement er tilfelle når eleven husker et svar eller en fremgangsmåte fra en tidligere oppgave, mens kreativ resonnering kjennetegnes ved at resonnementet er nytt, fleksibelt, troverdig og har et matematisk grunnlag (Lithner, 2006). Lithner og flere (e.g. Gray & Tall, 1993; 1994) har kommet frem til at de to formene for resonnement er en av de største forskjellene mellom elever som mislykkes i matematikk og de som lykkes. Det fører blant annet til at de som mislykkes bruker en vanskeligere type matematikk i løsing av oppgaver, mens vellykkede derimot har en mer fleksibel tankegang som gjør at matematikken blir enklere (Lithner, 2001).



Figur 3: Kreativt og imitativt resonnement (Lithner, 2006, s. 5)

Kreativt resonnement

Kreativ blir i denne sammenhengen ikke direkte koblet til evnerike og deres kreative karakteristikker, også de som ikke blir betegnet som evnerik kan resonnere kreativt og omvendt. Lithner (2006) mener at for å avgjøre om en resonneringssekvens er kreativt grunnlagt, må følgende kriterier være oppfylt: en må være nyskapende, fleksibel, troverdig og ha et matematisk grunnlag (se figur 3). Det at resonnementet må være nyskapende refereres til at det blir skapt der og da eller at en glemt sekvens blir gjenopprettet, og det skal være nytt i den grad at det er nytt for personen selv, ikke for forskeren eller innenfor det matematiske samfunnet. Resonneringen må være fleksibel, noe som innebærer evnen til å benytte ulike tilnærminger og tilpasninger til den aktuelle oppgaven; eleven skal ikke være bundet til en bestemt strategi. Resonneringssekvensen må være troverdig på den måten at vedkommende har argumentasjon som støtter valg av strategi og forklarer hvorfor resultatene er sanne eller sannsynlige. Et kreativt resonnement skal også ha begrunnelser og argumentasjon med et solid matematisk fundament, som er basert på iboende matematiske egenskaper (ibid.).

Bergqvist (2007) nevner noen av de samme betingelser som må være oppfylt for at resonneringen kan bli kalt kreativ:

- Resonneringssekvensen må være original og ny for personen selv.
- Resonneringssekvensen må inneholde valg av strategier som er basert på et

matematisk grunnlag og argumentasjon om hvorfor konklusjonene er korrekte eller sannsynlige.
Hvis disse kriteriene er oppfylt og resonnementet kan kalles kreativt, tyder det på at eleven har god forståelse i faget og en større matematisk kompetanse enn elever som resonnerer imitativt (Lithner, 2006).

Imitativt resonnement

Imitativ resonnering er i motsetning til den kreative, ikke basert på originalitet; den beskriver flere ulike former for resonnering som alle bygger på tidligere erfaringer og opplevelser. Lithner (2006) kaller denne type resonnement for overfladisk fordi den ikke har noe med de iboende matematiske egenskapene å gjøre. Når elevene skal løse oppgaver kopierer de eksempler fra lærebøker, og velger overfladiske strategier ut i fra tidligere oppgaver de kjenner igjen eller gjennom puggede algoritmer. Utenatlæring er ikke problematisk i seg selv. Lithner (2012) påpeker at puggede fakta og prosedyrer, tvert i mot er et viktig aspekt i læring av matematikk. For det er ikke forventet at elever skal kunne forstå og huske alle matematiske idéer og formler. Problemet med denne type læring er når den blir mer dominerende enn den kreative læringen, fordi det ikke er mulig å utvikle andre svært viktige kompetanser, som matematisk forståelse ut ifra utenatlæring (ibid.).

I Lithners forskning, blir imitativt resonnement videre delt inn i underkategoriene memorert resonnement og algoritmisk resonnement (se figur 3).
Når eleven bruker memorert resonnering, er strategivalget gjort ved å hente frem en løsning på den aktuelle oppgaven, fra hukommelsen, og gjennomføringen av strategien vil da kun være å skrive det ned. Det er svært få oppgaver hvor denne type resonnement er brukbar som en fullverdig løsningsmetode (Lithner, 2006). Eksempel på en slik oppgave kan være å gjøre om fra liter til kubikkcentimeter, der må man huske at 1 liter tilsvarer 1 kubikkdesimeter.
Når man løser matematikkoppgaver er det vanligvis mer passende å bruke algoritmisk resonnering (Lithner, 2012). En algoritme er et sett med instruksjoner eller prosedyrer som vil løse en bestemt type problem. Denne formen for resonnement krever at du henter frem en algoritme, og gjennomføringen av strategivalget vil da være å bruke algoritmen på den aktuelle oppgaven (Lithner, 2006). Algoritmisk resonnering er

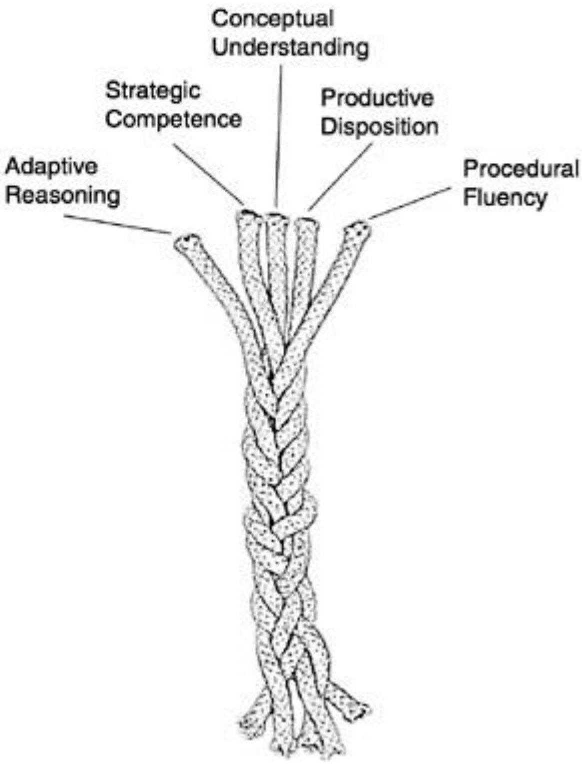
pålitelig når eleven vet nøyaktig hvordan de skal løse oppgaven og hvorfor den valgte algoritmen er hensiktsmessig, i tillegg sparer man tid og risikoen for feilberegninger minker. Problemet med et algoritmisk resonnement oppstår når det blir brukt i problematiske situasjoner hvor eleven er usikker, det er da basert på overfladiske og ikke iboende matematiske egenskaper (ibid.).

Jeg har ikke grunnlag til å påstå at alle typer resonnement er enten er et kreativt eller imitativt resonnement. Men Lithners forskning (e.g. 2006; 2012) bygger på analyse av mangfoldige eksempler som stammer fra empiriske studier, og alle disse eksemplene viser at et resonnement kan klassifiseres innenfor en av typene nevnt over.

Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) definerer resonnement på en noe annerledes måte enn Lithner. De bruker begrepet adaptiv resonnering i sammenheng med å utdype hva som ligger i matematisk kompetanse.

2.2.2 Adaptiv resonnering

Matematisk kompetanse er et vidt begrep. Kilpatrick et al. (2001) uttrykker det på følgende måte: « *Recognizing that no term captures completely all aspects of expertise, competence, knowledge, and facility in mathematics, we have chosen mathematical proficiency to capture what we believe is necessary for anyone to learn mathematics successfully*» (ibid., s. 116). Forskerne definerer matematisk kompetanse («mathematical proficiency») gjennom fem delkompetanser: «Conceptual understanding», «procedural fluency», «strategic competence», «adaptive reasoning» og «productive disposition». Disse fem delkompetansene er sammenflettet og er gjensidig avhengig av hverandre (se figur 4). Sammen utgjør de matematisk kompetanse:



Figur 4: De fem delkompetansene som er innvevd i hverandre og til sammen utgjør matematisk kompetanse (Kilpatrick et al., 2001, s. 117)

Konseptuell forståelse («conceptual understanding») er forståelse for matematiske begreper, operasjoner og sammenhenger. Prosedyreferdigheter («procedural fluency») er evnen til å fullføre en prosess fleksibelt, nøyaktig, effektivt og hensiktsmessig. Strategisk kompetanse («strategic competence») er evnen til å formulere, representere og løse matematiske problemer. Adaptiv resonnering («adaptive reasoning») er ferdighet for logisk tenkning, refleksjon, forklaring og begrunnelse. Produktiv holdning («productive disposition») går ut på å ha lysten til å se matematikk som fornuftig og nyttig, kombinert med en tro på ens eget utbytte (Kilpatrick et al., 2001).

Jeg vil i denne oppgaven ta for meg adaptiv resonnering. Ved å gå nærmere inn på denne ferdigheten, vil jeg samtidig beskrive hvilken rolle matematisk resonnement har for en fullverdig matematisk kompetanse.

Adaptiv eller tilpasset resonnering brukes for å avgjøre om en prosedyre i løsing av oppgaver er hensiktsmessig, det vil si om metodevalget fører frem til riktig svar, samtidig som det er effektivt. Resonneringen skal være korrekt og valid, stamme fra nøye gjennomtenkte alternativer og inkludere kunnskap om hvordan forsvare og begrunne løsningene sine (Kilpatrick et al., 2001). Og det er nettopp det å kunne forsvare og argumentere for arbeidet sitt som er det viktigste innenfor adaptiv resonnering. Elever blir nødt til å klare dette for å kunne tydeliggjøre sitt resonnement, finpusse resonneringsferdighetene og forbedre deres begrepsforståelse (ibid.).

Adaptiv resonnering ligger tett opp mot det Lithner kaller kreativ resonnering, og står i kontrast til bruk av rutiner i resonneringen, hvor man bruker imitative prosesser. Innenfor begrepet «matematisk tenkning» bruker Baroody (2003) to motsetninger som han definerer slik: «Rutine kunnskap» innebærer evnen til *imitativt* å gjennomføre matematikkoppgaver raskt og nøyaktig, uten nødvendigvis forståelse. «Adaptiv kunnskap» derimot, referer til evnen til fleksibelt og *kreativt* å anvende lærte prosedyrer, noe som forutsetter forståelse. Star & Seifert (2006) hevder gjennom sin forskning at imitativ gjennomføring av prosedyrer som er lært utenat, ikke fører til matematisk forståelse. Dette er i overensstemmelse med Lithners (2006) beskrivelse av imitativ resonnement (se s. 17) og Ross' (1998) mening nevnt i begynnelsen av kapittel 2.2, om at hvis en elev ikke kan resonnere, vil matematikk kun være pugging av eksempler og å følge oppskrifter, uten noen form for forståelse. Ved bruk av kun utenatlæring og imitative tankeprosesser, vil eleven ligge på de laveste nivåene i Blooms taksonomi (1956). Eleven vil være i stand til å gjengi innlært stoff og sette ord på kjent kunnskap, men ikke utvikle seg videre (se kap. 2.1.3).

Kilpatrick et al. (2001) påstår at man kan måle en elevs matematikkompetanse gjennom adaptiv resonnering, og at dette kan gjøres med to ulike metoder. Den første går ut på å få elevene til å resonnere rundt tall og deres egenskaper, for eksempel å estimere (12/13) + (7/8), med valgmulighetene 1, 2, 19 og 21 (ibid., s. 139). Den andre måten er å få dem til begrunne og forklare løsningene deres. Lithner (2012) bruker omtrent det samme eksempelet for å illustrere at en elevs argumentasjon kan forankres som enten overfladisk eller iboende: ved å avgjøre om hva som er størst av (9/15) og (2/3), vil størrelsen av tallene 9, 15, 2 og 3 være et overfladisk argument som er utilstrekkelig til å løse problemet (argumentasjonen ville vært «siden 9 og 15 er større enn 2 og 3 må 9/15 være større enn 2/3), mens et iboende argument ville ha løst oppgaven. Det å skille mellom overfladisk og iboende argumentasjon ble innført grunnet elevers vansker i matematikk som kunne spores tilbake til overfladiske argumenter (Lithner, 2012).

Med bakgrunn i at argumentasjon er et av de viktigste aspektene ved resonnering (Kilpatrick et al., 2001), og at Lithner (2006) kaller imitativ resonnering for overfladisk, tolker jeg det som at det er en tett link mellom overfladiske argumenter og overfladiske resonnement, i tillegg fører begge disse til problemer og mindre forståelse i matematikkfaget.

2.2.3 Muntlig og skriftlig resonnement

For å få størst mulig innblikk i hva som karakteriserer evnerike elevers matematiske resonnement, vil jeg studere både elevenes muntlige og skriftlige resonnement.

Muntlig og skriftlig bruk av matematikk understrekes i læreplanen og betegnes som grunnleggende ferdigheter i faget (Utdanningsdirektoratet, 2010).
«Å kunne uttrykkje seg munnleg i matematikk inneber å gjere seg opp ei meining, stille spørsmål, argumentere og forklare ein tankegang ved hjelp av matematikk. (…)Å kunne uttrykkje seg skriftleg i matematikk inneber å løyse problem ved hjelp av matematikk, beskrive og forklare ein tankegang og setje ord på oppdagingar og idear.» (ibid.).
Disse definisjonene ligger tett opp mot Lithner (2012) og Kilpatrick et al. (2001) sine definisjoner av ulike matematiske resonnement, som alle går ut på tankeprosesser og å argumentere og forsvare (se kap. 2.2.1 og 2.2.2).
Det finnes både fordeler og ulemper ved disse to måtene å utrykke seg på. Elever er forskjellig anlagt, noen kan ha en stor fordel ved å uttrykke seg verbalt, mens andre kan syntes dette er svært vanskelig og får dermed ikke vist hva de egentlig kan og har potensiale til. Det samme gjelder da også skriftlig arbeid. I Kyed, Skogen og Idsøe sine beskrivelser av hva som karakteriserer evnerike elever (se kap. 2.1), blir ikke det å kunne utrykke seg spesielt godt muntlig eller skriftlig nevnt som et kjennetegn. Jeg tolker det som at det finnes like mange variasjoner i denne elevgruppen som det gjør for elever generelt på dette området.
Naalsund (2012) mener at skriftlig arbeid ikke er nok, og at det må legges mye større vekt på diskusjon i klasserommet. Et muntlig matematisk resonnement gir en utvidet mulighet til å diskutere matematiske problemstillinger. Det er dokumentert at i matematikktimer i norske klasserom er dominert av lærerstyrt gjennomgang på tavla på den ene siden, og individuell oppgaveløsing på den andre (ibid.). Naalsund påpeker at det er svært viktig at elevene kan diskutere og få mulighet til å forklare hvorfor og

hvordan de har gjort ting, med støtte og veiledning av lærer. Det kan gi en dypere forståelse av fagstoffet, enn hvis man har et ensidig fokus på kun skriftlig arbeid. En annen stor fordel for eleven, ved å uttrykke seg muntlig, er at han/hun kan bruke sitt eget språk. I denne studien hvor målet er å finne karakteristikker ved evnerike elevers matematiske resonnement, er det helt essensielt at eleven kan uttrykke seg fritt og bruke egne uttrykk og definisjoner, siden det er dette som er fundamentet i resonnementet.

Ifølge Afflerbach og Johnston (1984) vil bruken av muntlige rapporteringer gi unike beskrivelser av kognitive prosesser, som ellers bare kan studeres indirekte. Ericsson og Simon (1984/1993) betegner nettopp det at forskeren kan komme svært nær de kognitive prosessene til deltakeren, som den største styrken ved verbale rapporteringer. Men man må samtidig være klar over at det kun er de bevisste prosessene som vil bli uttrykt, mye av det som skjer i deltakerens tenkning vil ikke komme frem, og de underliggende kognitive prosessene vil være spekulative (Ericsson & Simon, 1984/1993).

2.2.4 Oppsummering av matematisk resonnement

Utenatlæring og imitative prosesser kan være nødvendig ved enkelte tilfeller i matematikk, men når denne typen blir dominerende vil ikke elevene kunne utvikle sentrale matematiske ferdigheter som evne til å resonnere og forstå. Elever må kunne ha evnen til å resonnere for å utvikle matematisk kompetanse (Lithner, 2012, Kilpatrick et al., 2001, NCTM, 2000). Og for å lære matematikk og øke kompetansen i faget mest mulig, er det kreativt resonnement som gir best resultater (Lithner, 2006; 2012). Kvaliteten på elevers matematisk resonnement og forståelse for matematikk, er altså avhengig av hvilken type resonnering som blir brukt. Heinze et al. (2009) påpeker at adaptiv resonnering fremmer både prosedyreferdigheter og konseptuell forståelse, altså tre av de fem delkompetansene som utgjør en fullverdig matematisk kompetanse (Kilpatrick et al., 2001). Adaptive og kreative valg kan med andre ord anses for å være svært viktige aspekter i matematisk kompetanse (Heinze et al., 2009; Kilpatrick, et al., 2001). «*The flexible and adaptive use of strategies and representations is part of a cognitive variability, which enables individuals to solve problems quickly and accurately*»

(Heinze, et al., 2009, s. 1).
Forskning viser at elever er i stand til vise sin evne til å resonnere når tre vilkår er oppfylt: elevene har et tilstrekkelig kunnskapsgrunnlag, oppgaven er forståelig og motiverende, og konteksten er velkjent (Kilpatrick et al., 2001). Min forskning omhandler evnerike elever, og det er derfor viktig å oppfylle de tre kriteriene med hensyn på disse elevenes potensiale og vanskelighetsnivå. Med de rette oppgavene, kan man altså ved å undersøke hva som karakteriserer evnerike elevers matematiske resonnement, også få et innblikk i elevens matematiske kompetanse.

Produktet av elevenes tankeprosesser, deres måte å forstå, kan observeres som adferd. Jeg vil i min forskning prøve å karakterisere data, og jeg vil derfor anse et resonnement som et produkt av både muntlige og skriftlige data i en resonneringssekvens, som starter i en oppgave og ender i et svar.

3. METODE

Metodevalgene er først og fremst gjort med bakgrunn av problemstillingen min, men også ulike praktiske forhold. For å prøve å besvare problemstillingen har jeg valgt en kvalitativ forskningsmetode som består av intervju og høyttenkningsmetoden.

Intervjuet blir brukt som en utvelgelsesmetode. Den består av 15 spørsmål (se Vedlegg 1) som har med hensikt å gi indikasjoner på om eleven kan karakteriseres som evnerik eller flink (se Tabell 1 side 8), og om eleven er motivert for matematikkfaget. Jeg vil ikke følge intervjuguiden slavisk, den vil kun fungere som en retningslinje slik at det er åpent for oppfølgingsspørsmål og endring av kurs.
Høyttenkningsmetoden går ut på å la den deltakende tenke høyt mens han/hun utfører et utvalg oppgaver (Ericsson & Simon, 1984/1993). I mitt tilfelle (med meg som intervjuer og eleven som deltaker) vil eleven få beskjed om konstant å fortelle meg alt han/hun tenker, fra oppgaven blir presentert første gang til oppgaven er løst, uten å prøve å planlegge hva som skal sies (ibid). Når eleven har kommet frem til en løsning på oppgavene, vil jeg stille eleven oppfølgende spørsmål for å utfylle eventuelle «hull» i høyttenkningsdelen. Hensikten vil være å prøve å få eleven til å begrunne og forsvare hva han/hun har gjort og hvorfor. Høyttenkningsmetoden vil gi meg muligheten til å få et viktig innblikk i *prosessen* i oppgaveløsingen og ikke kun svaret på oppgaven. Samtidig vil jeg ha elevens skrevne arbeid som en essensiell del av datamaterialet. Det er altså resultatene fra høyttenkningsdelen som skal brukes til å besvare problemstillingen.

Jeg vil i dette kapittel beskrive metodevalget for min studie, for så å presentere teori og drøfte metoden i lys av denne.

3.1 Deltakere

Jeg vil i dette delkapittelet presentere teori bak det å velge deltakere generelt og bruk av intervju som utvelgelsesmetode, og diskutere denne teorien opp mot mine valg. Elevene som deltar i min datainnsamling er syv elever fra videregående skole som ligger forut sine jevnaldrende i matematikk. Resultatet av utvelgelsesmetoden ble tre elever som kan betegnes som evnerike. Et kort sammendrag av intervjuet av disse elevene er å finne i slutten av delkapittelet. Elevene er presentert med fiktive navn av hensyn til anonymitet. Valg av både deltakere og oppgaver er gjort med bakgrunn av at effekten av mulige hemninger av høyttenkningsmetoden er minimalisert.

3.1.1 Teori, deltakere

I forskning er man ute etter en bestemt type mennesker, og som oftest trenger man et tilfeldig utvalg av denne gruppen. I tillegg til dette er det i følge van Someren et al. (1994) to viktige egenskaper man må ta hensyn til ved valg av informanter til høyttenkningsmetoden: grad av kompetanse og verbaliseringsferdigheter.

Det er flere viktige aspekter man må ta høyde for hvis høyttenkningsmetoden skal brukes på såkalte «eksperter», personer med høy grad av kompetanse. Slike personer kan ofte løse en oppgave svært lett, men kan ha vanskeligheter med å forklare hvordan de kom frem til svaret, de «bare så at det måtte bli slik». Eksperter kan også skjule at de ikke tydelig forstår, for å hjelpe forskeren med å unngå rotete detaljer og å forholde seg kun til argumentasjon. Hvis deltakeren er en person med stor kompetanse i det aktuelle området, burde han derfor informeres om at det er viktigere at det som uttrykkes er naturlig, enn at det er forståelig for forskeren. Uforståelige deler kan ryddes opp i i ettertid, mens manglende tanker kan derimot ikke gjenopprettes (Someren et al., 1994).

Det varierer betydelig fra person til person hvor lett man kan verbalisere tankene sine, noe som kan resultere i at noen protokoller vil være mer komplette enn andre. Det er rimelig å anta at kvaliteten på muntlige ferdigheter ikke har en sammenheng med andre egenskaper som lett kan måles eller observeres. Og den mest effektive metoden å finne ut om deltakerne er passende når det gjelder å uttrykke tankene sine muntlig, er derfor å gjennomføre en pilot (van Someren et al., 1994).

3.1.2 Diskusjon, deltakere

Deltakerne til min datainnsamling er elever fra videregående skole som har et eget utdanningsløp i matematikk. Disse elevene ligger forut sine jevnaldrende og har fullført matematikkfagene på videregående skole. Elevene er fra ulike skoler, men de tar alle samme kurset ved universitetet, et kurs som tilsvarer det første matematikkfaget som ordinære studenter ved universitetet tar. Elevene har selv meldt seg på studietilbudet, men det har et inntakskrav på fullført R1 og R2-matematikk med karakter 5 eller 6. Altså vil jeg kun gå ut ifra evnerike elever som presterer høyt, og ikke de såkalte underyterne (Skogen & Idsøe, 2011). Påmelding til deltakelse i mitt forskningsprosjekt, ble sendt ut til alle elevene ved kurset via e-post, og sju elever meldte seg frivillig.

Som sagt er det er det to vesentlige egenskaper å ta hensyn til ved utvelgelse av informanter til høyttenkningsmetoden: grad av kompetanse og verbaliseringsferdigheter (van Someren et al., 1994). I mitt tilfelle har jeg kun gått ut ifra førstnevnte. Denne studien omhandler evnerike elever, og deres grad av kompetanse er derfor mye mer avgjørende og relevant enn verbaliseringsferdighetene. Dessuten hadde jeg et begrenset antall elever å gå ut ifra da jeg forholdt meg til en bestemt gruppe (se under), ved igjen å ta et utvalg av disse med hensyn på verbaliseringsferdigheter, ville antall informanter blitt for lite. Jeg valgte derfor ikke å gjennomføre en pilot for å finne ut hvilke deltakere som er mest passende med tanke på å uttrykke tankene sine muntlig, slik van Someren et al. (1994) anbefaler.

Alle syv elevene som meldte seg på frivillig er videregående elever som ligger forut sine jevnaldrende og tar matematikk på universitetet. Jeg valgte å ta utgangspunkt i denne gruppen, fordi det i en vanlig, heterogen skoleklasse i Norge finnes det gjennomsnittlig 1-2 elever som kan betegnes som evnerike (Idsøe, 2011). Jeg vil derfor anta at antall evnerike i denne gruppen er betydelig høyere. Siden alle elevene presterte med høye karakterer i matematikken fra videregående, består denne gruppen av elever som kan karakteriseres som flinke eller evnerike. Jeg brukte intervjuet til å prøve å skille disse to typene elever fra hverandre, slik at jeg kan basere mine data på elever som best mulig kan betegnes som evnerik.
Jeg valgte å gjennomføre både intervjuet og høyttenkningsmetoden på alle syv elevene, og gjorde deretter et utvalg av disse (se kap. 3.1.2), der jeg valgte å se nærmere på tre elever. Grunnen til at jeg har brukt et så lite antall informanter, er først og fremst tidsbegrensning. Dette er en mastergradsoppgave på 30 studiepoeng, og det ville derfor vært umulig å undersøke det matematiske resonnementet til et antall elever som ville vært representativt for evnerike elever i Norge. Dessuten er dette en kvalitativ studie, hvor man forsker i dybden og ikke bredden (se kap. 3.3). Altså undersøker man heller

grundig et lite antall informanter, i stedet for noen få variabler ved mange enheter som i en kvantitativ studie.
Evnerike kan som nevnt tidligere sees på som eksperter, i den forstand at de har høy grad av kompetanse i et emne, i dette tilfellet matematikkfaget. Det er viktig å være oppmerksom på dette, når det gjelder både høyttenkningsmetoden og intervju. For å unngå at deltakerne uttrykker det de tror forskeren vil høre og unngår å fortelle deler de selv tror er uforståelig for forskeren eller urelevant, informerte jeg deltakerne om at det viktigste er å være ærlig og at det som uttrykkes skal være naturlig.

3.1.3 Teori, intervju

Som mange andre kvalitative studier, har jeg valgt å bruke et semistrukturert intervju. Det vil si at man som forsker forholder seg til temaer og spørsmål formulert på forhånd, samtidig som man under intervjuet kan forandre kurs og komme med oppfølgingsspørsmål der det er ønskelig. Intervjuguiden i helhet vil altså være fleksibel da man ikke er fastlåst den overordnede intervjuguiden. Oppfølgende spørsmål krever at intervjueren er en aktiv lytter, slik at man fanger opp ledetrådene som gir intervjueren mulighet til å stille de rette spørsmålene som medvirker til å besvare forskningsspørsmålet (Kvale & Brinkmann, 2009). Spørsmålene vil med andre ord være avhengig av problemstillingen min og hva som kommer frem under intervjuet. Men oppfølgingsspørsmålene vil i svært liten grad medvirke til å besvare forskningsspørsmålet mitt i dette tilfelle, da intervjuet kun er en del av utvelgelsesmetoden.

Siden man korrigerer retning under et kvalitativt intervju, jobber man med metode og analyse samtidig. I motsetning til kvantitativ metode der metode- og analysedelen er totalt adskilt (Hansen & Hansen, 2010). Ved kvalitative intervju er det viktig å være bevisst på graden av åpenhet; hvor mye informasjon informantene skal få på forhånd og underveis i prosessen. Deltakerne må være informert om formalitetene bak intervjuet, samtidig som man ikke må gi så mye informasjon at det på virker resultatene (ibid.) Troverdighet er en annen metodisk problemstilling i forbindelse med intervju (Hansen & Hansen, 2010). Intervjuets resultater og deltakerens svar skal være preget av oppriktighet, og ikke av skuespill eller svar som det forventes at forskeren vil ha. Troverdighet kan frembringes gjennom trygghet og gjensidig respekt. Dette kan oppnås ved å starte intervjuet med enkle spørsmål slik at samtalen er i gang, før man vinkler prosessen inn på de mer relevante og komplekse spørsmålene (Andersen, 2013).

Lyd- og videoopptak fremheves som den beste metoden til nedtegnelse av et kvalitativt intervju (e.g. Hansen & Hansen, 2010, Andersen, 2013, Kvale & Brinkmann 2009). Ved slike opptak registreres alt som blir sagt, og man har mulighet til å høre og se på dem flere ganger. Ord for ord kan transkriberes og analyseres. Opptak sikrer at ikke noe informasjon går tapt og tillater detaljerte tekstanalyser.

3.1.4 Diskusjon, intervju

Poenget med et forskningsintervju er å prøve «å forstå verden sett fra intervjupersonenes side» (Kvale & Brinkmann, 2009, s 21). Jeg vil med mitt intervju forsøke å sette meg inn i elevenes motivasjon for faget, og andre momenter som kan indikere karakteristikker for evnerik. Til å gjøre dette har jeg i min studie valgt å bruke et semistrukturert intervju. Det er både styrker og svakheter ved denne forskningsmetoden.

En svakhet er at intervju er tidskrevende, og siden jeg derfor har begrenset meg til et lite antall informanter, gjør det at utvalget av målgruppen er svært utslagsgivende for resultatet av forskningen (Kvale & Brinkmann, 2009). Men formålet med mitt intervju er å studere elevenes motivasjon og hjelpe til med å skille de flinke elevene fra de evnerike, altså er intervjuet en del av selve utvelgelsen. Og svarene fra elevene under intervjuet vil derfor ikke være direkte utslagsgivende for det endelige resultatet av forskningen.
En annen svakhet ved denne metoden er det som kalles sosial ønskverdighet. «Sosial ønskverdighet innebærer en tendens til å svare i henhold til hva respondenten mener er sosialt akseptabel atferd» (Gravdal & Sandal, 2004, s.729). Dette kan ha påvirket noen av svarene under intervjuet. For eksempel er et av kjennetegnene ved evnerike elever at de foretrekker å tilbringe tid med voksne personer i stedet for jevnaldrende. Noen av deltakerne kan ha unnlatt å fortelle dette, fordi de mener det er mer sosialt akseptabelt å ha venner på sin alder. Jeg presiserte at jeg ønsket ærlige og naturlige svar, og stilte flere spørsmål som skal hjelpe til med å avdekke om eleven er flink eller evnerik, og jeg går derfor ut i fra at sosial ønskverdighet ikke spiller en vesentlig rolle for resultatene av

intervjuet. Ved intervjuer kan det også være et problem at forskeren påvirker deltakeren til å svare i en bestemt retning (Kvale & Brinkmann, 2009).

En av de største fordelene med et relativ åpent intervju er at informanten kan bruke sitt eget språk. Et typisk trekk ved evnerike mennesker er et godt ordforråd og velutviklede språkferdigheter. For å kunne observere dette, er det helt vesentlig at deltakerne kan uttrykke seg fritt.
En annen styrke er fleksibiliteten. Forskningsintervjuet mitt er fleksibelt i den forstand at det ble brukt båndopptaker. Som nevnt tidligere gir det meg muligheten til i ettertid å høre intervjuet flere ganger, men det gir meg også en unik mulighet under selve intervjuet. Lydopptak gjør at jeg ikke behøver å notere svarene til deltakerne underveis, og jeg kan heller konsentrere meg om å lytte (og observere oppgaveløsingen deres under høyttenkningsmetoden). På den måten vil spørsmålenes relevans øke, ved at jeg som intervjuer kan tilpasse spørsmålene etter situasjonen. Altså er intervjuet fleksibelt også fordi man ikke er låst til forutbestemte spørsmål, man kan i stedet utdype og oppklare uklarheter med å stille oppfølgende spørsmål. Spørsmålsstillingen kan altså tilpasses den enkelte og passer derfor undersøkelser som har til hensikt å gå i dybden, oppdage eller kartlegge.
For å kunne stille de riktige spørsmålene, må man på forhånd vite hva man ser etter. Jeg hadde forberedt meg på å se etter ulike karakteristikker for evnerike og typisk trekk som kan skille dem fra de flinke. Men det første intervjuet var preget av nervøsitet fra min side, og jeg hadde vanskeligheter med å lytte og bearbeide svarene i øyeblikket. Resultatet av dette ble manglende oppfølgingsspørsmål. Men «øvelse gjør mester», og det ble lettere og lettere for hvert intervju å følge opp momenter i deltakernes svar og stille de gode spørsmålene. For å unngå et «mindre givende» førsteintervju, kunne jeg ha gjennomført en eller flere piloter, slik at jeg ville følt meg trygg i situasjonen og stilt alle nødvendige oppfølgingsspørsmål allerede fra første intervju.

Intervjuet er som sagt en del av deltakerutvelgelsen. Intervjuguiden ble lagd på bakgrunn av to faktorer (se Vedlegg 1). Den første er Tabell 1 (side 8) som viser de ulike kjennetegnene på om en elev kan karakteriseres som evnerik eller flink. Den andre er motivasjon, da motivasjon er en av de tre hovedferdighetene (i tillegg til kreativitet og intelligens) som brukes om evnerike (se kap. 2.1.2). I tillegg til at intelligens og kreativitet kan komme frem i noen av svarene under intervjuet, kan elevene betegnes som intelligente i den forstand at de gikk ut med karakter 5 eller 6 i matematikken på videregående skole, og at de ligger et år foran sine jevnaldrende i faget. Motivasjon er en mental variabel som ikke kan måles direkte, men jeg vil bruke dataene samlet inn gjennom intervjuet til å forsøke å si noe om elevenes motivasjon i form av motivasjon for matematikk og mål med faget. Jeg vil bruke Renzullis og Mönks beskrivelser av begrepet motivasjon (se kap.2.1.2). De går ut på at motivasjon er stor interesse og fascinasjon for et spesielt område, utholdenhet og tro på ens evne til å utføre et viktig arbeid, evne til å sette seg mål og samtidig være risikovillig.

En trygg situasjon kan oppnås ved å gjøre omgivelsene mindre formelle, som å bruke et mer dagligdags språk og starte intervjuet med åpningsspørsmål som er enkle å svare på. De første spørsmålene i intervjuguiden handler derfor om hverdagslige emner for eleven.

3.1.5 Resultat av deltakerutvalg

Jeg intervjuet alle de syv påmeldte for å prøve å finne ut om noen av dem kunne karakteriseres som evnerik. Resultatet ble tre evnerike elever og fire flinke. Sammendrag av svarene til de tre som har karakteristikker som evnerike, er presentert under.

Thomas

Thomas virker meget selvkritisk når det gjelder egne evner og prestasjoner, noe som er typisk for evnerike. Han uttrykker at han alltid skulle ønske at han fikk gjort mer enn det han gjør, og at han syns de andre på kurset virker som om de er mye smartere enn ham selv, han kaller dem genier. Dette på tross av at han sier han forstår stoffet etter hver forelesning. Han sier at han enkelte ganger føler seg smart i matematikk, andre ganger føler han at han ikke skjønner noen ting sammenlignet med de andre i klassen.
Kurset består av en homogen gruppe og jeg vil derfor si at alle elevene i klassen er mer eller mindre likesinnede. Evnerike fortrekker å tilbringe tid med likesinnede, og Thomas trives godt med de andre elevene på kurset.
Thomas har stor motivasjon for faget: Han sier han liker matematikk fordi det skiller seg ut blant annet på den måten at det er helt grunnleggende og logisk. Han viser

utholdenhet og tro på å fullføre arbeid, da han sier at han ikke gir opp en oppgave, men fortsetter å jobbe med den til den litt slutt går opp, og han liker utfordrende oppgaver. Thomas sier at han ikke kunne gått et år uten matematikk og at han «liker å ha matte, tenke matte, jobbe med matte». I tillegg er han fast bestemt på å ha en sterk videre utdanning med matematikk som utgangspunkt. Ut ifra dette vil jeg si at han virker interessert og fascinert over matematikk.
Thomas har også noen tegn som kan tyde på at han er «flink» og ikke evnerik. Som for eksempel jobber han veldig hardt med matematikk, mellom 2-4 timer hver dag. I tillegg liker han å samarbeide med andre, noe som er atypisk for evnerike. Thomas skiller seg heller ikke ut med spesielt gode språkferdigheter. Til tross for dette, velger jeg å karakterisere denne eleven som evnerik, da det er flere og sterkere trekk for evnerik enn for flink.

Audun

Audun er svært målbevisst når det gjelder dagens situasjon med trening og matematikk. Han bruker relativt lite tid på matematikk i uka, kun 3 timer, og han beskjeftiger seg heller med andre ting som trening, men han klarer seg godt i matematikkfaget likevel, noe som er et typisk trekk for evnerike. Audun liker å lære, og foretrekker utfordrende, komplekse og vanskelige oppgaver. Han sier at han ikke er en som gir opp en oppgave selv om han står fast eller den er på et høyt vanskelighetsnivå. Han trives på kurset og syns det er inspirerende å snakke med sine likesinnede, men han foretrekker å jobbe individuelt. Audun er motivert i faget i den forstand at han har interesse og fascinasjon for matematikk; han snakker med stor iver da han sier: «*Jeg liker at det på en måte er et sett med regler som man bare må finne ut av, for å komme frem til en løsning. Alt er på en måte satt opp fra før og så er det din oppgave å lære deg dette og bruke dette i forskjellige oppgaver. Svaret er der, man må bare finne ulike, kreative måter å komme frem til det.*». Samtidig er Audun risikovillig ved å velge de utfordrende oppgavene. «*Hvis det er en skikkelig vanskelig oppgave, føler jeg nysgjerrighet og jeg har lyst på å komme frem til svaret og jeg lurer på om det er riktig*».

Audun har ingen tydelige trekk for flink. Men det at han mangler klare mål for fremtiden og videre utdanning, kan tyde på noe manglende motivasjon; han sier han er usikker på hva han vil etter videregående skole og har derfor trolig tenkt til å ta et friår. Han viser heller ikke tegn til å være spesielt selvkritisk: Da jeg spør han om hva han syns om sine egne matematikkferdigheter, svarer han at han vet at han har et talent for matematikk og at han ligger foran de fleste, men at han likevel ikke er blant de beste blant elevene i kurset.

Christina

Christina har mange tydelige trekk for evnerik. Først og fremst kan hun betegnes som kreativ i den forstand at hun tar kunstfag på videregående og bruker mesteparten av fritiden på å tegne og leser «fantasy»-bøker. Hun klarer seg godt i faget, selv om hun kun bruker omtrent 1 time hver uke på matematikk. Christina forteller at hun jobber best alene, og at hun liker utfordrende oppgaver. Hun blir glad, nysgjerrig og oppspilt av å bli presentert for vanskelige oppgave. Hun sier også at hun blir svært frustrert over oppgaver hun ikke får til, men hun gir likevel ikke opp; «*jeg går rundt og tenker på den ene oppgaven jeg ikke fikk til, den plager meg hele tiden*». Sammen med resten av realfagene blir Christina motivert av matematikk og det å kunne se sammenhenger. I tillegg liker hun faget godt, og hun «*var veldig veldig redd for å gå et år uten matte og la kunnskapen forfalle».* Om sine egne matematikkferdigheter fortelller hun at hun mener de er ganske gode, men at det alltid er noen som er bedre: På kurset elevene tar, forteller hun at man blir «*jekket ned et par hakk i og med at man ikke lenger er blant de seks beste i klassen, man er i en gruppe hvor alle 30 er blant de beste*».
Alt i alt har Christina altså flere typiske trekk for evnerik, og i tillegg gode språkferdigheter, og ingen tydelige trekk for typisk flink.

3.2 Oppgaver

Jeg vil i dette delkapittelet først legge frem teori bak det å velge oppgaver til høyttenkningsmetoden, og deretter presentere de to oppgavene jeg har valgt.

3.2.1 Teori

Når man skal velge oppgaver deltakerne skal løse, er det viktig å velge noen som er egnet for høyttenkningsmetoden (van Someren et al., 1994). Det innebærer først og fremst at oppgaven må kunne uttrykkes verbalt. Den må også ha et vanskelighetsnivå som er passende for deltakerens kognitive prosesser. Hvis oppgaven er for enkel, kan deltakeren løse den automatisert, uten å måtte tenke seg om. Dette har negative følger for resultatene av høyttenkningsmetoden, ved at den løses for raskt og at deltakeren ofte hverken klarer å tenke høyt mens oppgaven løses, eller i ettertid å forklare hvorfor han løste den slik. For vanskelige oppgaver kan i verste fall ikke gi noen resultater, ved at deltakeren ikke har noen anelse om hvordan løse oppgaven. I tillegg må oppgaven være representativ med hensyn på de kognitive prosessene involvert. Det vil si at man må velge en oppgave som ikke bare har passende vanskelighetsgrad, men den skal også være aktuell. Hvis man velger et uvanlig problem, vil det være liten grad av relevans for den kognitive prosessen man ønsker å studere. Høyttenkningsmetoden kan fort bli for omfattende ved valg av mange komplekse problemer. Det er derfor vanlig å bruke kun én eller et lite sett med oppgaver der det kan anvendes mindre tidkrevende teknikker. Som forsker bør man også være klar over at noen oppgaver er mer definerte enn andre. For eksempel hvis oppgaven er å designe klær, kan utfallet bli svært bredt, i motsetning til et matematisk problem, der både selve oppgaven og løsningen som oftest er veldefinerte (ibid.)

En passende oppgave vil i denne forskningsmetoden være en som gjør det er mulig å skille på om eleven resonnerer kreativt eller imitativt. Resonnering gjennom oppgaveløsing kan betegnes som kreativt, hvis disse fire kriteriene er oppfylt (Lithner, 2006) (se kap. 2.2.1):
i) Nyskapende: en ny resonneringssekvens blir dannet eller en glemt sekvens blir gjenskapt. Å imitere et svar eller en prosedyre er ikke nyskapende.
ii) Fleksibel: Innebærer å ha ulike tilnærminger og tilpasninger til en situasjon, og ikke være fiksert på en bestemt strategi. Fiksering av å søke etter lagrede eller algoritmiske løsninger vil også hindre fremdrift.
iii) Troverdig: Argumenter som begrunner strategivalg, implementering og hvorfor konklusjonene er sanne. Intuisjoner og gjetninger gjelder ikke, men argumentene må heller ikke være basert på beviser.
iv) Matematisk grunnlag: Argumentasjon og resonnement skal være matematisk forankret. Heller ikke her er det nødvendigvis referert til beviser, det må kun være et matematisk grunnlag.

På den andre siden vil resonneringen være imitativ og algoritmisk, der strategivalget er grunnlagt på deler av memorerte regler og formler. Hvis dette er tilfelle, vil den resonneringen som gjenstår av strategiimplementeringen være banal og selv den minste feil kan hindre informanten i å finne svaret. Informanten vil ikke ha forståelsen bak algoritmen og vil ikke kunne begrunne valget. Som beskrevet i kapittel 2.2.1 er algoritmisk resonnering pålitelig når eleven vet nøyaktig hvordan løse en oppgave og hvorfor den valgte algoritmen er hensiktsmessig. Problemet oppstår når det blir brukt i problematiske situasjoner hvor eleven er usikker, det er da basert på overfladiske og ikke iboende matematiske egenskaper (Lithner, 2006).

3.2.2 Utvalg og diskusjon

Til min studie har jeg valgt to oppgaver deltakerne skal løse under høyttenkningsmetoden. Begge oppgavene er integrasjonsoppgaver:

Oppgave 1: $\int_{-1}^{1} |x| \; dx$

Oppgave 2: $\int e^x sinx \, dx$

Oppgavene ble valgt i samråd med en lektor som underviser i matematikk på videregående, og en doktorgradsstipendiat som jobber som øvingslærer i matematikk ved universitetet, og jeg vil derfor påstå at de utvalgte oppgavene har en passende vanskelighetsgrad med tanke på elevenes ferdigheter. De er tatt ut av elevenes pensum, og målet er at oppgavene ikke er for enkle slik at de løses automatisk, men at det samtidig skal være mulig å komme frem til svaret etter litt betekningstid.
Det er blitt valgt integrasjonsoppgaver av to grunner: elevenes forhold til integrasjon og mitt eget. Integrering er en stor og viktig del av pensumet både på videregående og universitetet, og elevene burde derfor ha god kontroll på dette temaet. Altså er oppgavene aktuelle. Med oppgaver som er passe vanskelige og relevante for elevene, har jeg et godt utgangspunkt for å få et innblikk i deltakernes kognitive prosesser (se kap. 3.4). I tillegg er integrasjon en del av matematikken jeg selv har god kontroll på. Dette er essensielt for at jeg kan stille gode, oppfølgende spørsmål etter høyttenkningsmetoden, slik at elevens argumentasjon blir mest mulig synlig.

Som nevnt tidligere, er det vanlig å bruke kun én eller et fåtall oppgaver som ikke innebærer svært tidkrevende teknikker, da høyttenkningsmetoden fort kan bli for omfattende. Jeg har derfor valgt to oppgaver som jeg forventer at elevene løser innen 15 minutter totalt, inkludert høyttenkning og oppfølgingsspørsmål fra meg.

I tillegg til momentene over, er utvelgelsen av oppgaver først og fremst gjort med hensyn til om resonneringen gjennom løsing av oppgavene kan betegnes som kreativ eller imitativ. Jeg har valgt, på lik linje som Lithner, å dele inn elevenes resonnement inn i disse to typer resonnement. Men for å begrense arbeidsmengden med hensyn på mangel på tid ved en masteroppgave på 30 studiepoeng, har jeg valgt kun å fokusere på imitativt, algoritmisk resonnement og forandre noe på faktorene i Lithners beskrivelse av kreativt resonnement. Sistnevnte har jeg valgt å begrense til om resonnementet er fleksibelt og om det er matematisk troverdig. Altså ser jeg bort ifra om resonnementet er nyskapende, fordi det vil være vanskelig å vurdere om resonnementet er nytt for elevene eller ikke, i og med at jeg kun møter elevene den ene gangen. Jeg har også valgt å kombinere kriteriene «troverdig» og «matematisk grunnlag», fordi disse to kriteriene ligger svært tett opp mot hverandre i den forstand at resonnementet ofte er troverdig ved at det blir begrunnet med et matematisk argument.

Oppgave 1: $\int_{-1}^{1} |x|\, dx$

Denne oppgaven kan gi indikasjoner på kreativt resonnement fordi oppgaven har flere løsningsmetoder (se Vedlegg 2). Hvis eleven bruker to eller flere av disse, kan det tyde på fleksibilitet. Og om eleven i tillegg kan begrunne disse veiene med troverdige argumenter med et matematisk grunnlag, kan det konkluderes med at eleven kan resonnere kreativt. Oppgaven er ikke en typisk oppgave i den forstand at den ikke direkte ligner på oppgaver fra elevenes lærebok. Den har ikke et høyt vanskelighetsnivå, men absoluttverdien av x gir den en ny «vri».

Oppgave2: $\int e^x \sin x \, dx$

I motsetning til oppgave 1, er denne oppgaven ikke åpen. Det er en typisk oppgave der man blir nødt til å bruke en bestemt prosedyre (delvis integrasjon, se Vedlegg 2) for å komme frem til løsningen på oppgaven. Til tross for dette, kan også denne oppgaven gi indikasjon på kreativt resonnement. Hvis eleven gjenkjenner at dette er en oppgave der man må bruke delvis integrasjon, er det neste spørsmålet om han/hun husker formelen. Om formelen huskes, kan oppgaven løses med et imitativt, algoritmisk resonnement. Men eleven kan fortsatt vise kreativitet ved forklaring og begrunnelse av prosedyren og hvorfor løsningen er sann med troverdige argumenter som er matematisk forankret. Hvis eleven ikke husker formelen for delvis integrasjon, kan eleven prøve å komme frem til formelen ved å integrere produktregelen for derivasjon (beviset for formelen), eller prøve å komme nærmest mulig en løsning uten å bruke formelen; begge disse fremgangsmetodene kan vise tegn på kreativt resonnement. I og med at eleven mest sannsynlig vil gjenkjenne denne type oppgave og bruke delvis integrasjon, vil det trolig ikke bli brukt et fleksibelt resonnement. Jeg har likevel valgt å bruke denne oppgaven fordi man lett kan observere om eleven kun har et overfladisk imitativt resonnement.

3.3 Kvalitativ forskningsmetode

Jeg har valgt en kvalitativ forskningsmetode, som kjennetegnes blant annet av at den er ressurskrevende. Problemstillingen representerer en mastergrad på 30 studiepoeng, og det kan være lurt å unngå tilnærminger som er svært tidskrevende. Som nevnt tidligere har jeg derfor valgt kun å studere et fåtall elever. En konsekvens av dette er at man prioriterer mange variabler i stedet for mange enheter, altså dybde foran bredde. Med andre ord vil denne forskningsmetoden la meg som forsker gå grundigere inn i hva som karakteriserer en evnerik elevs matematiske resonnement, som kan gi et bedre innblikk i blant annet individuelle variasjoner som hvordan og hvorfor elevene tar de valgene de gjør. Men dette fører samtidig til at jeg ikke kan generalisere til en større populasjon.
Et annet kjennetegn er at kvalitative tilnærminger er fleksible; det at hele sesjonen blir tatt opp med lydopptaker, gir meg muligheten til å gå tilbake og registrere alt av hva som blir sagt.

3.4 Høyttenkningsmetode

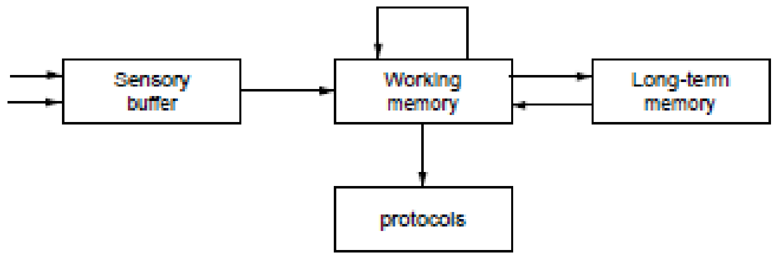
Det er resultatene fra denne forskningsmetoden som skal brukes til å besvare problemstillingen min. Jeg vil først presentere teori, deretter diskutere den og til slutt legge frem hvordan jeg vil gjennomføre høyttenkningsmetoden.

3.4.1 Teori

Høyttenkningsmetoden ble etablert i Nederland i 1930-årene ved forskning på prosessene i kreative resonnement (van Someren et al., 1994). Siden den gang er metoden blitt brukt internasjonalt i utallige studier, spesielt innenfor psykologisk forskning. Den er blitt utviklet fra introspeksjon, som er basert på ideen om selviakttagelse og rapportering av egne opplevelser og bevissthet (Store norske leksikon, 2005-2007). Til tross for at introspeksjon som metode ble ansett som uvitenskapelig av behavioristisk psykologi, fordi den er basert på observasjon av hendelser i bevisstheten som man har begrenset tilgang til, er den i dag brukt gjennom selvvurdering og høyttenkning (van Someren et al., 1994).

Høyttenkningsmetoden går ut på å be en person om å tenke høyt mens han/hun arbeider med å løse en oppgave, uten innblanding av forsker. Denne forespørselen blir repetert hvis nødvendig, slik at deltakeren til enhver tid forteller det han/hun tenker. Til slutt analyseres de verbale resultatene. Metoden kan være en unik kilde til informasjon om kognitive prosesser: Oppgaveløsingen kan karakteriseres som et kognitivt forløp med et konkret mål, der svaret ikke blir funnet i ett enkelt trinn, men via flere resonnerende steg (van Someren et al., 1994). Altså får vi ved hjelp av høyttenkningsmetoden et viktig innblikk i prosessen bak oppgaveløsningen og ikke kun selve utfallet.

Høyttenkningsmetoden er en sammensatt metode som består hovedsakelig av observasjon og verbale rapporteringer. Observasjon kan betegnes ustrukturert i den forstand at den ikke begrenser deltakerens adferd; utvalget av mulige observasjoner er svært bred og er avhengig observatøren (van Someren et al., 1994). På en annen side er observasjon en metode som kan si mye om prosessen bak oppgaveløsninger, som for eksempel om informanten nøler ofte, kommer frem til løsningen umiddelbart, hvor i prosessen det brukes hjelpemidler, og lignende. Hendelser som dette, vil ikke være mulig å hente ut ifra kun deltakerens skrevne arbeid (ibid.).
van Someren et al. (1994) har laget en modell som viser hvordan verbale rapporteringer blir til ut ifra menneskets kognitive system:



Figur 5: «Memory model». Boksen til høyre står for langtidshukommelsen våres, mens boksen til venstre er den informasjonen vi til enhver tid henter fra omgivelsene. Både kunnskapen lagret i langtidshukommelsen og den fra miljøet rundt oss, bearbeides i det arbeidende minnet. Og det er kunnskapen som befinner seg der, som kan rapporteres verbalt. (van Someren et al., 1994, s. 20)

Modellen i figur 5 skjer i fem trinn:

1. Oppfatning: Informasjon strømmer kontinuerlig inn fra det som skjer rundt oss.
2. Innhenting: Kunnskap som er lagret i langtidsminnet blir innhentet over til arbeidsminnet.
3. Konstruksjon: Ny kunnskap blir dannet i arbeidsminnet ved bearbeiding av informasjonen fra omgivelsene og langtidshukommelsen.
4. Lagring: Noe av den nye kunnskapen blir lagret i langtidsminnet.
5. Verbalisering: Informasjonen som er aktiv i det arbeidende minnet uttrykkes med ord.

Resultatet av denne prosessen er altså at tankene som er aktive i øyeblikket, rapporteres verbalt (van Someren et al., 1994). Samtidig er det viktig å være klar over at modellen ikke gir et fullstendig innblikk i deltakerens minne; mesteparten av kunnskapen som ligger lagret i langtidshukommelsen vil ikke bli hentet frem og videre verbalisert, og dette gjelder da også de kognitive prosessene knyttet til den kunnskapen (ibid.).

Høyttenkning er ikke noe man gjør til vanlig, og mange kan synes det er unaturlig å fortelle høyt det man tenker. Men for de fleste blir det å tenke høyt en rutine etter kun noen få minutter, og både Ericsson & Simon (1984/1993) og van Someren et al. (1994) anbefaler derfor en liten øvelse før selve sesjonen, hvor deltakeren får trening i å sette ord på tankene sine. På den måten lærer deltakeren forskjellen på å beskrive hva de gjør og å tenke høyt. Et eksempel på å tenke høyt kan være “Since this disk is smaller than that one, I put it on a another pin first.”, mens en beskrivelse av samme hendelse er «I’ll move this disk over there» (Ericsson & Simon, 1984/1993, s.20). Dette kan også føre til en tryggere situasjon for deltakeren, som igjen kan få deltakeren til lettere å uttrykke seg og føle seg mer komfortabel med å tenke høyt. En trygg situasjon er viktig i alle forskningsmetoder for å få mest mulig naturlige og troverdige resultater fra informantene.

3.4.2 Diskusjon

Jeg har valgt denne forskningsmetoden fordi jeg mener at kombinasjonen av at elevene først arbeider uten innblanding og deretter skal begrunne og forsvare arbeidet sitt med hjelp av spørsmål fra intervjuer, vil i høy grad vise elevens matematiske resonnement. Ifølge Afflerbach og Johnston (1984) vil bruken av verbale rapporteringer gjennom høyttenkningsprotokoller gi unike beskrivelser av kognitive prosesser, som ellers bare kan studeres indirekte. Og nettopp det at forskeren får komme svært nær de kognitive prosessene til deltakeren, er den største styrken ved høyttenkningsmetoden. van Someren et al. (1994) poengterer at ved å be en person om å tenke høyt under problemløsing, kan man få en enestående mulighet til å studere tankeprosesser og vite hva personen tenker fra øyeblikk til øyeblikk. Men man må samtidig være klar over at det kun er de bevisste prosessene som vil bli uttrykt verbalt, mye av det som skjer i deltakerens tenkning vil ikke komme frem (se s. 3.4.1).
Når det gjelder manglende innblikk i langtidsminnet, skriver van Someren et al. (1994) at man ved bruk av høyttenkningsmetoden ikke kan gå ut ifra alle tankeprosessene som en helhet, fordi man da blir nødt til å ta utgangspunkt i noe man ikke har tilgang til, som igjen kan gi feilaktige resultater. Man må i stedet kun bruke de kognitive prosessene som kommer frem av arbeidsminnet. På denne måten unngår man, ved å bruke høyttenkningsmetoden, mest mulig fortolkninger; man jobber kun med verbale protokoller som gir en objektiv metode.

I likhet med det semistrukturerte intervjuet, er høyttenkningsmetoden også fleksibel grunnet lydopptak og muligheten til å bruke sitt eget språk. I denne studien hvor målet er å finne karakteristikker ved evnerike elevers matematiske resonnement, er det helt essensielt at eleven kan uttrykke seg fritt og bruke egne uttrykk og definisjoner, siden det er dette som er fundamentet i resonnementet.

Høyttenkningsmetoden er som tidligere nevnt enn kombinasjon av observasjon og verbale rapporteringer: Man bruker verbale protokoller, samtidig som man selv er til stede og kan observere selve oppgaveløsingen. Men den inneholder ikke de samme svakhetene som observasjon alene. Utvalget av mulige observasjoner kan ikke bli for bred ved gjennomføring av høyttenkningsmetoden, som ved en vanlig observasjon. Dette fordi den allerede er innsnevret til et konkret tema og løsing av en bestemt oppgave. I tillegg må forskeren på forhånd være bevisst på hva han ser etter, for å kunne få et høyt utbytte av metoden.

Det er bevist at informanter har en tendens til ikke å snakke sant i retrospektive studier (Ericsson & Simon, 1984/1993). Forsøkspersonene lot være å rapportere tanker og flere snakket om tanker som ikke kan ha funnet sted. Når man ved en senere anledning blir spurt om tanker, å forklare handlinger og lignende, svarer ikke folk fra det de husker fra den kognitive prosessen, men fra minner som allerede er bearbeidet og fortolket (van Someren et al., 1994). Hvis man vil ha et innblikk i hva som foregår eller hva mennesker tenker i en bestemt situasjon, burde man ikke velge retrospektive forskningsmetoder. Jeg har derfor valgt høyttenkningsmetoden, som viser de kognitive prosessene øyeblikk for øyeblikk.

Når eleven skal løse oppgaven, arbeider han/hun med minst mulig innblanding og forstyrrelser av forsker og omgivelser. Jeg som forsker skal la eleven løse oppgaven på egenhånd, og skal kun minne eleven på å tenke høyt, hvis han/hun blir stille over lengre tid. Det kan bidra til å få eleven til å føle at han/hun sitter alene og snakker til seg selv, noe som kan gjøre det lettere og mer naturlig for eleven å uttrykke høyt hva man tenker. En trygg situasjon for deltakerne er, som nevnt tidligere, svært viktig.

Når metoden blir brukt med omhu og de riktige instruksjonene, vil ikke det å tenke høyt forandre strukturen eller kursen til tankeprosessen, bortsett fra at prosessen saktner noe (Ericsson & Simon, 1984/1993). Derimot kan forskeren forandre tankeprosessen til deltakeren ved for eksempel å komme med hint. Hvis eleven står helt fast i oppgaveløsingen, vil jeg heller gi et hint om hvordan gå videre og studere resonneringen

videre, i stedet for å avslutte arbeidet. Men det er da viktig å være oppmerksom på at det er en mulighet for at jeg forstyrrer eleven og avbryter en tankeprosess og det kan være vanskelig for deltakeren å ta opp tråden igjen. I tillegg kan det hende eleven at hadde klart å fortsette arbeidet selv med mer betenkningstid.
Også van Someren et al. (1994) påpeker at det å uttrykke tankene sine muntlig, ikke vil påvirke tankeprosessen i noen betydelig grad. Som nevnt tidligere vil det raskt bli en rutine å tenke høyt, samtidig er nesten hele deltakerens bevissthet rettet mot å løse oppgaven, og informanten vil derfor lite trolig begynne å reflektere over det han gjør. Deltakeren løser et problem mens han/hun nærmest automatisk uttrykker det han/hun tenker. Å tenke høyt er altså en metode som i prinsippet vil føre til svært lite forstyrrelse av tankeprosessen.

Sosial ønskverdighet er ikke et fenomen som forekommer kun i intervjuer. Også under høyttenkningsmetoden kan deltakeren svare i henhold til hva han/hun mener er sosialt akseptabelt. For eksempel kan en elev være redd for å vise at han/hun ikke kan begrunne et valg under oppgaveløsingen. Men i og med at oppgavene elevene skal løse er matematiske, kan det være vanskelig å skjule om kunnskapen er tilstede eller ikke. Jeg vil derfor tro at informantens ytringer ikke vil være betydelig preget av sosial ønskverdighet.
En annen svakhet som høyttenkningsmetoden har tilfelles med intervjuet er at forskeren kan påvirke deltakeren til å svare i en bestemt retning. Om jeg gir «for store» hint, og leder eleven for mye mot å komme frem til korrekt svar, vil ikke det påvirke resultatene i en betydelig grad, da hensikten med denne forskningsmetoden er å få et innblikk i resonneringen bak oppgaveløsningen og ikke selve svaret. Men etter selve «tenke høyt»-sesjonen, når eleven skal utdype hvorfor han/hun tok de ulike valgene, kan jeg påvirke resultatene ved å stille spørsmål som leder eleven inn mot et resonnement som ellers ikke ville kommet naturlig.

Jeg har i min studie valgt å bruke lydopptak. Fordelene med lydopptak er, som tidligere nevnt, at alt blir registrert, man kan høre på opptaket flere ganger og det åpnes for detaljerte tekstanalyser. Svakheten er at det ikke blir tatt hensyn til kroppsspråk og holdninger, kun det som blir sagt av elev og intervjuer. Kroppsspråk kan indirekte fortelle noe om personens sinnstilstand og kan kobles til problemer eleven støter på i oppgaveløsingen, men dette er ikke en del av mitt hovedfokus. Dette er en studie av

matematisk resonnement, og jeg har derfor valgt å fokusere på argumenter, antagelser og påstander, altså det verbale aspektet.
Det kan være svært tidkrevende, og i tillegg lite hensiktsmessig å transkribere alt av hva som blir sagt under høyttenkningsdelen, fordi mye av det verbale kan være ufullstendig uten det skrevne datamaterialet. Jeg har derfor valgt å gjøre et utvalg av lydopptaket og unngå å transkribere det trivielle og urelevante som blir sagt.

3.4.3 Gjennomføring

Tid og sted for gjennomføring av datainnsamlingen ble avtalt med hver enkelt elev etter deres premisser, og foregikk derfor på hver av elevenes videregående skole i deres fritid. Intervjuet og høyttenkningsmetoden ble gjennomført fortløpende og varte omtrent 30 minutter totalt, jevnt fordelt på intervju og høyttenkningsmetode. I alle tre tilfellene snakket vi først løst om andre ting enn datainnsamlingen, for å skape en mindre formell stemning. Deretter leste elevene igjennom og signerte samtykkeerklæringen (se Vedlegg 3). Alle elevene var på forhånd informert om at alle dataene fra studiet vil bli behandlet anonymisert, slik at de ikke kan assosieres med dem personlig, og dette ble da gjentatt i samtykkeerklæringen.
Før vi satte i gang med intervjuet gjentok jeg prosedyren for datainnsamlingen og ga instrukser om å svare så ærlig og naturlig som mulig. Jeg satte så på båndopptakeren og startet intervjuet. Etter endt intervju stoppet jeg båndopptakeren og gjentok fremgangsmåten for høyttenkningsmetoden. Jeg poengterte at det ikke er et korrekt svar som er det vesentlige men veien frem til en løsning, og at det derfor er viktig at eleven hele tiden tenker høyt, og at jeg vil minne eleven på dette hvis nødvendig. Deretter startet jeg båndopptakeren igjen og delte ut første oppgave. Eleven jobbet med denne uten innblanding fra meg frem til han/hun var kommet frem til en løsning, jeg stilte så oppfølgende spørsmål for å utfylle høyttenkningsdelen. Etter det, delte jeg ut den andre oppgaven og gjentok prosedyren fra oppgave 1. Elevene hadde ikke muligheten til å bruke hjelpemidler; det var noe av hensikten at de kun skulle bruke sin egen kunnskap og ikke notater eller lærebøker (det var heller ikke nødvendig med kalkulator for å løse oppgavene).

Selve dataene består av lydopptak og elevenes skrevne arbeid produsert under høyttenkningsdelen. De utslagsgivende delene av lydopptaket skal transkriberes. Transkripsjon av høyttenkningsmetoden blir kalt høyttenkningsprotokoll. Det er lydopptaket og elevenes skrevne arbeid som ligger til grunn for videre analyse.

4. RESULTATER

I dette kapittelet vil jeg presentere studiens resultater. De er fremstilt i den samme rekkefølgen som datainnsamlingen ble gjennomført. Opptaket av arbeidet med hver oppgave er oppsummert i et sammendrag og deretter analysert. Analysen er gjort på bakgrunn av om elevene resonnerer kreativt eller imitativt. Jeg vil betegne resonnementet som kreativt hvis det er fleksibelt og matematisk troverdig, og som imitativt hvis det er basert på algoritmer og utenatlæring.

4.1 Thomas

4.1.1 Oppgave 1

Sammendrag

Det første Thomas uttrykker, er at han ikke gjenkjenner oppgaven på grunn av absoluttverdien av x. Thomas begynner på løsning 1 som et utgangspunkt for løsning 3 (se Vedlegg 2). For å kunne løse oppgaven med integrasjon, prøver han å angripe oppgaven på ulike måter, slik at den ser ut som en oppgave han «er vant til». Han bytter derfor ut integrasjonsgrensene med 0 til 1 og multipliserer deretter med 2 for å få det totale arealet, i stedet for å arbeide med to arealer noe som er «uvant» for vedkommende: «*Med en gang det er uvant, så vil jeg ha noe som er vant og 0 til 1 på x syns jeg er veldig vant, det har jeg sett veldig mange ganger før. Så da vil jeg heller bare regne ut den her enkeltvis og så gange den med 2 etterpå*». Han forklarer dette med å vise til grafen. Thomas sier han kunne løst oppgaven på andre måter, og tar da utgangspunkt i grafen nok en gang og bruker løsning 1 alene.

Når han skal forklare hvordan han integrerte x, er begrunnelsen «*Jo, det har jeg gjort så mange ganger egentlig, at jeg vet at når jeg integrerer, så skal det stå 2 der. Også den integrerte av x har jeg gjort så mange ganger, så det kan jeg utenat. Men jeg vet at det blir 1 delt på... det tallet som kommer opp* (peker på eksponenten). *Også vet jeg at hvis jeg deriverer så får jeg det der* (peker på den opprinnelige oppgaven) *tilbake igjen. Så den er jeg ganske trygg med*».

Analyse

Thomas viser fleksibilitet ved å angripe oppgaven med forskjellige innfallsvinkler; han tolker integralet direkte men også som et areal under grafen. På den måten finner Thomas svaret på oppgaven både ved å bruke løsning 1 og 3 (se Vedlegg 2). Argumentet for hvorfor han valgte å løse oppgaven med løsning 3 er både først og fremst kreativt men også delvis imitativt. Det er imitativt ved at han sier at han velger å bytte om integrasjonsgrensene og multiplisere med 2 fordi det er det han er vant med. Altså bygger det på elevens tidligere erfaringer som er grunnlaget for et imitativt resonnement (se kap. 2.2.1). Men argumentet er også kreativt ved at han samtidig henviser til løsning 1 og grafen som viser det samme arealet på begge sider av y-aksen. Dette er et matematisk troverdig og fleksibelt resonnement.

Beskrivelsen til Thomas at integrasjon av x vil gi en halv x i andre, fordi derivasjon av en halv x i andre vil gi x, er også todelt. Selve forklaringen er matematisk troverdig, men det at han påpeker at han kan det utenat fordi han har gjort det så mange ganger før, er imitativt. Dette tilfelle er et eksempel på når et algoritmisk resonnement er pålitelig fordi eleven vet nøyaktig hvordan han skal løse oppgaven og hvorfor den valgte algoritmen er hensiktsmessig.

4.1.2 Oppgave 2

Sammendrag

Thomas gjenkjenner oppgaven umiddelbart: «*Har sett noe lignende veldig mange ganger før*». Og han setter i gang med delvis integrasjon med en gang. Til tross for dette, husker ikke Thomas at denne fremgangsmetoden kalles delvisintegrasjon, og uttrykker det heller som en oppgave man deler inn i u og v. Han er først noe usikker på hva som blir u og hva som blir v, men innser raskt at det blir det samme. Deretter setter han verdiene tilbake inn i integralet (trinn (2), se Vedlegg 2). Han husker at man må delvis integrere flere ganger, men bruker fortsatt ikke selve begrepet «delvis integrasjon»; «*Da husker jeg at jeg bare gjør det noen ganger til, det går i sirkel*». Han vet nå hva som blir de neste regneoperasjonene, og sier at han har tenkt til å følge denne strategien og hvis det ikke skulle stemme, så begynner han helt på nytt. Strategien stemmer, og han kommer frem til korrekt svar. Siste del av løsningen (fra trinn (4) til (5)) kaller han et triks. Når jeg spør ham om hva han egentlig gjorde i dette steget, forklarer han ikke at han legger til det samme på begge sider av likhetstegnet, han sier heller at han flytter over det negative uttrykket på høyre siden over til venstre. Sier at han ser integralet av e^xsinx som en x, altså som ukjent i en ligning. Han husker heller ikke selve formelen for delvis integrasjon, men kaller også dette et triks. Han har lagd en egen huskeregel for hvordan formelen blir, med å sette opp u, u', v og v' på bestemte plasser og trekke linjer gjennom disse. Han forklarer dette med at det er mye lettere for ham å huske hvis han har lagd egne systemer og har rutiner: «*Med en gang jeg ser at jeg skal dele opp integralet, så bare gjøre jeg det med en gang. Jeg setter opp u, u', v' og v for da har jeg et system og da gjør jeg ikke noe feil der i hvert fall … Jeg må huske hva jeg skal ha foran og hva jeg skal ha bak integralet, og da husker jeg at det som oftest er mest avansert, er det som er fra før ikke er derivert… Det er en formel for hvordan det egentlig skal være…, men på grunn av den her* (hans egen regel) *så er det lettere å huske*». Også derivasjon og integrasjon av sinus og cosinus blir forklart som en ren rutine, fordi han har gjort det så mange ganger før.

Analyse

Allerede ved den første kommentaren, er det tydelig at det vil bli brukt imitative resonnement i oppgaveløsingen. Eleven gjenkjenner oppgaven øyeblikkelig og vet nøyaktig hvordan den skal løses og hvorfor den valgte algoritmen er hensiktsmessig. Selve gjennomføringen totalt sett blir derfor pålitelig, til tross for at den er imitativ. Men hvis man ser på noen av enkelttrinnene underveis, kan det tyde på at noe av resonneringen er basert på overfladiske og ikke iboende matematiske egenskaper. I tilfellene der eleven snakker om «triks», vil jeg påstå at det er snakk om algoritmer. Som for eksempel i steget fra trinn (4) til trinn (5), er det usikkert om han forstår det korrekte matematiske bak: Han sier han flytter over det negative uttrykket på høyre siden, over til venstre. Altså kan det virke som om han tror han flytter selve uttrykket over likhetstegnet, i stedet for å legge til uttrykket på begge sider. Det er mulig han egentlig forstår det, men måten han beskriver fremgangsmåten på tyder på manglende forståelse bak algoritmen og et overfladisk algoritmisk resonnement.

Thomas husker ikke direkte formelen for delvis integrasjon, men bruker sin egenkomponerte formel som innebærer blant annet å trekke linjer. Det å skape sine egne formler og løsningsstrategier kan sees på som en original og kreativ handling. Men i dette tilfelle, blir det lite troverdig og er uten matematisk grunnlag; han sier selv at han ikke gjør feil, når han bruker sitt eget system, men begrunner valg av verdier av u og v' slik: «*… da husker jeg at det som oftest er mest avansert, er det som er fra før ikke er* *derivert».* Dette argumentet er ikke valid og kan derfor føre eleven på villspor. I tillegg er dette noe han «husker», altså er det en regel han har memorert fra en tidligere hendelse.

4.2 Audun

4.2.1 Oppgave 1

Sammendrag

Audun sier først at han tenker på integrering men også på grafen til absoluttverdien av x, og velger derfra å tegne grafen: løsning 1 (se Vedlegg 2). Han roter med grafen: sier at den består av to like trekanter, der det ene katetet er 1 og det andre katetet er x, og arealet av de to trekantene blir da x. Han forstår at dette må være feil, da «*svaret skal bli et helt tall* (ikke x)*, her må det være noe gærent*», og retter opp dette: «*for ved 1 så er y-verdien også 1, for oppover på y-aksen er det funksjonsverdien og funksjonsverdien av absoluttverdien av 1 er også 1, så da blir det* (løsningen) *1 og ikke x*».
Audun sier at hvis han skulle prøvd å løse den på en annen måte, ville han prøvd å integrere oppgaven. Han prøver på dette, men får det ikke til fordi han ikke vet hvordan han skal håndtere absoluttverdien; Han integrerer x på vanlig måte (uten å ta hensyn til absoluttverdien) og setter inn grenser fra -1 til 1 og får da svaret null.

Analyse

Audun klarer ikke å løse oppgaven på en annen måte enn grafisk, men viser likevel fleksibilitet ved å angripe oppgaven med flere innfallsvinkler: «*Jeg tenker først på integrering, men også på grafen til absoluttverdien av x*».
Selv om Audun først regner feil, er begrunnelsen hans og det nye løsningsforslaget matematisk troverdig og korrekt: «*For ved 1 så er y-verdien også 1, for oppover på y-aksen er det funksjonsverdien og funksjonsverdien av absoluttverdien av 1 er også 1, så da blir det 1 og ikke x. … Siden det er bestemt integral så vet vi høyden som er det samme som x-verdien, altså 1. Og -1 på andre siden, men siden det er absoluttverdi så blir også høyden her 1. Så det blir arealet av to trekanter med kateter lik 1og det arealet blir 1*».
Til tross for at han ikke klarer å løse oppgaven ved å integrere, har han også et matematisk troverdig resonnement for hvorfor beregningene hans ikke kan stemme: Han integrerer x på vanlig måte (uten å ta hensyn til absoluttverdien) og setter inn

grenser fra -1 til 1 og får da svaret null; «*Det her vil bli det samme som en graf som bare skjærer gjennom nullpunktet* (origo) *og fortsetter videre, slik at de to trekantene blir på hver side av x-aksen og utligner hverandre*».
Resonnementene har altså flere indikasjoner på et kreativt resonnement.

4.2.2 Oppgave 2

Sammendrag
Audun sier at det første han tenker er at det er et produkt og at han derfor vil bruke delvis integrasjon. Han setter opp verdier for u, u', v og v', og setter dette tilbake inn regnestykket. Audun ser da at han «*må bruke delvis integrasjon en gang til, med nye u'er og v'er».* Han fortsetter å løse oppgaven på samme måte som det er gjort i Vedlegg 2.

Analyse
Til tross for at resonnementet er algoritmisk, kan Audun forklare hvorfor han valgte delvis integrasjon ved å poengtere at det er en vanlig regneoperasjon for integrasjon av produkter. I tillegg beviser han formelen for delvis integrasjon ved å bruke produktregelen for derivasjon. Altså har han et matematisk troverdig resonnement, men likevel først og fremst imitativt: Audun gjenkjenner oppgaven med en gang: «*Det første jeg tenker når jeg ser den, er at det er et produkt, så jeg vil bruke delvis integrasjon*». Han er helt sikker på fremgangsmetoden gjennom hele løsningsprosessen, og det er da pålitelig med et imitativt, algoritmisk resonnement.

4.3 Christina

4.3.1 Oppgave 1

Sammendrag
Christina velger å tegne grafen da hun ikke umiddelbart vet hvordan å integrere absoluttverdien av x: «*Om jeg bare husker hva man gjør med absoluttverdier… Jeg husker det ikke, så det jeg tenker nå, er at jeg tegner grafen. Det er et endelig integral, så det kan jo løses rent geometrisk*». Hun bruker altså løsning 1 til å konkludere med at svaret på oppgaven er 1. Når jeg spør henne om hun klarer å løse den på en annen måte, sier hun først: «*Ikke uten å slå opp i notater og sånn, for nå står det helt fast hvordan jeg kan få løst*

opp den…». Men det tar ikke lange tiden før hun bruker løsning 2 til å løse oppgaven på nytt. Hun gjør en feil når hun skal integrere x og skriver først at det blir x^2, men hun oppdager fort feilen: «*Nå har jeg gjort noe gærent. Å, ja det er en ½ x^2. Det er det jeg notorisk glemmer og mister poeng på. Ja, for da blir det ½ + ½, det ga langt mer mening, som blir 1*.»

Analyse

Også Christina viser fleksibilitet ved å kunne løse oppgaven med to ulike metoder. I tillegg er begrunnelsen hennes for å kunne bruke en grafisk løsning, matematisk troverdig: «*det er et endelig integral, så det kan jo løses rent geometrisk*». Da hun begynner på løsning 2, integrerer hun først x til x^2 og får 1+1=2 ved innsettelse av grenseverdiene. Hun ser da raskt at hun har glemt å ta med ½ foran x, og begrunner at dette er feil med bakgrunn av løsning 1: den grafiske fremstillingen som viser to rettvinklede trekanter, hver med areal lik en halv. Dette er også matematisk troverdig. Derimot kan selve feilen hun gjør, skyldes overfladisk kunnskap basert på tidligere erfaringer og utenatlæring. Hun sier selv at «*når det er høyere potenser, så husker jeg det. Men det er bare det hoppet fra x til en halv x i andre*». Dette kan tyde på puggede kunnskaper, og som nevnt tidligere kan da selv den minste feil hindre eleven til å finne korrekt løsning. I dette tilfelle oppdager Christina feilen takket være at hun allerede har funnet den korrekte løsningen grafisk. Altså kan selve implementeringen av integreringen av x sees på som imitativ, mens begrunnelsen er matematisk troverdig.

4.3.2 Oppgave 2

Sammendrag

Christina gjenkjenner oppgaver umiddelbart: «*Ja, den er jo en klassiker, og kan.. det er delvis integral*». Hun setter i gang med å sette inn verdier for u, u', v og v', og løser oppgaven som i Vedlegg 2, på en selvsikker måte. Hun skriver ikke opp formelen for delvis integrasjon eller setter opp en oversikt over u, u', v og v', men tar heller disse mellomregningene i hodet. Når jeg ber henne om å sette opp formelen, gjør hun dette og beviser den i tillegg. Trinn (4) til (5) (se Vedlegg 2) forklarer hun slik: «*Det opprinnelige integralet er på begge sider av likhetstegnet, med pluss på den ene siden og minus på den andre. Så om vi legger på det på begge sider, så faller det bort på den ene siden og så får du to på den andre*».

Analyse

Resonneringen er først og fremst imitativ; Christina gjenkjenner oppgaven og setter umiddelbart i gang med delvis integrasjon, som gir henne svaret. Hun er så sikker på formelen og fremgangsmetoden, at hun ikke behøver å sette en oversikt over selve formelen og dens verdier. Dette er et eksempel på at et algoritmisk resonnement kan være pålitelig, hvis man vet nøyaktig hvordan oppgaven skal løses og hvorfor den valgte strategien er hensiktsmessig.

Til tross for at resonnementet er algoritmisk, kan hun forklare hvor formelen for delvis integrasjon kommer fra, som er et matematisk troverdig resonnement. Det samme er forklaringen av trinn (4) til (5), det er tydelig at hun forstår det matematiske bak «flytt- og bytt» i ligninger.

5. DISKUSJON

Jeg vil i dette kapittelet prøve å besvare min problemstilling, «Hva karakteriserer evnerike elevers matematiske resonnement?». Dette blir først og fremst presentert i kapittel 5.1 i form av tre delkapitler. Her drøfter jeg hvorvidt teorien fra kapittel 2 samsvarer med mine resultater og jeg vil samtidig si noe om studiens gyldighet. I kapittel 5.2 tar jeg for meg implikasjoner ved studien, og hvordan jeg vil gå frem i videre forskning. Til slutt vil jeg presentere en konklusjon.

5.1 Hva karakteriserer evnerike elevers matematiske resonnement?

5.1.1. Først og fremst kreativt resonnement

Det er i første rekke oppgave 1 som kan gi indikasjoner på et kreativt resonnement (se kap. 3.2.2). Alle elevene bruker løsning 1 (se Vedlegg 2) som den eneste eller en av metodene for å finne svaret i denne oppgaven. For Audun og Christina er løsning 1 førstevalget, mens Thomas bruker den først delvis, for å kunne bruke løsning 3, deretter som et andrevalg. Alle tre begrunner valget av å begynne med en grafisk løsning med absoluttverdien av x; de er usikre på hvordan integrere denne og velger derfor å tegne grafen.

Thomas og Christina løser oppgave 1 på to ulike måter, mens Audun kreativt resonnerer hvorfor hans andre løsningsmetode ikke kan stemme. Å kunne løse en oppgave med ulike fremgangsmetoder er et tegn på fleksibilitet. Til tross for at Audun løser denne oppgaven på kun en måte, viser også han tegn på fleksibilitet da han sier at han ser på arealet under grafen som to rettvinklede trekanter, med kateter lik 1. Dette er et eksempel som også tyder på forståelse, noe jeg kommer tilbake til i kapittel 5.1.3. Det er mulig elevene kunne ha løst oppgaven med flere metoder, hvis jeg etter høyttenkningsdelen hadde spurt dem andre spørsmål enn det jeg gjorde. Gjennom hele høyttenkningssesjonen er det viktig å huske på at det alltid vil være deler av tankeprosessene som ikke vil komme til uttrykk. Som Figur 5 (se s. ???????) viser, er det tankene som er aktive i øyeblikket som rapporteres verbalt, mens det meste av kunnskapen lagret i langtidshukommelsen og de kognitive prosessene knyttet til den, vil forbli i deltakerens hjerne. Altså kan jeg ikke vite om elevene i dette tilfelle kunne løst oppgaven med en annen fremgangsmåte.

Det finnes flere eksempler på at elevene kan begrunne deres strategivalg og at argumentene deres er matematisk troverdige; Thomas forklarer at løsningsstrategien hans stemmer ved å ta utgangspunkt i grafen til funksjonen i oppgave 1; Audun bruker også en grafisk løsning, men til å forklare hvorfor den andre fremgangsmetoden hans ikke kan stemme; mens Christina argumenterer for valg av løsningsmetode slik: «*Det er et endelig integral, så det kan jo løses rent geometrisk*». Matematisk troverdige argumenter er helt essensielt for at et resonnement kan kalles kreativt, da kriteriene for et kreativt resonnement sier at resonneringssekvensen må være troverdig ved at den er støttet av argumentasjon for hvorfor valgene er sanne, og at den må ha et matematisk fundament (se kap. 2.2.1).

Kreativitet innebærer også å tenke nye veier. Spesielt Christina viser at hun er i stand til dette i oppgave 1. Da jeg spurte henne om hun kunne løse oppgave en gang til men med en annen metode enn grafisk, svarte hun først at hun ikke klarer det uten å kunne se i notater. Men med litt betenkningstid klarte hun å finne en ny løsningsstrategi. Hun viser altså kreativitet i form av originalitet. Thomas viser også evne til å tenke og skape noe nytt, ved at han bruker en egenkomponert formel i oppgave 2.
Oppgave 1 er som beskrevet under metodekapittelet, ikke en typisk oppgave for elevene. Dette kommer også tydelig frem ved at de tre elevene er usikre på hvordan integrere absoluttverdien av x. I dette tilfelle blir elevene nødt til å tenke nye veier for å kunne løse oppgaven, og elevene velger da å tegne grafen.
Det å tenke og skape noe nytt er et kjennetegn hos evnerike elever (se kap.2.1.1). Elever som ikke er evnerike ville derfor muligens ha angrepet denne oppgaven noe annerledes.

Oppgave 1 viser altså at samtlige elever først og fremst har resonnement som kan betegnes som kreative. Oppgave 2 derimot viser at elevene også bruker imitativ resonnering.

5.1.2 Pålitelig og hensiktsmessig imitativt resonnement

De tre elevene vet nøyaktig hvordan oppgave 2 skal løses, men de gjennomfører dette med noe ulike metoder. Audun og Christina har pålitelige imitative resonnement og

løser oppgaven slik den er løst i Vedlegg 2. Thomas er også sikker på hvordan han kan løse oppgaven med sin egenkomponerte versjon av delvis integrasjon, og selve gjennomføringen av den valgte algoritmen er derfor pålitelig. Men når det gjelder forståelsen og det matematiske bak noen enkelttrinnene i algoritmen viser Thomas derimot tegn på overfladisk resonnering (se eksempel i kap. 4.1.2). Det at Thomas bruker en formel og fremgangsmetode han selv har laget, kan som nevnt tidligere også sees på som kreativt; det er originalt, nyskapende og fleksibelt å kunne løse en oppgave med en egen tilnærming. Men formelen til Thomas og begrunnelsen for å bruke den, mangler noe troverdighet og matematisk grunnlag, og resonneringen kan derfor ikke konkluderes som kreativ.
Audun og Christina forsterker inntrykket av at de har den nødvendige forståelsen for algoritmen som skal til for at resonneringen skal kunne anses som korrekt og hensiktsmessig, ved å bevise formelen. Det er mulig at også Thomas kunne klart dette, men jeg vil si det er lite trolig i og med at han ikke bruker den originale formelen, og heller ikke husker selve navnet «delvis integrasjon». For å verifisere at Thomas var avhengig av sin egen formel eller om han kunne brukt den opprinnelige formelen for delvis integrasjon, burde jeg ha spurt ham om han kunne satt opp den originale formelen og om han kunne bevist den.

Både Kilpatrick et al. (2001) og Lithner (2012) snakker om overfladiske kunnskaper når det gjelder argumentasjon og resonnering. Som beskrevet under kapittel 2.2.1 og 2.2.2 ligger overfladisk kunnskap i grunn for mangel på forståelse i et fag. Det er den iboende kunnskapen som fører til mestring og beherskelse av faget. Lithner kaller imitativ resonnering for overfladisk, men påpeker samtidig at et imitativt resonnement i form av puggede fakta og prosedyrer, kan være et viktig og avgjørende aspekt i læring av matematikk. Noen oppgaver krever rene algoritmer for å kunne løses, slik som oppgave 2 i min datainnsamling. Og som nevnt tidligere er et algoritmisk resonnement hensiktsmessig, til tross for at det er imitativt, hvis eleven vet nøyaktig hvordan algoritmen skal brukes og hvorfor den kan brukes, i tillegg til at det er tidsbesparende og risikoen for feilberegninger minker.
Jeg vil gå nærmere inn på når et imitativt resonnement er fullstendig overfladisk og «tomt», og når det er hensiktsmessig og givende. Ingen av elevene har det man kan kalle totalt overfladiske resonnement, altså at det ikke har et matematisk troverdig grunnlag, at det er uten forståelse og i tillegg ikke er hensiktsmessig. For eksempel bruker alle et

imitativt resonnement i oppgave 2, men disse resonnementene er hensiktsmessige og resultatet er at alle elevene klarer å komme frem til korrekt svar på oppgaven. Et annet eksempel er Thomas, som beskrevet tidligere, viser tegn på overfladisk kunnskap når det gjelder «flytt-og-bytt»-regelen i løsing av ligninger (se kap. 4.1.2). Selv om han kanskje ikke forstår det matematiske bak og ikke kan forklare hvorfor regelen kan brukes, vil regelen likevel føre ham til riktig løsning på oppgaven. Derfor vil jeg ikke betegne denne type resonnement som totalt overfladisk. Heller ikke Christinas imitative gjennomføring av integrasjon av x i oppgave 1, er fullstendig overfladisk og tomt. Hun oppdager selv feilen og har en god begrunnelse for hvorfor det ikke kan stemme. Baroody (2003) snakker om «rutine kunnskap», som betyr evnen til imitativt å gjennomføre matematikkoppgaver raskt og nøyaktig, uten nødvendigvis forståelse (se kap. 2.2.2). Altså sier også Baroody at rutiner som innebærer imitativ kunnskap og forståelsesløse fremgangsmetoder, også kan føre til et korrekt svar via en effektiv løsningsstrategi.

Når det gjelder «flytt-og-bytt»-regelen i løsing av ligninger, burde jeg spurt også Audun om hva han egentlig gjorde i steget fra trinn (4) til (5) (se Vedlegg 2), slik som jeg spurte Thomas og Christina. Jeg ville da fått vite om han forstår «flytt-og-bytt»-regelen i løsing av ligninger og kunne sammenlignet dette med de to andre elevene. Som nevnt tidligere er oppfølgende spørsmål avhengig av at meg som forsker er en aktiv lytter (se kap. 3.1.3). Jeg opplevde det som vanskelig å være en aktiv lytter og samtidig være oppmerksom på det elevene skrev ned på papiret.

5.1.3 Forståelse for matematikk og evnen til å resonnere

I følge TIMSS Advanced (se kap. 1.1) ligger norske elever langt under det internasjonale gjennomsnittet på det å kunne diskutere strategier for problemløsing og diskutere resonnementene våre (Grønmo et al., 2010). Dette er arbeidsmetoder som blant annet skal utvikle gode problemløsningsstrategier hos elevene. I rapporten står det: «Det kan derfor synes som om to av de viktigste læringsstrategiene som framheves når det gjelder utvikling av matematisk forståelse, nemlig trening av ferdigheter og diskusjon rundt begreper og løsningsmetoder, begge er mindre brukt i norsk skole enn i mange andre land» (Grønmo et al., 2010, s. 153). Jeg går ut ifra at det er en sammenheng mellom mangelen på gode evner til å diskutere løsningsstrategier og å resonnere, og det svært lave antallet elever som presterer på et avansert nivå, da det å kunne resonnere er knyttet opp mot elever på dette nivået (se kap.1.1). I tillegg er det et kjennetegn på evnerik å kunne diskutere i detaljer, mens andre kun vil svare på spørsmålet som blir stilt (se Tabell 1). Argumentasjon er et av de viktigste aspektene ved resonnering. Som beskrevet i kapittel 2.2.1 blir en resonneringssekvens troverdig ved at man har argumentasjon som støtter valg av strategi og forklarer hvorfor resultatene er sanne eller sannsynlige. Et kreativt resonnement skal også ha begrunnelser og argumentasjon med et solid matematisk fundament, som er basert på iboende matematiske egenskaper. Alle tre elevene viser, som nevnt tidligere, gode evner til å argumentere for og diskutere løsningsstrategiene deres.

Argumentasjon er også et av momentene som definerer begrepet adaptiv resonnering, i tillegg til logisk tenkning og refleksjon (se kap. 2.2.2). Som sagt viser alle tre elevene at de kan argumentere for og begrunne sine valg, men de viser også tegn på logisk tenkning og refleksjon. For eksempel er det å tegne grafen til absoluttverdien av x, når man er usikker på integrasjonsregningen, et logisk og strategisk valg gjort av samtlige elever. Et annet eksempel er da Christina oppdager at hun har regnet feil i oppgave 1: Hun får først at svaret skal bli 2, men reflekterer over løsningen og finner raskt ut at det ikke kan stemme. Noe av det samme skjer med Audun da han først kommer frem til at svaret i oppgave 1 skal bli x. Han forstår at arealet skal bli et helt tall, finner feilen han har gjort og retter den opp slik at han får det korrekte svaret. Thomas viser også logisk tenkning i oppgave 1 ved å forklare at han har integrert riktig fordi han vil få tilbake den opprinnelige oppgaven hvis han deriverer svaret.

Fleksibilitet er et begrep som er nært knyttet til forståelse i matematikk. Som nevnt i kapittel 2.2.1 viser Lithners forskning (2001) at de som mislykkes i faget bruker en vanskeligere type matematikk i løsing av oppgaver, mens vellykkede derimot har en mer fleksibel tankegang som gjør at matematikken blir enklere. Resultatene i denne studien indikerer det samme: De tre elevene har alle lykkes godt i matematikk i form av gode karakterer (se kap. 3.1.2) og de viser alle tegn på fleksibilitet i oppgaveløsingen (se kap.5.1.1). Eksempler som Auduns tolkning av grafen som to rettvinklede trekanter, Thomas som ser både integralet direkte og som et areal under grafen, og Christinas uttalelse om at et endelig integral må kunne løses geometrisk, kan altså tyde på at elevene har en dyp forståelse for integralregning og matematikk. Baroody (2003) påpeker at evnen til fleksibelt og kreativt å anvende lærte prosedyrer, er noe som forutsetter forståelse (se kap. 2.2.2).

5.2 Implikasjoner og veien videre

Det er gjort mye forskning både på evnerike elever og matematisk resonnement og det er rikelig med litteratur tilgjengelig. Riktig nok er det begrenset med studier fra Norge, spesielt temaet evnerike barn er omtalt som et understudert emne her i landet (Skogen & Idsøe, 2011). Likevel er det gjort mye forskning internasjonalt. Jeg kan derimot finne svært lite forskning på sammenhenger mellom evnerike elever og matematisk resonnement. Min studie fyller igjen noe av dette «hullet» i det matematikkdidaktiske forskningsfeltet ved å flette disse to temaene sammen og finne ut hva som karakteriserer evnerike elevers matematiske resonnement.
Med utgangspunkt i svarene jeg fikk fra intervjuene, og at deltakere i denne studien er fra en gruppe hvor alle presterer høyt i matematikk, har jeg konkludert med at de tre elevene som har bidratt i min datainnsamling kan karakteriseres som evnerike. Disse elevene er ikke representative for evnerike elever i Norge, men som beskrevet i forrige delkapittel, har de likevel en del fellestrekk.

Som presentert tidligere, har tiden vært den begrensende faktoren for denne studien. Hvis jeg hadde hatt bedre tid, ville jeg hatt muligheten til å øke antall deltakere slik at studien kunne vært representativ for evnerike elever i Norge. Jeg ville også hatt muligheten til å utvide rammene for datainnsamlingen, ved for eksempel å gå grundigere inn de ulike kriteriene for kreativt og imitativt resonnement, og ha et større antall oppgaver. Jeg kunne også utforsket nærmere hva som skiller evnerike elever fra andre elever når det gjelder deres matematiske resonnement.

Evnerike elever trenger tilrettelagt undervisning. Men det behøver ikke å innebære ekstra ressurser eller egne klasser og skoler (Mönks, 2009). Det avgjørende er at lærerne tilegner seg den nødvendige kompetansen for å gi denne gruppen elever et tilbud innenfor den vanlige skolen (ibid.). Naalsund (2012) understreker at i tillegg til et sterkt faglig grunnlag, innebærer lærerens kompetanse å ha kunnskap om elevenes tankegang og ulike læringsstrategier. Matematikktimene i den norske skole er preget av lærerstyrt undervisning på tavla og individuell oppgaveløsing (Naalsund, 2012). Skriftlig arbeid i undervisningen er ikke nok, det må legges mye større vekt på diskusjon i klasserommet. Ved å diskutere og forsvare arbeidet sitt i veiledning av læreren, kan elever få en dypere forståelse i faget (ibid.) (se kap. 2.2.3). Dagens læreplan for grunnskolen fremhever at elevene skal utvikle og bruke varierte metoder i matematikkarbeidet, og i tillegg kunne forsvare og argumentere for deres beregninger og strategier (Utdanningsdirektoratet, 2010). Idsøe (2011) mener at lærernes manglende kompetanse på området ligger til grunn for tilpasset opplæring for evnerike elever er fraværende.

Innledningsvis presenterte jeg de to vanligste tilnærmingene for tilpasset opplæring for evnerike elever i den norske skolen; akselerasjon og berikelse (se siste avsnitt av kap. 1.1.1). Ved å bruke resultatene fra denne studien, kan man fortsatt bruke disse tilnærmingene, men samtidig ta mer hensyn til de evnerike elevenes egenskaper og forutsetninger. Akselerasjon kan brukes for å fremme denne elevgruppens evne til å diskutere. Teorien sier at disse elevene har en bedre evne til å diskutere og resonnere enn sine jevnaldrende. Også elevene i denne studien viser gode diskusjonsferdigheter. Det kan derfor være mer givende for evnerike å følge en matematikklasse på et høyere årstrinn, hvor de kan diskutere med likesinnede. Når det gjelder berikelse skal elevenes evner og kreativitet utfordres, slik at de ser nytten av å lære seg gode arbeidsvaner og utvikle effektive læringsstrategier (Kunnskapsdepartementet, 2012). Det er derfor viktig å legge mer vekt på muntlig aktivitet i matematikkundervisningen, slik at elevene får utviklet evnen til å diskutere og argumentere for sine valg og løsningsstrategier. Elevene vil da samtidig trene på ferdigheter som gir kreative resonnement, som igjen vil føre til økt forståelse. Dette er utslagsgivende for alle elever, men det er viktig å huske på at selv om de evnerike allerede har et godt utgangspunkt til å kunne diskutere, må også denne elevgruppen få muligheten til å utvikle evnen enda mer, slik at de kan utnytte sitt potensiale til det fulleste og få mest mulig utbytte av undervisningen.

5.3 Konklusjon

Samtlige elever viser gjennom oppgave 1 at de først og fremst har resonnement som kan betegnes som kreative. Elevene viser ved flere anledninger at deres resonnement er både fleksible og matematisk troverdige. Det er ingen som er bundet til en bestemt strategi; de har evnen til å bruke forskjellige tilnærminger for å løse oppgaven. I tillegg er resonnementene deres er troverdige ved at de er støttet av gode argumenter om hvorfor valgene deres er sanne, og de har et matematisk fundament.

Elevene viser også at de har et pålitelig imitativt resonnement der det er hensiktsmessig. Det vil si blant annet oppgaver som er avhengig av algoritmer for å kunne løses, slik som oppgave 2. Denne oppgaven viser også at elevene bruker noe imitativ resonnering som kan anses som overfladisk på den måten at den er preget av utenatlæring og mangel på forståelse. Men den er likevel ikke totalt overfladisk, men heller hensiktsmessig, fordi den fører til løsningen på oppgaven.

Hvis læringen er mer preget av imitativ enn kreativ resonnering, vil det være svært vanskelig å utvikle andre essensielle kompetanser som matematisk forståelse (se kap.2.2.1). Dette er ikke tilfelle for de tre elevene, fordi de viser at de i utgangspunktet har et kreativt resonnement og samtidig behersker bruken av når det er egnet med imitativ resonnering.

Alle tre elevene viser gode evner til å argumentere for og diskutere løsningsstrategiene deres, noe som er helt vesentlig i et resonnement. Resultatene indikerer at elevene også har adaptive resonnement, ved at de i tillegg til å kunne argumentere har en logisk og fleksibel tankegang. Samtidig som adaptiv resonnering er et viktig moment for en fullverdig matematisk kompetanse, ligger adaptiv resonnering tett opp mot kreativ resonnering (se kap. 2.2.2). Med andre ord sier det noe om en elev har forståelse i faget. Det er en klar sammenheng mellom egenskaper som evne til å resonnere, kreativitet, fleksibilitet, og det å lykkes i matematikk (Lithner, 2001, Kilpatrick et al., 2001, Baroody, 2003). De tre evnerike elevene i denne studien kan alle sies å lykkes i matematikk og resultatene indikerer at sammenhengen beskrevet over, også stemmer for disse elevene.

Mine resultater er et bidrag til lærerstudenter og lærere på karakteristikker, trekk og egenskaper ved evnerike elever, og da i dette tilfelle matematisk resonnement. På den måten kan min forskning hjelpe til med å rette opp det manglende fokuset lærerutdanningene har innenfor dette området (se kap. 1.1). Med mer kunnskap om hvordan evnerike elever resonnerer, kan lærere tilrettelegge undervisningen etter de evnerikes forutsetninger og potensial, så også disse elevene får den tilpassede opplæringen de har rett på, noe som trolig vil føre til høyere prestasjoner, økt forståelse og en større matematisk kompetanse. Selvfølgelig vil ikke min forskning kunne gi et komplett svar på problemstillingen eller fullstendig fylle «hullene» i samfunnet nevnt over, men jeg håper å kunne gi et bidrag på området og belyse noen aspekter ved evnerike elevers matematiske resonnement.

REFERANSER

Afflerbach, P. & Johnston, P. (1984*). Journal of reading behavior. Research methodology: On the use of verbal reports in reading research.*The National Reading Conference, Chicago

Andersen, G. (2013). *Kvalitative intervjuundersøkelser*. Nasjonal digital læringsarena (www.ndla.no)

Bachmann, K. & Haug, P. (2006). *Forskning om tilpasset opplæring. Forskningsrapport nr. 62.* Høgskolen I Volda, Møreforskning Volda

Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills. Constructing adaptive expertise*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Bergqvist, E. (2007). *Types of reasoning required in university exams in mathematics.* Journal of Mathematical Behavior, 26, 348–370.

Bloom, B. S. (1956). *The Taxonomy of Educational Objectives, The Classification of Educational Goals, Handbook I: Cognitive Domain*. I: Eilertsen, M., Hansen, A., Sandland, J. B., Solø, K. S. E. (1996/1997). *Den evnerike elev – muligheter og utfordninger. Rapport fra prosjektoppgave i pedagogikk ved HiVe avd. for lærerutdanning.* Hentet fra http://www.xa.no/stein/evnerike.html#22

Colangelo, N., Assouline, S. G., Gross, M. U. M. (2004). A Nation Deceived: *How Schools Hold Back America's Brightest Students.* The Templeton National Report on Acceleration, Volume 1, USA

Ericsson, K. A. & Simon, H.A. [1984] (1993). *Protocol Analysis: Verbal Reports as Data.* MIT Press, Cambridge.

EURYDICE, (2006). S*pecific educational measures to promote all forms of giftedness at school in europe.* Brussel, Directorate-General for Education and Culture

Gravdal, L. & Sandal, G. M. (2004). *Sosial ønskverdighet: Marlowe-Crowne Social Desirability Scale i norsk forkortet utgave.* Tidsskrift for norsk psykologforening, Bergen. (s. 729-730). Hentet fra internett 20.11.12: http://www.nasjonaltskalaregister.no/files/Sosial%20onskverdighet.pdf

Gray, E., Tall, D. (1993). *Success and failure in mathematics: the flexible meaning of symbols as process and concept.* Mathematics Teacher, No 142

Gray, E., Tall, D. (1994). *Duality, ambiguity, and flexibility: a 'proceptual' view of simple arithmetic.* Journal for Research in Mathematics Education

Grønmo, L. S., Onstad, T., & Pedersen, I. F. (2010). *Matematikk i motvind. TIMSS Advanced 2008 i videregående skole*. Unipub, Oslo, Norge

Hansen, N. G., Hansen, T. (2010). *Hvordan blir flinke elever ivaretatt? Er det forskjell på offentlige og private skoler?* Universitetet i Agder

Harel, G. (2008). *What is Mathematics? A Pedagogical Answer to a Philosophical Question.* University of California, USA: DNR Project

Heinze, A., Star J. R., Verschaffel, L. (2009). *Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education.* ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 41

Hofset, A. (1970). *Evnerike barn i grunnskolen.* Oslo, Norge: Universitetsforlaget

Idsøe, E.M.C. (2011). *Er det lov å være flink?* Hentet fra internett 30.10.12: http://www.forskning.no/artikler/2011/juni/292230

Idsøe, E.M.C. (2012). *Våre evnerike barn*. Foredrag fra seminar: «Trenger evnerike elever tilpasset opplæring?». Trondheim http://smartebarn.files.wordpress.com/2012/10/vc3a5re-evnerike-barn-stc3b8rdal.pdf

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. Washington D.C., USA: National Academy Press.

Kunnskapsdepartementet, (2012). *Stortingsmelding nr. 22, 2010-2011: Motivasjon, mestring, muligheter, kap. 5.5.* Hentet fra internett 04.12.12: http://www.regjeringen.no/nb/dep/kd/dok/regpubl/stmeld/2010-2011/meld-st-22-2010--2011.html?id=641251

Kvale, S. og S. Brinkmann (2009). *Det kvalitative forskningsintervju* (oversatt av T. M. Andresen og J. Rygge). Gyldendal Akademisk, Oslo.

Kyed, O. (2007). *De intelligente børn*. København, Danmark: Aschehoug Dansk Forlag

Lithner, J. (2001). *Undergraduate Learning Difficulties and Mathematical Reasoning.* Roskilde, Danmark: IMFUFA

Lithner, J. (2006). *A framework for analyzing creative and imitative reasoning.* Umea Universitet, Sverige

Lithner, J. (2012). *Learning mathematics by creative or imitative reasoning*. Umea Universitet, Sverige

Lov om grunnskolen og den vidaregåande opplæringa: Opplæringslova, (1998). Hentet fra internett 29.10.12: http://www.lovdata.no/all/hl-19980717-061.html#1-3

Lov om grunnskolen og den vidaregåande opplæringa: Opplæringslova, (2005). Hentet fra internett 02.12.12: http://www.lovdata.no/all/tl-19980717-061-006.html

Mönks, F. J., Ypenburg, I. H. (2008). *Begavede barn. En veiledning for foreldre og pedagoger.* Abstrakt forlag

Mönks, F. J. (2009). *Lærerkurs om begavede barn.* Intervju av Brøyn, T. i *Bedre Skole,* 3

Naalsund, M. (2012). *Why is algebra so difficult. A study of Norwegian lower secondary students' algebraic proficiency.* Universitetet i Oslo, Norge

National Council of Teachers of Mathematics, NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia

Renzulli, J. S. (1978). *What makes giftedness? Reexamining a definition*. Phi Delta Kappan, New York, USA. s.180-185

Ross, K. A., (1998). *Doing and Proving: The place of Algorithms and Proof in School Mathematics.* American Mathematical Monthly, USA, s. 252-255.
Hentet fra internett 27.10.12:
http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Resumes/Ross/Ross98.html

Skogen, K. (2008). *Begavede barn – Tar vi vare på dem i norsk skole?* Hentet fra internett 27.10.12:http://www.utdanningsforbundet.no/upload/Utdanningsakademiet/Bedre%20Skole/Nr%204-08/BedreSkole-4-08_Skogen.pdf

Skogen, K. (2010). *Evnerike barn i den norske skolen.* I *Skolepsykologi*, 2

Skogen, K. (2012). *Tar til orde for satsing på evnerike elever*. Hentet fra internett 30.10.12: http://www.uv.uio.no/isp/om/aktuelt/aktuelle-saker/2012/evnerike-barn.html

Skogen, K., Idsøe, E.M.C. (2011). *Våre evnerike barn, en utfordring for skolen*. Høyskoleforlaget, Kristiansand, Norge

van Someren, M.W., Barnard, Y. F., Sandberg, J.A.C. (1994). *The think aloud method. A practical guide to modelling cognitive processes*. Academic Press, London

Star, J. R., & Seifert, C. (2006). The development of flexibility in equation solving. *Contemporary Educational Psychology, 21*, 280-300.

Store norske leksikon, (2005-2007). Hentet fra internett 13.02.13: http://snl.no/introspeksjon

Utdanningsdirektoratet, (2009). Spesialundervisning. Hentet fra internett 03.12.12: http://www.udir.no/Regelverk/artikler_regelverk/Spesialundervisning/5-Retten-til-spesialundervisning/

Utdanningsdirektoratet, (2010). *Læreplan i matematikk fellesfag, grunnleggende ferdigheter.* Hentet fra internett 08.12.12: http://www.udir.no/kl06/MAT1-03/Hele/Grunnleggende_ferdigheter/

Utdanningsdirektoratet, (2012). *Grunnskolens informasjonssenter, GSI.* Hentet fra internett 04.12.12: https://gsi.udir.no/

Utdanningsdirektoratet, (2012). *Tilpasset opplæring.* Hentet fra internett 27.10.12: http://www.udir.no/Regelverk/artikler_regelverk/Informasjon-om-regelverk-til-foreldre/Tilpasset-opplaring/

Utdanningsforbundet, (2009). *Vil gi flinke tilpasset opplæring.* Hentet fra internett 27.10.12: http://www.utdanningsforbundet.no/upload/Bedre%20Skole/BS_nr%203-09/BS_409_Ruud1.pdf

Vygotskij, L. (1978): *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*. I: Cole, M., John-Steiner, V., Scribner S. og Souberman, E. (red.). Harvard: University Press.

Vedlegg 1

INTERVJU, ELEV

1. Hvor går du på skole? Hvorfor? Klasse?
2. Hva liker du å gjøre på fritiden?
3. Hvor mye tid bruker du på matematikk i uka?
4. Hva er det som motiverer deg i skolesammenheng? I matematisk sammenheng?
5. Liker du å samarbeide med andre elever?
6. Hvilke typer matematikkoppgaver foretrekker du å arbeide med?
7. Liker du utfordrende oppgaver?
8. Hva gjør du når du ikke får til oppgaven med en gang?
9. Kan du beskrive følelsene dine når du skal løse en matematikk oppgave?
10. Når synes du at du lykkes med matematikk?
11. Liker du matematikk? /Hva synes du om faget matematikk?
12. Hvorfor meldte du deg på MAT1100U?
13. Hva syns du om kurset? Trives du?
14. Hvilke mål har du med utdannelsen din?
15. Hva syns du om dine egne matematikkferdigheter?

(Se etter godt ordforråd og språkferdigheter)

Vedlegg 2

Oppgave 1: $\int_{-1}^{1} |x| \, dx$

Løsning 1: «Grafisk løsning»
Tegner grafen til absoluttverdien av x, setter på grensene -1 og 1 og markerer arealet under grafen. Ved å studere grensene og kjenne grafen til |x| såpass godt at man vet at når x er -1 og 1, så er y 1, kan man lese arealet = 1 direkte ut av grafen. Man må her også vite det grunnleggende bak integrasjon: at integralet betyr areal under grafen.

Løsning 2: «Dele opp integralet»
Man deler opp integralet med hensyn på grensene, slik at man får et integral med grenser fra -1 til 0 og et annet integral med grensen fra 0 til 1. Her må man forstå at med grenser fra -1 til 0 vil man få en negativ x, mens fra 0 til 1 vil x være positiv. Man må også kunne integrasjonsreglene for bestemt integral og kunne integrere x.

Løsning 3: «Dobbelt areal»
Her må man vite hvordan grafen til absoluttverdien til x ser ut, og se at man vil få det samme arealet på begge sider av y-aksen. Man kan da kun gå ut i fra integralet av x med grenser fra 0 til 1 og multiplisere integralet med 2. Også her må man kunne integrasjonsreglene for bestemt integral og kunne integrere x.

Løsning 4: «Kvadratrota av x i andre»
Her må man vite at absoluttverdien av x er det samme som kvadratrota av x opphøyet i 2 ($|x| = \sqrt{x^2}$), og man kan derfor integrere $\sqrt{x^2}$ i stedet. Også her må man kunne integrasjonsreglene for bestemt integral og kunne integrere x.

Oppgave 2: $\int e^x sinx \, dx$

Løsning: «Delvis integrasjon»

Delvis integrasjon: $\int \mathrm{u}'\mathrm{v} \, \mathrm{dx} = \mathrm{uv} - \int \mathrm{uv}' \, \mathrm{dx}$

(1) $\int e^x \sin x \; dx$ der u'=e^x, u=e^x, v=sin x, v'=cos x

(2) $\int e^x \sin x \; dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \; dx$ der u'=e^x, u=e^x, v=cos x, v'=-sin x

(3) $\int e^x \sin x \; dx = e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x \; dx)$

(4) $\int e^x \sin x \; dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \; dx$

(5) $2\int e^x \sin x \; dx = e^x \sin x - e^x \cos x$

(6) $\int e^x \sin x \; dx = \dfrac{e^x (\sin x - \cos x)}{2}$

Vedlegg 3

Forespørsel i forbindelse med masteroppgave

Jeg er masterstudent i matematikkdidaktikk ved Universitetet for miljø- og biovitenskap og holder nå på med den avsluttende masteroppgaven. Temaet for oppgaven er å undersøke hva som karakteriserer evnerike elevers matematiske resonnement.

For å gjøre dette, ønsker jeg til min datainnsamling elever i videregående skole som kan betegnes som evnerik. Datainnsamlingen vil bestå av et intervju og en høyttenkningsdel.

Høyttenkningsmetoden går ut på å la den deltakende tenke høyt mens han/hun utfører et utvalg matematikkoppgaver uten innblanding av forsker.

Jeg vil bruke båndopptaker og ta notater mens vi snakker sammen. Datainnsamlingen vil ta omtrent 20-30 minutter, og vi blir sammen enige om tid og sted.

Det er frivillig å være med og du har muligheten til å trekke deg når som helst underveis. Innsamlede data og andre opplysninger vil være anonymisert og bli behandlet konfidensielt, og ingen enkeltpersoner vil kunne gjenkjennes.

Dersom du ønsker å delta i datainnsamlingen til min masteroppgave, er det fint om du skriver under på samtykkeerklæringen nedenfor.

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste (NSD).

Med vennlig hilsen

Kristine B. Henriksen
45 23 1864
kristine.henriksen@student.umb.no

Samtykkeerklæring:

Jeg har mottatt skriftlig informasjon og er villig til å delta i studien.

Signatur…………………………….. Telefonnummer………………………..