



Norges miljø- og  
biovitenskapelige  
universitet

**Masteroppgave 2022 30 stp**  
Fakultet for realfag og teknologi

## **Hallkirke vs. Basilika, konstruksjonsutfordringer i middelalder-kirker**

Hall-church vs. Basilica, construction challenges in  
medieval churches

**Wiktor Artur Kikowski**  
Byggeteknikk og arkitektur

# Sammendrag

Hensikten med denne oppgaven er å bevise at hallkirker ble bygget i de mindre landsbyene i den gotiske perioden, fordi den geometriske kompleksiteten til basilikaer medførte større krav om kunnskap om statikk og større økonomisk belastning. I de store fjernhandelsbyene kan en ofte finne en basilika, et massivt, praktfullt bygg med forskjellige høyder på sideskip og midtskip. Overgangen fra romansk periode til gotisk periode innførte spissbuene og utviklet ingeniørkunst. Disse byggene med slanke søyler, stort åpent rom og belysning fra store vinduer på klerestoriumveggen var likevel ikke like utbredt i de mindre store byene. Den geografiske populasjonen av hallkirker, konstruksjonen med like høye sideskip som midtskip, er derimot bred og den typen konstruksjon kan bli funnet i byer med varierende størrelse og rikdom.

Problemstillingen er dermed en hypotese om at borgerne i de mindre store landsbyene foretrakk å bygge hallkirker på grunn av konstruksjonstypens lettere statikk og geometri, samt material- og konstruksjonskostnader. Gjennom sammenligning av hallkirken og basilikaen som statiske systemer vil denne oppgaven forsøke å bestemme om enklere geometri er en faktor for at den geografiske populasjonen av basilikaer er begrenset til store byer og fjernhandelsbyer.

Analysene blir utført på generaliserte geometrier av hallkirke og basilika, disse er inspirert av eksisterende bygg, men skalert til sammenlignbar størrelse og volum. Det har blitt valgt 6 cases av konstruksjoner, der de to første av hallkirke og basilika har lik grad av konstruksjonsvolum og de to siste av basilika viser avstivning trengt for å oppnå omtrent lik grad av defleksjoner som hallkirken. De spisse buene har også blitt erstattet med rundbuer, slik at resultatene er lettere kvantifisert og reproduisert. Testing viste at ved de spesifikke størrelsene av konstruksjonene, var oppførselen av alle cases sammenlignbar og hadde samme deformasjonstrend. Dette blir mindre sant jo større og høyere bygningen er, da spissbuer i teorien er mere effektive enn rundbuer i å overføre kreftene vertikalt.

Resultatene viser at hallkirken oppnår minimale deformasjoner ved kun enkel avstivning av sideskipene med et par strebepilarer. For at basilikaen skal oppnå samme nivå av deformasjoner, trengs det to par strebepilarer, et for sideskipene og et for midtskipet, samt strebebuer som fører skyvekraften fra buer ned til de ytre strebepilarene. For å oppnå 94% mindre deformasjoner, blir konstruksjonsvolumet av hallkirken økt med omtrent dobbelt. Derimot for å oppnå omtrent samme reduksjon, 95%, av basilikaen må konstruksjonsvolumet bli økt med 4,5 ganger startvolumet. Økningen i konstruksjonsvolum kommer i form av avstivning, hovedsakelig strebepilarer for begge konstruksjonstypene og strebebuer for basilikaer. Plasseringen av disse elementene er også viktig, som viser at det krever mye kunnskap om statikk og krefter.

På bakgrunn av overstående og kritisk tenking, kan man konkludere med at forskjellen i geometri mellom hallkirken og basilikaen påvirker vanskeligheten av statikken og økningen i kostnader. Dermed vil den enkle geometrien til hallkirken være en faktor som førte til at den geografiske populasjonen av den type konstruksjon var mere bred, mens den komplekse geometrien av basilikaen forhindret de mindre byene i å konstruere dem.

# Abstract

The purpose of this thesis is to prove that hall churches were build in the smaller cities and villages in the Gothic period, because the geometric complexity of basilicas entailed greater demands for knowledge of statics and greater economical strain. In the large long-distance trading town and big cities one can often find a basilica, a massive, magnificent building with different heights of the aisles and nave. The transition from the Romanesque period to the Gothic period introduced the pointed arches and developed engineering. These buildings with slender columns, large open spaces and lighting from large windows on the clerestory wall were still not as widespread in the smaller cities. The geographical population of hall churches, the construction with as high aisles as the aisles, however, is wide and that type of construction can be found in cities of varying size and wealth.

The problem is thus a hypothesis that the citizens of the smaller villages preferred to build hall churches due to simpler statics and geometry of the construction type, as well as material and construction costs. By comparing the hall church and the basilica as static systems, this thesis will try to determine whether simpler geometry is a factor in the geographical population of basilicas being limited to large cities and long-distance trading cities.

The analysis are performed on generalized geometries of the hall church and basilica, these are inspired by existing buildings, but scaled to comparable size and volume. 6 cases of constructions have been chosen, where the first two of the hall church and basilica have the same degree of construction volume, and the last two of the basilica show bracing needed to achieve approximately the same level of deflections as the hall church. The pointed arches have also been replaced with round arches, so that the results are more easily quantified and reproduced. Testing showed that at the specific sizes of the structures, the behaviour of all cases had the same deformation trend. This becomes less true the larger and taller the building is, as pointed arches in theory are more efficient than round arches in transmitting the forces vertically.

The results show that the hall church achieves minimal deformations by only simple bracing of the aisles with a pair of buttresses on the outer columns. In order for the basilica to achieve the same level of deformation, two pairs of buttresses are needed, as well as flying buttresses that carry the thrust down to the outer buttress. To achieve 94 % less deformations, the construction volume of the hall church is increased by about double. On the other hand, in order to achieve approximately the same reduction, 95 %, of the basilica, the construction volume must be increased by 4.5 times the starting volume. The increase in construction volume comes in the form of bracing, mainly buttresses for both types of construction and flying buttresses for basilicas. The location of the bracing is also important, which shows that it requires knowledge about statics and forces.

On the basis of the above and critical thinking, it can be concluded that the difference in geometry between the hall church and the basilica affects the difficulty of the statics and the increase in costs. Thus, the simple geometry of the hall church would be a factor that led to the geographical population of that type of construction being wider, while the complex geometry of the basilica prevented the smaller towns from constructing them.

# Innholdsfortegnelse

<b>1</b>	<b>Innledning</b>	<b>5</b>
1.1	Bakgrunn . . . . .	5
1.2	Problemstilling . . . . .	5
1.3	Mål og omfang . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Teori</b>	<b>6</b>
2.1	Gotiske kirker mellom 1180-1500 . . . . .	6
2.1.1	Strukturelle forskjeller mellom hallkirker og basilikaer . . . . .	6
2.2	Statikk . . . . .	8
2.2.1	Transformasjon av vertikale krefter til horisontale krefter i buer . . . . .	8
2.2.2	Analyse av reaksjonskrefter i en to-hengslet bue . . . . .	10
2.2.3	Geometrisk balanse av horisontal skyvekraft . . . . .	13
2.3	Tegl . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Metode</b>	<b>17</b>
3.1	Konstruksjonsgeometri . . . . .	17
3.1.1	Hallkirke . . . . .	18
3.1.2	Basilika . . . . .	19
3.1.3	Spissbue kontra rundbue . . . . .	20
3.1.4	Volum av konstruksjonene . . . . .	22
3.2	Materialegenskaper . . . . .	22
3.3	Digital analyse . . . . .	24
3.3.1	FEM-Design 21 . . . . .	24
3.3.2	Konstruksjonscases i FEM-Design 21 . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Resultater</b>	<b>27</b>
4.1	Resultater for spissbuer kontra rundbuer . . . . .	27
4.2	Deformasjon . . . . .	29
4.3	Horisontale deformasjoner ift. volum . . . . .	32
4.4	Vertikale deformasjoner ift. volum . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Diskusjon</b>	<b>34</b>
5.1	Forutsetninger . . . . .	34
5.2	Skalering av konstruksjonene . . . . .	34
5.3	To-hengslet bue, bruk og analyse . . . . .	34
5.4	Rundbue kontra spissbue . . . . .	35
5.5	Balanse i horisontale krefter . . . . .	35
5.6	Valg av cases, lengder og volumsammenheng . . . . .	35
5.7	Materialegenskaper . . . . .	36
5.8	Resultater av deformasjon . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Konklusjon</b>	<b>38</b>
<b>7</b>	<b>Videre arbeid</b>	<b>39</b>
<b>8</b>	<b>Referanser</b>	<b>39</b>
<b>9</b>	<b>Figurliste</b>	<b>40</b>

<b>10 Tabelliste</b>	<b>41</b>
<b>11 Vedlegg</b>	<b>42</b>
11.1 Vedlegg 1: Tversnitt av hallkirker . . . . .	42
11.2 Vedlegg 2: Tversnitt av basilikaer . . . . .	43
11.3 Vedlegg 3: Excel beregninger . . . . .	45
11.4 Vedlegg 4: Utregning av horisontal skyvekraft for to-hengslede buer . . . .	46

# 1 Innledning

## 1.1 Bakgrunn

I bakgrunn av denne oppgaven ligger det en hypotese fra en artikkel Martin Ebert skrev i 2021. I denne artikkelen drøfter Ebert historien av gotiske hallkirker og basilikaer og den geografiske populasjonen av disse i Tyskland. Ebert stiller spørsmålet om statiske forskjeller i geometriene til hallkirker og basilikaer er grunnen til at basilikaer ble bare bygd i større og rikere byer, med noen unntak. Derimot hallkirker har en overveldende stor geografisk populasjon i landsbyer og mindre byer [Ebert, 2021]. Dette er et spørsmål som hørt interessant ut for meg, da historie og konstruksjonsanalyser er noe jeg interesserer meg for.

Opgaven handler om å analysere og kvantifisere statiske forskjeller i begge konstruksjonstypene. For dette bruker jeg 3D-modellerings program FEM-Design. Dette kan hjelpe å oppdage og forutse deformasjoner i eksisterende basilikaer og hallkirker. Samtidig kan dette hjelpe å forstå grunnen til geografisk populasjon av disse typer konstruksjoner.

Teorien bak dette tema viste seg å være meget vanskelig å finne. Dette er på grunn av mangel på empiriske data fra tiden disse konstruksjonene ble bygget. På denne tiden var kunnskapen om å konstruere slike bygg gitt fra mester til lærling i generasjoner og byggene ble bygget ved praktisk testing. Det finnes svært lite om materialeegenskapene til tegl og mørtel brukt i den gotiske perioden fra sent 1100-tallet til 1500-tallet og sannsynligvis ble metodene brukt til å lage materialene i tillegg endret i løpet av denne perioden. Derfor var det nødvendig å sette antagelser og forutsetninger som ofte ikke er 100 prosent realistiske. Denne oppgaven blir dermed basert på en generalisering av disse konstruksjonene og materialene som kan være til grunn for videre spesifikk arbeid.

## 1.2 Problemstilling

Mens borgerne i de store fjernhandelsbyene bygget store basilikaer mellom det 11. og 15. århundre er det påfallende at borgerne i de mindre store byene foretrekker å bygge hallkirker. Dette antas å være begrunnet i deres enklere statikk og geometri. Er det mulig å knytte bygningsformen til økonomi, statikk og materialbruk gjennom sammenligning av hallen og basilikaen som statiske systemer.

## 1.3 Mål og omfang

I denne oppgaven skal det gjennomføres statiske analyser på generealisterte geometrier av hallkirke og basilika. Ved å bruke data fra disse analysene vil det bli gjort vurdering på om geografiske populasjoner av slike bygninger kan bli begrunnet ved økonomiske og samfunnsfaglige argumenter.

Omfanget av denne oppgaven inkluderer skalering av størrelser for å konstruere sammenlignbare konstruksjonstyper. Analyse av disse konstruksjonene skal bekrefte eller avkrefte om forskjellene i geometriene påvirker deres kompleksitet av statikk, mengder

av materialer som trengs til å oppnå stabilitet og dermed større økonomisk avhengighet.

De generaliserte konstruksjonene vil bli laget på bakgrunn av europeiske kirker fra den gotiske perioden (mellom det 11. og 15. århundre). Det vil være lagt vekt på bærende konstruksjon og ikke arkitekturelle stiler.

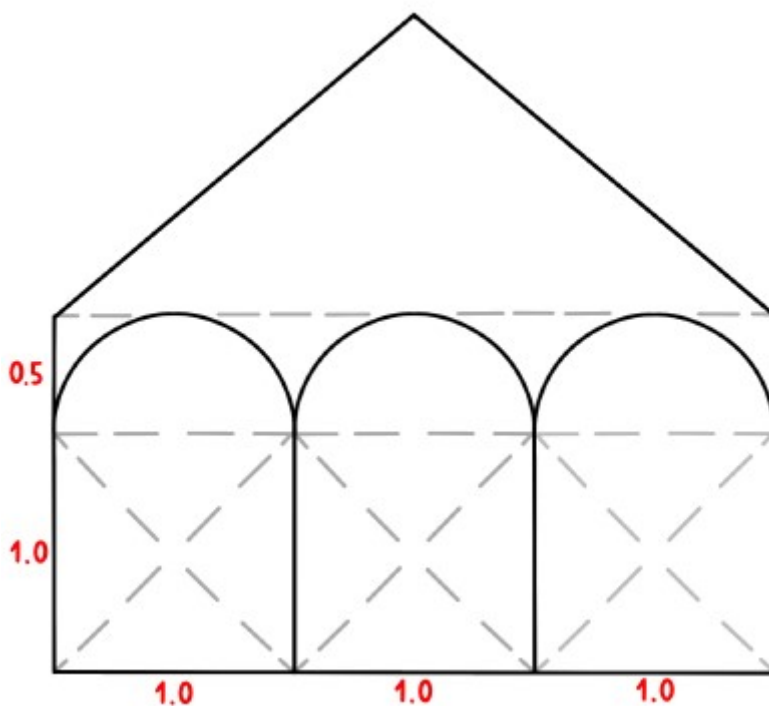
## 2 Teori

### 2.1 Gotiske kirker mellom 1180-1500

Den gotiske perioden etterfølger den romanske. Kirker i denne perioden gikk fra de tunge romanske kirkene der bæreveggene ikke ga plass til store vinduer og store åpne rom, til store og høye konstruksjoner med slanke søyler og spisse buer som ga mulighet til store åpne rom belyst av fargede blyglassvinduer. Disse kirkene viste også høyere klasse av ingeniørkunst, men likevel er det forskjeller i konstruksjonstypene av kirker [Hansen, 2021].

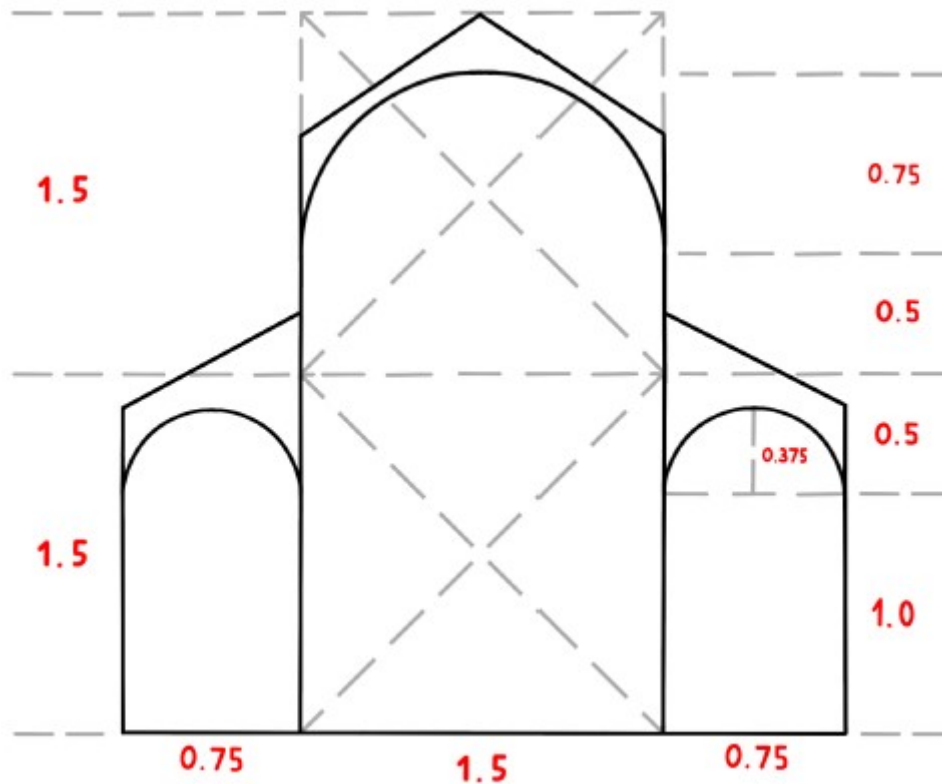
#### 2.1.1 Strukturelle forskjeller mellom hallkirker og basilikaer

En hallkirke har en struktur der sideskip er like høye som midtskipet. Det har dermed ikke en sprang i høyde ved overgang fra sideskip til midtskip, taket på hallkirker er derfor kontinuerlig, se figur 1. Disse konstruksjonene fikk belysning fra store blyglassvinduer på de ytre veggene.



Figur 1: Hallkirke snitt

Basilikaer derimot har høyere midtskip en sideskip, der sideskipene ofte var smalere og midtskipet bredere. Ved slik struktur er ikke lenger taket kontinuerlig og en ekstra vegg kalt klerestorium er introdusert, se figur 2. På grunn av de gotiske spissbuene kunne spannet på midtskipet være stort. Introduksjonen av de gotiske spisse buene gjorde plass til fargede blyglassvinduer på klerestoriumveggen som ga god belysning til det store åpne rommet i basilikaer [Ebert, 2021].



Figur 2: Basilika snitt

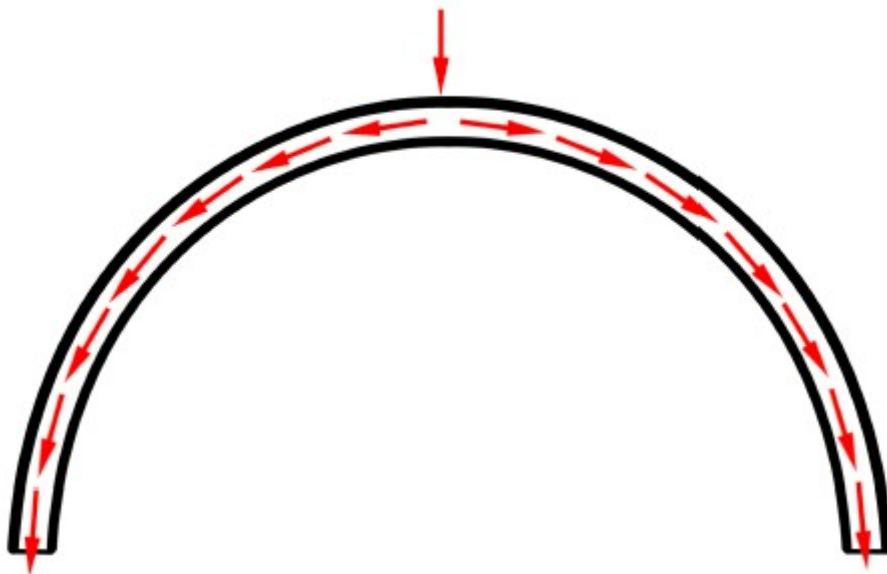


## 2.2 Statikk

I denne masteren antar vi idealiserte to-hengslede rundbuer for å generalisere og fokusere på hvordan den horisontale kraften generert av buer kan påvirke deformasjonen av de to forskjellige geometriene. Disse buene er kun utsatt for egenvekt og dermed en jevnt fordelt last over hele buen.

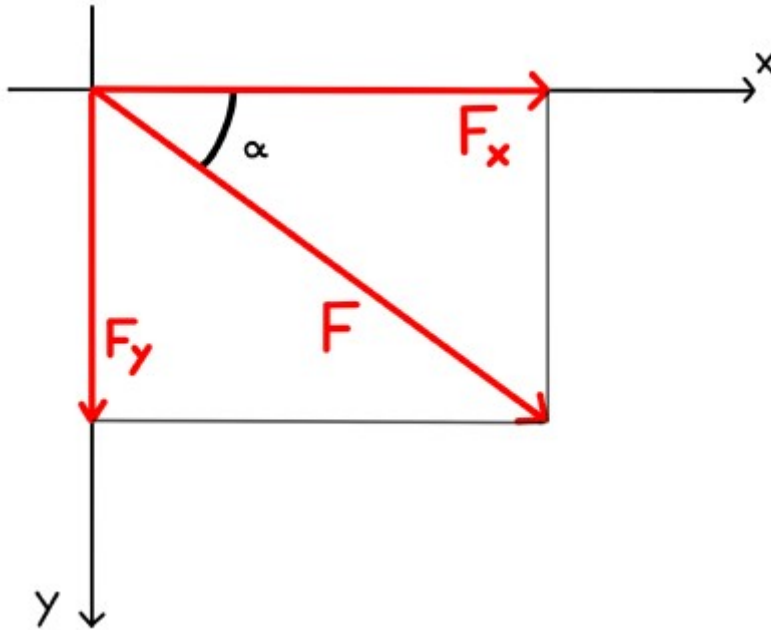
### 2.2.1 Transformasjon av vertikale krefter til horisontale krefter i buer

For å bevise at de vertikale kreftene påført en bue, blir transformert til horisontale krefter i opplagerene må man se på veien kraften går gjennom buen. På grunn av den geometriske formen, vil den vertikale kraften gå skrått nedover langs buen, denne kraften er parallell med tangenten til ethvert punkt på buen, slik som vist i figur 3:



Figur 3: Krafttransformasjon i en bue utsatt for en punktkraft.

Disse kreftene kan dekomponeres til vertikale og horisontale krefter. For å bevise dette analytisk, trengs det et matematisk grunnlag i trigonometri ([Vollen, 1999], s. 47). Hvis vi antar at på ethvert punkt på buen er resultanten en vektor av kraften  $F$ . Dermed kan vi dekomponere  $F$  til  $F_x$  og  $F_y$ , der  $F_y$  er den vertikale vektorkomponenten og  $F_x$  er den horisontale vektorkomponenten, vist i figur 4:



Figur 4: Dekomponering av en kraftvektor  $F$ .

Disse vektorene kan kvantifiseres ved å bruke trigonometriske forhold:

Vertikal vektorkomponent  $F_y$ :

$$\frac{F_y}{F} = \sin(\alpha_F)$$

$$F_y = F \times \sin(\alpha_F) \quad (1)$$

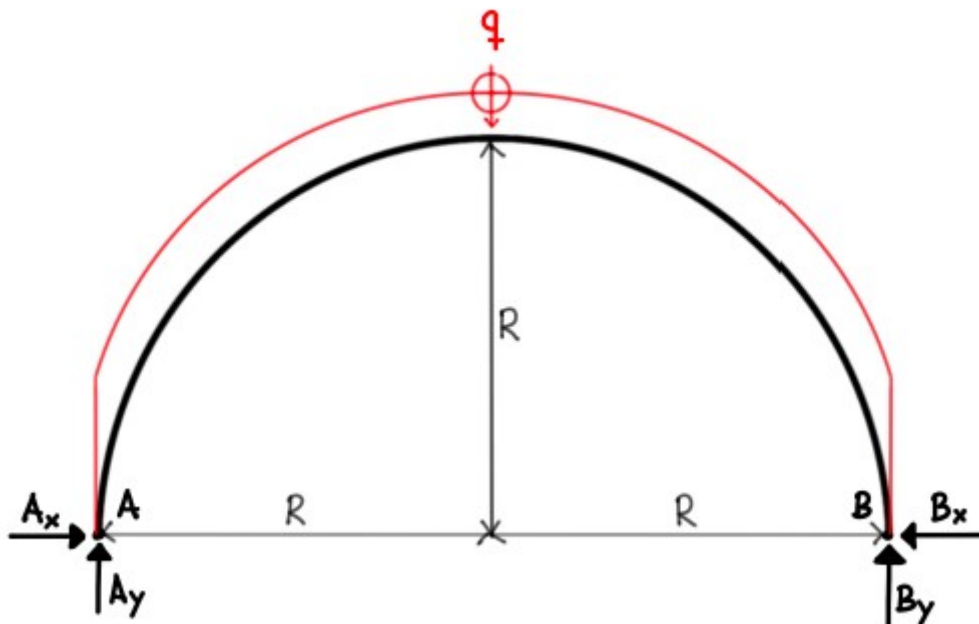
Horisontal vektorkomponent  $F_x$ :

$$\frac{F_x}{F} = \cos(\alpha_F)$$

$$F_x = F \times \cos(\alpha_F) \quad (2)$$

## 2.2.2 Analyse av reaksjonskrefter i en to-hengslet bue

En to-hengslet bue er statisk ubestemt til første grad. Det betyr at det er flere reaksjonskrefter enn det finnes likevektsligninger for ett element.



Figur 5: 2-hengslet rundbue utsatt for egenvekt.

For å bevise dette brukes det en sjekk ([Hibbeler and Tan, 2006], figur (2-3), s. 48):

hvis  $3n - R = 0$  er systemet statisk bestemt  
hvis  $3n - R < 0$  er systemet statisk ubestemt

der  $n$  er antall elementer og  $R$  er antall reaksjonskrefter.

I tilfellet av en 2-hengslet parabolisk bue er denne sjekken:

$$3n - R = 3 * 1 - 4 = -1$$

Dermed er buen statisk ubestemt til første grad.

For å finne reaksjonskreftene kan vi dermed følge disse stegene:

1. Vertikale reaksjonskrefter:

Moment om A:

$$\begin{aligned}\Sigma M_A &= (q \times 2R \times \frac{2R}{2}) - B_y \times 2R = 0 \\ B_y &= \frac{2qR^2}{2R} = qR\end{aligned}$$

Moment om B:

$$\begin{aligned}\Sigma M_B &= (q \times 2R \times \frac{2R}{2}) - A_y \times 2R = 0 \\ A_y &= \frac{2qR^2}{2R} = qR\end{aligned}$$

Dermed:

$$A_y = B_y = qR$$

Det vil si halve vekta blir tatt i mot på hver av de vertikale reaksjonene.

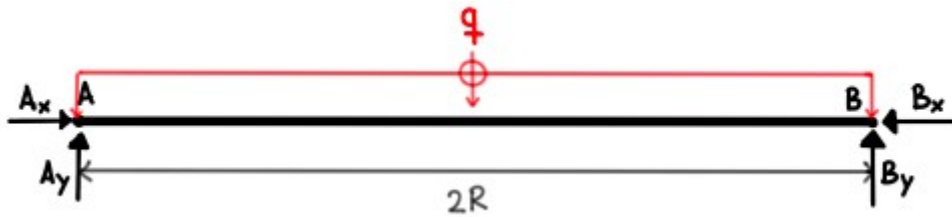
2. Formel for horisontal skyvekraft i buer (Formel (4) i [Girihagama et al., 2015]):

$$H = \frac{\int (M_0 \times y) dx}{\int (y^2) dx} \quad (3)$$

der  $M_0$  er momentet av en ekvivalent bjelke og  $y$  er den vertikale distansen.

3. Momentet for en ekvivalent bjelke:

For å beregne de horisontale reaksjonskreftene må det framstilles en ekvivalent bjelke, det vil si en bjelke med lik lengde, like reaksjoner og utsatt for samme kraft.



Figur 6: Ekvivalent bjelke

For å regne ut momentet fordeles bjelken i to, første del  $0 < x < R$  fra venstre til høyre og andre  $0 < x < R$  fra høyre til venstre. Dermed:

$$\int (M_0 \times y) dx = \int_0^R (M_{01} \times y_1) dx + \int_0^R (M_{02} \times y_2) dx \quad (4)$$

På grunn av symmetri blir disse likevel like og formelen forenkles:

$$\int (M_0 \times y) dx = 2 \times \int_0^R (M_{01} \times y_1) dx$$

Beregning av momentet  $M_{01}$ :

$$\begin{aligned}\Sigma M_{0x} &= A_y \times x - q \times x \times \frac{x}{2} - M_{01} = 0, \text{ der } A_y = qR \\ M_{01} &= qRx - q\frac{x^2}{2} \\ M_{01} &= q(Rx - \frac{x^2}{2})\end{aligned}$$

4. Vertikal distanse  $y$ :

$$\begin{aligned}y &= \frac{4hx(L-x)}{L^2} = \frac{4Rx(2R-x)}{(2R)^2} \\ &= \frac{2x(2R-x)}{2R} = \frac{4Rx-2x^2}{2R} \\ y &= 2x - \frac{x^2}{R}\end{aligned}$$

5. Utregning av horisontal skyvekraft  $H$ :

$$H = \frac{\int(M_0 \times y)dx}{\int(y^2)dx}$$

$$\begin{aligned}\int(M_0 \times y)dx &= 2 \times \int_0^R(M_{01} \times y_1)dx \\ \int(M_0 \times y)dx &= \frac{8}{15}qR^4\end{aligned}$$

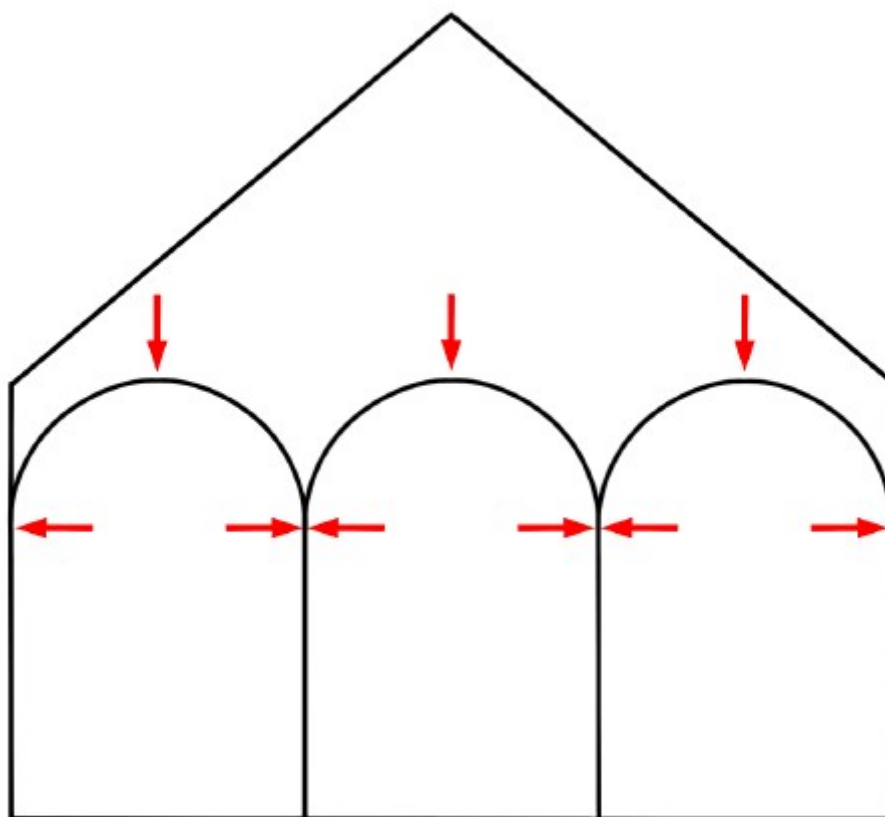
$$\begin{aligned}\int(y^2)dx &= \int_0^{2R}((2x - \frac{x^2}{R})^2)dx \\ \int(y^2)dx &= \frac{16}{15}R^3\end{aligned}$$

$$H = \frac{(8/15)qR^4}{(16/15)R^3} = \frac{qR}{2}$$

Se 11.4 for utregning.

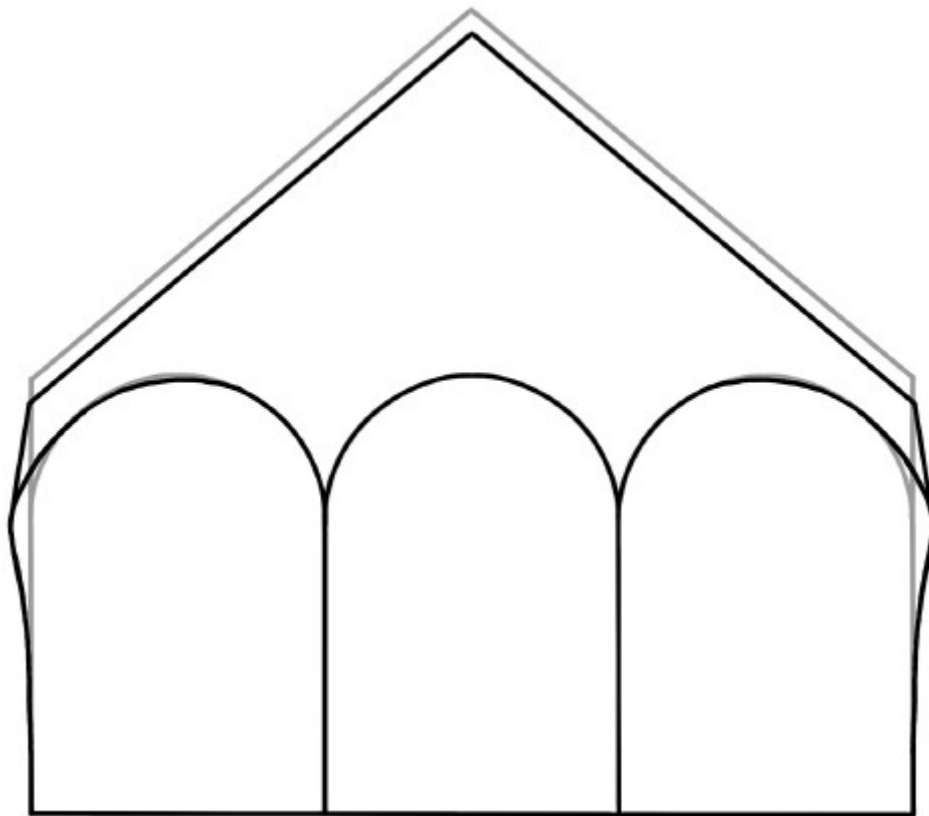
### 2.2.3 Geometrisk balanse av horisontal skyvekraft

På grunn av de geometriske egenskapene til hallkirker og basilikaer, vil de oppføre seg annerledes når de er påvirket av de horisontale skyvekraftene fra buene. Den mindre komplekse geometrien med like høye sideskip som midtskip er i hovedsak det som fører til at de motstående kreftene fra buene balanserer hverandre ut, slik som vist i figur 7:



Figur 7: Visualisering av horisontale krefter fra buer i en hallkirke.

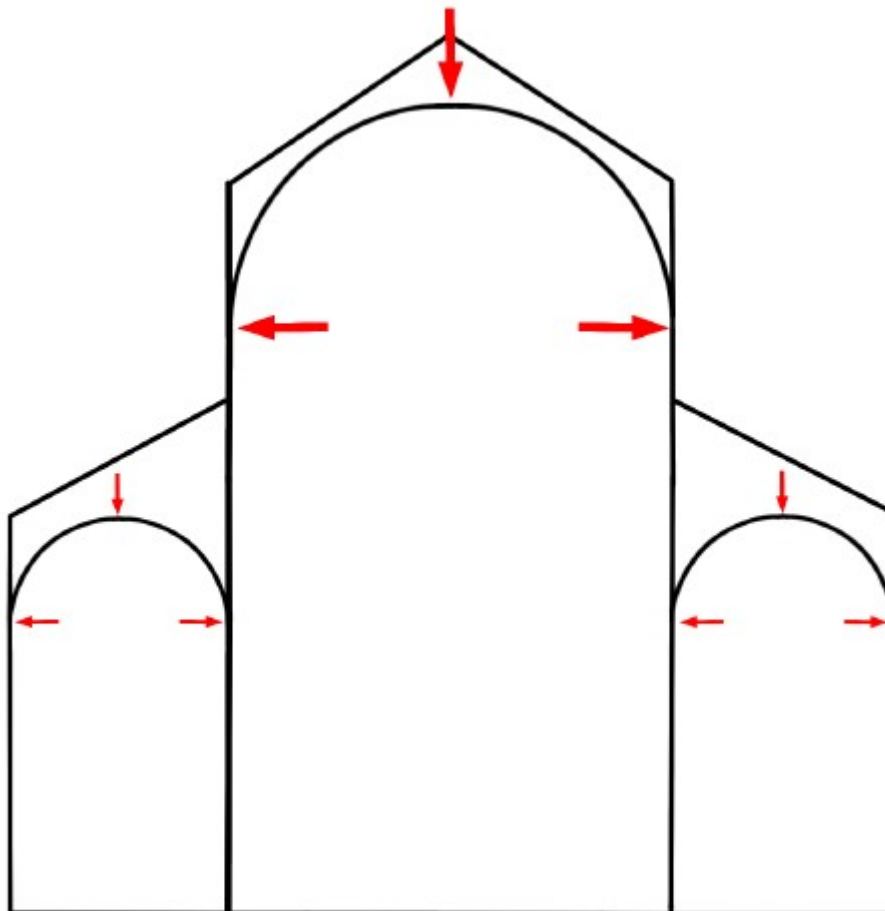
I hallkirker vil de horisontale kreftene på midtskipsøylene motvirke hverandre. Dette gjør at i teorien vil det ikke være noe horisontal deformasjon på disse søylene. Likevel gjenstår de ytterste søylene. Balansen i disse blir oppnådd ved å legge til strebepilarer som øker stivheten, tar i mot disse kreftene og motstår deformasjon. Dermed kan deformasjonen visualiseres slik som i figur 8.



Figur 8: Visualisering av deformasjon i hallkirke utsatt for horisontale krefter fra buer.

I virkeligheten vil ikke deformasjonen se slik ut, da kreftene fra de ytre søylene vil kunne dra midtskipssøylene utover. Dette er mulig fordi mørtelen i mellom teglet limer disse sammen og kan overføre strekkrefter [Britannica, 2017]. I tillegg til dette vil det oppstå vertikale deformasjoner som effekt av både de vertikale kreftene og deformasjonen fra de horisontale. Geometrien til hallkirken er effektiv med tanke på ingeniørkunst, men tillater ikke like grandiose løsninger som basilikaer kan medbringe.

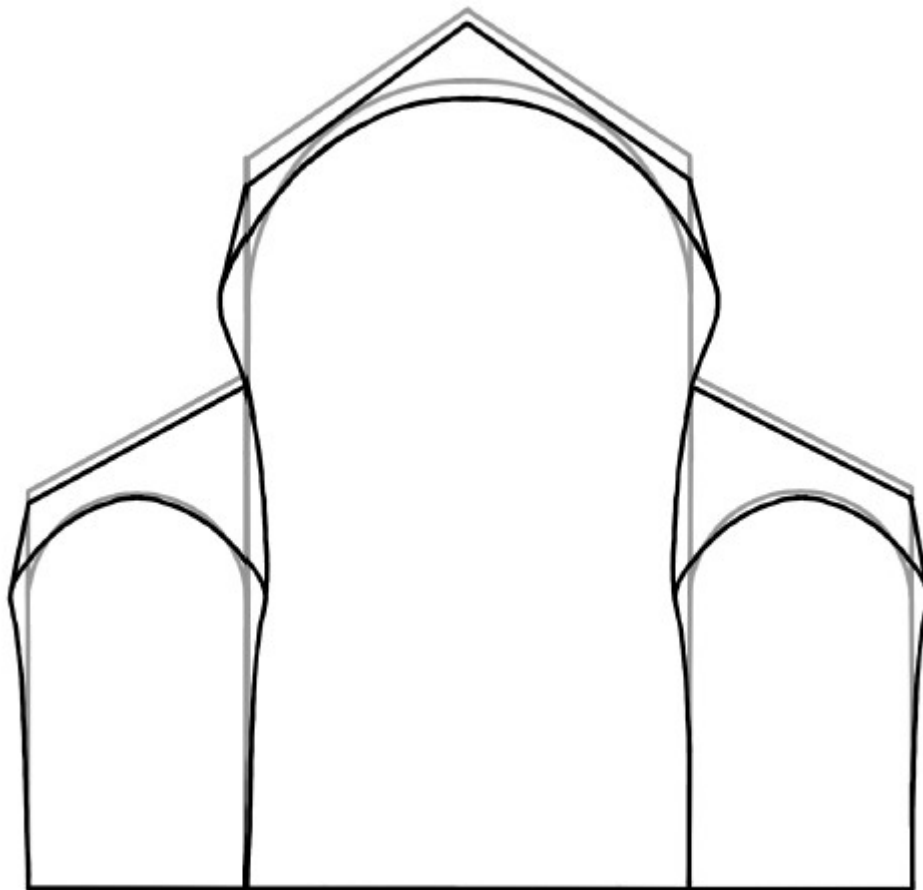
I basilikaer er geometrien annerledes og balansen i de horisontale skyvekraftene forsvinner med introduksjonen av klerestoriumet og opphøyningen av midtskipet. Den komplekse geometrien tillater ikke lenger like slanke søyler uten strebepilarer. De horisontale kreftene fra buene på sideskipene vil presse inn mot midtskipssøylen og kreftene fra buen på midtskipet vil trykke midtskipssøylene utover:



Figur 9: Visualisering av horisontale krefter fra buer i en basilika.

Denne fordelingen av horisontale krefter viser at for å legge til stivhet trengt for å minimalisere deformasjon, må det legges på avstivning på toppen og i midten av midtskipssøylene. Dette blir gjort i form av strebebuer på toppen som går ned til de ytterste søylene, mens de horisontale kreftene i midten av søylene blir motvirket av strebepilarer lagt i mellom midtskipet og sideskipene. Deformasjon uten avstivning kan visualiseres slik som i figur 10.





Figur 10: Visualisering av deformasjon i basilika utsatt for horisontale krefter fra buer.

Likevel, på samme måte som med hallkirker, vil denne deformasjonen se annerledes ut i virkeligheten. Deformasjonen innover fra sideskipene er avhengig av tversnittet og høyden av midtskipssøylene. Det er derfor sannsynlig at deformasjonen på midtskipssøylen fortsetter kontinuerlig utover. De vertikale deformasjonene på buene vil bli økt av strekkrefter fra de horisontale kreftene i søylene.

## 2.3 Tegl

Tegl har en lang historie som bygningsmateriale. Det ble brukt så tidlig som i Babylon omtrent 4000 år f.kr. og gjennom historien brukt som bærende materiale i konstruksjoner fra broer til palasser, templer, kirker m.m..

Tegl som vi kjenner det er laget av brent leire. Leire er et materiale som er lett å forme. Dette gjør at regulariteten og de faste proporsjonene av tegl gjør det til et enkelt materiale å legge i en stor variasjon av mønstre og former. Leire er også lett tilgjengelig de fleste steder. Tegl viste seg også å resistent til brann og værslit. Disse faktorene gjorde at tegl ble brukt mye som bygningsmateriale i romersk og gotisk arkitektur. Den karakteristiske rødfargen av leire kommer fra urenheter i form av jernoksid [ANSYS, 2021].

Romerne moderniserte murlegging ved å innføre mørtel av sement sammen med teglet. Selv om steintegl kunne konstruere bygninger uten hjelp av mørtel, var det nettopp sementet som hjalp romerne med å bygge de effektive buene og komplekse konstruksjonene

av tegl. Tidlig mørtel ble laget av pozzolanisk tuff og vulkanisk aske. Blandet med vann, kalk og steinfragmenter ble sementen til en slags betong. Steinegenskapene til tegl gjør at det håndterer trykk bra, derfor bygde romerne buene slik at de unngikk strekk og holdt hele strukturen i trykk [Britannica, 2017].

### 3 Metode

#### 3.1 Konstruksjonsgeometri

For å konstruere geometriene i analyseprogrammer må størrelser defineres. For å gjøre dette relativt realistisk ble det brukt tversnitt av eksisterende hallkirke og basilika. Se vedlegg 1 og 2. Fra disse ble det utarbeidet sammenlignbare konstruksjoner som ble skalert i følge figur 1 og 2. For konstruksjonene brukt i denne oppgaven, ble det bestemt at  $l = 8m$ . Resultatet av dette er lengdevariabler for snitt for begge type konstruksjonene, vist i tabell 2. For å kunne se om kompleksiteten i geometri påvirker mengden materiale og avstivning, blir det delt opp i cases med forskjellig grad av avstivning.

Tabell 1 beskriver de forskjellige casene:

Case	Bygning	Elementer
1	Hallkirke	Søyler og buer
2	Hallkirke	Søyler, buer og strebepillarer
3	Basilika	Søyler og buer
4	Basilika	Søyler, buer og lave ytre strebepillarer
5	Basilika	Søyler, buer, lave ytre strebepillarer, indre strebepillarer
6	Basilika	Søyler, buer, høye ytre strebepillarer, indre strebepillarer og strebebuer

Tabell 1: Konstruksjonscases

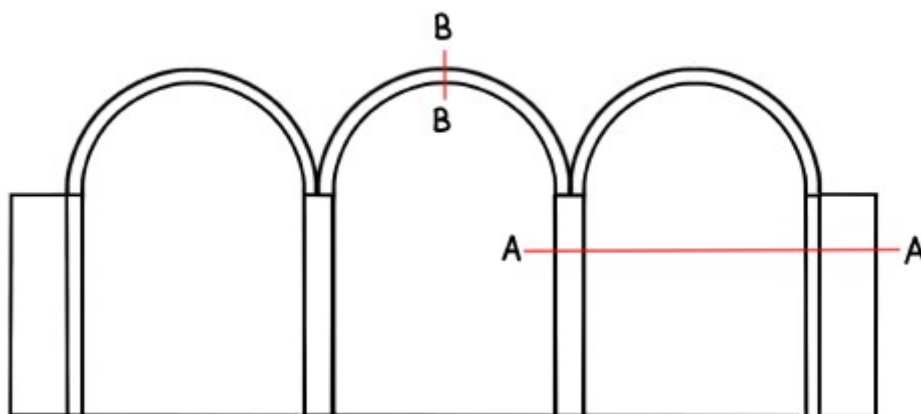
Tabell 2 viser lengdevariablene brukt:

Variabel	Lengde
a	0.5m
b	1.0m
c	2.0m

Tabell 2: Lengdevariabler brukt til geometrien av snitt

### 3.1.1 Hallkirke

Den generaliserte hallkirken er inspirert av plantegninger av Nikolaikirken i Rostock, Tyskland. Se vedlegg 1. Geometrien til hallkirken er vist i figur 11, størrelser er vist i tabell 3 og snitt  $A - A$  og  $B - B$  er vist i figur 12 og 13.



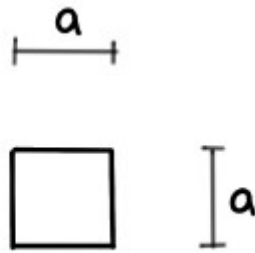
Figur 11: Hallkirke med strebepilarer, case 2.

Element	Høyde/Lengde
Søyle	8m
Strebepilar	8m
Buediameter	8m
Buehøyde	4m

Tabell 3: Høyder og lengder for hallkirke.



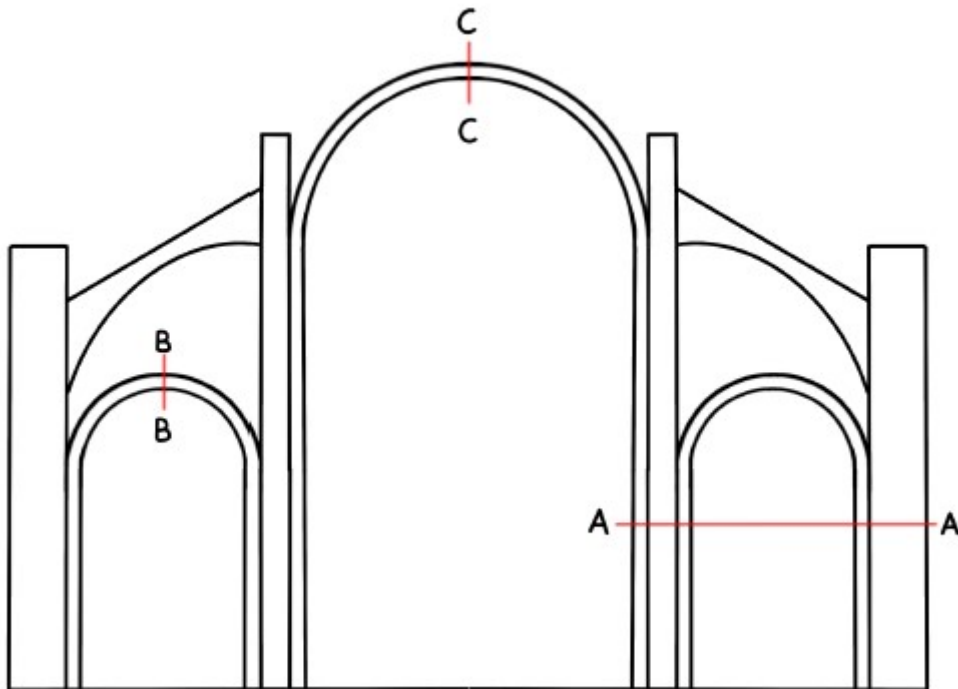
Figur 12: Snitt A-A hallkirke.



Figur 13: Snitt B-B hallkirke.

### 3.1.2 Basilika

Den generaliserte basilikaen er inspirert av plantegninger tegnet av Eugène Viollet-le-Duc. Se vedlegg 2. Geometrien til basilikaen er vist i figur 14, størrelser er vist i tabell 4 og snitt  $A - A$ ,  $B - B$  og  $C - C$  er vist i figur 15 og 16.



Figur 14: Basilika med strebepilarer og strebebuer, case 5.

Element	Høyde/Lengde
Søyler sideskip	8m
Søyler midtskip	16m
Lav strebepilar sideskip	8m
Høy strebepilar sideskip	16m
Strebepilar midtskip	20m
Buediameter sideskip	6m
Buehøyde sideskip	3m
Buediameter midtskip	12m
Buehøyde midtskip	6m

Tabell 4: Høyder og lengder for basilika.



Figur 15: Snitt A-A basilika.



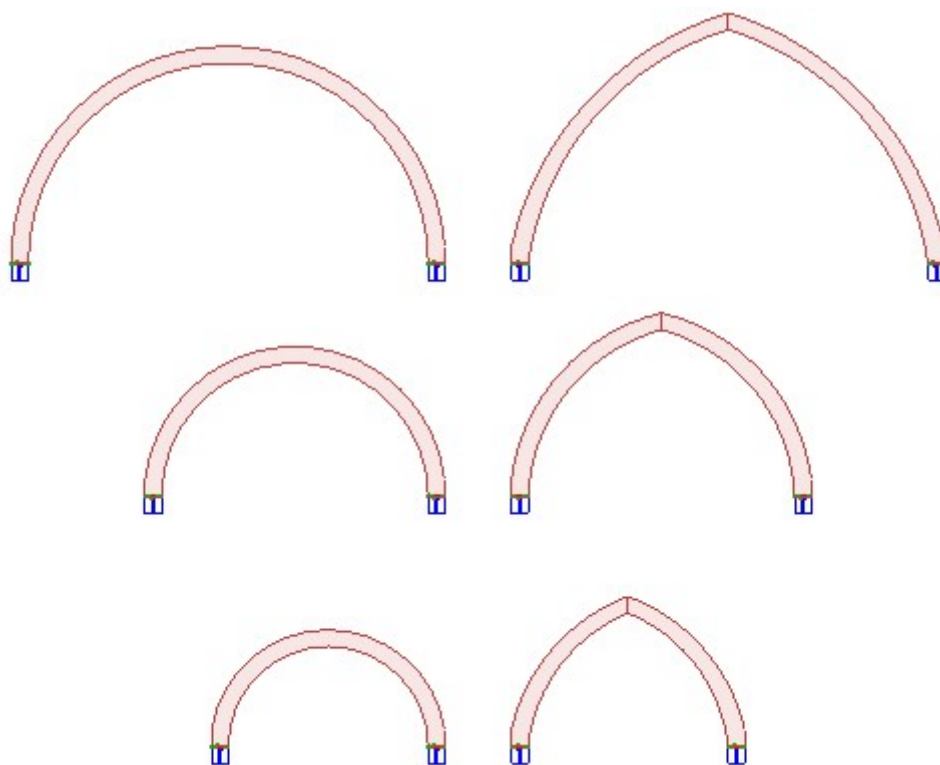
Figur 16: Snitt B-B og C-C basilika

### 3.1.3 Spissbue kontra rundbue

Et av forenklingene i geometrien av konstruksjonene er de runde buene, da i virkeligheten var de fleste europeiske hallkirkene og basilikaene fra slutten av 11. hundretallet, konstruert med spissbuer [Hansen, 2021]. Denne endringen kommer fra at det er rundbuen er har en kontinuerlig vinkel og er dermed enklere å regne og bekrefte resultater fra den digitale analysen. Derimot med spissbuer er vinkelen ikke kontinuerlig, det kombinert med bare to hengsler gjør at analysen av et slikt element i teorien er kompleks. I tillegg er rundbuer lettere beskrivelige med tanke på vinkler og lengder, som gjør det enklere å

reprodusere de digitale analysene.

For å kunne gå videre med forenklingen var det nødvendig å sjekke om disse to typene av buer hadde lik eller ulik påvirkning på oppførselen til konstruksjonen. For å sjekke dette ble det i FEM-Design konstruert ekvivalente spissbuer, der maksimalhøyden til buen ble øket med  $1m$  for å danne spissen:



Figur 17: Ekvivalente spissbuer til brukte rundbuer.

Disse buene ble testet for deformasjon som enestående buer og som elementer i case 1 og case 3. Resultatene fra disse analysene viste at selv om som enestående elementer er spissbuene mere effektive i vertikal deformasjon, som elementer i case 1, 3 og 5 viste de seg å være sammenlignbare med rundbuen (se 4.1). Dette og motivasjonen av en enklere kvantitativ og reproduserbar buegeometri førte til valget av rundbue.

### 3.1.4 Volum av konstruksjonene

For at konstruksjonene hadde omtrentlig likt vekt å håndtere var det viktig at volumet av alle elementene til sammen var likt. Dette var spesielt viktig for case 1 & 3 og case 2 & 4, der konstruksjonenes eneste forskjeller er søylene og buene. Dermed er det mulig å gjøre en vurdering av hvilken konstruksjon håndterer vekten bedre og fra det hvilken geometri som har mindre kompleks statikk.

For å finne volumet av de forskjellige konstruksjonene ble det brukt en "Query" funksjon i FEM-Design for å finne arealet til alle elementene, disse arealene ble dermed ganget med tykkelsen av elementene. Tabell 5 viser totalsummen av volumene for alle 6 cases (Enkeltelementutregning i vedlegg 3, 11.3):

Case	Konstruksjonsvolum
Case 1	$30,0m^3$
Case 2	$62,0m^3$
Case 3	$31,3m^3$
Case 4	$63,3m^3$
Case 5	$103,3m^3$
Case 6	$144,2m^3$

Tabell 5: Konstruksjonsvolum for alle caser.

Siden case 1 og 3 er konstruksjonene kun med søyler og buer, vil det være gunstig at disse har et sammenlignbart volum og dermed vekt. Volumet i case 1 er 96% av volumet til case 3. I case 2 og 4 blir det lagt til lave ytre strebepillarer, disse er like i begge konstruksjonene, dermed er volumet av case 2 98% av volumet i case 4.

Videre kan vi se at volumet øker, dette er grunnet de høye strebepilarene lagt til i case 5 og strebebuene og økningen av høyde i de ytre strebepilarene som støtter strebebuene i case 6.

## 3.2 Materialelegenskaper

Som materiale er det valgt tegl i analysene. Dette er fordi (som nevnt i 2.3) de fleste hallkirker og basilikaer i den gotiske perioden i Europa ble bygget med tegl som bærekonstruksjon. Materialelegenskapene er basert på hard tegl (Brick (common, hard)(2.03)) fra [ANSYS, 2021], level 3.

Figur 18 og 19 viser de valgte egenskaberne:

Name .....	Brick (common, hard) (2.03)
Compressive strength - fb [N/mm <sup>2</sup> ] .....	70.00
Modulus of elasticity - E [N/mm <sup>2</sup> ] .....	10000
Poisson's ratio - nu .....	0.200
Mass density (with mortar) - rho [t/m <sup>3</sup> ] .....	2.00
Coefficient of linear thermal expansion - alpha_t [1/°C] .....	5.000e-06

Figur 18: Materialegenskaber FEM-Design.

Application data			
Gamma M (U   Ua,Us) ...	2.00	1.50	
Mortar strength, fm [N/mm <sup>2</sup> ] .....	2.50		
Constants for fk (See 1996-1-1 (3.1 - 3.4))			
	K	alpha	beta
	0.550	0.700	0.300
Shear strength			
fvk0 [N/mm <sup>2</sup> ] .....	0.200		
Vertical joints are	<input type="radio"/> unfilled	<input checked="" type="radio"/> filled	
National Annex dependent data >			
Modulus of elasticity			
<input type="checkbox"/> Use E = KE * fk	KE .....	1000	
Creep coefficients			
U, Ua, Us	Sq	Sf	Sc
1.50	1.50	1.50	1.50
phi infinite (design calculation) ....	1.50		

Figur 19: Materialegenskaber FEM-Design.



### 3.3 Digital analyse

For digital analyse er det valgt program som bruker finite element method (FEM) for å beregne reaksjoner, indre krefter, spenninger og deformasjoner. Dette er for å enkelt løse komplekse geometrier med mesh-dannelse og oversiktelige resultater.

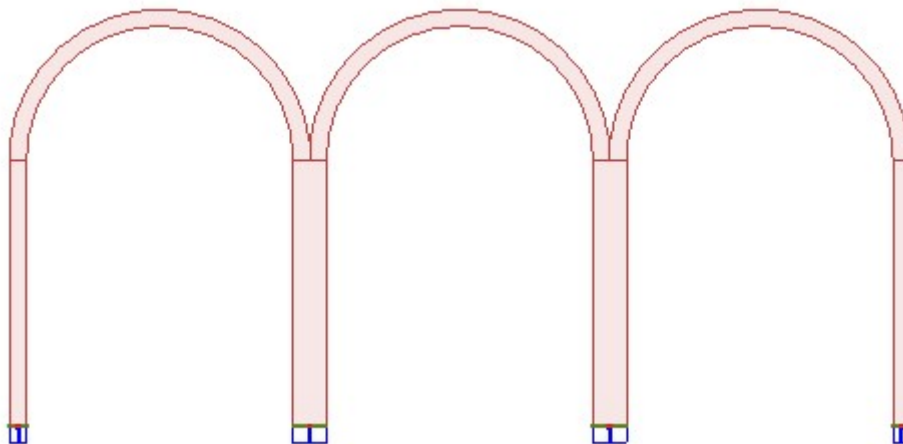
#### 3.3.1 FEM-Design 21

FEM-Design 21 er et avansert 3D analyseprogram. Det kan bli brukt til en rekke forskjellige konstruksjonsanalyser ved bruk av 3D modellering, design og finite element analysis (FEA) av betong, stål, treverk, tegl og fundamenter i henhold til Eurokoder. Programmet er distributert av StruSoft, et svenskt programvarefirma.

I denne oppgaven blir FEM-Design 21 brukt til å modellere og analysere 5 forskjellige cases av konstruksjoner. Hvorav to av disse er hallkirker og tre er basilikaer. Programmet kjører analysene med kun egenvekt av strukturen, da oppgaven er å sjekke om deformasjonene og spenningene er mere komplekse av ren geometrisk forskjell.

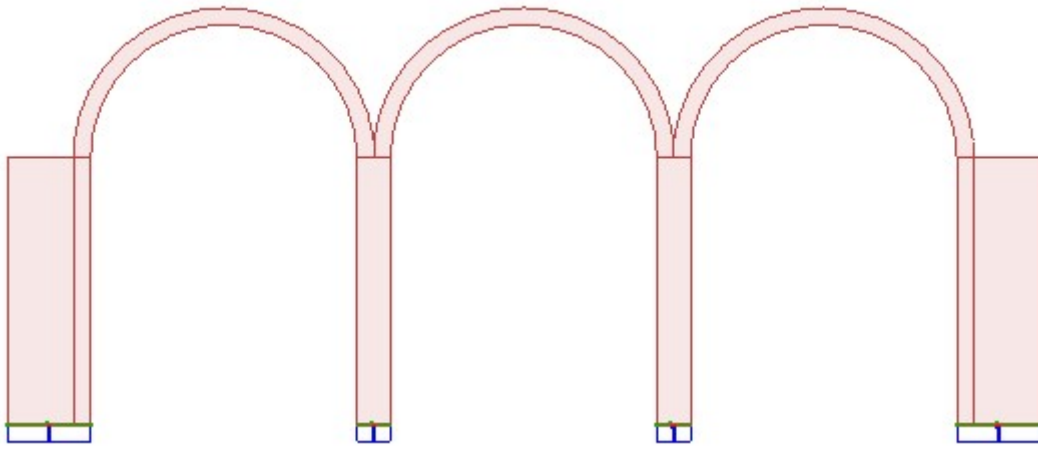
#### 3.3.2 Konstruksjonscases i FEM-Design 21

Case 1, Hallkirke med kun søyler og buer:



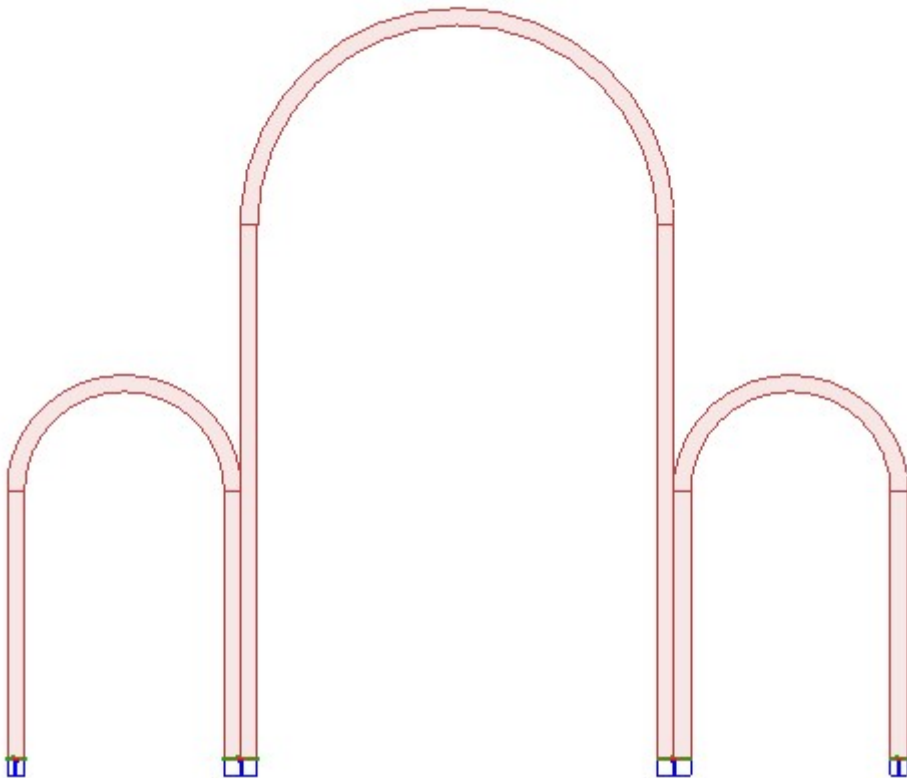
Figur 20: FEM-Design 21, Case 1.

Case 2, Hallkirke med søyler, buer og srebepilarer:



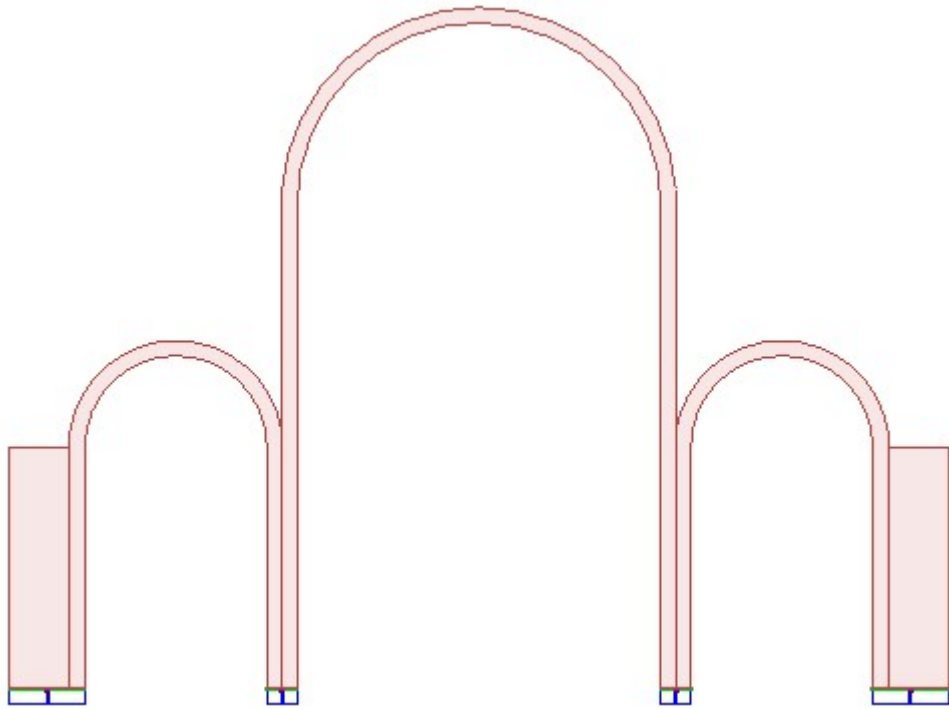
Figur 21: FEM-Design 21, Case 2.

Case 3, Basilika med kun søyler og buer:



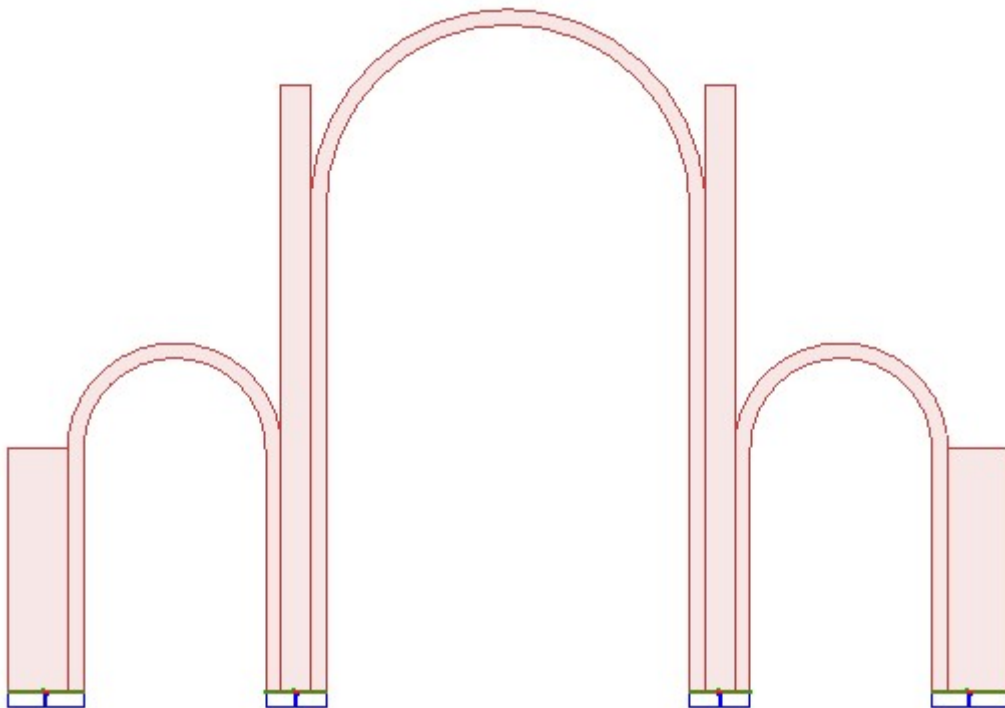
Figur 22: FEM-Design 21, Case 3.

Case 4, Basilika med søyler, buer og ytre strebepilarer:



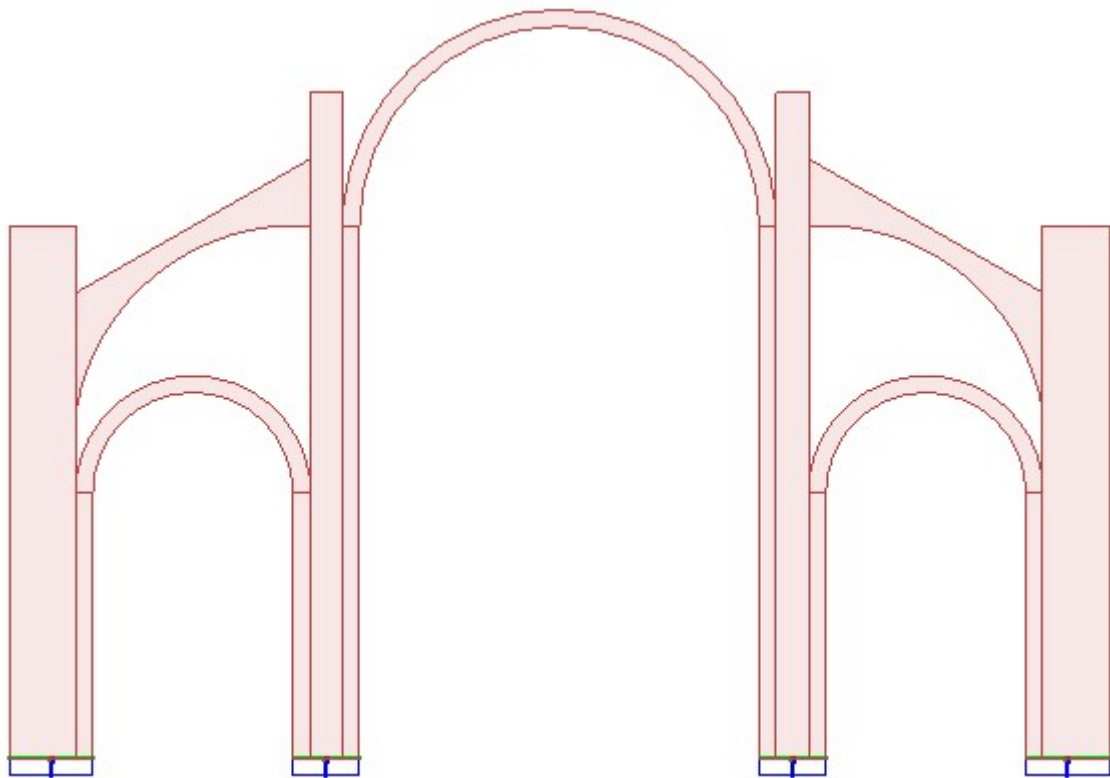
Figur 23: FEM-Design 21, Case 4.

Case 5, Basilika med søyler, buer og strebepilarer:



Figur 24: FEM-Design 21, Case 5.

Case 6, Basilika med søyler, buer, strebepilarer og strebebuer:

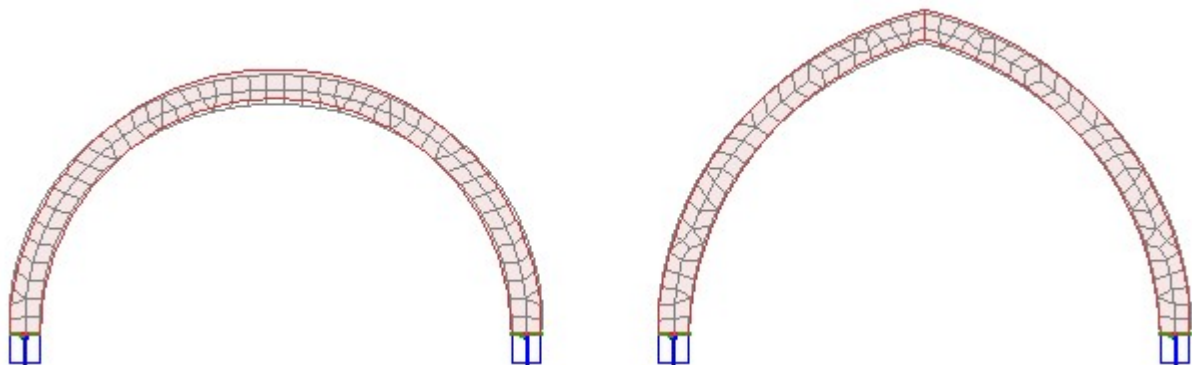


Figur 25: FEM-Design 21, Case 6.

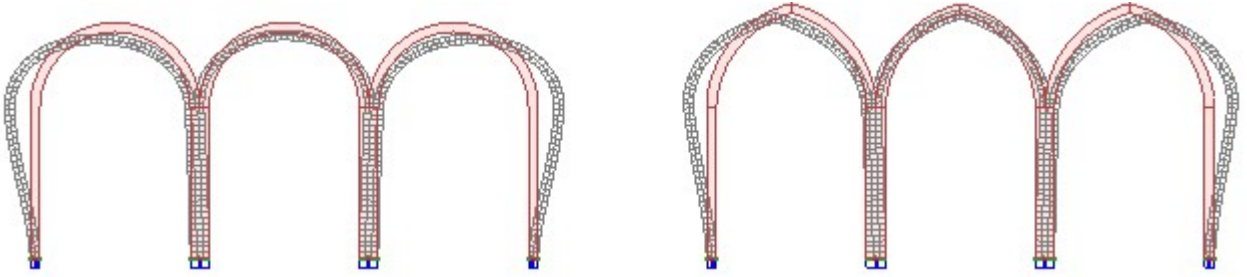
## 4 Resultater

### 4.1 Resultater for spissbuer kontra rundbuer

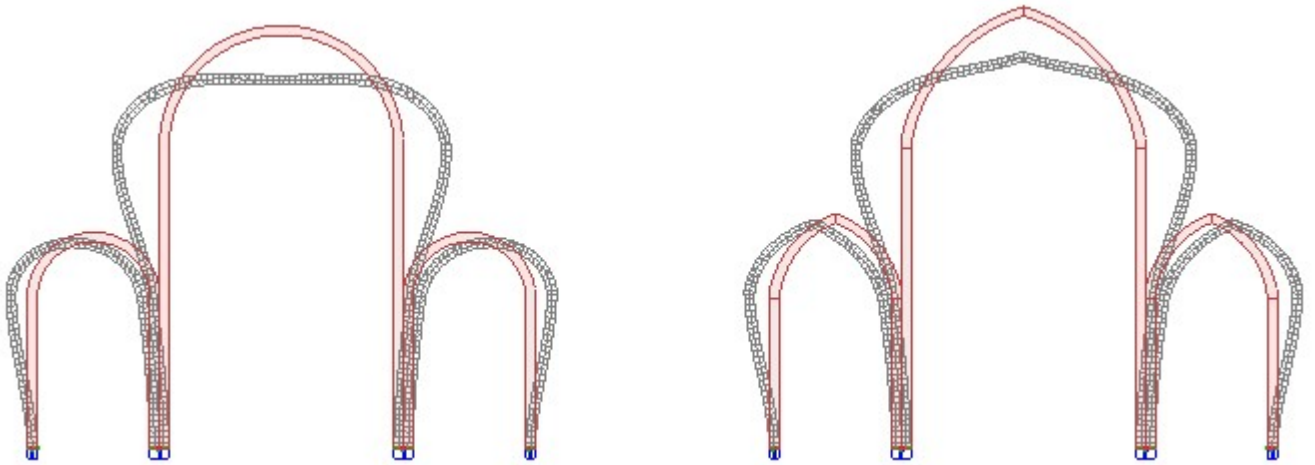
Vist i figur 26, 27, 28 og 29 er sammenligningen av deformasjonene med rundbuer og spissbuer i FEM-Design 21:



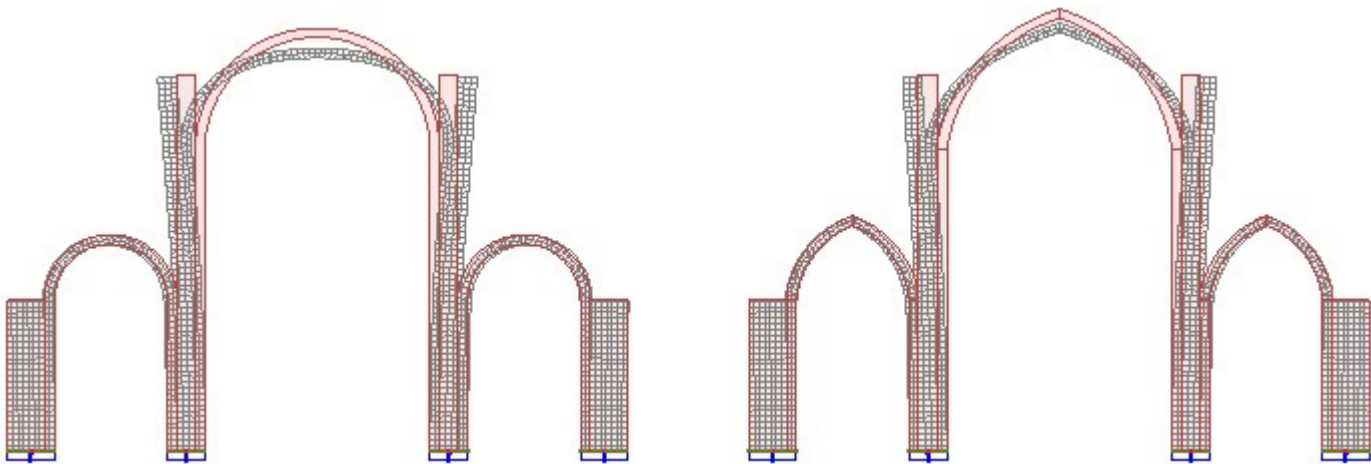
Figur 26: FEM-Design 21, rundbue og spissbue i deformasjon.



Figur 27: FEM-Design 21, Deformasjon av case 1 med rundbue og spissbue.



Figur 28: FEM-Design 21, Deformasjon av case 3 med rundbue og spissbue.

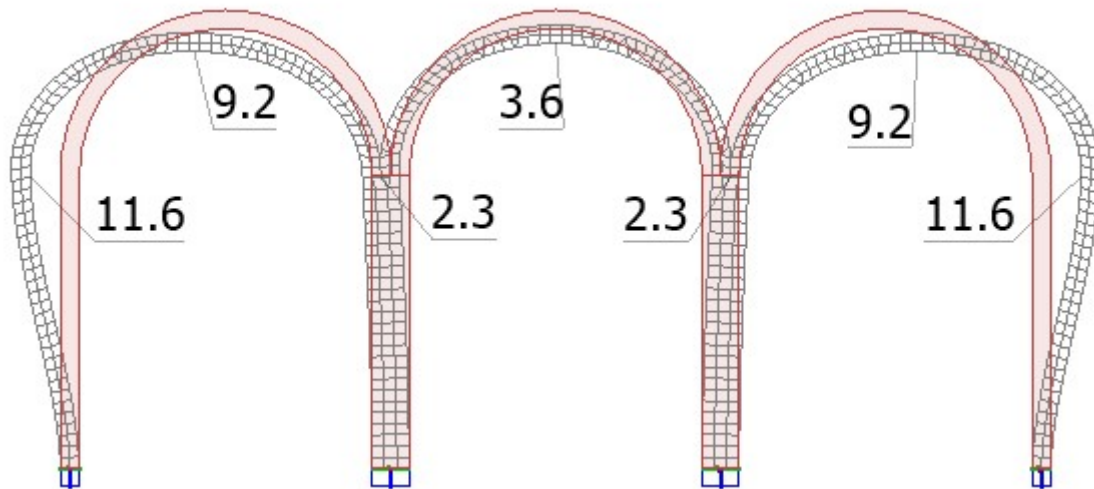


Figur 29: FEM-Design 21, Deformasjon av case 5 med rundbue og spissbue.

## 4.2 Deformasjon

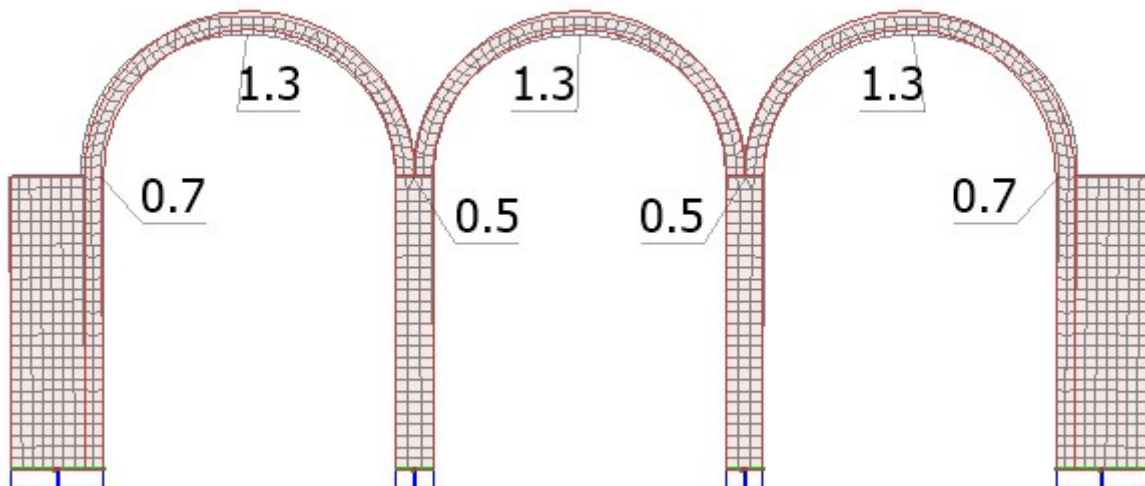
Følgende figurer viser resultater av deformasjon i alle fem cases fra FEM-Design 21, oppgitt i millimeter:

Case 1:



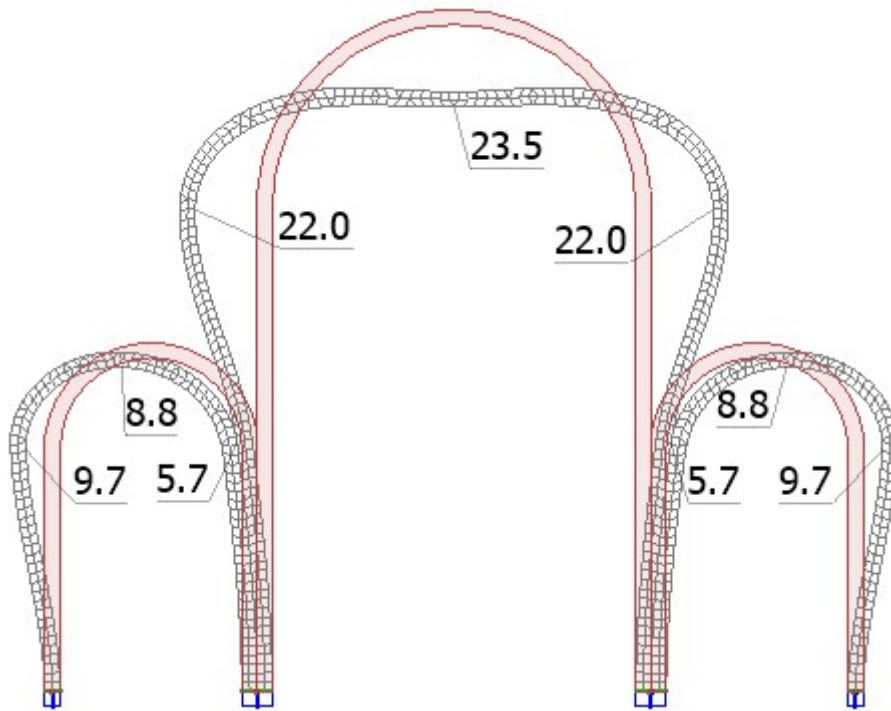
Figur 30: FEM-Design 21, Case 1 deformasjon.

Case 2:



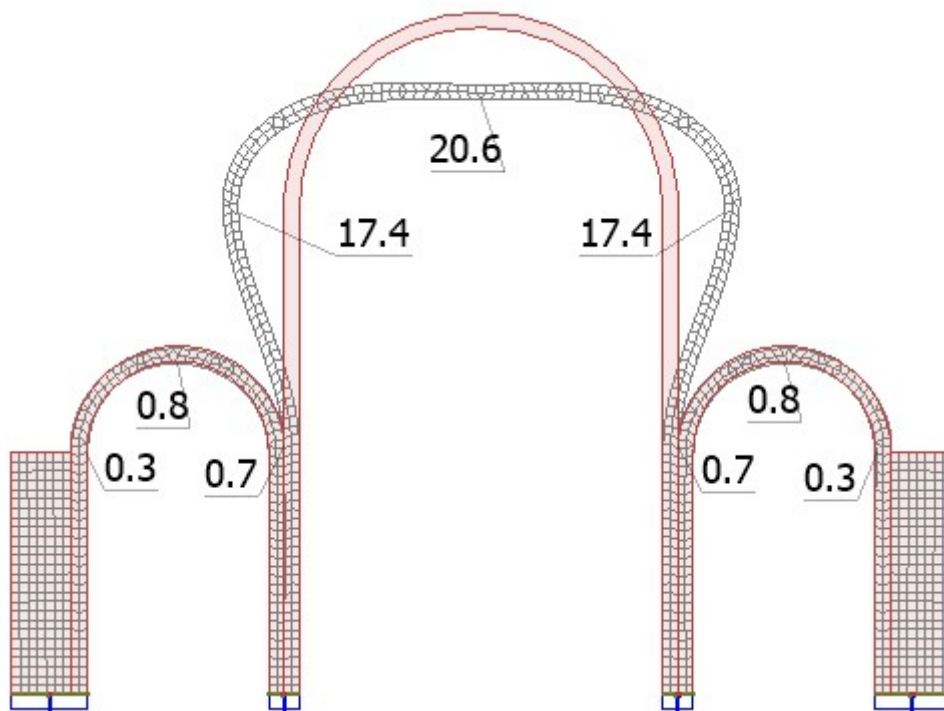
Figur 31: FEM-Design 21, Case 2 deformasjon.

Case 3:



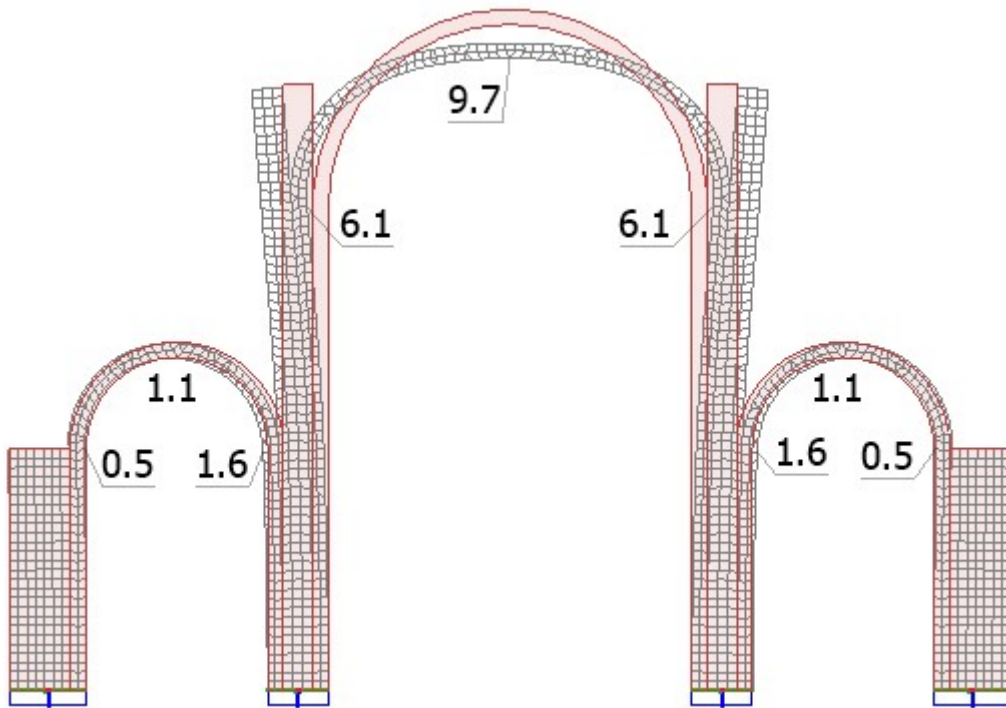
Figur 32: FEM-Design 21, Case 3 deformasjon.

Case 4:



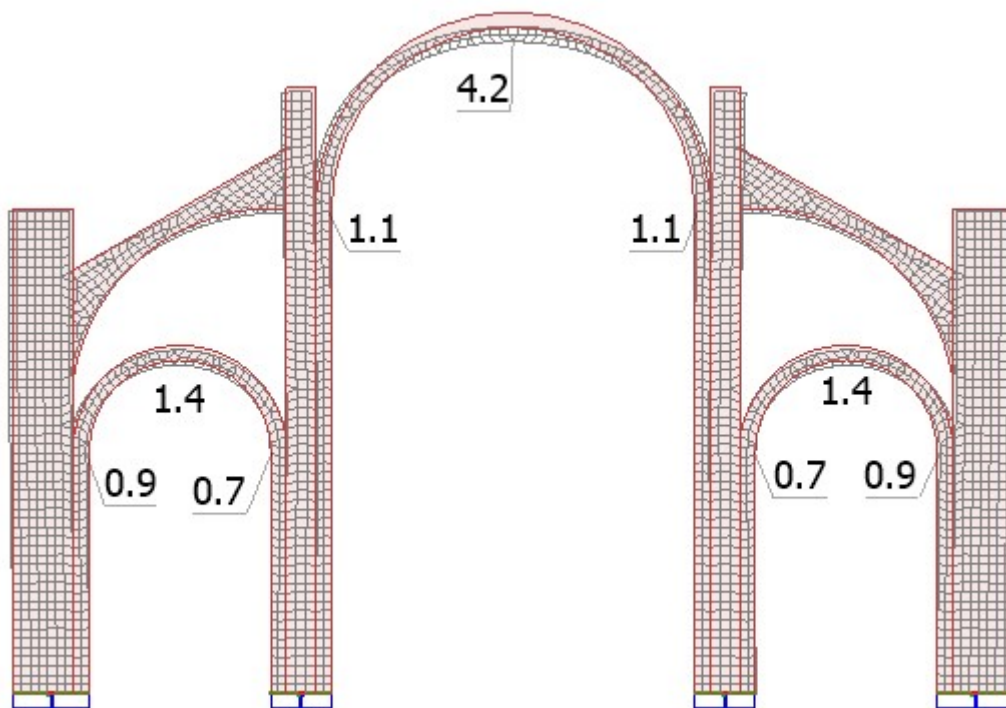
Figur 33: FEM-Design 21, Case 4 deformasjon.

Case 5:



Figur 34: FEM-Design 21, Case 5 deformasjon.

Case 6:



Figur 35: FEM-Design 21, Case 6 deformasjon.



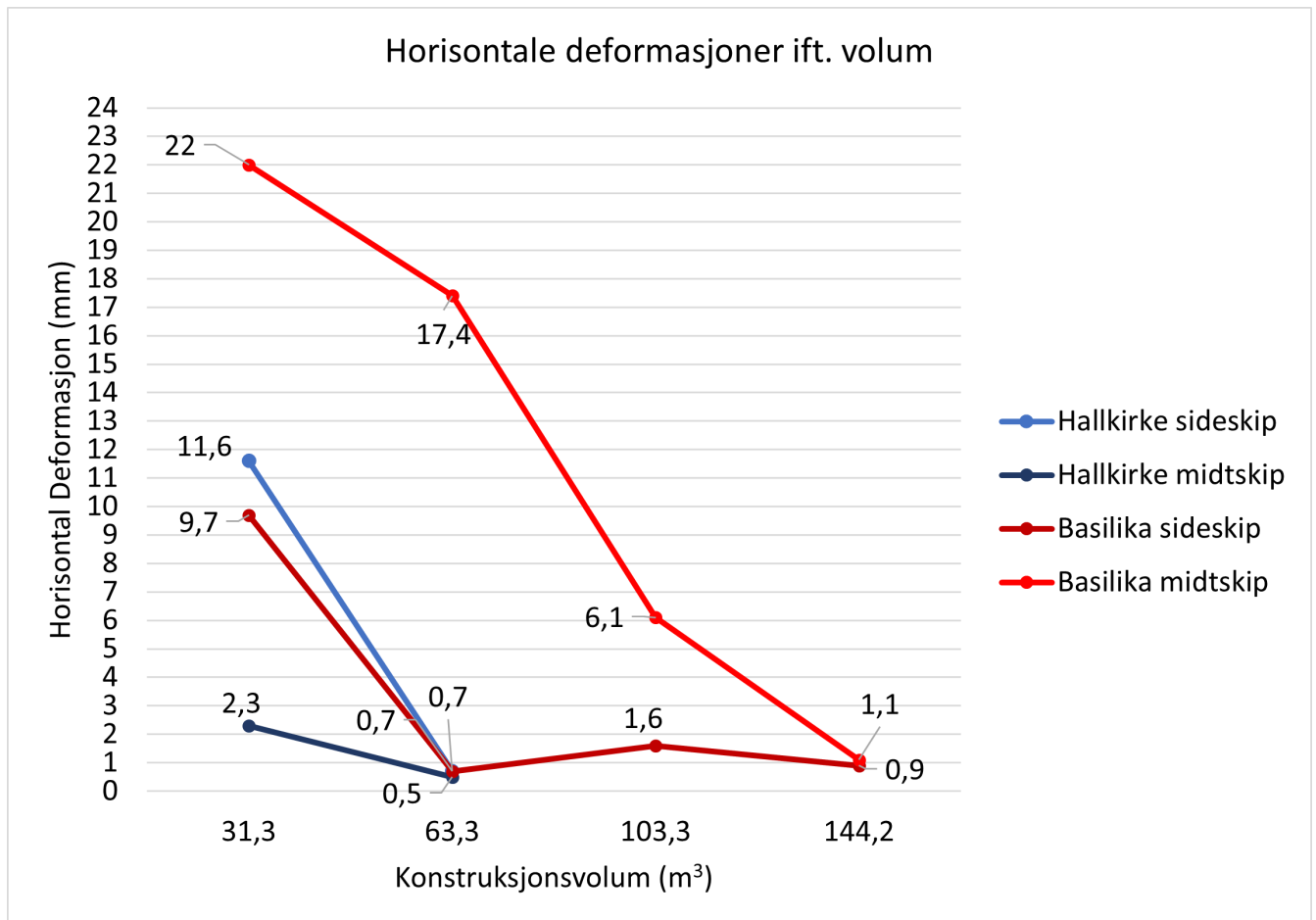
### 4.3 Horisontale deformasjoner ift. volum

Tabell 6 viser maksimale horisontale deformasjoner for sideskip og midtskip i konstruksjonscasene:

Case	Hallkirke sideskip	Hallkirke midtskip	Basilika sideskip	Basilika midtskip
1	11,6mm	2,3mm	-	-
2	0,7mm	0,5mm	-	-
3	-	-	9,7mm	22,0mm
4	-	-	0,7mm	17,4mm
5	-	-	1,6mm	6,1mm
6	-	-	0,9mm	1,1mm

Tabell 6: Maksimale horisontale deformasjoner for alle konstruksjonscases.

Følgende tabell viser sammenhengen mellom horisontale deformasjoner og konstruksjonsvolum i konstruksjonscasene:



Figur 36: Excel-diagram, horisontale deformasjoner ift. volum.

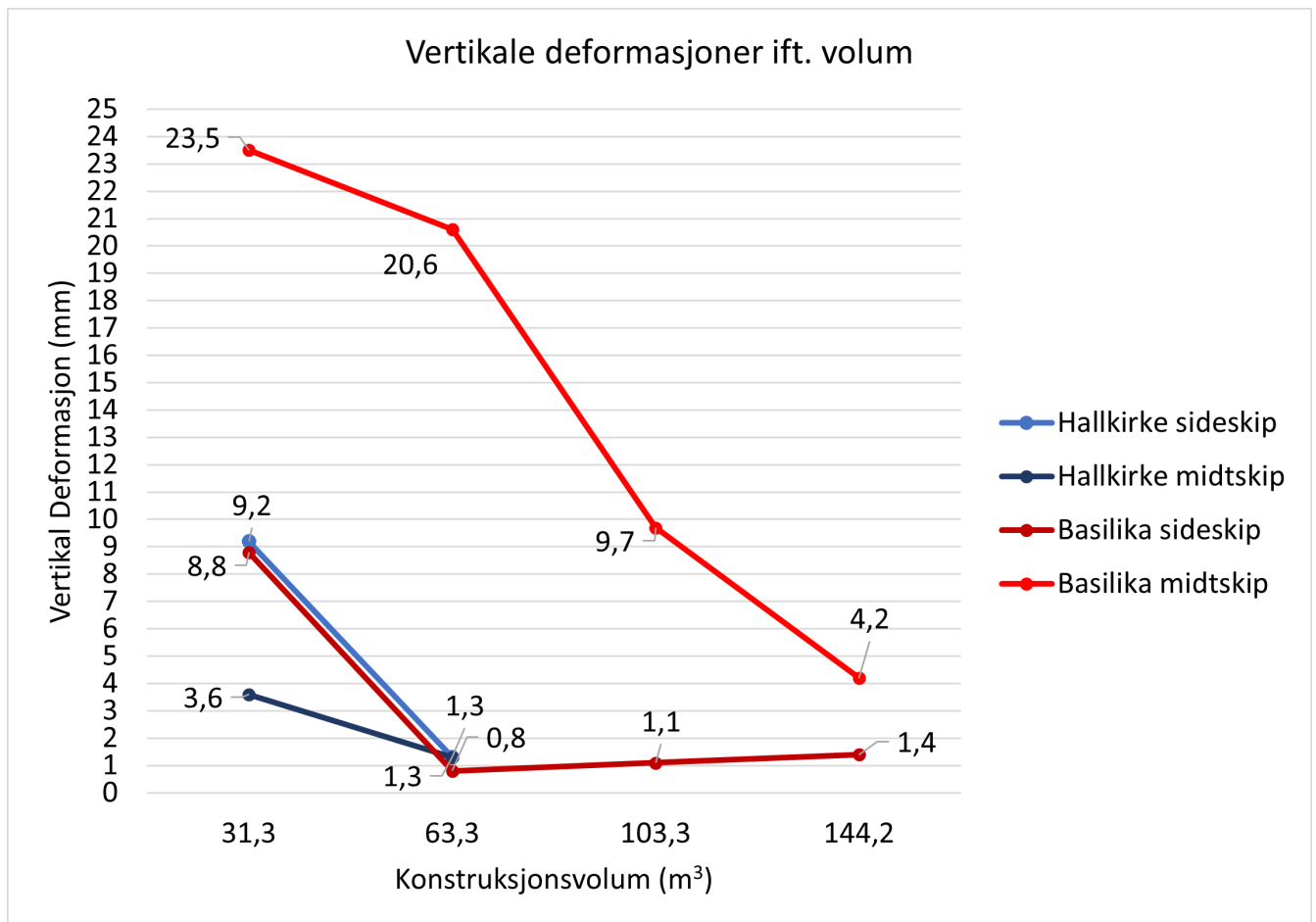
#### 4.4 Vertikale deformasjoner ift. volum

Tabell 7 viser maksimale vertikale deformasjoner for sideskip og midtskip i konstruksjonscasene:

Case	Hallkirke sideskip	Hallkirke midtskip	Basilika sideskip	Basilika midtskip
1	9,2mm	3,6mm	-	-
2	1,3mm	1,3mm	-	-
3	-	-	8,8mm	23,5mm
4	-	-	0,8mm	20,6mm
5	-	-	1,1mm	9,7mm
6	-	-	1,4mm	4,2mm

Tabell 7: Maksimale vertikale deformasjoner for alle konstruksjonscases.

Følgende tabell viser sammenhengen mellom vertikale deformasjoner og konstruksjonsvolum i konstruksjonscasene:



Figur 37: Excel-diagram, vertikale deformasjoner ift. volum.

## 5 Diskusjon

### 5.1 Forutsetninger

I denne oppgaven er det noen forutsetninger som forenkler analysen. Disse er tatt i bruk for å kunne se kun på differansen i oppførselen til konstruksjonene under egenvekt og dermed bekrefte eller avkrefte hypotesen som ligger i bakgrunn av oppgaven. De største forutsetningene er at konstruksjonene er geometrisk forenklet (f.eks. spissbuer til rundbuer) og de er skalert i størrelse slik at de er sammenlignbare. Disse endringene i konstruksjonene påvirker ikke oppførselen av bygningene grunnet horisontale krefter, dette gjør at ved å innføre disse endringene blir geometriene mere generaliserte og resultatene kan bli utnyttet til videre arbeid på spesifikke konstruksjoner.

### 5.2 Skalering av konstruksjonene

Skaleringen av konstruksjonene ble bestemt slik at størrelsen på hallkirken og basilikaen kan være sammenlignbart. Ved å innføre restriksjoner på størrelse av geometriene på et nett med bestemte verdier (figur 1 og 2) og dermed skalere størrelsen basert på virkelige bygg kan et generalisert eksempel av hallkirke og basilika bli konstruert. Det er viktig for denne oppgaven at disse bygningene er sammenlignbare, da det er åpenbart at en stor basilika har større virkende krefter enn en liten hallkirke og dermed trenger mer materialer og kunnskap.

### 5.3 To-hengslet bue, bruk og analyse

Buen er brukt i konstruksjoner for å øke bærekapasiteten over åpninger, da geometrien til buen overfører de vertikale kreftene til normalkrefter i form av trykk og strekk. Disse kreftene blir så overført som vertikal trykkraft og horisontal skyvekraft ned til søylene de står på. Dette tillater større åpninger enn rette bjelker. Buer i tegl/stein utnytter forsiktig kuttet voussoirer, kileformet tegl som må passe flatene til teglet ved siden av perfekt. Effekten av dette er jevn overføring av trykk nedover i buen og ned til søylene. Dette er også en av fordelene fra buen til bjelker, konstruksjonen av bjelken involverer flere mindre klosser av stein, mens rette bjelker var som regel en massiv kloss som var komplisert å sette på plass [Britannica, 2008].

Kapittel 2.2.1 beviser at de vertikale kreftene blir transformert til en diagonal skyvekraft, som kan bli dekomponert til lokale vertikale og horisontale krefter (vist med formel 2 og 1). Dette enkle beviset viser grunnen til hvorfor en horisontal reaksjonskraft oppstår.

Analysen av den to-hengslede rundbuen har som formål å vise sammengengen mellom spennet av buen og de horisontale kreftene som oppstår i reaksjonene. Ved å bevise at rundbuer med større radius resulterer i lineært større horisontal skyvekraft, kan det argumenteres at midtskipet i basilikaer krever mere avstivning enn sideskipene i hallkirker og derfor påføre større krav om kunnskap av kraftfordeling og større materialkostnader.

## 5.4 Rundbue kontra spissbue

De fleste gotiske hallkirker og basilikaer fra 1100-tallet hevet buene og portalene ble bygget med den karakteristiske spissformen [Hansen, 2021]. Denne endringen tillot slankere søyler og større åpne rom. Likevel i analysen blir det brukt rundbuer, som er karakteristiske for den romanske perioden.

Valget av å endre spissbuer til rundbuer i konstruksjonene kommer fra to hovedpoeng. Det første er at vinklene for spissbuer varierer fra bygg til bygg og er optimalisert for spannet de dekker, dermed er generalisering av en spissbue ugunstig. Den andre grunnen er at forskjellen i oppførsel av begge konstruksjonene grunnet buetype er liten nok til å kunne komme fram til samme konklusjon ved bruk av begge buetyper. Denne konklusjonen blir kontinuerlig mindre nøyaktig, jo større høydeforskjell det er mellom sideskipene og midtskipet i basilikaer. Spissbuer er mere effektive på høyere konstruksjoner ved at de overfører vertikale krefter i større grad enn horisontale. Det betyr at resultanten av de vertikale og horisontale kreftene fra spissbuer har større vinkel enn resultanten fra rundbuer.

## 5.5 Balanse i horisontale krefter

Forskjellen i kompleksiteten i geometri mellom hallkirke og basilika gjør at det er enklere å kontre de horisontale kreftene i hallkirker enn basilikaer. På grunn av lik høyde på midtskipet og sideskipene vil det oppstå en symmetri som gjør at de eneste horisontale kreftene som gir deformasjon er de kreftene som påvirker de ytterste søylene. Dette er lett løst ved å avstive disse søylene. I basilika derimot er de horisontale kreftene en utfordring, spesielt når man ser på massive bygninger. Disse kreftene kommer øverst og et sted rundt midten av søylene på midtskipet. For å kontre disse kreftene er det nødvendig at søylene er stivere og dermed mere massive og i de fleste tilfeller er det også behov for å avstive disse øverst på søylene. Disse avstivende buene (strebebuer) går fra strebepilarene mellom midtskipet og sideskipene ned til avstiverene på de ytterste søylene, dermed må også disse være høyere.

Denne forskjellen i geometri gjør dermed at det kan argumenteres at det byggmessig er mere kompisert og dyrere å bygge basilikaer enn hallkirker.

## 5.6 Valg av cases, lengder og volumsammenheng

Valget av 6 (tabell 1) cases av konstruksjoner kom fra ønske om å vise gradvis forbedring av deformasjoner. Dette kan hjelpe å beskrive hvordan konstruksjonene oppfører seg ved bestemte mengder av avstiving og materialmengder. De første casene av hallkirke og basilika er satt opp til å vise virkningen av buene på bare søylene som bærer dem og visualisere de horisontale kreftene som må føres videre inn i strebepilarer og strebebuer. Tversnittene for case 1 & 3 er laget slik at volumet er omtrentelig likt og et startpunkt for videre forbedringer av konstruksjonen. Deretter er case 2 & 4 lagt opp til å ha slike strebepilarer som man ser i de fleste hallkirker; enkle, tunge og akkurat høye nok til å kunne absorbere den horisontale defleksjonen i de ytre søylene. Dette er de to casene som viser hvor stor forskjell det er faktisk mellom de to konstruksjonene, da hallkirken (case

2) viser store forbedringer i deformasjon, mens basilikaen (case 4) viser kun forbedringer i deformasjon ved sideskipene. Bare disse to casene kan brukes til å argumentere at kompleksiteten til geometrien av basilikaen gjør den vanskeligere og dyrere å konstruere, som igjen viser til at kravet om kunnskap og økonomisk rikdom er høyere enn ved konstruksjonen av en hallkirke.

De senere casene (5 & 6) viser hvor mye mere avstivning en basilika trenger for å oppnå samme nivå av avstivning som en hallkirke med kun et par av strebepilarer. Case 5 viser at å sette på strebepilarer mellom midtskipet og sideskipene ikke gir nok avstivning til den horisontale kraften fra den store midtskipbuen. Dette ser vi ved innføringen av strebebuer, slik som i case 6. Strebebuene er effektive i å ta i mot den diagonale skyvekraften fra buen og føre den videre nedover mot de massive ytre strebepilarene som absorberer det meste av deformasjonen.

Lengdevariablene i tabell 2 er bestemt fra å bruke målestokken fra tversnittene i vedlegg 1 og 2 i 11.1 og 11.2. Siden ikke alle av disse kirkene og katedralene var samme størrelse hadde de heller ikke samme tversnitt av elementer, ble det tatt en avgjørelse om å basere disse mest på katedralen i Langres (figur 41), siden den generaliserte basilikaen var omtrent like høy. Geometriene ble også forenklet, slik at alle tversnitt var enten kvadratiske eller rektangulære, for større jevnlighet.

## 5.7 Materialeegenskaper

Materialeegenskapene for tegl og mørtel brukt i den digitale analysen ble hentet fra en programvare brukt til materialteknologi. Verdiene er tatt fra level 3, brick(common, hard)(2.03), dette er fordi tegl laget i den gotiske perioden var tung og ensformig, den var ikke modifisert med hulrom eller lavere densitet. Verdiene fra [ANSYS, 2021] er i intervaller fra og til en verdi, dette er på grunn av at verdiene varierer fra tegl til tegl med produksjonsmåte og andre faktorer. For å ikke overestimere, ble de laveste verdiene brukt. Disse egenskapene er estimerer og er et punkt av videre arbeid ved dette tema.

Materialeegenskapene kan raskt bli en feilkilde i den digitale analysen. Dermed kan det også være gunstig å teste praktisk i laboratorium, da FEM-Design 21 ikke dokumenterer interaksjonen mellom tegl og mørtel. Dette er også et viktig punkt som kan undersøkes videre. Sprekking av tegl og mørtel er også ikke inkludert i det digitale analysen i FEM-Design. Skjærkrefter er en viktig faktor i murbygging, da mørtelet som limer sammen teglene, har som regel mindre fasthet enn selve teglet. Sprekking av tegl under trykk er kritisk for teglbuer og kan føre til kollaps. Denne oppgaven vil vise oppførselen til geometriene med tanke på horisontale skyvekrefter og avstivning, men materialeegenskaper burde fordypes videre.

## 5.8 Resultater av deformasjon

Resultatene av deformasjon vist i figurer 30-35 bekrefter at deformasjonene gitt fra både vertikale og horisontale krefter fra buene er større i hver case av basilika enn hallkirke. Disse deformasjonene er notert og sortert i tabell 6 og 7. I hver case har det blitt tatt

målinger av deformasjoner i mm på tre punkter i hver bue; toppunktet og bunnpunktene på hver side. I tabellene er det notert både maksimale vertikale og horisontale deformasjoner for midtskip og sideskip. Legg merke til at dette er deformasjoner kun fra momentan egenvekt av bærende konstruksjon og vil øke med resten av byggelementene og kryp. I tillegg vil disse øke med inkludering av sprekking og skliing av tegl og mørtel.

Resultatene viser at i hallkirker er kun sideskipene de kritiske elementene, mens i basilikaer er både sideskip og midtskipet kritisk og trenger avstivning. Allerede dette gir argument for at geometrien til basilika er mere kompleks og trenger mere kunnskap. Videre ser vi at i hallkirker med strebepilarer (case 2, figur 21) er de horisontale deformasjonene kun 6% av deformasjonen med omtrent dobbel konstruksjonsmasse, mens for basilikaer med dobbel konstruksjonsmasse er deformasjonen omtrent 79% av deformasjonen i case 1. I case 2 er deformasjonene relativt små og trenger sannsynligvis ikke mere avstivning, derimot case 4 fortsatt har relativt store deformasjoner og trenger mere avstivning. Først når basilikaen (case 6, 25) med strebebuer og to par av strebepilarer, med en økning på over 4,5 ganger startvolumet oppnår 5% av startdeformasjonene i case 2. Omtrent samme trend gjelder for de vertikale deformasjonene vist i figur 37. Dette antyder at basilikaer trenger større konstruksjonsvolum for å oppnå like lavt nivå av deformasjoner som hallkirker, som igjen antyder til at det trengs mere materialer for å stabilisere en basilika enn en hallkirke. Kravet på flere elementer for å stabilisere en konstruksjon gir argumentet at en basilika er en dyrere konstruksjon enn hallkirken.

## 6 Konklusjon

Selv om den gotisk perioden ikke innførte hallkirker og basilikaer som strukturelle konstruksjoner, er det denne perioden som er mest kjent for de massive og praktfulle åpne konstruksjonene. Den gotiske perioden innoverte spissbuer og arkitektene viste god forståelse for skyvekrefter, selv uten empiriske data. Tradisjonen av mester og lærling førte til at kunnskapen ble ført videre og utviklet gjennom generasjoner, men det er også derfor mange av disse bygningene ble bygd på en ”prøving og feiling” metode som førte til at byggeprosessen av massive bygg varte lenge.

De massive basilikaene ble sjeldent bygget i mindre byer og landsbyer, i stedet ble det konstruert hallkirker, konstruksjoner der sideskipene har samme høyde som midtskipet. Valget om å bygge de mindre komplekse konstruksjonene i de mindre rike byene er sannsynligvis ikke et tilfelle, men kan det bevises at det er statikken og kostnadene til den mindre komplekse geometrien er grunnen eller en faktor til at hallkirker er utbredt i de mindre landsbyene?

Gjennom analyse av ekte hallkirker og basilikaer er det dannet en generell geometri for hver av konstruksjonstypene. Disse geometriene er forenklet og derfor ikke realistiske, men de viser en tilnærming av oppførselen til konstruksjonene. Dette tillater å undersøke statisk deformasjon grunnet egenvekt av bærekonstruksjonen. Dette tillater å trekke konklusjoner om den generelle statiske oppførselen av de to konstruksjonstypene og konkludere om den geometriske formen har påvirkning på krav om statikkunnskap og større materialmengder.

Ut fra resultatene i de digitale analysene er det tydelig at geometrien til en basilika fører med seg større kompleksitet av deformasjon. Kunnskap om skyvekrefter spiller en større faktor ved konstruksjon av basilika, da forskjellige høyder av sideskip og midtskip fører til flere diagonale skyvekrefter som ikke utjevner hverandre. Balansen av de horisontale skyvekraftene i en hallkirke fører til at midskipssøylene vil oppleve mindre skjærkrefter og momenter enn søylene i en basilika. Resultatene viser også at for å stabilisere en hallkirke og en basilika til omtrentlig samme nivå, trengs det større volum av bærekonstruksjon og dermed materialer. Dette fører også til større kostnader. Med kombinasjon av ”prøving og feiling” metoden, flere usikkerhetsselementer og lengre byggetid vil konstruksjonen av en mere kompleks geometri som en basilika være økonomisk krevende. I små landsbyer var ikke dette alltid mulig.

Det vil ut i fra kritisk tenking og resultater fra analysene i denne oppgaven kunne bekreftes at forskjell i kompleksitet av geometri og statikk, samt materialmengder og kostnader medbrakt av disse, var faktorer i den geografiske populasjonen av hallkirker i de mindre landsbyene og basilikaer i store byer og handelsbyer langs kysten.

## 7 Videre arbeid

Videre arbeid i dette tema er å fordype seg i; Dynamiske analyser av fullstendig bygg, utarbeiding av materialegenskaper gjennom praktisk testing, testing med digitale programvarer som tar for seg sprekking og mørtelskliing, analyse av bygg med forskjellig skala, testing av grenser for bygningstørrelser. Videre kan det utarbeides formler som beskriver mengder av avstivning som trengs i forhold til konstruksjonsstørrelser og åpningsstørrelser.

## 8 Referanser

- [ANSYS, 2021] ANSYS (2021). Granta edupack (version 21.2.0).
- [Britannica, 2008] Britannica, T. E. o. E. (2008). Arch.
- [Britannica, 2017] Britannica, T. E. o. E. (2017). Masonry.
- [Ebert, 2021] Ebert, M. (2021). Zur verwendung des westfälischen quadrates in mecklenburgischen hallenkirchen.
- [Girihagama et al., 2015] Girihagama, L., Nof, D., and Hancock, C. (2015). Bubble-induced cave collapse. *PLoS ONE*, 10.
- [Hansen, 2021] Hansen, S. S. (2021). Gotisk stil 1180-1500.
- [Hibbeler and Tan, 2006] Hibbeler, R. C. and Tan, K.-H. (2006). *Structural analysis*. Pearson Prentice Hall Upper Saddle River.
- [Hoppe, 1998] Hoppe, R. (1998). *Die Entwicklung des Kirchenbaues in Mecklenburg von seinen Anfängen bis zum Ende des dritten Viertels des dreizehnten Jahrhunderts*. Ludwig.
- [le Duc, 1856] le Duc, E. V. (1856). *Dictionary of French Architecture for 11th to 16th Century*. Eugène Viollet-le-Duc.
- [Vollen, 1999] Vollen, Ø. (1999). *Statikk og fasthetslære*. Oslo, NKI forlaget.



## 9 Figurliste

### List of Figures

1	Hallkirke snitt . . . . .	6
2	Basilika snitt . . . . .	7
3	Krafttransformasjon i en bue utsatt for en punktkraft. . . . .	8
4	Dekomponering av en kraftvektor $F$ . . . . .	9
5	2-hengslet rundbue utsatt for egenvekt. . . . .	10
6	Ekvivalent bjelke . . . . .	11
7	Visualisering av horisontale krefter fra buer i en hallkirke. . . . .	13
8	Visualisering av deformasjon i hallkirke utsatt for horisontale krefter fra buer. . . . .	14
9	Visualisering av horisontale krefter fra buer i en basilika. . . . .	15
10	Visualisering av deformasjon i basilika utsatt for horisontale krefter fra buer. . . . .	16
11	Hallkirke med strebepilarer, case 2. . . . .	18
12	Snitt A-A hallkirke. . . . .	18
13	Snitt B-B hallkirke. . . . .	19
14	Basilika med strebepilarer og strebebuer, case 5. . . . .	19
15	Snitt A-A basilika. . . . .	20
16	Snitt B-B og C-C basilika . . . . .	20
17	Ekvivalente spissbuer til brukte rundbuer. . . . .	21
18	Materialegenskaper FEM-Design. . . . .	23
19	Materialegenskaper FEM-Design. . . . .	23
20	FEM-Design 21, Case 1. . . . .	24
21	FEM-Design 21, Case 2. . . . .	25
22	FEM-Design 21, Case 3. . . . .	25
23	FEM-Design 21, Case 4. . . . .	26
24	FEM-Design 21, Case 5. . . . .	26
25	FEM-Design 21, Case 6. . . . .	27
26	FEM-Design 21, rundbue og spissbue i deformasjon. . . . .	27
27	FEM-Design 21, Deformasjon av case 1 med rundbue og spissbue. . . . .	28
28	FEM-Design 21, Deformasjon av case 3 med rundbue og spissbue. . . . .	28
29	FEM-Design 21, Deformasjon av case 5 med rundbue og spissbue. . . . .	28
30	FEM-Design 21, Case 1 deformasjon. . . . .	29
31	FEM-Design 21, Case 2 deformasjon. . . . .	29
32	FEM-Design 21, Case 3 deformasjon. . . . .	30
33	FEM-Design 21, Case 4 deformasjon. . . . .	30
34	FEM-Design 21, Case 5 deformasjon. . . . .	31
35	FEM-Design 21, Case 6 deformasjon. . . . .	31
36	Excel-diagram, horisontale deformasjoner ift. volum. . . . .	32
37	Excel-diagram, vertikale deformasjoner ift. volum. . . . .	33
38	Tversnitt av Nikolaikirche i Rostock. . . . .	42
39	Tversnitt av hallkirke i Grevesmuhlen. . . . .	42
40	Tversnitt av Amienskatedralen fra [le Duc, 1856]. . . . .	43
41	Tversnitt av Cathédrale Saint-Mammès de Langres fra [le Duc, 1856]. . . . .	44
42	Volumberegninger, Excel. . . . .	45
43	Volumsammenligning, Excel. . . . .	45

## 10 Tabelliste

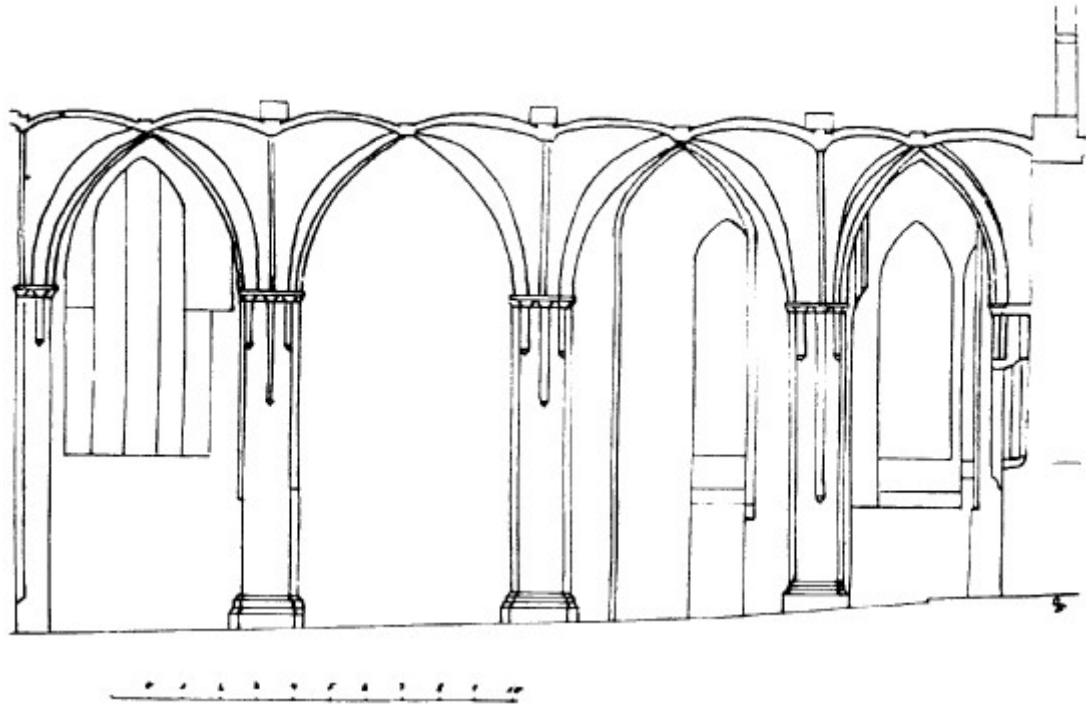
### List of Tables

1	Konstruksjonscases . . . . .	17
2	Lengdevariabler brukt til geometrien av snitt . . . . .	17
3	Høyder og lengder for hallkirke. . . . .	18
4	Høyder og lengder for basilika. . . . .	20
5	Konstruksjonsvolum for alle caser. . . . .	22
6	Maksimale horisontale deformasjoner for alle konstruksjonscases. . . . .	32
7	Maksimale vertikale deformasjoner for alle konstruksjonscases. . . . .	33

# 11 Vedlegg

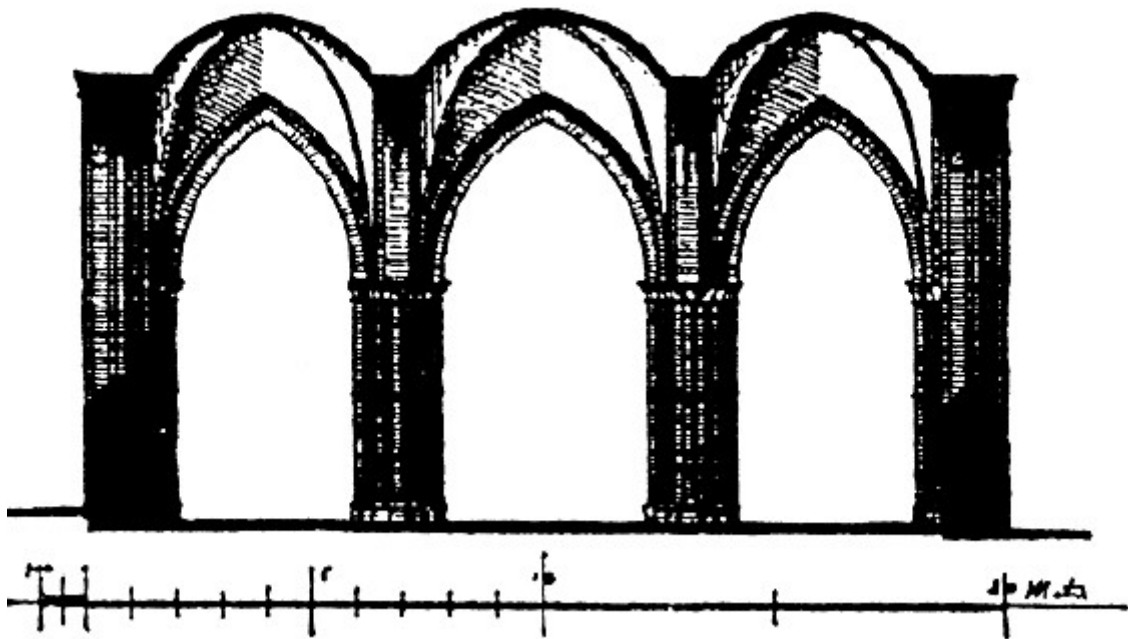
## 11.1 Vedlegg 1: Tversnitt av hallkirker

Nikolaikirche i Rostock, Tyskland [Hoppe, 1998]:



Figur 38: Tversnitt av Nikolaikirche i Rostock.

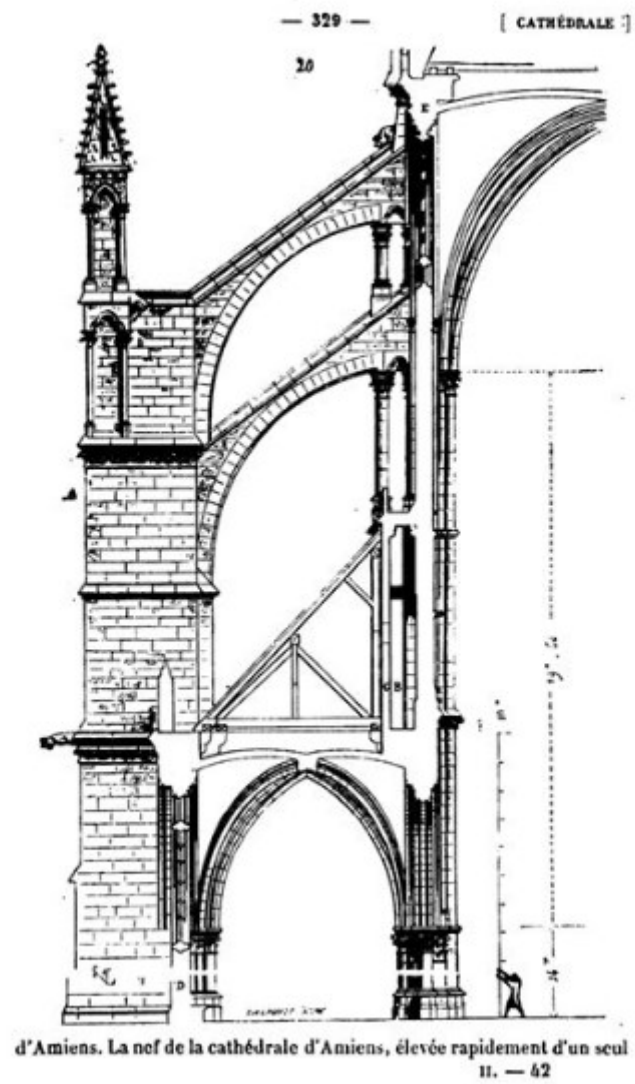
Hallkirke i Grevesmuhlen, Tyskland [Hoppe, 1998]:



Figur 39: Tversnitt av hallkirke i Grevesmuhlen.

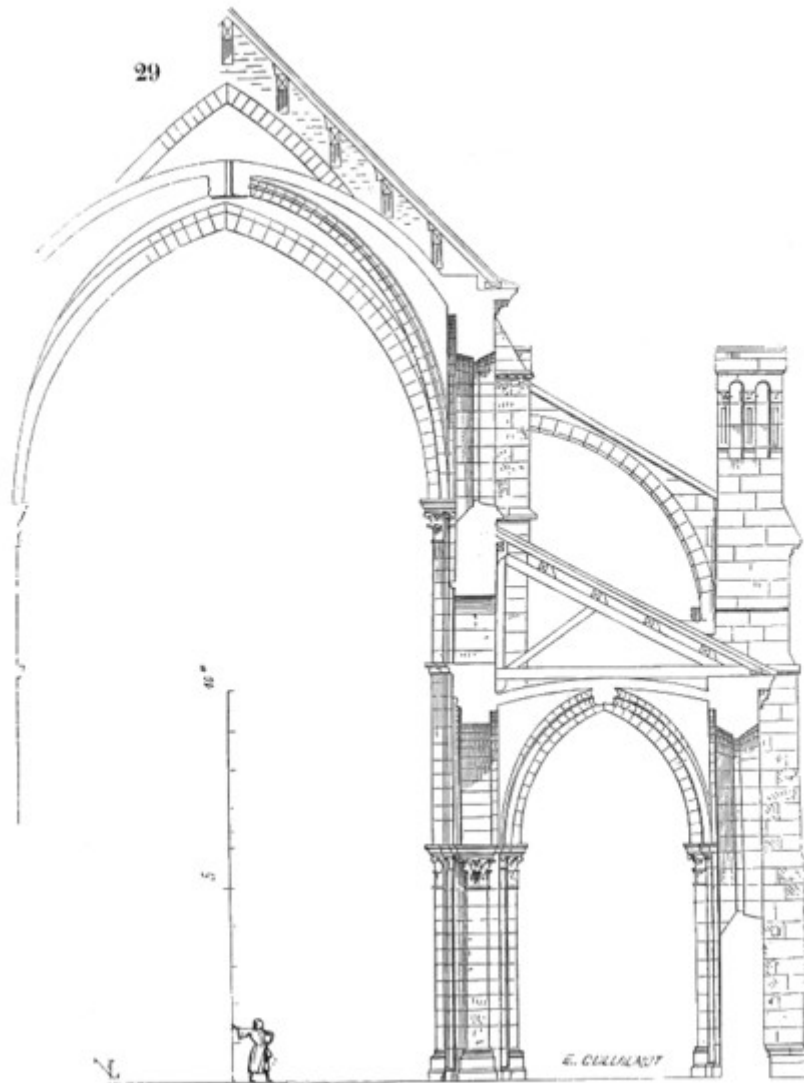
## 11.2 Vedlegg 2: Tversnitt av basilikaer

Amienskatedralen i Amiens, Frankrike:



Figur 40: Tversnitt av Amienskatedralen fra [le Duc, 1856].

Cathédrale Saint-Mammès de Langres i Langres, Frankrike:



Figur 41: Tversnitt av Cathédrale Saint-Mammès de Langres fra [le Duc, 1856].

### 11.3 Vedlegg 3: Excel beregninger

Volumberegninger av elementer for konstruksjonscases:

	Volum av konstruksjonene					
	Søyer	Buer	Stebepillar	Strebebue	Totalt volum	
Case 1	20,0	10,0	0,0	0,0	30,0	m <sup>3</sup>
Case 2	20,0	10,0	32,0	0,0	62,0	m <sup>3</sup>
Case 3	16,0	15,3	0,0	0,0	31,3	m <sup>3</sup>
Case 4	16,0	15,3	32,0	0,0	63,3	m <sup>3</sup>
Case 5	16,0	15,3	72,0	0,0	103,3	m <sup>3</sup>
Case 6	16,0	15,3	104,0	8,9	144,2	m <sup>3</sup>

Figur 42: Volumberegninger, Excel.

Sammenligning av volum for cases 1 & 3 og 2 & 4:

Volumsammenligning		
Case 1 & 3	0,96	%
Case 2 & 4	0,98	%

Figur 43: Volumsammenligning, Excel.

11.4 Vedlegg 4: Utrekning av horisontal skyvekraft for to-hengslede buer

$$H = \frac{\int (M_0 \times y) dx}{\int (y^2) dx}$$

$$\begin{aligned} \int (M_0 \times y) dx &= 2 \times \int_0^R (M_{01} \times y_1) dx \\ &= 2 \times \int_0^R (q(Rx - \frac{x^2}{2}) \times 2x - \frac{x^2}{R}) dx \\ &= 2q \int_0^R (\frac{x^4}{2R} - 2x^3 + 2Rx^2) \\ &= 2q [\frac{x^5}{10R} - \frac{x^4}{2} + \frac{2Rx^3}{3}]_0^R \\ &= 2q((\frac{R^4}{10} - \frac{R^4}{2} + \frac{2R^4}{3}) - (\frac{0^5}{10R} - \frac{0^4}{2} + \frac{2R \times 0^3}{3})) \\ &= 2q(\frac{R^4}{10} - \frac{R^4}{2} + \frac{2R^4}{3}) = \frac{8}{15}qR^4 \\ \int (M_0 \times y) dx &= \frac{8}{15}qR^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (y^2) dx &= \int_0^{2R} ((2x - \frac{x^2}{R})^2) dx \\ &= \int_0^{2R} (\frac{x^4}{R^2} - \frac{4x^3}{R} + 4x^2) dx \\ &= [\frac{x^5}{5R^2} - \frac{x^4}{R} + \frac{4x^3}{3}]_0^{2R} \\ &= \frac{32R^5}{5R^2} - \frac{16R^4}{R} + \frac{32R^3}{3} \\ &= \frac{32R^3}{5} - 16R^3 + \frac{32R^3}{3} = \frac{16}{15}R^3 \\ \int (y^2) dx &= \frac{16}{15}R^3 \end{aligned}$$

$$H = \frac{(8/15)qR^4}{(16/15)R^3} = \frac{qR}{2}$$



**Norges miljø- og biovitenskapelige universitet**  
Noregs miljø- og biovitenskapelige universitet  
Norwegian University of Life Sciences

Postboks 5003  
NO-1432 Ås  
Norway