



Norges miljø- og  
biovitenskapelige  
universitet

**Masteroppgave 2021 30 stp**  
Fakultet for realfag og teknologi

## **Analyse av tyngdefeltets signalegenskaper i et testfelt på Nordvestlandet**

Analysis of gravity field signal properties in a  
testbed in northwestern Norway

**Jan Gunnar Bakke**  
Institutt for Geomatikk



# Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på fem års studier ved Norges miljø- og biovitenskapelige universitet (NMBU). Oppgaven utgjør 30 studiepoeng og er gjennomført i løpet av våren 2021.

Å skrive masteroppgave under en pandemi har vært en spesiell utfordring. Tiden har vært preget av avstand og lite sosial kontakt, som har påvirket studenter i høy grad.

Jeg vil rette en stor takk til mine to veiledere Vegard Ophaug og Christian Gerlach, for svært grundig og faglig god veiledning underveis i prosessen for denne oppgaven. Uten deres hjelp hadde ikke oppgaven kommet dit den er idag. Videre vil jeg takke Kartverket for tilgang til data som er brukt i denne oppgaven.

Jeg ønsker også å rette en takk til familie, venner og kjæreste for god støtte og motivasjon i løpet av mine år som student. En spesiell takk går også til de andre masterstudentene i geomatikk som alltid sørget for god stemning på mastersalen, i den lille tiden vi fikk være der.

01.06.2021

Jan Gunnar Bakke



# Sammendrag

I denne gradsoppgaven skal tyngdefeltets signalegenskaper undersøkes i et testfelt på Nordvestlandet. Kartverket har som forberedelse til beregning av en presis regional geoide, satt opp et testfelt med tyngdeobservasjoner på Nordvestlandet. Geoideberegning omfatter det å fjerne flere kjente signalkomponenter fra det målte tyngdesignalet (*remove*), før disse transformeres til geoiden (*compute*). Etter transformasjonen legges de fjernede signalkomponentene tilbake til geoid høyden (*restore*), den såkalte *remove-compute-restore*-metoden (RCR). Denne gradsoppgaven omfatter den delen av geoideberegningen som består av å fjerne kjente signalandeler, for å deretter kunne analysere et glattet signal. Beregningen av en presis regional geoide krever god kjennskap til signalegenskapene i tyngdefeltet innenfor det gitte området.

Sfærisk-harmonisk syntese er benyttet på utvalgte Globale Potensialmodeller (GPM), og validert ved sammenligning med GNSS/nivellement (justeringspunkter). Utvalgte regionale geoidmodeller (RGM) er også sammenlignet og validert med GNSS/nivellement. Beregning av tyngdeanomalier ble utført, både terrestriske og basert på GPM. Terrestriske tyngdedata ble redusert for GPM, og analyse av det reduserte signalet ble gjennomført. Ved å benytte seg av forskjellige digitale terrenngmodeller ble topografiske effekter beregnet med en MATLAB-basert programvare. Terrestriske tyngdedata ble deretter redusert for topografiske effekter, og analyse av residualsignalet ble utført.

I valideringen av GPM'er kom det frem at EIGEN6C4 ga det mest presise resultatet, med et standardavvik til differansene på 4.77 cm. For de regionale geoidmodellene ga NKG2015 det mest presise resultatet, med et standardavvik til differansene på 3.48 cm. NMA2014 viste et standardavvik på 4.78 cm, men den oppdaterte versjonen, NMA2014DIR, viste et forbedret resultat med et standardavvik på 4.49 cm.

Resultatet for beregningen av de topografiske effektene, viste at TGF-programvaren klarte å beregne effektene tilfredsstillende. Residualsignalet etter reduksjon av GPM og topografiske effekter viste et betydelig redusert signal, dvs. et glattet signal, som er tilfredsstillende for videre beregning av geoiden. Å benytte EIGEN6C4 som GPM, ga det mest tilfredsstillende residualsignalet, spesielt i landområder, hvor standardavviket til residualsignalet var på 3.564 mGal. De empiriske kovariansfunksjonene viste et stokastisk signal, og som var redusert for deterministiske egenskaper. For det samme området, hadde EGM2008 et standardavvik til de residue anomaliene på 3.673 mGal, som også er et akseptert resultat men ikke like tilfredsstillende som EIGEN6C4. De andre GPM'ene, XGM2019, XGM2019e2159 og XGM2019e, viste et røffere signal med høyere standardavvik. Dette tyder på at å benytte en GPM som bruker terrestriske tyngdedata i hele modellens spekter, spesielt i Norge, gir et mer tilfredsstillende resultat.



# Abstract

In this thesis, an analysis of the gravity field signal properties in a testbed in northwestern Norway is performed. The Norwegian Mapping Authority has prepared a testbed with gravity observation points for precise geoid computation. Geoid computation involves removing several known signal components from the measured gravity signal, before being transformed to the geoid. After the transformation, the removed signal components are returned to the geoid. This is called the remove-compute-restore method. This thesis includes the part of the geoid calculation that consists of removing known signal components in order to be able to analyze the smoothed signal. Good knowledge of the signal properties is necessary to compute the geoid with high accuracy.

Spherical-harmonic synthesis has been used on several global potential models and validated by comparison with GNSS/leveling. Several regional geoid models have also been compared and validated with GNSS/leveling. Calculation of gravity anomalies was performed, both terrestrial and based on GPM. Terrestrial gravity data were reduced for GPM, and analysis of the reduced signal was performed. Using different digital terrain models, topographic effects were calculated with a MATLAB-based software (TGF). Terrestrial gravity data were then reduced for topographic effects, and analysis of the residual signal was performed.

Validation of the GPMs showed that EIGEN6C4 gave the most precise results, with a standard deviation of the differences of 4.77 cm. For the regional geoid models, NKG2015 gave the best result, with a standard deviation of the differences of 3.48 cm. NMA2014 showed a standard deviation of 4.78 cm, but the updated version, NMA2014DIR, showed a better result with a standard deviation of 4.49 cm.

The calculation of the topographic effects showed that the TGF software was able to calculate the effects on a satisfying level. After reduction of GPM and topographical effects, the residual signal showed a significantly reduced signal, i.e., a smoothed signal, which is satisfactory for further calculations of the geoid. Using EIGEN6C4 as GPM, gave the most satisfactory residual signal, especially in land areas, where the standard deviation of the residual signal was 3,564 mGal. The empirical covariance functions showed a stochastic signal which was reduced for deterministic properties. In the same area, EGM2008 showed a standard deviation of the residual anomalies of 3,673 mGal, which is also a acceptable result but not as satisfying as EIGEN6C4. The other GPMs, XGM2019, XGM2019e2159, and XGM2019e, showed a rougher signal with higher standard deviations. This indicates that using a GPM that uses terrestrial gravity data in their entire spectra, especially in Norway, gives a more satisfactory result.





# Innhold

<b>Figurer</b>	<b>vi</b>
<b>Tabeller</b>	<b>ix</b>
<b>1 Innledning</b>	<b>1</b>
<b>2 Grunnleggende om jordens tyngdefelt</b>	<b>2</b>
2.1 Gravitasjon og potensial . . . . .	2
2.2 Jordens gravitasjonsfelt . . . . .	5
2.3 Den geodetiske jordmodellen og normaltyngde . . . . .	8
2.4 Permanent <i>tide</i> -system . . . . .	11
2.5 Anomale tyngdefeltet . . . . .	11
2.6 Høydesystemer . . . . .	12
2.6.1 Høydesystem som ikke relateres til tyngdefeltet . . . . .	12
2.6.2 Høydesystemer som relateres til tyngdefeltet . . . . .	12
<b>3 Tyngdereduksjoner og anomalier</b>	<b>15</b>
3.1 Friluftsanomalier og tyngdeforstyrrelser . . . . .	15
3.2 Bougueranomalier og topografisk reduksjon . . . . .	17
3.3 TGF: Matlab basert programvare for terrengrelaterte tyngdefelt beregninger . . . . .	18
<b>4 Global tyngdefeltmodellering</b>	<b>21</b>
4.1 Globale Potensialmodeller . . . . .	21
4.2 <i>Satellite-only-modeller</i> . . . . .	23
4.3 <i>Kombinasjons-modeller</i> . . . . .	25
4.4 Minste kvadraters prediksjon . . . . .	25
4.5 Minste kvadraters kollokasjon . . . . .	27
<b>5 Beskrivelse av datasett</b>	<b>29</b>
5.1 Globale Potensialmodeller . . . . .	29

---

5.2 Regionale geoidmodeller . . . . .	30
5.3 GNSS/nivellement . . . . .	31
5.4 Dembaty50 . . . . .	32
5.5 Tyngdedata . . . . .	33
5.6 DTM2006 . . . . .	33
<b>6 Metode</b>	<b>34</b>
6.1 Validering av Globale Potensialmodeller . . . . .	34
6.2 Validering av Regionale Geoidmodeller . . . . .	37
6.3 Redusere terrestriske tyngdeforstyrrelser med Globale Potensialmodeller . . . . .	38
6.4 Redusere terrestriske tyngdeforstyrrelser med topografiske effekter . . . . .	40
<b>7 Resultater</b>	<b>43</b>
7.1 Validering av Globale Potensialmodeller . . . . .	43
7.2 Validering av Regionale Geoidmodeller . . . . .	50
7.3 Terrestriske tyngdeforstyrrelser redusert for Globale Potensialmodeller . . . . .	59
7.4 Terrestriske tyngdeforstyrrelser redusert for topografiske effekter . . . . .	72
<b>8 Diskusjon</b>	<b>84</b>
8.1 Validering av Globale Potensialmodeller og Regionale Geoidmodeller . . . . .	84
8.2 Reduserte terrestriske tyngdeforstyrrelser . . . . .	85
<b>9 Konklusjon</b>	<b>87</b>
<b>Bibliografi</b>	<b>89</b>

# Figurer

2.1	Tiltrekningen mellom to punktmasser. . . . .	2
2.2	Potensialet til et fast legeme. . . . .	4
2.3	Skisse som viser sentrifugalkraften i et jordfiksert referansesystem $(X, Y, Z)$ , skapt av jordens rotasjon. . . . .	6
2.4	Tyngden $g$ , potensial og ekvipotensialflater. . . . .	8
2.5	Viser tyngde $g$ , potensial og ekvipotensialflater. . . . .	8
2.6	Sammenhengen mellom en ellipsoide, med store halvakse $a$ og lille halvakse $b$ , og en kule med radius $R=a$ . . . . .	9
2.7	Geodetiske koordinater $\lambda$ og $\varphi$ for punkt $P$ på ellipsoiden . . . . .	9
2.8	Tre forskjellige sfærisk-harmoniske basis funksjoner. <i>Sonale</i> effekter med $m = 0$ (venstre), <i>sektorale</i> med $m = n$ (midten) og <i>tesserale</i> med $n > m$ og $m > 0$ (høyre). Figur hentet fra [Gerlach, 2020] . . . . .	12
2.9	Ortometrisk høyde $H$ : avstanden langs den krumme loddlinjen fra punkt $P_0$ på geoiden til punkt $P$ på jordoverflaten. Geoidhøyden $N$ : avstanden langs ellipsoide-normalen fra punkt $Q_0$ på referanseellipsoiden til punkt $P_0$ på geoiden. Figur hentet fra [Ophaug, 2020b] . . . . .	13
2.10	Normalhøyde $H^*$ : avstanden langs normalloddlinjen fra punkt $Q_0$ på referanseellipsoiden til punkt $Q$ på telluroiden. Høydeanomali $\zeta$ : avstanden langs normalloddlinjen fra punkt $Q_0$ på referanseellipsoiden til punkt $P_0$ på kvasigeoiden. Figur hentet fra [Ophaug, 2020b] . . . . .	13
3.1	Målt tyngde plottet mot ortometrisk høyde, viser sterk negativ korrelasjon. . . . .	16
3.2	Friluftsanomali plottet mot ortometrisk høyde, viser sterk positiv korrelasjon. . . . .	17
3.3	Bougueranomali plottet mot ortometrisk høyde, ingen signifikant korrelasjon. . . . .	18
3.4	Behandlingen av de fire forskjellige sonene og geometrien som er benyttet for å representere massefordelingen i hver sone. Figur hentet fra [Yang et al., 2020]. . . . .	19
3.5	TGF GUI med definerende parametre. . . . .	20
4.1	<i>Meissl</i> -skjema som beskriver den spektrale sammenhengen mellom potensialforstyrrelsen $T$ , dens første og andre deriverte $T_r$ og $T_{rr}$ på overflaten ( $h = 0$ ) og i satellitt-høyde $h$ . Måten signalet blir glattet på gir en indikasjon på retningen hvor tyngdefeltet blir glattere. . . . .	23
5.1	Posisjonen til de 578 beregningspunktene, som er fordelt i Møre og Romsdal, og Sogn og Fjordane. . . . .	32

5.2	Visualisering av den benyttede DTM'en med gråtoneverdier. . . . .	32
5.3	Posisjonen til de terrestriske tyngdemålingene. . . . .	33
6.1	Høydeanomalier i interesseområdet beregnet fra de ortometriske høydene. . . . .	35
6.2	Differansen mellom $\zeta$ utledet med de gitte høydene i DTM'en og $\zeta$ utledet ved å legge til $\zeta$ fra første iterasjon. . . . .	36
6.3	Differansen mellom beregnet $\zeta$ på topografien og ellipsoiden. . . . .	37
6.4	Tyngdeforstyrrelse beregnet for de terrestriske tyngdedataene. . . . .	38
7.1	Differansen mellom geometrisk høydeanomali $h - H$ og gravimetrisk høydeanomali $\zeta$ . Gjennomsnittsverdiene for differansene er trukket fra for å bedre kunne sammenligne modellene. (a) (h-H) - $\zeta^{EGM2008}$ , (b) (h-H) - $\zeta^{EIGEN6C4}$ , (c) (h-H) - $\zeta^{XGM2019}$ , (d) (h-H) - $\zeta^{XGM2019e2159}$ , (e) (h-H) - $\zeta^{XGM2019e}$ . . . . .	46
7.2	Figurene viser empiriske feilkovariansfunksjoner sammen med tilpasset analytisk modell (Hirvonen). (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e. . . . .	50
7.3	Differansen mellom geometrisk høydeanomali (h-H) og gravimetrisk $\zeta$ . Gjennomsnittsverdiene av differansene er trukket fra for å bedre kunne sammenligne modellene. (a) (h-H) - $\zeta^{NMA2014}$ , (b) (h-H) - $\zeta^{NMA2014DIR}$ , (c) (h-H) - $\zeta^{EGG2015}$ , (d) (h-H) - $\zeta^{NKG2015}$ . . . . .	52
7.4	Empiriske feilkovariansfunksjoner sammen med tilpasset analytisk modell (Hirvonen). (a) NMA2014, (b) NMA2014DIR, (c) EGG2015, (d) NKG2015. . . . .	55
7.5	Nye empiriske feilkovariansfunksjoner med nord/sør inndeling av interesseområdet. (a) NMA2014 nord, (b) NMA2014 sør, (c) NMA2014DIR nord, (d) NMA2014DIR sør, (e) NKG2015 nord, (f) NKG2015 sør. . . . .	58
7.6	Tyngdeforstyrrelse beregnet fra GPM'ene i havområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e. . . . .	60
7.7	Tyngdeforstyrrelse beregnet fra GPM'ene i fjordområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e. . . . .	61
7.8	Tyngdeforstyrrelse beregnet fra GPM'ene i landområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e. . . . .	63
7.9	Differanse mellom terrestriske tyngdeforstyrrelser og tyngdeforstyrrelser beregnet fra forskjellige GPM'er i havområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (d) XGM2019e. . . . .	64
7.10	Differanse mellom terrestriske tyngdeforstyrrelser og tyngdeforstyrrelser beregnet fra forskjellige GPM'er i fjordområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (d) XGM2019e. . . . .	66
7.11	Differanse mellom terrestriske tyngdeforstyrrelser og tyngdeforstyrrelser beregnet fra forskjellige GPM'er i landområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (d) XGM2019e. . . . .	67
7.12	Empirisk kovariansfunksjon beregnet fra differanse mellom terrestriske tyngdeforstyrrelser og tyngdeforstyrrelser beregnet fra forskjellige GPM'er i havområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e. . .	69
7.13	Empirisk kovariansfunksjon beregnet fra differanse mellom terrestriske tyngdeforstyrrelser og tyngdeforstyrrelser beregnet fra forskjellige GPM'er i fjordområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e. . .	70

---

7.14	Empirisk kovariansfunksjon beregnet fra differanse mellom terrestriske tyngdeforstyrrelser og tyngdeforstyrrelser beregnet fra forskjellige GPM'er i landområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e. . .	71
7.15	Tyngdeforstyrrelser etter reduksjon av GPM og topografiske effekter i havområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e.	73
7.16	Tyngdeforstyrrelser etter reduksjon av GPM og topografiske effekter i fjordområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e.	74
7.17	Tyngdeforstyrrelser etter reduksjon av GPM og topografiske effekter i landområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e.	75
7.18	Empirisk kovariansfunksjon etter reduksjon av GPM og topografiske effekter i havområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e. . . . .	77
7.19	Empirisk kovariansfunksjon etter reduksjon av GPM og topografiske effekter i fjordområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e. . . . .	78
7.20	Empirisk kovariansfunksjon etter reduksjon av GPM og topografiske effekter i landområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e. . . . .	80
7.21	Residuale anomalier for hele beregningsområdet med EGM2008 som GPM. . . . .	81
7.22	Residuale anomalier for hele beregningsområdet med EIGEN6C4 som GPM. . . . .	81
7.23	Residuale anomalier for hele beregningsområdet med XGM2019 som GPM. . . . .	82
7.24	Residuale anomalier for hele beregningsområdet med XGM2019e2159 som GPM. . . . .	82
7.25	Residuale anomalier for hele beregningsområdet med XGM2019e som GPM. . . . .	83

# Tabeller

2.1	GRS80 parametere . . . . .	10
4.1	Forskjellige størrelser som kan utlede med sfærisk-harmonisk syntese, med deres spektral koeffisienter, dimensjonsfaktorer og spektrale eigenverdier. Potensialforstyrrelsen $T$ , dens første deriverte $T_r$ , dens andre deriverte $T_{rr}$ , geoidehøyden $N$ og tyngdeanomali $\Delta g$ . . . . .	22
5.1	Data som inngår i EGM2008 innefor forskjellig spekter. . . . .	29
5.2	Data som inngår i EIGEN6C4 innefor forskjellig spekter. . . . .	30
5.3	Data som inngår i XGM2019e innefor forskjellig spekter. . . . .	30
5.4	Spektrale oppløsningen til XGM2019, XGM2019e2159 og XGM2019e . . . . .	30
5.5	Minimum-, maksimum- og gjennomsnittsverdier for høydene i DTM'en . . . . .	33
6.1	Min-, maks-, gjennomsnittsverdi og standardavvik for differansen mellom $\zeta$ beregnet fra de gitte høydene i DTM'en og $\zeta$ beregnet ved å legge til $\zeta$ fra første iterasjon. Enhet cm. . . . .	36
6.2	Minimum-, maksimum, gjennomsnittsverdi og standardavvik for differansen mellom $\zeta$ beregnet fra de gitte høydene i DTM'en og $\zeta$ beregnet ved å legge til $\zeta$ fra første iterasjon. Enhet cm. . . . .	37
6.3	Minimum-, maksimum-, gjennomsnittsverdi for tyngdeforstyrrelsene beregnet fra tyngdeobservasjonene, samt standardavvik. Enhet mGal. . . . .	40
6.4	Valgte parametre for beregningene i TGF-programvaren. . . . .	41
6.5	Statistikk til beregnede topografiske effekter $\delta g_{2.67\text{g/cm}^3}$ og $\delta g_{1.00\text{g/cm}^3}$ . Enhet mGal. . . . .	41
6.6	Min-, maks-, gjennomsnittsverdi og standardavvik på differansen mellom sfærisk approksimasjon og ellipsoidisk. Enhet mGal. . . . .	42
7.1	Min-, maks- og gjennomsnittsverdi til differansene mellom $\zeta^{\text{GNSS/nivellement}}$ og $\zeta^{\text{GPM}}$ i beregningspunktene, samt standardavvik. . . . .	46
7.2	Konstantavvik til GPM'ene ved å benytte korreksjonen beskrevet av Denker [2013] . . . . .	47
7.3	Standardavvik $\sqrt{C_0}$ , korrelasjonslengden $\xi$ og krumningsparameteren $p$ til de empiriske feilkovariansfunksjonene. . . . .	50
7.4	Minimum, maksimum og gjennomsnittsverdi for differansene mellom $\zeta^{\text{GNSS/nivellement}}$ og $\zeta^{\text{RGM}}$ i beregningspunktene, samt standardavvik. . . . .	53

---

7.5	Standardavvik $\sqrt{C_0}$ , korrelasjonslengden $\xi$ og krumningsparameteren $p$ for de empiriske feilkovariansfunksjonene. . . . .	55
7.6	Standardavvik $\sqrt{C_0}$ , korrelasjonslengden $\xi$ og krumningsparameteren $p$ for de nye empiriske feilkovariansfunksjonene. . . . .	59
7.7	Min-, maks-, gjennomsnittsverdi og standardavvik til tyngdeforstyrrelsene beregnet fra GPM'ene i havområdet. Enhet mGal. . . . .	60
7.8	Min-, maks-, gjennomsnittsverdi og standardavvik for tyngdeforstyrrelsene beregnet fra GPM'ene i fjordområdet. Enhet mGal. . . . .	62
7.9	Min-, maks-, gjennomsnittsverdi og standardavvik for tyngdeforstyrrelsene beregnet fra GPM'ene i landområdet. Enhet mGal. . . . .	63
7.10	Min-, maks-, gjennomsnittsverdi og standardavvik til differanse mellom terrestriske tyngdeforstyrrelser og tyngdeforstyrrelser beregnet fra GPM'er i havområdet. Enhet mGal. . . . .	65
7.11	Min-, maks-, gjennomsnittsverdi og standardavvik til differanse mellom terrestriske tyngdeforstyrrelser og tyngdeforstyrrelser beregnet fra forskjellige GPM'er i fjordområdet. Enhet mGal. . . . .	66
7.12	Min-, maks-, gjennomsnittsverdi og standardavvik til differanse mellom terrestriske tyngdeforstyrrelser og tyngdeforstyrrelser beregnet fra forskjellige GPM'er i landområdet. Enhet mGal. . . . .	68
7.13	Standardavvik $\sqrt{C_0}$ , korrelasjonslengden $\xi$ og krumningsparameteren $p$ for empirisk kovariansfunksjon i havområdet. . . . .	69
7.14	Standardavvik $\sqrt{C_0}$ , korrelasjonslengden $\xi$ og krumningsparameteren $p$ for empirisk kovariansfunksjon i fjordene. . . . .	70
7.15	Standardavvik $\sqrt{C_0}$ , korrelasjonslengden $\xi$ og krumningsparameteren $p$ for empirisk kovariansfunksjon i landområdet. . . . .	72
7.16	Min-, maks-, gjennomsnittsverdier og standardavvik til de topografiske reduserte tyngdeforstyrrelsene i havområdet. Enhet mGal. . . . .	73
7.17	Min-, maks-, gjennomsnittsverdier og standardavvik til de topografiske reduserte tyngdeforstyrrelsene i fjordområdet. Enhet mGal. . . . .	74
7.18	Min-, maks-, gjennomsnittsverdier og standardavvik til de topografiske reduserte tyngdeforstyrrelsene i landområdet. Enhet mGal. . . . .	76
7.19	Standardavvik $\sqrt{C_0}$ , korrelasjonslengden $\xi$ og krumningsparameteren $p$ for empirisk kovariansfunksjon i havområdet. . . . .	77
7.20	Standardavvik $\sqrt{C_0}$ , korrelasjonslengden $\xi$ og krumningsparameteren $p$ for empirisk kovariansfunksjon i fjordområdet. . . . .	79
7.21	Standardavvik $\sqrt{C_0}$ , korrelasjonslengden $\xi$ og krumningsparameteren $p$ for empirisk kovariansfunksjon i landområdet. . . . .	80

---

# 1 Innledning

Temaet for denne oppgaven er å studere tyngdefeltets signalegenskaper i et testfelt på Nordvestlandet. Kartverket har som forberedelse til beregning av presis regional geoide, satt opp et testfelt med tyngdeobservasjoner på Nordvestlandet. Dette testfeltet har en stor utstrekning, som dekker både land- og sjøområder. I Sunnmørsregionen har avstanden mellom datapunkter minnet fra om lag 6 km til 2-3 km de siste årene. Kartverket har også forberedt et datasett med justeringspunkter som er målt inn med både Global Navigation Satellite Systems (GNSS) og nivellement. Justeringspunktene blir blant annet brukt til beregning av NN2000 høyder.

For å undersøke tyngdefeltets signalegenskaper på Nordvestlandet, skal sfærisk-harmonisk syntese benyttes på forskjellige Globale Potensialmodeller (GPM), og valideres ved sammenligning med GNSS/nivellement. Deretter skal flere regionale geoidmodeller (RGM) valideres ved sammenligning med GNSS/nivellement. Beregning av tyngdeanomalier i området skal foretas, både fra terrestriske tyngdedata og GPM. Tyngdedataene skal reduseres for GPM, og en analyse av residualsignalet skal utføres.

Ved å velge forskjellige digitale terrengmodeller (DTM) skal topografiske effekter beregnes med en MATLAB-basert programvare. Terrestriske tyngdedata skal reduseres for topografiske effekter, og analyse av residualsignalet skal foretas. Nordvestlandet består av et landskap med store topografiske variasjoner. Området inneholder små og store fjorder med varierende dybde, samt høye fjell. Sognefjorden har en dybde på omlag 1300 m under havnivå, mens fjellene rundt fjorden går opp til 2000 m. Jostedalbreen befinner seg innerst i Sognefjorden og er Nord-Europas største isbre. Dette fører til store tetthetsforskjeller som må tas hensyn til. Fjell har en tetthet på omlag  $2.67 \text{ g/cm}^3$  og vann ligger på ca.  $1.00 \text{ g/cm}^3$ . Denne typen topografi gjør det enda mer krevende å beregne de topografiske effektene som virker på geoiden.

Regional geoideberegning omfatter det å modellere småskala-strukturen i tyngdefeltet på lokalt og regionalt nivå. Geoiden spiller en viktig rolle i geodetiske og geofysiske anvendelser, siden den danner en naturlig referanseflate for fysiske høyder, og gir innsikt i jordens indre massefordeling og massetransport i jordsystemet. Geoideberegning baseres ofte på *remove-compute-restore*-metoden (RCR), der kjente signalandeler reduseres fra terrestriske tyngdedata før disse transformeres til geoidhøyde. Etter transformasjonen legges de reduserte signalandelene tilbake til geoidhøyden. Det finnes flere forskjellige metoder for å transformere tyngde til geoide, blant annet minste kvadraters kollokasjon. En god regional geoidmodell (RGM) med høy nøyaktighet og presisjon krever god kjennskap til tyngdefeltets signalegenskaper i det gitte området. Før en minste kvadraters kollokasjon gjennomføres, må det fulle målte tyngdesignalet reduseres for flere komponenter. Dette fører til et glattere signal som er lettere håndterlig, og reduserer den formelle feilen til geoideberegningen.



## 2 Grunnleggende om jordens tyngdefelt

Dette kapitlet er en utdypning av matematiske utledninger og selve konseptet av jordens tyngdefelt. Tyngdefeltet til jorden er en viktig størrelse i flere geodetiske og geofysiske oppgaver. For de geodetiske oppgavene, danner geoiden en naturlig referanseflate for fysiske høyder (høyde over havet). I geofysiske oppgaver gir tidsvariasjoner i tyngdefeltet informasjon om massetransport.

### 2.1 Gravitasjon og potensial

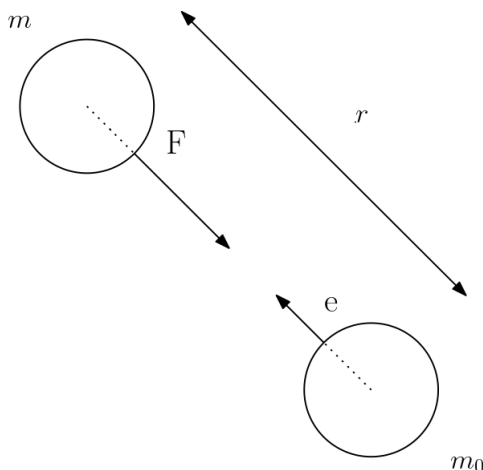
I følge Newton's gravitasjonslov, hvor to punktmasser med masse  $m$  og  $m_0$ , som er separert med en distanse  $r$ , trekker på hverandre med en kraft [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006]

$$F = G \frac{m \cdot m_0}{r^2}. \quad (2.1)$$

Hvor  $F$  er gravitasjonskraften,  $G$  er Newton's gravitasjonskonstant med SI enhet (Système International d'unités) basert på meter [m], kilogram [kg] og sekund [s]. Konstanten har verdien [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006]

$$G = 6.6742 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}. \quad (2.2)$$

Figur 2.1 viser tiltrekningen mellom to punktmasser  $m$  og  $m_0$ .  $F$  er kraften  $m$  trekker på  $m_0$ ,  $e$  er kraften  $m_0$  trekker på  $m$ , og  $r$  er avstanden mellom punktmassene.



Figur 2.1: Tiltrekningen mellom to punktmasser.

Newton's gravitasjonskonstant er en av de viktigste fysiske konstantene, men er en av de minst nøyaktige (kun gitt med fire desimalers nøyaktighet)[Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006]. På grunn av nettopp dette har *Committee on Data for Science and Technology* (CODATA) anbefalt

en ny og mer presis bruk av konstanten, ved å legge til en usikkerhet [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006],

$$G = (6.6742 \pm 0.0010) \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}. \quad (2.3)$$

Ved hjelp av ligning (2.1) kan en uttrykke gravitasjonskraften i  $m$  på vektorformen [Ophaug, 2020a]

$$\mathbf{F} = -G \frac{mm_0}{r^2} \mathbf{e} = -G \frac{mm_0}{r^3} \mathbf{r} = -G \frac{mm_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (2.4)$$

hvor  $\mathbf{e} = \mathbf{r} / |\mathbf{r}|$  er enhetsvektoren fra  $m_0$  mot  $m$ .

Selv om massene  $m$  og  $m_0$  trekker på hverandre symmetrisk, er det praktisk å kalle en av massene for den trekkende masse og den andre for tiltrukket masse.  $m_0$  er da en vilkårlig masse i et punkt P, og ved å dividere ligning (2.1) med  $m_0$  får en [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006]

$$\mathbf{F} = G \frac{m}{r^2}, \quad (2.5)$$

hvor kraften  $\mathbf{F}$  er utført av massen  $m$  på en vilkårlig masse i punktet P med en avstand  $r$  fra  $m$ . Komponentene i  $\mathbf{F}$  er gitt ved [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006]

$$X = -F \cos \alpha = -\frac{Gm}{r^2} \frac{x - x_0}{r} = -Gm \frac{x - x_0}{r^3}, \quad (2.6)$$

$$Y = -F \cos \beta = -\frac{Gm}{r^2} \frac{y - y_0}{r} = -Gm \frac{y - y_0}{r^3}, \quad (2.7)$$

$$Z = -F \cos \gamma = -\frac{Gm}{r^2} \frac{z - z_0}{r} = -Gm \frac{z - z_0}{r^3}, \quad (2.8)$$

og avstanden  $r$  mellom massene er gitt ved

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (2.9)$$

Viktige prinsipper for Newton's gravitasjonslov er at [Ophaug, 2020a]

- gravitasjonskraften virker langs forbindelseslinjen mellom to masser, dvs., den er en sentralkraft
- den oppfyller motvirkingsprinsippet, dvs., at kraftvirkningen en masse har på en annen, er like stor og motsatt rettet den andres på den ene,  $F_B = -F_A$
- den resulterende kraften på en masse er en vektorsum av gravitasjonsvirkningen fra alle andre masser på denne, overlagersprinsippet gjelder
- gravitasjonskraften er omvendtproporsjonal med kvadratet av avstanden mellom to masser
- enhver forflytning av en masse relativt til de andre fører overalt til en umiddelbar gravitasjonsendring i størrelse og retning (ingen tidsforsinkelse)

Gravitasjonsfeltet har den egenskapen at det kan finnes fra skalare felt, noe som gjør det enklere å regne med. Kraften kan da representeres som en vektor  $\mathbf{F}$  med størrelse lik  $F$ . Potensialet til tyngden er en skalarfunksjon og er gitt ved [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006]

$$V = \frac{Gm}{r}. \quad (2.10)$$

Komponentene i  $\mathbf{F}$  kan da skrives som

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, Y = \frac{\partial V}{\partial y}, Z = \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (2.11)$$

I vektornotasjon skrives ligning (2.11) som (kartesiske koordinater)

$$\mathbf{F} = [X, Y, Z] = \text{grad}(V), \quad (2.12)$$

hvor kraftsvektoren er gradientvektoren til skalarfunksjonen  $V$ .

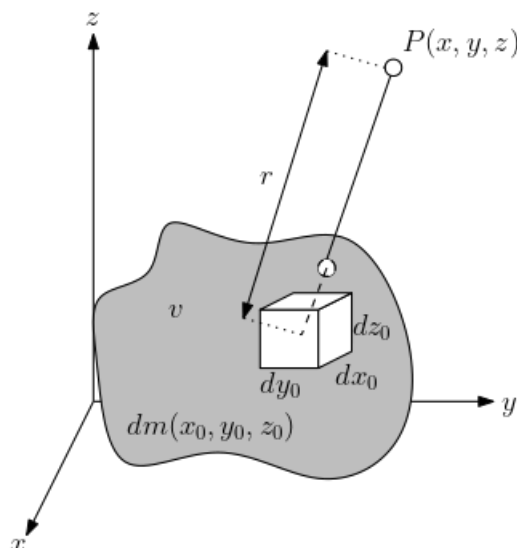
Innen geodesi er det spesielt viktig at de tre komponentene i  $\mathbf{F}$  vektoren kan erstattes ved en enkel funksjon  $V$ , spesielt for evaluering av tiltrekning til punktmasser eller solide masser i et system. Det er mye lettere å håndtere potensialet istedenfor de tre komponentene av kraften. Selv i disse kompliserte situasjonene er sammenhengen i ligning (2.11) anvendt, funksjonen  $V$  er da summen av bidraget til hver respektive partikkel. I et system med flere punktmasser  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , er potensialet til systemet summen av de individuelle bidragene (ligning (2.10)) [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006]

$$V = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} + \dots + \frac{Gm_n}{r_n} = G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}. \quad (2.13)$$

For to punktmasser som er kontinuerlig fordelt over et volum  $v$  med tetthet  $\rho = \frac{dm}{dv}$ , hvor  $dm$  er et masseelement og  $dv$  er et volumelement, kan potensialet skrives som et integral, det såkalte Newtons integral [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006],

$$V = G \iiint_v \frac{dm}{r} = G \iiint_v \frac{\rho}{r} dv \quad (2.14)$$

hvor  $r$  er avstanden mellom masseelement  $dm = \rho dv$  og tiltrukket punkt  $P$ . Figur 2.2 viser hvorfor trippelintegralet i ligning (2.14) er nødvendig.



Figur 2.2: Potensialet til et fast legeme.

Divergensen til vektorfeltet ved et punkt er feltets tendens til å unnvike eller divergere fra punktet. Hvis størrelsen på vektorene øker når de passerer gjennom et punkt, er divergensen til vektorfeltet

positivt i punktet, og punktet kalles en kilde. Minker størrelsen til vektorene når de passerer gjennom et punkt, er divergensen til vektorfeltet negativt i punktet, og punktet kalles et sluk.

Et skalarfelt kan oppnås fra et vektorfelt via divergensen [Ophaug, 2020a]

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot \left[ \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right] = \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] = \nabla^2 V = \Delta V, \quad (2.15)$$

og fra gradienten kan et skalarfelt beregnes

$$\operatorname{grad}V = \nabla V = \left[ \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right] = \mathbf{F}. \quad (2.16)$$

Laplaceoperatoren  $\Delta$  anvendt på et skalart felt er altså divergensen til feltets gradient [Ophaug, 2020a],

$$\Delta V = \operatorname{div}\nabla V = \operatorname{div}\mathbf{F}. \quad (2.17)$$

Ved punkt hvor tettheten endres diskontinuerlig, har enkelte andrederiverte ledd diskontinuitet. Dette er tydelig fordi  $\Delta V$  tilfredstiller *Poissons ligning* [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006],

$$\Delta V = -4\pi G\rho. \quad (2.18)$$

Utenfor de tiltrekkende legemene, i det tomme rom, er tettheten  $\rho = 0$  og dermed blir

$$\Delta V = 0. \quad (2.19)$$

Ligning (2.19) er *Laplaceligningen*. Løsningen på *Laplaceligningen* kalles for *harmoniske funksjoner*. Potensialet til gravitasjon er derfor en harmonisk funksjon utenfor de tiltrekkede legemene, men ikke innenfor massene, der er Poissons ligning tilfredstilt. Enhver harmonisk funksjon er analytisk, dvs. den er kontinuerlig og har kontinuerlige deriverte av enhver orden og kan utvikles i en Taylorrekke [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006].

Ved å anvende Laplaceoperatoren på gravitasjonspotensialet gitt i ligning (2.14), med den resiproke avstandsfunksjonen  $1/r$ , får en [Ophaug, 2020a]

$$\Delta V = \Delta \left\{ G \iiint_v \frac{\rho}{r} dv \right\} = G \iiint_v \rho \left\{ \Delta \left( \frac{1}{r} \right) \right\} dv. \quad (2.20)$$

Av ligning (2.20) kommer det frem at potensialet til et fast legeme er også harmonisk i ethvert punkt  $P$  utenfor de tiltrekkede massene. Potensialet til et fast legeme er ikke harmonisk inne i massene, hvor det heller tilfredstiller Poissons ligning [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006].

## 2.2 Jordens gravitasjonsfelt

Den totale kraften utøvd på et legeme som ligger på jordens overflate er resultatet av gravitasjonskraften og sentrifugalkraften til jordens rotasjon, og kalles for tyngdekraften [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006]. En satellitt, f.eks, roterer ikke med jorden, men påvirkes bare av gravitasjonskraften til jorden. Setrifugalkraften virker på en enhetsmasse, dvs. at den kan bli tilskrevet en akselerasjon, som peker ut av jordens massesenter og står vinkelrett på rotasjonsaksen.

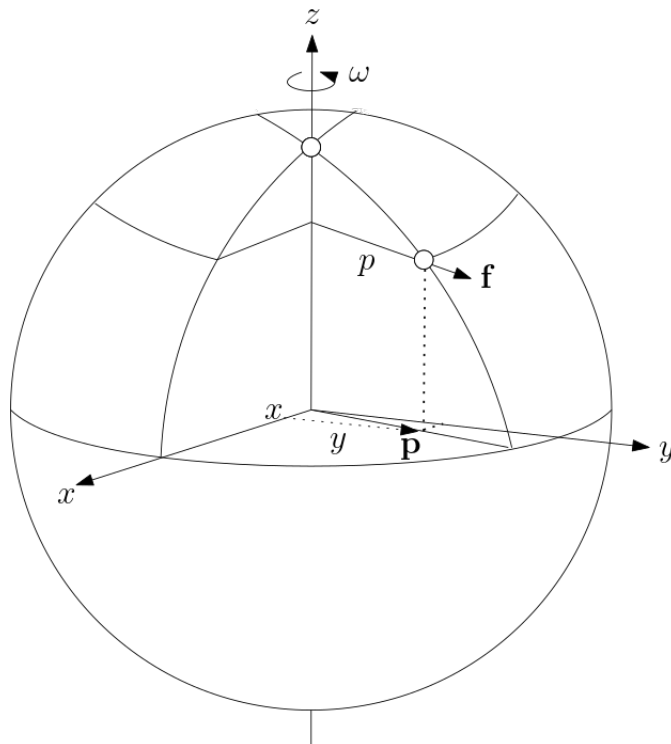
Sentrifugalkraften  $f$  som virker på en enhetsmasse er gitt ved [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006]

$$f = \omega^2 p, \quad (2.21)$$

hvor  $\omega$  er vinkelhastigheten til jordrotasjonen og

$$p = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.22)$$

er avstanden mellom rotasjonsaksen og enhetsmassen. Figur 2.3 viser hvordan sentrifugalkraften fungerer på en enhetsmasse i et jordfiksert referansesystem  $(X, Y, Z)$ .



Figur 2.3: Skisse som viser sentrifugalkraften i et jordfiksert referansesystem  $(X, Y, Z)$ , skapt av jordens rotasjon.

Vektor  $\mathbf{f}$  (figur 2.3) har en retning gitt ved [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006]

$$\mathbf{p} = [x, y, 0], \quad (2.23)$$

kraften er da gitt som

$$\mathbf{f} = \omega^2 \mathbf{p} = [\omega^2 x, \omega^2 y, 0]. \quad (2.24)$$

Kraften kan uttrykkes gjennom et potensial,

$$\mathbf{f} = \nabla \Phi = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right], \quad (2.25)$$

hvor  $\Phi$  er gitt ved

$$\Phi = \frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2). \quad (2.26)$$

Som nevnt tidligere er tyngdekraften et resultat av gravitasjonskraften og sentrifugalkraften. Tilsvarende er potensialet til tyngdekraften  $W$ , summen av gravitasjonspotensialet  $V$  [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006], jfr. ligning (2.14), og sentrifugalkraften  $\Phi$

$$W = V + \Phi = G \iiint_v \frac{\rho}{r} dv + \frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2). \quad (2.27)$$

Differensierer man ligning (2.26), finner en at

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 2\omega^2. \quad (2.28)$$

Ved å kombinere løsningen i ligning (2.28) med Poisson's ligning (2.18) for  $V$ , får en den generaliserte Poisson ligning for tyngdepotensialet  $W$  [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006]

$$\Delta W = -4\pi G\rho + 2\omega^2. \quad (2.29)$$

Gradientvektoren til  $W$  er gitt ved

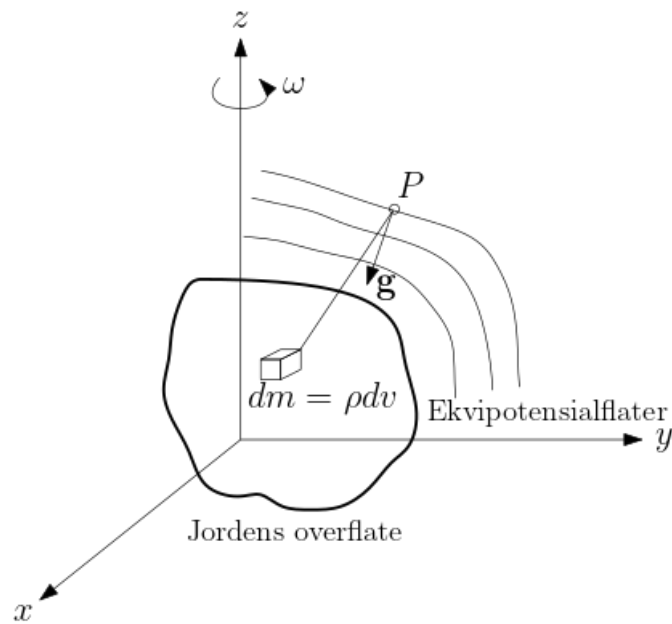
$$g = \text{grad}W \equiv \left[ \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right] \quad (2.30)$$

med komponentene

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{\partial W}{\partial x} = -G \iiint_v \frac{x - x_0}{r^3} \rho dv + \omega^2 x \\ g_y &= \frac{\partial W}{\partial y} = -G \iiint_v \frac{y - y_0}{r^3} \rho dv + \omega^2 y \\ g_z &= \frac{\partial W}{\partial z} = -G \iiint_v \frac{z - z_0}{r^3} \rho dv, \end{aligned} \quad (2.31)$$

kalles for tyngdevektoren. Det er den totale kraften (gravitasjonskraften og sentrifugalkraften) som virker på en enhetsmasse som ligger på jordens overflate. Som en vektor, har den en størrelse og retning (se figur 2.4 nedenfor). Størrelsen til  $g$  kalles for tyngde, dens fysiske størrelse er akselerasjon og er målt i gal, enheten er oppkalt etter Galileo Galilei. Den numeriske verdien for  $g$  ved ekvator ligger rundt 978 gal, og 983 gal ved polene [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006]. En annen enhet som ofte er brukt innen geodesi er mGal, ligning (2.32) under viser forholdet mellom gal, mGal og SI enheter.

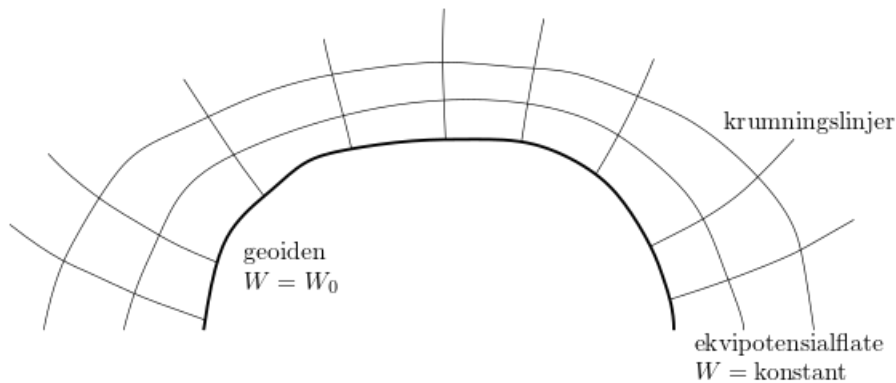
$$\begin{aligned} 1\text{gal} &= 0.01\text{ms}^{-2} \\ 1\text{mGal} &= 10\mu\text{ms}^{-2} \end{aligned} \quad (2.32)$$



Figur 2.4: Tyngden  $g$ , potensial og ekvipotensialflater.

En overflate, hvor tyngdepotensialet forblir konstant, kalles for en ekvipotensial- eller geopotensialflate [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006]. Denne egenskapen gjør at slike overflater egner seg godt som en vertikal referanseflate, f.eks for høyder. Ekvipotensialflaten som sammenfaller med gjennomsnittlig havnivå, introdusert av C.F. Gauss, kalles for *geoiden* [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006]. Den er definert som følger

$$W = W_0 = \text{konstant.} \quad (2.33)$$

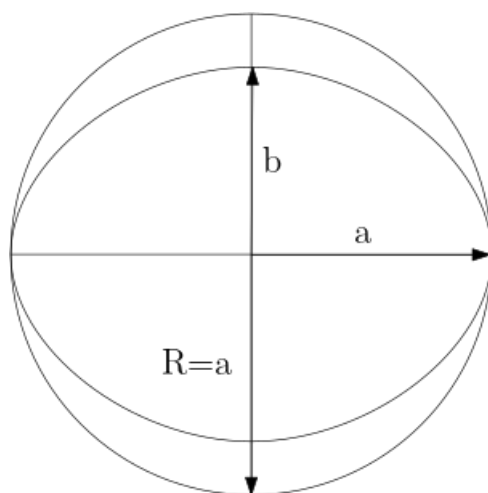


Figur 2.5: Viser tyngde  $g$ , potensial og ekvipotensialflater.

Krumningslinjene som er introdusert i figur 2.5, beskriver kraftens retning og står normalt på ekvipotensialflatene, dette fører til linjenes krumning.

## 2.3 Den geodetiske jordmodellen og normaltyngde

Den første tilnærmingen til jordens form er en kule. Siden jorden har en liten flattrykkning ved polene vil en ellipsoide være en bedre tilnærming (se figur 2.6).



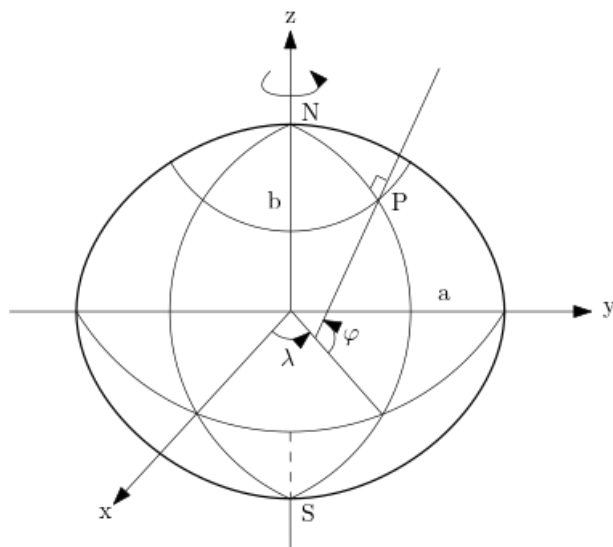
Figur 2.6: Sammenhengen mellom en ellipsoide, med store halvakse  $a$  og lille halvakse  $b$ , og en kule med radius  $R=a$ .

Flattrykkningen til ellipsoiden er gitt ved:

$$f = \frac{a - b}{a}. \quad (2.34)$$

Selv om jordens form ikke har den eksakte formen til en ellipsoide, blir den geodetiske jordmodellen brukt som en referanse for den faktiske jordoverflaten og for det ytre tyngdefeltet til jorden. Tyngdefeltet til ellipsoiden spiller en fundamental praktisk rolle, pga. dens enkle matematiske håndtering, og siden avviket mellom det faktiske tyngdefeltet og ellipsoidens normaltyngdefelt er så lite at det kan betraktes som lineært. Ved å splitte jordens tyngdefelt i et "normal" og et resterende "forstyrrende" felt, forenkler man bestemmelsen av tyngdefeltet [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006]. Ellipsoidens overflate kan betraktes som en ekvipotensialflate i normaltyngdefeltet. Denne antagelsen er nødvendig siden ellipsoiden er normalformen til geoiden, som er en ekvipotensialflate i det faktiske tyngdefeltet.

Punkt som befinner seg på ellipsoiden er beskrevet med geodetiske koordinater,  $\phi$  og  $\lambda$ , se figur 2.7.



Figur 2.7: Geodetiske koordinater  $\lambda$  og  $\phi$  for punkt  $P$  på ellipsoiden



Ved å definere ellipsoiden som en ekvipotensialflate,  $U = \text{konstant}$ , og tilskrive en masse  $M$  til ellipsoiden, kan en bestemme normalpotensialet  $U$ . Tetthetsfordelingen inne i ellipsoiden, som definerer  $U$ , blir sett på som uinteressant og trenger ikke å være kjent [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006].

I henhold til ligning (2.30), er normaltyngden beskrevet som følgende

$$\gamma = \text{grad}U. \quad (2.35)$$

*Somigliana's* formel gir en symmetrisk beskrivelse av normaltyngden på ellipsoiden [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006], som følger

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_a(\cos \varphi)^2 + b\gamma_b(\sin \varphi)^2}{\sqrt{a^2(\cos \varphi)^2 + b^2(\sin \varphi)^2}}, \quad (2.36)$$

hvor  $a$  er den store halvakse,  $\gamma_a$  er normaltyngden ved ekvator,  $b$  er den lille halvakse,  $\gamma_b$  er normaltyngden ved polene og  $\varphi$  er geodetisk breddegrad.

Normaltyngden i en ellipsoidisk høyde  $h$  kan beregnes med følgende formel

$$\gamma_h = \gamma_0 \left( 1 - \frac{2}{a} \left( 1 + f + \frac{\omega^2 a}{\gamma_a} - 2f(\sin \varphi)^2 \right) h + \frac{3}{a^2} h^2 \right), \quad (2.37)$$

hvor normaltyngden er en funksjon av breddegrad og ellipsoidisk høyde.

Geodetiske referansesystem gir numeriske verdier for parametere til en geodetisk jordmodell. De mest kjente referansesystemene er GRS80 og WGS84. GRS80 ble introdusert på IUGG (International Union of Geodesy and Geophysics) sin generalsamling i Caberna (1979) [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006]. Alle referansesystem skal være *geostriske*, hvor Z-aksen sammenfaller med jordens rotasjonsakse og X-aksens retning går mot Greenwich meridianen. Tabell 2.1 viser parametrene til referanseellipsoiden GRS80.

Tabell 2.1: GRS80 parametere

Parametere og verdier	Beskrivelse
Geometriske konstanter	
$b = 6\,356\,752.3141$ m	lille halvakse
$E = 521\,854.0097$ m	lineær eksentrisitet
$c = 6\,399\,593.6259$ m	polar radius og krumning
$e^2 = 0.006\,694\,380\,022\,90$	første eksentrisitet kvadrert
$e'^2 = 0.006\,739\,496\,775\,48$	andre eksentrisitet kvadrert
$f = 0.003\,352\,810\,681\,18$	flattrykning
$1/f = 298.257\,222\,101$	gjensidig flattrykning
Fysiske konstanter	
$U_0 = 62\,636\,860.850$ m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup>	normalpotensialet ved ellipsoiden
$J_4 = -0.000\,002\,370\,912\,22$	sfærisk-harmonisk koeffisient
$J_6 = 0.000\,000\,006\,083\,47$	sfærisk-harmonisk koeffisient
$J_8 = -0.000\,000\,000\,014\,27$	sfærisk-harmonisk koeffisient
$m = 0.003\,449\,786\,003\,08$	$m = \omega^2 a^2 b / (GM)$
$\gamma_a = 9.780\,326\,7715$ m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	normaltyngden ved ekvator
$\gamma_b = 9.832\,186\,3685$ m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	normaltyngden ved polene

---

## 2.4 Permanent *tide*-system

Jorden påvirkes av gravitasjonen til tiltrekkende himmellegemer, som f.eks månen og solen. Kraften er avhengig av himmellegemets posisjon og er derfor periodisk [Lysaker and Vestøl, 2020]. Den deformerer jordskorpen og har en perturberende effekt på jordens tyngdepotensial. Effekten av denne kraften kan splittes i to deler, den direkte påvirkningen av jordens tyngdefelt og påvirkningen av observert tyngde. Observert tyngde blir påvirket i den forstand at det skjer en endring i høyden til observasjonene pga. deformasjoner i jordskorpen (tidejord). Vi skiller mellom tre typer *tide*-systemer [Lysaker and Vestøl, 2020]; *mean-tide*, *zero-tide* og *tide-free*.

- *Mean-tide*-system: korresponderer med geoiden og jordskorpens faktiske oppførsel over et langt tidssnitt.
- *Zero-tide*-system: korresponderer med jordskorpens oppførsel over et lang tidssnitt, og geoiden men med antagelsen om et system uten månen og solen.
- *Tide-free*-system: korresponderer med en geoid og jordskorpe i et system uten månen og solen.

## 2.5 Anomale tyngdefeltet

Jordens gravitasjonspotensial kan utvides i en sfærisk-harmonisk rekkerepresentasjon og er en løsning på Laplaced ligningen (2.19) [Gerlach, 2020]

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta) [\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda], \quad (2.38)$$

hvor  $\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$  er fullt normaliserte assosierte Legendre funksjoner av grad  $n$  og orden  $m$ ,  $\bar{C}_{nm}$  og  $\bar{S}_{nm}$  er fullt normaliserte og dimensjonsløse potesialkoeffisienter, som inneholder amplituder av forskjellige spektrale deler.  $GM$  er produktet av Newton's gravitasjonskonstant og jordens masse,  $R$  er den gjennomsnittlige jordradiusen og  $r$  er avstanden mellom jordens massesenter og beregningspunktet  $P$ .  $\theta$  er kobreddegrad (polar avstand).

Et lignende uttrykk lar seg også gjøre med gravitasjonspotensialet til normaltyngdefeltet [Gerlach, 2020]

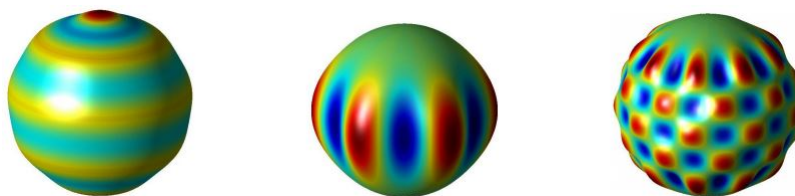
$$V^N(r, \theta, \lambda) = \frac{GM^N}{R^N} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R^N}{r}\right)^{n+1} \bar{C}_{n0}^N \bar{P}_{n0}(\cos \theta). \quad (2.39)$$

Det er flere observasjoner i ligningen som er verdt å merke seg. Normaltyngdefeltet avhenger ikke av breddegrad, pga. rotasjonell symmetri [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006]. Dette fører til at alle sinus-koeffisienter  $\bar{S}_{nm}$  forsvinner og bare *sonale* effekter med orden  $m = 0$  eksisterer (se figur 2.8). Normaltyngdefeltet er symmetrisk iht. ekvator, dette fører til at normaltyngdefeltet inneholder bare *sonale* effekter av samme grad  $n = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$  [Gerlach, 2020].

Differansen mellom det faktiske gravitasjonsfeltet  $V$  og normalfeltet  $V^N$  kalles for potensialforstyrrelsen  $T$  [Gerlach, 2020]

$$T = W - U = (V + Z) - (V^N + Z) = V - V^N, \quad (2.40)$$

hvor  $Z$  er potensialet til sentrifugalkraften. Denne kraften kan elimineres fordi normalfeltet har lik rotasjon som det faktiske gravitasjonsfeltet.



Figur 2.8: Tre forskjellige sfærisk-harmoniske basis funksjoner. *Sonale* effekter med  $m = 0$  (venstre), *sektorale* med  $m = n$  (midten) og *tesserale* med  $n > m$  og  $m > 0$  (høyre). Figur hentet fra [Gerlach, 2020]

## 2.6 Høydesystemer

Et høydesystem er et endimensjonalt koordinatsystem som blir brukt for å måle avstanden til et punkt fra en referanseflate langs en definert linje [Ophaug, 2020b]. Denne størrelsen kalles for *høyden* til punktet. En skiller hovedsakelig mellom to typer høydesystem

- de som ikke tar hensyn til jordens tyngdefelt og dermed følger rette linjer
- de som tar hensyn til jordens tyngdefelt og er koblet til ekvipotensialflater og loddlinjer

I de neste delkapitlene forklares de to hovedtypene av høydesystemer nærmere.

### 2.6.1 Høydesystem som ikke relateres til tyngdefeltet

Høydesystem som ikke relateres til tyngdefeltet kalles for geometriske høydesystem, hvor høyden måles langs rette linjer. Det mest vanlige høydesystemet som ikke relateres til tyngde er ellipsoidiske høydesystem [Ophaug, 2020b].

Ellipsoidisk høyde er den rettlinjede avstanden langs ellipsoidenormalen fra en referanseellipsoides overflate til punkt  $P$ . Den ellipsoidiske høydeverdien til et punkt er en funksjon av origo, orientering, størrelse og form til den benyttede referanseellipsoiden [Ophaug, 2020b].

### 2.6.2 Høydesystemer som relateres til tyngdefeltet

Det finnes flere forskjellige høydesystem som relateres til tyngdefeltet. Forskjellen mellom disse er hvordan høydesystemene behandler tyngden på, og dermed den krumme linjen hvor høyden er definert langs. Vi skiller også her mellom to typer høydesystemer, fysiske eller naturlige høyder.

Felles for disse høydesystemene er at de må baseres på *geopotensialtallet*  $C$ . Geopotensialer er energi og er definert som [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006]  $C = W_0 - W$ , hvor  $W_0$  er potensialet på den valgte referanseflaten og  $W$  er potensialet i punkt  $P$ . Geopotensialtallet i et punkt  $P$  er gitt ved [Ophaug, 2020b]

$$C_P = \int_0^{H_P} g dH. \quad (2.41)$$

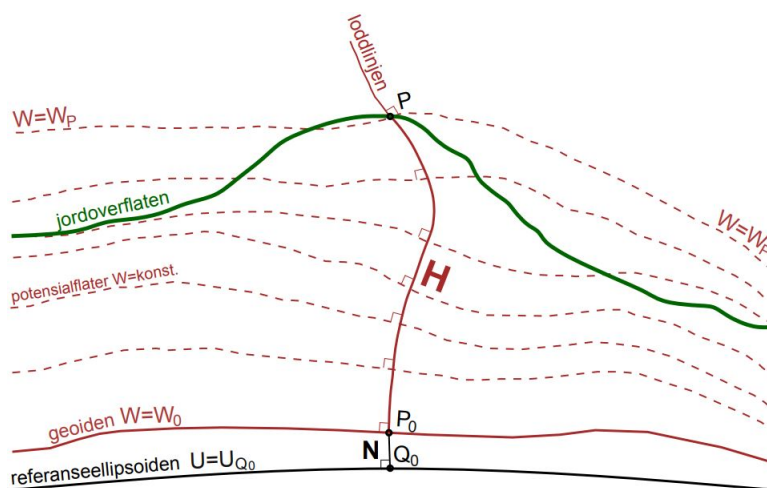
Enheten til geopotensialtallet uttrykkes vanligvis i *geopotensial units* (g.p.u), hvor [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006]

$$1\text{g.p.u} = \text{kGal m} = 10\text{m}^2\text{s}^{-2}. \quad (2.42)$$

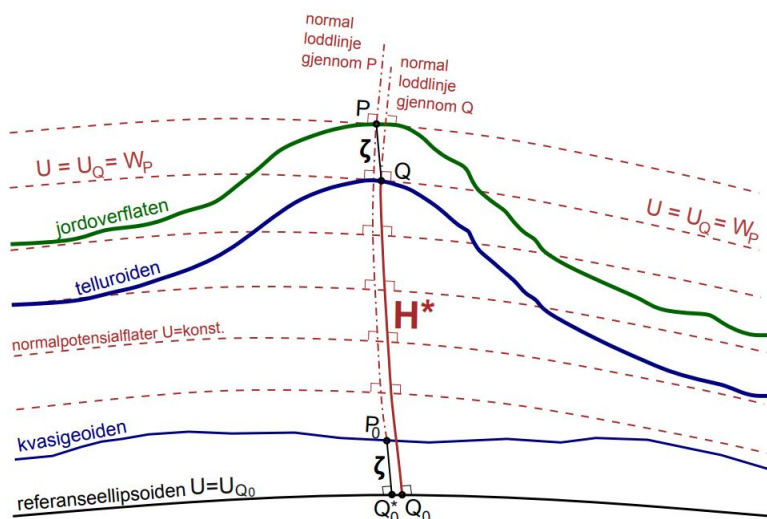
Geopotensialtallets enhet er ikke spesielt egnet som høydemål, men dersom en dividerer geopotensialtallet med en annen tyngdeverdi  $G_0$ , kan en oppnå en høydeenhet med intuitiv lengdeenhet

$$\text{høyde} = \frac{C}{G_0}. \quad (2.43)$$

Hvert høydesystem har forskjellige måter å behandle denne tyngdeverdien på. *Dynamiske* høyder bruker som regel normaltyngdeverdien ved breddegrad  $\pm 45^\circ$ , *ortometriske* høyder bruker midlere tyngdeverdi langs loddlinjen mellom geoiden og punkt  $P$ , og *normalhøyder* bruker midlere normaltyngdeverdi langs normalloddlinjen. Figur 2.9 og 2.10 viser henholdsvis hvordan ortometriske og normalhøyder er definert, samt høydeanomali  $\zeta$  (kvasigeoidhøyden).



Figur 2.9: Ortometrisk høyde  $H$ : avstanden langs den krumme loddlinjen fra punkt  $P_0$  på geoiden til punkt  $P$  på jordoverflaten. Geoidhøyden  $N$ : avstanden langs ellipsoidenormalen fra punkt  $Q_0$  på referanseellipsoiden til punkt  $P_0$  på geoiden. Figur hentet fra [Ophaug, 2020b]



Figur 2.10: Normalhøyde  $H^*$ : avstanden langs normalloddlinjen fra punkt  $Q_0$  på referanseellipsoiden til punkt  $Q$  på telluroiden. Høydeanomali  $\zeta$ : avstanden langs normalloddlinjen fra punkt  $Q_0$  på referanseellipsoiden til punkt  $P_0$  på kvasigeoiden. Figur hentet fra [Ophaug, 2020b]

Vi har to måter å se fysisk geodesi på og det er Stokes og Molodenskij. Stokes formel ble introdusert av G.G. Stokes i 1849, og er en av de viktigste formlene i fysisk geodesi fordi den bestemmer

---

geoiden fra tyngdedata [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006]

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} S(\psi) \Delta g d\sigma, \quad (2.44)$$

hvor  $S(\psi)$  er Stokes funksjonen. Problemet med Stokes teori er at tetthetens forløp langs lodmlinjen må være kjent, noe som kan være svært krevende [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006].

Den russiske geodeten M.S. Molodenskij introduserte normalhøyder i 1945 [Ophaug, 2020b], og hans teori går ut på at jordens tyngdefelt er normalt. Dette betyr at normalhøyder blir ”ortometriske høyder” i normalfeltet. Det som er spesielt med denne antagelsen er at jordoverflaten kan bestemmes bare fra geodetiske målinger uten tetthetsantagelser.

Begge teoriene kan brukes til å bestemme høyden  $h$  til  $P$  over ellipsoiden, f.eks

$$h = H + N = H^* + \zeta. \quad (2.45)$$

Det finnes flere forskjellige nasjonale høydesystem, f.eks NN2000 (Normalnull 2000). Dette systemet er det nasjonale høydesystemet til Norge og er beregnet av Kartverket. Beregningen av NN2000 høyder består av to deler, et nivellements-nettverk og et passivt GNSS-nettverk (justeringspunkter) [Lysaker and Vestøl, 2020]. Høydene i NN2000 er basert på følgende:

- Normalhøyder
- Referanse epoke 2000.5 og landhevingsmodellen NKG2005LU
- *Zero-tide*-systemet
- Fundamentalpunkt NAP (Normaal Amsterdam Peil)

Fundamentalpunktet til NN2000 er det samme punktet som brukes i det europeiske vertikaldatamet EVRF2007. Ved å tilføre HREF (tilpasset referanse geoid) til NN2000 høyder kan en få ellipsoidiske høyder i EUREF89 (European Reference Frame 89) [Lysaker and Vestøl, 2020]. EUREF89 er det offisielle geodetiske referansesystemet i Norge og benytter seg av GRS80-ellipsoiden.

## 3 Tyngdereduksjoner og anomalier

Jordens tyngdefelt gjenspeiler massefordelingen i jordsystemet, dvs. at tyngdesignal som er målt med forskjellige gravimetrisk metode, f.eks terrestrisk eller satellitt gravimetri, består av forskjellige komponenter [Gerlach, 2020]. Flere av disse komponentene kan beregnes og det resterende (*residual*) signalet gir en indikasjon på størrelsen og den romlige utvidelsen av de ukjente komponentene. Resterende signalet kalles for *tyngdeanomali* eller *tyngdeforstyrrelse*, og er definert som differansen mellom en observert og en beregnet størrelse [Christian Gerlach og Vegard Ophaug, 2021].

Innen geodesi er signalet til tyngdeanomaliene interessant, blant annet for å kunne studere de stokastiske egenskapene av det globale og lokale anomale feltet. Ved å ha kjennskap til signalkarakteristikken, er det lettere å justere beregningene i praktisk tyngdefeltsmodellering. Reduksjon av signalkomponenter glatter signalet og gjør det lettere å håndtere.

Komponentene som utgjør hovedbidraget til målt tyngdesignal er [Christian Gerlach og Vegard Ophaug, 2021]:

- ellipsoidisk høyde  $h$  til stasjon (avstanden fra geosenteret)
- geografisk breddegrad  $\varphi$
- omkringliggende topografiske masser
- global til lokal tetthetsanomalier inne i jorden
- tidejord
- tidevann og tidevannets last
- variasjoner i atmosfærisk masse og korresponderende last effekter
- andre tidsvariable komponenter forårsaket av massetransporten i jordsystemet

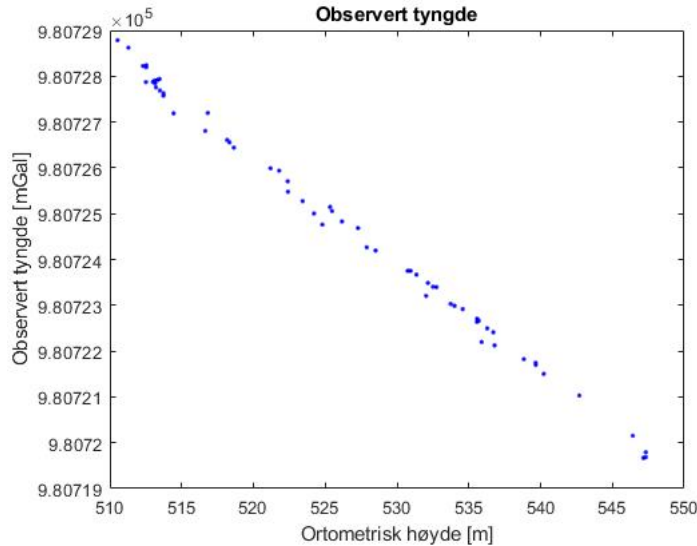
### 3.1 Friluftsanomalier og tyngdeforstyrrelser

Friluftsanomalier er definert som differansen mellom observert tyngde  $g$  og normaltyngden  $\gamma$ ,

$$\Delta g_{FA} = g_P - \gamma_Q, \tag{3.1}$$

hvor  $g_P$  er observert tyngde på jordens overflate og  $\gamma_Q$  er normaltyngden i punkt  $Q$ . Normaltyngden  $\gamma$  blir beregnet med parametre fra en referanse ellipsoide, f.eks., GRS80 eller WGS84.

Figur 3.1 viser at observert tyngde er sterkt korrelert med høyde.



Figur 3.1: Målt tyngde plottet mot ortometrisk høyde, viser sterk negativ korrelasjon.

Det å velge et annet punkt for å beregne normaltyngden stammer fra tiden GNSS ikke var tilgjengelig. I dag kan en enkelt få tak i tredimensjonale koordinater for hvilken som helst stasjon på jordens overflate, også den ellipsoidiske høyden er lettere tilgjengelig.

I tilfeller der den ellipsoidiske høyden til  $P$  er kjent, kan man beregne  $\gamma$  direkte i punktet  $P$ . Differansen mellom observert tyngde og beregnet normaltyngde kalles for tyngdeforstyrrelse

$$\delta g = g_P - \gamma_P \quad (3.2)$$

For å beregne normaltyngden i  $Q$  eller  $P$ , beregner man først normaltyngden på ellipsoidens overflate og deretter implementerer tyngdegradienten  $\partial\gamma/\partial h$  for å føre verdien opp i punktene  $Q$  eller  $P$

$$\Delta g_{FA} = g_P - \left( \gamma_0 - \frac{\partial g}{\partial h} H \right). \quad (3.3)$$

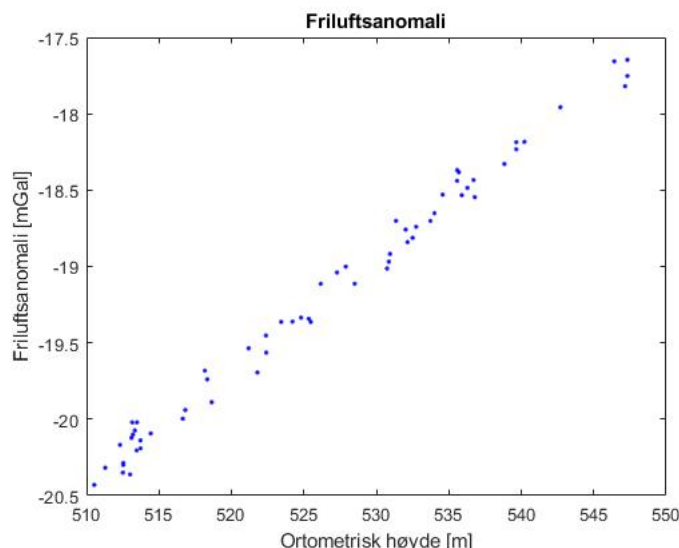
Dersom en vil beregne tyngdeanomaliene på geoidens overflate må de føres ned til geoiden med følgende formel

$$\Delta g_{FA} = \left( g_P - \frac{\partial g}{\partial h} H \right) - \gamma_0. \quad (3.4)$$

Ved å beregne friluftsanomalier, reduserer man de observerte tyngdeverdiene for alle signalkomponenter som er representert i normal tyngdefeltet. De er som følger

- ellipsoidisk høyde
- geografisk breddegrad

De resterende signalkomponentene i friluftsanomaliene er lokale tetthetsanomalier og effekten av topografisk masse. Derfor er friluftsanomaliene sterkt positivt korrelert med høyde, se figur 3.2.



Figur 3.2: Friluftsanomali plottet mot ortometrisk høyde, viser sterk positiv korrelasjon.

## 3.2 Bougueranomali og topografisk reduksjon

Småskala-strukturer i tyngdefeltsignalet er i stor grad forårsaket av nærliggende topografiske masser [Christian Gerlach og Vegard Ophaug, 2021]. Tyngdeeffekten av de topografiske massene kan beregnes ved bruk av DTM og dersom massetettheten i interesseområdet er tilstrekkelig kjent. I tilfeller hvor massetettheten ikke er tilstrekkelig kjent, blir det brukt en standard massetetthetsverdi på  $2700\text{kg}/\text{m}^3$ , som korresponderer med den gjennomsnittlige globale tettheten til jordskorpen [Christian Gerlach og Vegard Ophaug, 2021]. Anomalier som er redusert for topografiske effekter kalles Bougueranomali.

Reduksjon av topografiske effekter vil resultere i et glatt anomalt felt, hvor småskala-strukturer er redusert. Blir det antatt for stor tetthetsverdi, vil Bougueranomaliene vise tydelige negative signalkomponenter, eller positive om det blir antatt for liten tetthetsverdi. Avvik mellom tettheten brukt i beregningen av topografisk reduksjon og den faktiske tettheten i interesseområdet, avslører lokale tetthetsanomali [Gerlach, 2020].

Bougueranomali er gitt ved [Gerlach, 2020]

$$\Delta g_{BO} = \Delta g_{FA} - \delta g_{topo}, \quad (3.5)$$

hvor  $\delta g_{topo}$  er topografisk effekt og  $\Delta g_{FA}$  er friluftsanomali.

En metode for å beregne de topografiske massene, er å modellere de som f.eks rektangulære prizmer, tesseroider eller punktmasser. Ved å tilskrive massene disse formene kan ligning (2.14) benyttes, og ta den vertikale deriverte av  $V$  som følger

$$\frac{\partial V}{\partial z} = V_z, \quad (3.6)$$

som er den vertikale gravitasjonsakselerasjonen og effekten topografien virker på tyngdeobservasjoner.

En klassisk metode for å beregne  $\delta g_{topo}$  er å splitte den i to komponenter [Gerlach, 2020]

- Bouguerplate



- Terrenngkorreksjon

Bouguerplaten er en uendelig stor plate, med samme høyde som beregningspunkt  $P$ . Det er en tilnærming til terrenget rundt  $P$ . Denne metoden fungerer bra om det ikke er noen store variasjoner i topografien rundt beregningspunktet. Ved å redusere med Bouguerplaten tar man vekk de største komponentene for masseffekt. Har terrenget signifikante variasjoner, legger man til terrenngkorreksjonen  $\delta g_{TC}$ . Terrenngkorreksjonen inneholder ikke all massen over geoiden, bare avviket fra Bouguerplaten. Dette resulterer i at terrenget blir flatet ut som en Bouguerplate.

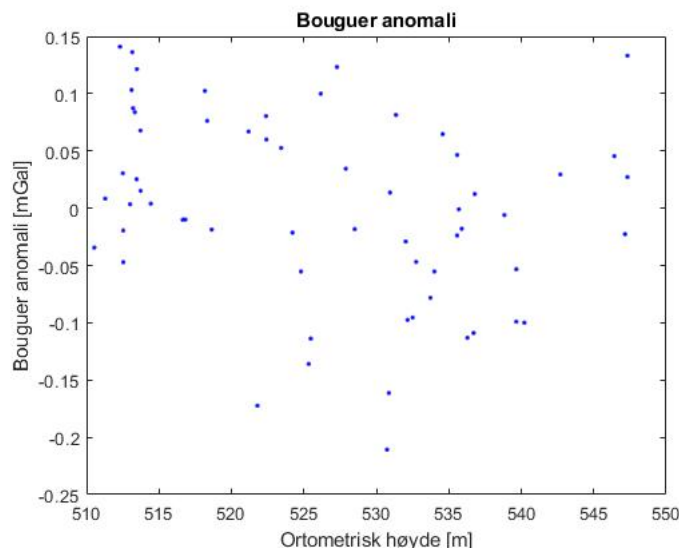
Tyngdeeffekten til Bouguerplaten er gitt som [Gerlach, 2020]

$$BO = 2\pi G\rho H = 0.1119H[mGal]. \quad (3.7)$$

Bougeranomalier kan da beregnes ved

$$\Delta g_{BO} = \Delta g_{FA} - 2\pi G\rho H + \delta g_{TC}. \quad (3.8)$$

Siden Bougeranomalier er redusert for effekten av topografiske masser, er de ikke korrelert med høyde (svært liten grad,  $\approx 0$ ). Dette er vist i figur 3.3.



Figur 3.3: Bougeranomalii plottet mot ortometrisk høyde, ingen signifikant korrelasjon.

### 3.3 TGF: Matlab basert programvare for terrenngrelaterte tyngdefelt beregninger

TGF (Terrain Gravity Field) er en MATLAB-basert programvare for RTM (Residual Terrain Modelling) beregninger, og er laget av Yang et al. [2020]. TGF er kapabel til å beregne tyngdefeltet som er generert fra en vilkårlig topografisk massetetthetsfordeling [Yang et al., 2020]. Programvaren benytter seg av en adaptiv algoritme som deler opp integrasjonsmassene inn i fire soner. Den benytter fire forskjellige geometrier: polyeder, prisme, tesseroider og punktmasser. TGF-programvaren bruker flere DTM'er med forskjellig oppløsning. RTM-teknikken er benyttet i stor grad innenfor geodesi og geofysiske oppgaver, for å kunne modellere det høy-frekvente tyngdefeltsignalet. RTM krever at en kjenner til geometrien og tetthetsfordelingen til topografien [Yang et al., 2020].

TGF-programvaren kan beregne ti forskjellige størrelser i tyngdefeltet, den støtter forskjellig valg

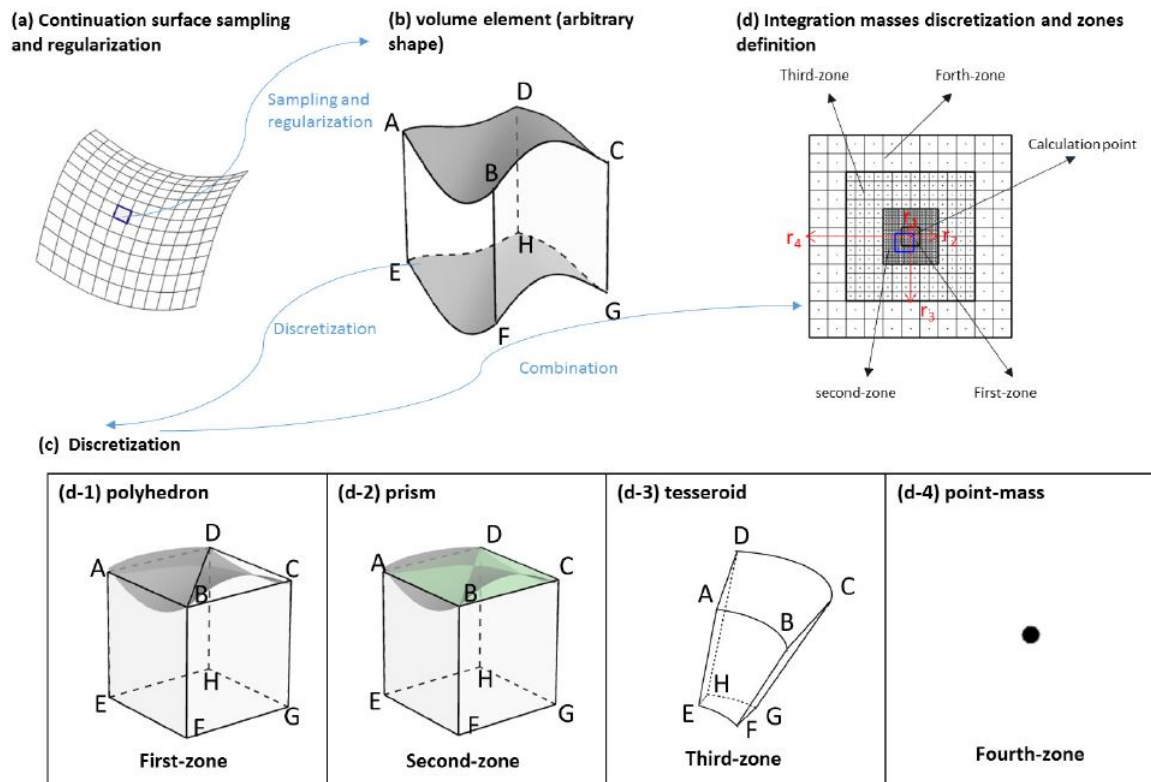
av tetthet, f.eks konstant tetthet eller tetthetskart, og tar hensyn til jordens krumning ved å implementere sfærisk eller ellipsoidisk approksimasjon.

I forhold til andre programvarer som er gratis tilgjengelig, er TGF den eneste som har alle disse egenskapene [Yang et al., 2020]:

- kombinerer forskjellige typer masselement, f.eks tesseroider og punktmasser
- tilbyr forskjellige valgt av størrelser for beregning
- forskjellige bånd-bredder, inkludert høy-frekvent tyngdemodellering (RTM) og komplett-bånd modellering hvor en komplett topografisk massemodell kan benyttes som input
- kodet i MATLAB, tilrettelagt for enkel endring av kode for vitenskapelig forskning

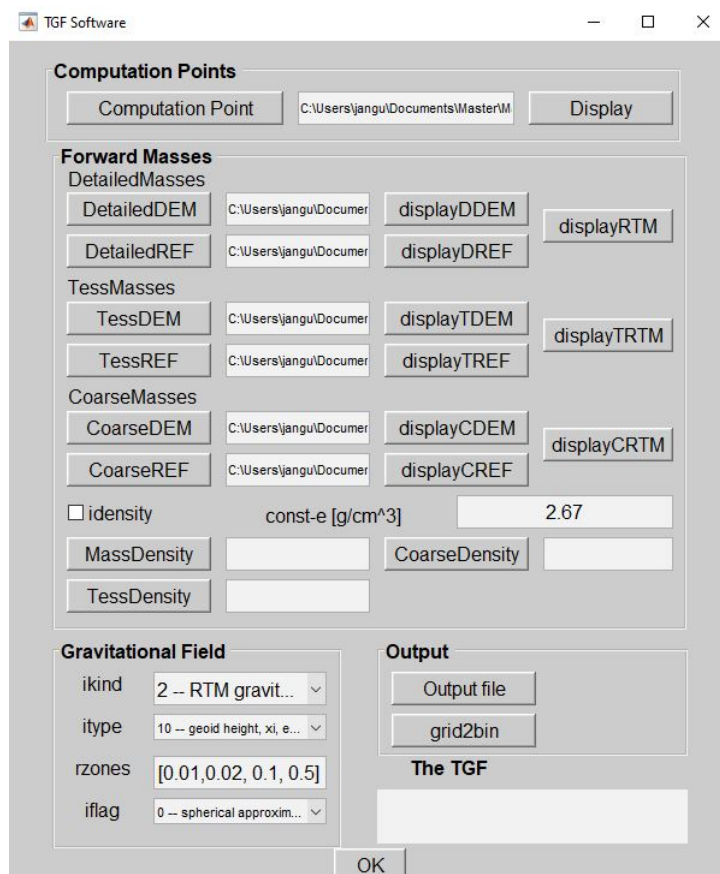
Potensialet til tyngden forårsaket av en generell massetetthetsfordeling i et beregningspunkt  $P$ , plassert på eller over jordens overflate kan uttrykkes ved Newtons gravitasjon integral (2.14) [Yang et al., 2020]. For en generell massefordeling med en vilkårlig form, finnes det ingen analytisk løsning med Newtons gravitasjon integral. En mulig løsning er å dele geometrien inn i en *mesh*-modell som kan vilkårlig synkroniseres med tilgjengelig geometrisk data, dvs. DTM, og fysiske parametre (tetthets modell). Forskjellige integrasjonsformer er benyttet for å evaluere Newtons integral (2.14) over hvert volumelement. Ved å summere alle individuelle bidrag, får man den sammensatte tyngdeeffekten over beregningspunktet.

For å oppnå høy nøyaktighet og effektivitet, har TGF delt massefordelingene i fire soner. Hver sone er definert med en radius  $r$  ( $r_1, r_2, r_3, r_4$ ). DTM og tetthetsmodell med høy oppløsning er benyttet i den nære sonen, og er representert med polyeder og prisme. I de mer distanserte sonene er det benyttet grovere DTM og tetthetsmodell, som er representert med tesseroider og punktmasser. Figur 3.4 viser de fire forskjellige sonene med sine tilhørende geometrier.



Figur 3.4: Behandlingen av de fire forskjellige sonene og geometrien som er benyttet for å representere massefordelingen i hver sone. Figur hentet fra [Yang et al., 2020].

Programvaren har en GUI (Geographical User Interface) og er vist i figur 3.5.



Figur 3.5: TGF GUI med definerende parametre.

Alle filene som skal leses av TGF-programvaren må konverteres til et binært format (.bin). Beregningspunktene leses inn i Computation Point med vektorer for punktnummer, breddegrad, lengdegrad og høyder. I "Forward Masses" leses de forskjellige DTM'ene som skal brukes inn. DTM definerer den øvre grensen og REF den nedre grensen til RTM. "DetailedMasses" definerer massene til polyeder og prisme, "TessMasses" definerer massene til tesseroider og "CoarseMasses" definerer punkt-massene (se figur 3.4). I "Gravitational Field" definerer man hvilken beregning en vil gjøre, størrelser i tyngdefeltet en vil berenge, radius til hver sone og hvilken approksimasjon beregningen skal relateres til.

## 4 Global tyngdefeltmodellering

Global tyngdefeltmodellering krever nøyaktige og globalt homogene observasjonssystemer. Dette var ikke tilgjengelig før begynnelsen av det 21. århundre [Gerlach, 2020]. Observasjonene var før enten basert på terrestriske teknikker, som begrenser bruken til lokale/regionale oppgaver, eller tidlige satellittsystemer, hvor nøyaktigheten var kraftig redusert. I løpet av de siste tiårene har det vært en signifikant utvikling i innsamling av høyoppløselige tyngde- og terrestriske data, og beregnings- og modelleringsteknikker. Av spesiell interesse er data fra CHAMP (CHallenging Mini-satellite Payload), GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment) og GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer). Satellittferdene CHAMP og GRACE leverer lange bølgelengder av geoiden med en nøyaktighet på rundt 1 cm opp til en oppløsning på 200-650 km, hvor GOCE leverer en nøyaktighet på 1-2 cm for geoiden og 1 mGal for tyngde (begge med en tilnærmet oppløsning på 100 km) [Denker, 2013].

Kombinasjon av satellitt- og terrestriske målinger kan gi et komplett spektrum av geoidesignalet, dvs. alle bølgelengder [Gerlach, 2020]. Data fra satellitt og terrestriske målinger komplementerer hverandre, ved at satellittdata leverer god nøyaktighet på langbølgede tyngdefeltstrukturer og terrestriske data leverer god nøyaktighet på kortbølgede tyngdefeltstrukturer. For økende høyde blir tyngdefeltsignalet glattere, og satellitter klarer derfor ikke å modellere de små tyngdefeltstrukturene. Terrestriske målinger fanger opp de små tyngdefeltstrukturene, men har begrenset romlig oppløsning, og fanger derfor ikke opp de lange bølgelengdene.

### 4.1 Globale Potensialmodeller

GPM'er gjør det mulig å beregne flere forskjellige størrelser i tyngdefeltet ved sfærisk-harmonisk syntese [Gerlach, 2020]. GPM omfatter følgende:

- et sett med potensialkoeffisienter ( $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ ) opp til en spesifikk grad  $N_{maks}$
- $R$  som definert konstant
- $GM$  som definert konstant

Koeffisientene relateres til spesifikke konstanter. Skal størrelser som geoid høyde og tyngdeanomalier relateres til et normaltyngdefeltet med andre konstanter, må potensialkoeffisientene skaleres [Gerlach, 2020].

GPM'er kan baseres på disse datakildene:

- terrestriske tyngdeanomalier (land, flybåren og data fra båt)
- geoid høyde eller tyngdeanomalier fra satellittaltimetri over hav
- baneperturbasjoner fra satellitt
- *inter-satellitt* link eller tyngdegradient målt i rommet

GPM'er som er basert på alle disse datakildene kalles for *kombinerde modeller*. Dersom de bare er basert på satellittdata kalles de for *satellite-only-modeller*. Beregningen av GPM'er kan også ta i bruk DTM'er for å kunne modellere forskjellige terrengrelaterte størrelser, spesielt i områder med manglende terrestriske data, og føre tyngdeanomalier til en referanseellipsoide. Denne metoden blir brukt i de fleste høyoppløselige GPM.

Ved å ta differansen mellom koeffisientene gitt i GPM med koeffisienter til et valgt normalt referansesystem  $(\Delta\bar{C}_{nm}, \Delta\bar{S}_{nm})$ , kan potensialforstyrrelsen  $T$  beregnes som følger [Gerlach, 2020]

$$T(h, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \varphi). \quad (4.1)$$

Skal ligning (4.1) brukes er det viktig at konstantene  $GM$  og  $R$  til GPM og normalfeltet er identiske. Ved hjelp av den sfærisk-harmoniske representasjonen av  $T$ , kan flere andre størrelser i tyngdefeltet beregnes (se tabell 4.1). Potensialforstyrrelsen  $T$  kan benyttes i Bruns ligning for å finne den vertikale avstanden mellom to potensialflater, f.eks geoidhøyden  $N$  eller kvasi-geoidhøyden  $\zeta$  [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006]

$$N = \frac{T_{P_0}}{\gamma_{Q_0}}, \quad (4.2)$$

$$\zeta = \frac{T_P}{\gamma_Q} \quad (4.3)$$

hvor  $\gamma$  er normaltyngden som er generert av normalpotensialet  $V^N$ .

En mer generell representasjon av sfærisk-harmonisk syntese kan skrives som følger [Gerlach, 2020]

$$F(T) = K_F \sum_n \lambda_n \sum_m \bar{P}_{nm}(\cos \theta) [\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm} \sin m\lambda], \quad (4.4)$$

som viser at eigenverdiene  $(\lambda_n)$  avhenger bare av sfærisk-harmonisk grad  $n$ , eller

$$F(T) = K_F \sum_n \sum_m \bar{P}_{nm}(\cos \theta) [\underbrace{(\lambda_n \Delta\bar{C}_{nm})}_{=K_{nm}^C} \cos m\lambda + \underbrace{(\lambda_n \Delta\bar{S}_{nm})}_{=K_{nm}^S} \sin m\lambda], \quad (4.5)$$

hvor eigenverdiene fungerer som vektorer for de spektrale koeffisientene  $\bar{C}_{nm}$  og  $\bar{S}_{nm}$ .  $K_{nm}$  er tidligere kalt sfærisk-harmoniske koeffisienter,  $K_F$  er dimensjonsfaktor for funksjonen  $F(T)$  av potensialforstyrrelsen. Tabell 4.1 under viser forskjellige størrelser i tyngdefeltet med deres spektrale koeffisienter, dimensjonsfaktorer og spektrale eigenverdier.

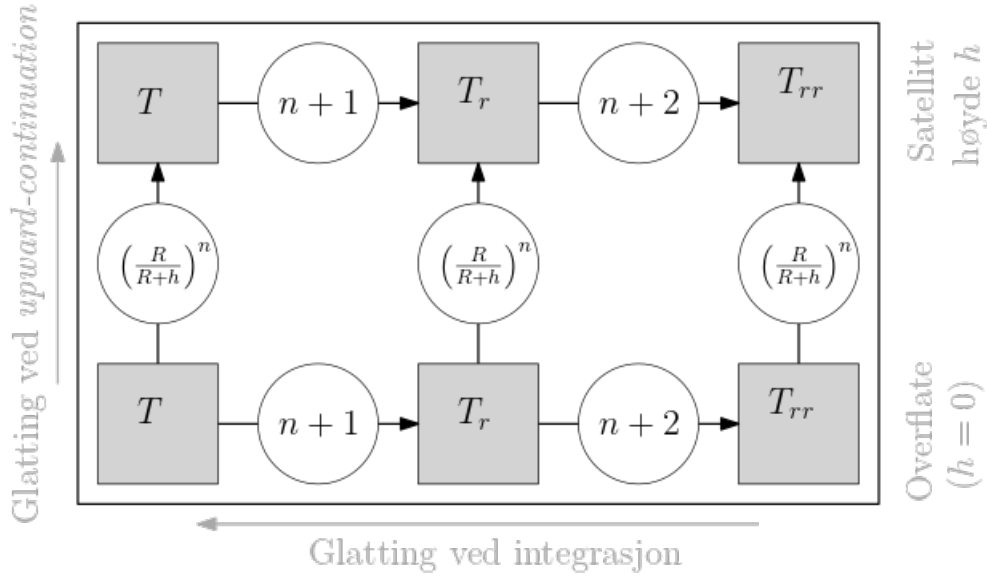
Tabell 4.1: Forskjellige størrelser som kan utlede med sfærisk-harmonisk syntese, med deres spektral koeffisienter, dimensjonsfaktorer og spektrale eigenverdier. Potensialforstyrrelsen  $T$ , dens første deriverte  $T_r$ , dens andre deriverte  $T_{rr}$ , geoidhøyden  $N$  og tyngdeanomali  $\Delta g$ .

$F(T)$	$K_F$	$K_{nm}^C$	$K_{nm}^S$
$T$	$GM/r$	$\Delta\bar{C}_{nm}$	$\Delta\bar{S}_{nm}$
$T_r$	$-GM/r^2$	$(n+1)\Delta\bar{C}_{nm}$	$(n+1)\Delta\bar{S}_{nm}$
$T_{rr}$	$GM/r^3$	$(n+1)(n+2)\Delta\bar{C}_{nm}$	$(n+1)(n+2)\Delta\bar{S}_{nm}$
$N$	$R$	$\Delta\bar{C}_{nm}$	$\Delta\bar{S}_{nm}$
$\Delta g$	$GM/r^2$	$(n-1)\Delta\bar{C}_{nm}$	$(n-1)\Delta\bar{S}_{nm}$

Potensialforstyrrelsens førstederiverte  $T_r$  kan relateres til tyngdeforstyrrelsen  $\delta g$  [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006] ved følgende ligning

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial h}. \quad (4.6)$$

*Meissl*-skjema, se figur 4.1, viser at signalet blir glattere når en beveger seg opp til satellitthøyde. Siden signalet blir glattere, er det derfor interessant å observere høyere ordens derivater av potensialet. Disse derivatene er mer sensitive for små-skala strukturer, og en kan dermed observere et røffere signal [Gerlach, 2020]. Dette konseptet er realisert gjennom GOCE, som er den eneste satellittferden som observerer potensialforstyrrelsens andrederiverte  $T_{rr}$ .



Figur 4.1: *Meissl*-skjema som beskriver den spektrale sammenhengen mellom potensialforstyrrelsen  $T$ , dens første og andre deriverte  $T_r$  og  $T_{rr}$  på overflaten ( $h = 0$ ) og i satellitt-høyde  $h$ . Måten signalet blir glattet på gir en indikasjon på retningen hvor tyngdefeltet blir glattere.

Sfærisk-harmonisk grad  $n$  kan relateres til bølgelengder og romlig utstrekning ved å se på antall sykluser som blir generert av Legendrepolynomene på kulen. Den romlige bølgelengden til en harmonisk funksjon med en spesifikk grad  $n$  kan beregnes ved [Gerlach, 2020]

$$\lambda = \frac{2\pi R}{n}. \quad (4.7)$$

Den romlige oppløsningen er definert som halve bølgelengden til den minste signaturen [Gerlach, 2020]

$$\Delta = \frac{\lambda}{2} = \frac{\pi R}{n} \approx \frac{20000km}{n}. \quad (4.8)$$

I de neste delkapitlene utdypes de typene GPM vi skiller mellom *satellite-only-model* og *kombinerte modeller*.

## 4.2 *Satellite-only-modeller*

GPM'er som bare baseres på satellittdata inneholder potensialkoeffisienter for lavere gradstall. Slike GPM'er er nødvendig for nøyaktig satellitt-bane beregninger, posisjonering og for å modelle-

re langbølgede andelen av geoiden, f.eks modellering av hav topografien. GPM'er ble tradisjonelt dannet ved å analysere satellittbaner, siden disse forstyrres av tyngdefeltet. Senere har dedikerte observasjonsteknikker som satellitt-sporing, satellitt-til-satellittsporing og satellittgradiometri bidratt til høyere oppløsning. Disse teknikkene er realisert gjennom de dedikerte satellittferdene CHAMP, GRACE og GOCE. Ved hjelp av disse observasjonene kan en analysere avvik fra en beregnet referansebane, hvor korresponderende modeller inneholder en sfærisk-harmonisk utvikling av tyngdepotensialet [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006].

Den grunnleggende ligningen for estimering av tyngdefeltparametre fra satellittobservasjoner er gitt som [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006]

$$\mathbf{r}_P + \mathbf{s} - \mathbf{r}_S = \mathbf{0}, \quad (4.9)$$

hvor  $\mathbf{s}$  er observasjonsvektor fra stasjon  $P$  til satellitten  $S$ ,  $\mathbf{r}_P$  er geosentrisk stasjonsvektor og  $\mathbf{r}_S$  er radiusvektor til satellitt. Denne ligningen kobler sammen posisjonen til bakkestasjonen og satellitt gjennom observasjonene. Med kjente stasjonskoordinater på bakken, er satellittbanen den resterende ukjente størrelsen.

Ved å tilføre transformasjonen av sfæriske koordinater til den harmoniske utviklingen inn i *Kepler*-elementene, får man en forbindelse mellom baneperturbasjonene og harmoniske koeffisienter ved å forme derivatene av det perturberende potensialet med hensyn på elementene. Disse blir så ført inn i observasjonsligningen for satellitt geodesi, *Lagrange's* perturbasjon's ligning. Ligningen er gitt ved [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006]

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \bar{M}} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \bar{M}} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \omega} \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2e\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{d\bar{M}}{dt} &= n - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} \end{aligned} \quad (4.10)$$

hvor  $a$ ,  $e$ ,  $\omega$ ,  $i$ ,  $\Omega$  og  $\bar{M}$  er tidsvariable *Kepler*-elementer.  $R$  er definert av de tidsvariable *Kepler*-elementene og de sfærisk-harmoniske potensialkoeffisientene  $C_{nm}$  og  $S_{nm}$  ( $R = R(a, e, \Omega, i, \omega, C_{nm}, S_{nm})$ ).

Satellitter i forskjellige høyder og med forskjellige inklinasjonsvinkler, samt god global dekning av bakkestasjoner og lengre observasjonstid er nødvendig for å kunne estimere tyngdefeltet til en spesifikk grad. Den dempede effekten av tyngdefeltet mht. høyde og minkende harmoniske koeffisienter for høyere gradstall, begrenser oppløsningen til *satellite-only* modellene.

Målingene fra GRACE, GOCE og CHAMP går inn i korresponderende observasjonsligning (4.10) for å bedre kunne bestemme sfærisk-harmoniske koeffisienter av høyere grad og orden ( $g/o$ ), og for å forbedre bestemmelsen av den langbølgede andelen av tyngdefeltet. Ved å benytte minstekvadraters utjevning, kan en koble sammen forskjellige datasett som er evaluert separat, og en kan få en mer grundig bestemmelse av de harmoniske koeffisientene. Vektingen mellom disse datasettene og modelleringen av systematiske effekter, er fortsatt en stor utfordring i dag. Med hensyn til nøyaktigheten til modellene må en skille mellom *commission*-feil og *omission*-feil. *Commission*-feil stammer fra feil i dataene som blir dannet gjennom modelleringsprosessen, f.eks minstekvadraters utjevning [Gerlach, 2020]. Den begrensede romlige oppløsningen av data og modelleringen som er utledet av disse, representerer *omission*-feilen (utelatelsesfeil).

---

### 4.3 *Kombinasjons-modeller*

Ved å kombinere *satellite-only-modeller* med satellitt-altimetri og terrestriske tyngdemålinger, kan den romlige oppløsningen og nøyaktigheten til modellen forbedres betraktelig. Data fra de terrestriske målingene er som oftest tilgjengelige som blokkmiddelverdier på et grid med geografiske koordinater. Grad og orden avhenger nå av den romlige oppløsningen av data fra altimetri og terrestriske målinger. Data som inngår i en kombinert modell er følgende:

- harmoniske koeffisienter til en *satellite-only*-modell
- blokkmiddelverdier av friluftsanomalier fra terrestriske målinger på land og hav med tilhørende feilestimat
- gjennomsnittlig utledet geoidehøyde fra satellitt-altimetri med tilhørende feilestimat

Noen løsninger benytter tyngdeanomalier istedet for altimetrisk geoidehøyder, ved en transformasjon basert på enten en integralformel eller minste-kvadraters kollokasjon [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006].

I prinsippet utnytter en minste-kvadraters utjevning all tilgjengelig data for å bestemme et fullt sett med potensialkoeffisienter. God datadekning på et grid med homogene og ukorrelerte feil, samt en noe spesiell ordning på normalligningene er gitt for å kunne beregne slike høyoppløselige modeller [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006].

### 4.4 Minste kvadraters prediksjon

Det geodetiske randverdiproblemet kan løses i form av å integrere over hele kloden. Stokes formel (2.44), for beregning av geoidehøyde, krever at tyngdeanomalier er gitt som en kontinuerlig funksjon over hele interesseområdet. Problemet er at tyngdemålingene er begrenset til diskrete punkter på land og hav. Dette kan løses ved å danne et rektangulært rutenett med blokkmiddelverdier, eller anvende minste kvadraters prediksjon for å prediktere tyngdeverdier der det ikke eksisterer noen målinger. Interpolasjon benyttes hvis beregningspunkter  $P$  ligger innenfor det definerte området utbredt av datapunkt  $Q$ , og ekstrapolasjon hvis  $P$  ligger utenfor. En statistisk beskrivelse av jordens tyngdefelt er helt fundamentalt for prediksjon av beregningspunkt.

Minste kvadraters prediksjon krever kjennskap til tyngdefeltets funksjonelle oppførsel på et lokalt plan. Oppførselen kan beskrives ved hjelp av kovariansfunksjoner. For å lage en empirisk kovariansfunksjon må en beregne produktet mellom alle observasjonspunkt  $Q$ . Deretter må forskjellige avstandsklasser defineres, og gjennomsnittsverdien for alle avstandsklassene må beregnes. Prediksjon i friluftsanomalier i beregningspunkt  $P$  kan gjøres direkte, eller gjennom Bougueranomalier (RCR).

Behandling av statistiske signalegenskaper krever at signalet er stokastisk [Christian Gerlach og Vegard Ophaug, 2021]. Det betyr at:

- Signalet inneholder ingen deterministiske komponenter
- Signalet svinger rundt null (funksjonens gjennomsnittsverdi er null)
- Signalet er isotropisk
- Signalet er homogent

Den underliggende antagelsen når en skal forme en kovariansfunksjon er at signalet er stokastisk, og oppfyller kriteriene over. I globale beregninger er dette oppfylt siden den gjennomsnittlige verdien



for tyngdeanomalier er null,

$$M\{\Delta g\} = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \int \Delta g d\sigma = 0, \quad (4.11)$$

hvor  $M\{\cdot\}$  er gjennomsnittsoperatoren

$$M\{\cdot\} = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \int \cdot d\sigma. \quad (4.12)$$

I regionale eller lokale beregninger er dette ikke nødvendigvis tilfelle ( $M\{\Delta g\} \neq 0$ ). Lokale trender eller gjennomsnittet av lokale observasjoner må trekkes fra. Tyngdeanomalierne er da gitt ved

$$\Delta \tilde{g} = \Delta g - M\{\Delta g\}. \quad (4.13)$$

Denne forhåndsbehandlingen er nødvendig for at kriteriene for et stokastisk signal er møtt.

Det mest praktiske er å bruke en analytisk modell, som kan evalueres for spesifikke avstander  $s_{Q_i}$ .

Gitt et datasett med koordinater i x- og y-vektorer, kan man sette opp en avstandsvektor  $S_{Q_{ij}}$  som inneholder avstanden mellom alle datapunkt  $Q$ ,

$$s_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}. \quad (4.14)$$

Det må også opprettes en matrise som inneholder produktet av korresponderende punkt

$$G_{Q_{ij}} = \Delta g_{Q_i} \cdot \Delta g_{Q_j}. \quad (4.15)$$

Deretter kan en utlede et estimat for signalvariansen ved å ta gjennomsnittet av diagonalelementene i  $G_{Q_{ij}}$

$$C_0 = \text{mean}(\text{diag}(G_{Q_{ij}})). \quad (4.16)$$

$S_{Q_{ij}}$  matrisen har diagonalverdier lik null og  $G_{Q_{ij}}$  har diagonalelement lik  $\Delta g_{Q_i}^2$ . For å utlede kovarianser kan en omorganisere begge matrisene slik at avstanden er i stigende rekkefølge. Et problem er at enkeltpunktene ikke gir informasjon om signalets statistiske egenskaper. En metode for å komme seg rundt dette på, er å danne avstandsklasser og beregne gjennomsnittet for alle produkt av punktverdier  $\Delta g_i \cdot \Delta g_j$  som kommer i samme avstandsklasse. Det er viktig at alle avstandsklassene har likt antall observasjoner, hvis ikke, vil gjennomsnittsverdiene til avstandsklassene ha forskjellig nøyaktighet. Gjennomsnittsverdiene som utledes forventes å representere en kovariansverdi og vil dermed gi strukturen til en kovariansfunksjon.

De diskrete punktene er å betrakte som en *empirisk kovariansfunksjon*. For metoden minste kvadraters prediksjon, må en lage en modell for kovariansfunksjonen slik at en kan bestemme kovariansverdier for vilkårlige avstander. Deretter tilpasses modellkovariansfunksjonen den empiriske kovariansfunksjonen. Det finnes flere analytiske modeller, f.eks:

- Eksponensialmodellen

$$C(s) = C_0 \cdot e^{-A^2 \ln 2} \quad (4.17)$$

- Hirvonen's modell

$$C(s) = C_0 \cdot \left(1 + \left(2^{\frac{1}{p}} - 1\right) A^2\right)^{-p} \quad (4.18)$$

$A$  er forholdet mellom distanse  $s$  og signalets korrelasjonslengde  $\xi$ ,  $p$  er en krumningsparameter, et mål på radiusen til krumningen ved funksjonens opprinnelse. Korrelasjonslengden er definert som

$$\xi = \frac{1}{2}C_0, \quad (4.19)$$

hvor  $C_0$  er variansen til funksjonen ved  $C(s=0)$ . En analytisk modell beskriver korrelasjonen til en funksjon over forskjellige avstander. Småskala-signalkomponenter som ikke blir fanget opp av de mindre avstandsklassene, bidrar ikke til korrelasjon, dermed vises de ikke i den analytiske modellen. Småskala-komponenter bidrar til signalvariansen, og dermed kan  $C_0$ -verdien til dataene bli større enn  $C_0$  til den analytiske modellen. Slike avvik gjenspeiler bidraget fra småskala-komponenter og kan i senere beregning brukes som støykomponent.

Parametrene til de analytiske modellene kan estimeres ved hjelp av minste kvadraters metode, eller ved visuell inspeksjon av kovariansfunksjonen langs de empiriske kovarians verdiene.

Det er ingen bestemt regel for hvilken av de to analytiske kovariansfunksjonene som skal benyttes. Ut i fra signalkarakteristikken velger man den modellen som sammenfaller i høyest grad til den empiriske kovariansfunksjonen. En kovariansfunksjon beskriver oppførselen til et signal, og det er derfor viktig at en kovariansfunksjon bare er gjeldende for den størrelsen den er tilpasset [Christian Gerlach og Vegard Ophaug, 2021].

Ved å utføre direkte prediksjon i friluftsanomalier i  $P$  basert på friluftsanomalier i punkt  $Q$ , inneholder anomaliene deterministiske signalegenskaper. Dette bryter med antagelsen om et stokastisk signal, som fører til at den statistiske analysen blir dårlig. Storskala-strukturer med bølgelengder større enn omfanget av interesseområde vil vises som lokale og regionale trender. Gjennomfører man prediksjon i Bougueranomali (RCR), er anomaliene redusert for slike signalegenskaper og du vil få et veldig glatt signal. Antagelsene for et stokastisk signal er dermed møtt. Minste kvadraters prediksjon på glatte signal, har vist seg å gi mindre interpolasjonsfeil. Det er da mulig å prediktere gode verdier med tilhørende feilestimat [Christian Gerlach og Vegard Ophaug, 2021].

## 4.5 Minste kvadraters kollokasjon

For globale eller regionale beregninger, kan sfærisk-harmonisk representasjoner av kovariansfunksjoner utledes. Den sfærisk-harmoniske representasjonen av tyngdeanomalier på overflaten er vist i ligning (4.4) og tabell 4.1. Siden kovariansfunksjoner er isotropiske, faller alle ledd med  $\lambda$  bort. Den sfærisk-harmoniske representasjonen av kovariansfunksjonen til tyngdeanomaliene blir dermed [Christian Gerlach og Vegard Ophaug, 2021]

$$C^{\Delta g}(\psi) = \sum_{n=2}^L c_n^{\Delta g} P_n(\cos \psi), \quad (4.20)$$

hvor  $c_n^{\Delta g}$  er gradvariansen til tyngdeanomaliene.

Som nevnt tidligere, må tyngdeanomaliene  $\Delta g$  være gitt som en kontinuerlig funksjon over hele kloden og en mulig løsning på dette er å bruke minste kvadraters prediksjon

$$\Delta \tilde{g}_Q = C_{Q_i} C_{ij}^{-1} \Delta g_i. \quad (4.21)$$

Setter Stokes formel inn i ligning (4.21)

$$N_P = \left[ \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} S(\psi_{PQ}) C_{Q_i} d\sigma_Q \right] \cdot C_{ij}^{-1} \Delta g_i. \quad (4.22)$$

Sfærisk-harmonisk representasjon av elementene i kovariansmatrisen  $C_{Q_i}$  er gitt ved

$$C^{\Delta g}(\psi_{P_i}) = \sum_{l=2}^{\infty} c_l^{\Delta g} P_l(\cos \psi_{P_i}). \quad (4.23)$$

Den sfærisk-harmoniske representasjonen av Stokes-funksjonen er gitt ved

$$S(\psi_{PQ}) = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{2l+1}{l-1} P_l(\cos \psi_{PQ}). \quad (4.24)$$

Med spektrale eigenverdier, kan signalgradvariansen mellom forskjellige tyngdefeltsfunksjoner utledes. Autokovariansfunksjoner beskriver ikke bare korrelasjonen mellom tyngdeanomalier, men også korrelasjon mellom tyngdeanomalier og geoidehøyde. Krysskovariansfunksjonen mellom tyngdeanomalier og geoidehøyde er utledet ved hjelp av ligning (4.23) og (4.24)

$$\left[ \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} S(\psi_{PQ}) C_{Q_i} d\sigma_Q \right] = \sum_{l=2}^{\infty} R\gamma(l-1)c_l P_l(\cos \psi_{P_i}) \quad (4.25)$$

$$C^{N\Delta g}(\psi_{P_i}) = \sum_{l=2}^{\infty} R\gamma(l-1)c_l P_l(\cos \psi_{P_i}), \quad (4.26)$$

hvor  $R$  er den spektrale eigenverdien til geoidehøyden og  $\gamma(n-1)$  er eigenverdien til tyngdeanomalierne, se tabell 4.1. Ligning (4.26) er en isotropisk funksjon, og avhenger ikke av asimut, bare sfærisk avstand  $\psi$ .

Ved å erstatte innholdet i hakeparantesen i ligning (4.22) med autokovariansmatrisen utledet av ligning (4.26), får vi en ny ligning for å beregne geoidehøyden  $N_P$  i beregningspunktet  $P$

$$N_P = C_{P_i}^{N\Delta g} \left( C_{ij}^{\Delta g} \right)^{-1} \Delta g_i. \quad (4.27)$$

Denne metoden kalles for minste kvadraters kollokasjon, og bruker eksplisitt de originale diskrete punktobservasjonene  $Q$  for beregningen av geoidehøyde. I noen tilfeller, dukker det opp et problem når en skal invertere autokovariansmatrisen mellom tyngdeanomalierne i  $Q$ . Matrisen kan være dårlig kondisjonert, og dermed vil inverteringen av matrisen bli ustabil. Nært singulære matriser og negative formelle feil kan oppstå. Det kan være flere grunner til dette, men i prinsippet bunner dette i at flere rader og/eller kolonner er veldig like. De er da lineært avhengige og matrisen har en rangdefekt. Ved å tilføre hvitstøy langs diagonalelementene i  $C_{ij}^{\Delta g}$ , filtrerer man ut, f.eks., ukorrelerte komponenter i signalet. Radene blir mer uavhengige fra hverandre og inverteringen stabiliseres.

Den formelle feilen til metoden kan utledes med følgende ligning

$$\Sigma_P^N = C_P^N - C_{P_i}^{N\Delta g} \left( C_{ij}^{\Delta g} \right)^{-1} \left( C_{P_i}^{N\Delta g} \right)'. \quad (4.28)$$

Gjennom disse utledningene kommer det frem at minste kvadraters prediksjon er en spesifikk form av kollokasjon, som innebærer estimering, prediksjon og filtrering. Med hensyn på kvaliteten til kollokasjonen, er valg av en god kovariansfunksjon helt sentralt.

## 5 Beskrivelse av datasett

Dette kapittelet gir en kort og oversiktlig beskrivelse av datasett som er benyttet i beregninger for denne oppgaven.

### 5.1 Globale Potensialmodeller

I beregningsprosessen er det benyttet flere forskjellige kombinerte GPM'er, dvs. at de inneholder både terrestriske- og satellittdata.

#### EGM2008

Datasettet har et MATLAB-format (.mat) og inneholder sfærisk-harmoniske koeffisienter som relateres til referanseellipsoiden GRS80 i *zero-tide* systemet. EGM2008 er en kombinert GPM som inneholder sfærisk-harmonisk koeffisienter opp til grad 2190, tilsvarende en romlig oppløsning på 10 km. Data som inngår i modellen er listet opp i tabell 5.1 under.

Tabell 5.1: Data som inngår i EGM2008 innefor forskjellig spekter.

Data	Spektral oppløsning	
ITG-GRACE03S	Fra g/o 0	Til g/o 180
Terrestrisk/altimetri datasett	Fra g/o 0	Til g/o 2190

Modellen er utviklet ved minste-kvadraters kombinasjon av GPM'en ITG-GRACE03S og tyngdeinformasjon fra et globalt datasett av blokkmiddelverdier med friluftsanomalier. ITG-GRACE03S er en *satellite-only* GPM som baseres på data fra GRACE. Det globale tyngdedatasettet ble formet ved å slå sammen terrestriske, flybåren og altimetriutledede tyngdedata. For å lage en GPM med høy oppløsning, er tilgangen til en nøyaktig DTM svært nødvendig, hvor EGM2008 har benyttet seg av modellen DTM2006.

#### EIGEN6C4

Datasettet har et MATLAB-format og inneholder sfærisk-harmoniske koeffisienter som relateres til referanseellipsoiden GRS80 i *zero-tide* systemet. EIGEN6C4 er en kombinert GPM som inneholder sfærisk-harmoniske koeffisienter opp til grad og orden 2190, dvs. en romlig oppløsning på 10 km. På kontinenter, for bølgelengder over grad 235, er EIGEN6C4 nesten en rekonstruksjon av EGM2008 [Förste et al., 2014]. Data som inngår i modellen er listet opp i tabell 5.2.

Tabell 5.2: Data som inngår i EIGEN6C4 innefor forskjellig spekter.

Data	Spektral oppløsning	
	Fra g/o 0	Til g/o 30
SLR	Fra g/o 0	Til g/o 30
GRACE	Fra g/o 0	Til g/o 130
GOCE	Fra g/o 0	Til g/o 235
Bakke-data	Fra g/o 150	Til g/o 370
EGM2008+DTU	Fra g/o 370	Til g/o 2190

## XGM2019

XGM2019e er en kombinert GPM med sfærisk-harmonisk koeffisienter opp til grad og orden 5399, som tilsier en romlig oppløsning på 4 km. XGM2019e er helt uavhengig av data fra EGM2008, noe som f.eks EIGEN6C4 ikke er. Data som inngår i modellen er listet opp i tabell 5.3.

Tabell 5.3: Data som inngår i XGM2019e innefor forskjellig spekter.

Datakilder	Spektral oppløsning	
	Fra g/o 0	Til g/o 300
GOCO06s	Fra g/o 0	Til g/o 300
Terrestrisk data (30 km oppløsning)	Fra g/o 0	Til g/o 760
Syntetisk data (2 km oppløsning)	Fra g/o 761	Til g/o 5540

Beregningen av sfærisk-harmoniske koeffisienter opp til g/o 760 består av en vektet minste kvadraters utjevning av *satellite-only*-modellen GOCO06S og et terrestrisk datasett med 30 km oppløsning. For høyere g/o koeffisienter er beregningene basert på et syntetisk datasett for å modellere topografien med 2 km oppløsning. Modellen er tilgjengelig med tre forskjellige spektrale oppløsninger [Zingerle et al., 2020]. Modellene og deres spektrale oppløsning er listet opp i tabell 5.4 under.

Tabell 5.4: Spektrale oppløsningen til XGM2019, XGM2019e2159 og XGM2019e

Modell	Spektral oppløsning	
	Fra g/o 0	Til g/o 760
XGM2019 ( 30 km)	Fra g/o 0	Til g/o 760
XGM2019e2159 ( 10 km)	Fra g/o 0	Til g/o 2190
XGM2019e ( 4 km)	Fra g/o 0	Til g/o 5540

Dataene for hver modell har et MATLAB-format og inneholder sfærisk-harmoniske koeffisienter som relateres til referanseellipsoiden GRS80 i *zero-tide* systemet.

## 5.2 Regionale geoidmodeller

I beregningene ble det benyttet flere forskjellige RGM'er.

### NMA2014

Datasettet har et MATLAB-format og inneholder kvasi-geoidhøydene i form av et rutenett. NMA2014 er en kvasi-geoidmodell som er beregnet av Kartverket, og relateres til referanseellipsoiden WGS84 i et *tide-free*-system. Den er basert på RCR-metoden og Wong og Gore kjernemodifikasjon av Stokes formel [Gerlach and Ophaug, 2017]. Graden for Wong og Gore modifikasjonen er 140, med en lineær overgang fra grad 130 til 140 for å redusere randeffekter. Hovedsaklig over g/o 140, er NMA2014 basert på terrestriske data og GOCE data for de lavere gradstallene. Bare en liten andel av tyngdedataene som er inkludert i NMA2014, er utledet fra altimetri.

---

NMA2014DIR er en oppdatert versjon av NMA2014 [Gerlach and Ophaug, 2017]. Forskjellen er at den er basert på GOCE DIR5 (Direct approach) GPM, isteden for GOCE DIR4. Modellen er ikke beregnet fra grunnen av men det er benyttet et stokastisk filter (som inneholder statistisk informasjon om GPM og terrestrisk data) for å i praksis skifte ut mellom- og langbølget signalandel med oppdatert GPM.

## NKG2015

Datasettet har et MATLAB-format og inneholder kvasi-geoidehøydene i form av et rutenett. NKG2015 er en kvasi-geoidmodell beregnet av The Nordic Geodetic Commission (NKG)[Ågren et al., 2016]. NKG består av et samarbeid mellom geodeter fra Norge, Sverige, Danmark, Finland og Island. Organisasjonens hensikt er å utveksle kunnskap, samarbeid og koordinering av geodetisk arbeid iht. infrastrukturen i den nordiske regionen.

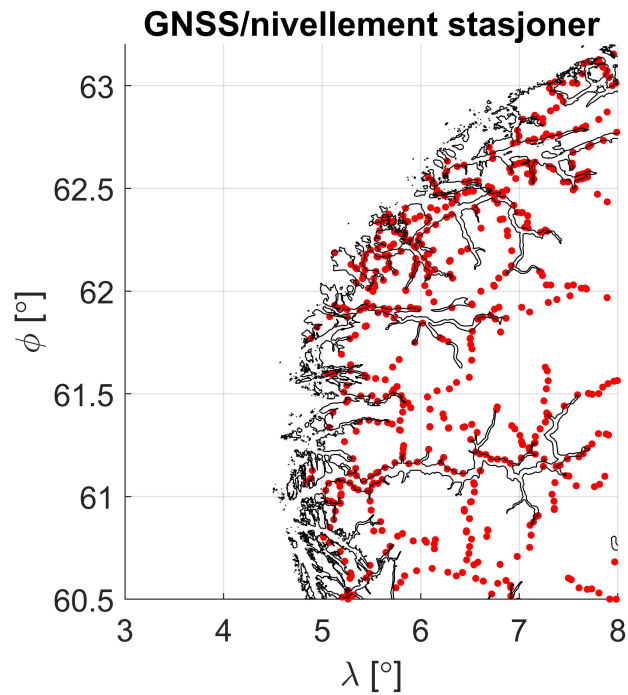
NKG2015 er konsistent med nasjonale høydesystemer (EVRF realiseringer) som bruker normalhøyder, f.eks det norske nasjonale høydesystemet NN2000. Beregningene refereres til landhevingepoken 2000.0 og *zero-tide* systemet. Data som blir brukt i modellen er tyngdedata på bakken og den GPM'en GO-CONS-GCF-2-DIR5 opp til g/o 300, som inneholder data fra GOCE og GRACE satellittferdene. Kvasi-geoiden blir så beregnet med en minste-kvadraters modifikasjon av Stokes' formel med adaptive korreksjoner [Ågren et al., 2016]. NKG2015 er en nyere modell enn NMA2014, basert på en fullstendig overhalt terrestrisk tyngdedatabase og en oppdatert DTM.

## EGG2015

Datasettet har et MATLAB-format og inneholder kvasi-geoidehøydene i form av et rutenett. EGG2015 er den siste realiseringen av den europeiske kvasi-geoidmodellen. Høydeanomaliene relateres til GRS80 og *zero-tide* systemet [Denker et al., 2018]. Modellen er kompatibel med EVRF2007. EGG2015 baseres på tyngdeinformasjon på bakken, kombinert med topografisk informasjon og GPM'en GOCO05S [Denker, 2015]. Beregningen av kvasi-geoiden baseres på RCR-metoden. NKG2015 er en nyere modell enn NMA2014, basert på en fullstendig overhalt terrestrisk tyngdedatabase og en oppdatert terrengmodell.

## 5.3 GNSS/nivellement

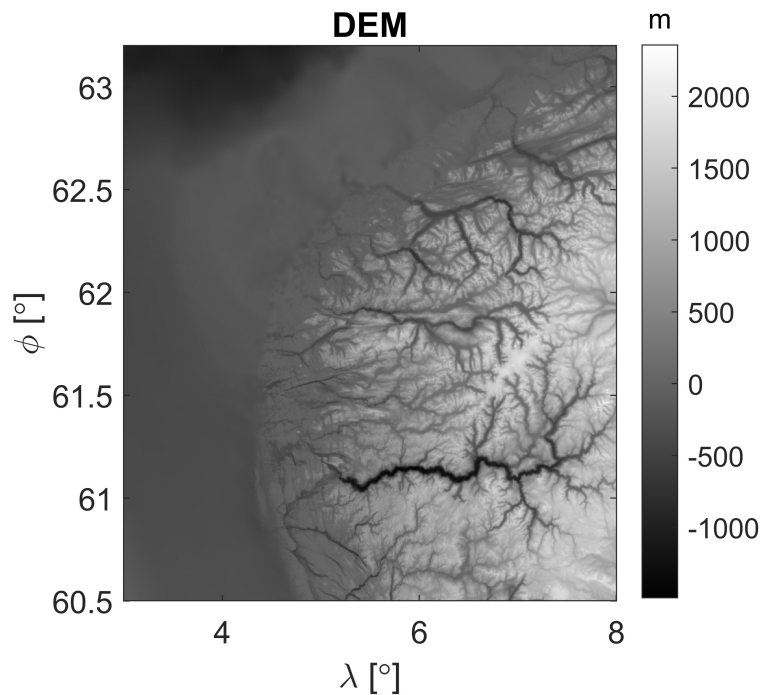
Datasettet har et MATLAB-format og inneholder kvasi-geoidehøydene i form av et rutenett. Dataene er fremskaffet av Kartverket og inneholder såkalte justeringspunkter, dvs. stasjoner som er innmålt med både nivellement og GNSS, slik at en kan avlede geometrisk høydeanomali  $\zeta(h - H)$ . Disse justeringspunktene benyttes i hovedsak til å ”justere” de gravimetriske høydeanomaliene Kartverket beregner til nivellementet, og dermed NN2000. Dette resulterer i en HREF (Height Reference Model). 578 punkter er plassert rundt om i Møre og Romsdal, og Sogn og Fjordane, se Figur 5.1. Datasettet har et MATLAB-format og inneholder bredde- og lengdegrad til punktene, høyder i både NN2000 og EUREF89, og geometriske høydeanomalier  $\zeta(h - H)$ .



Figur 5.1: Posisjonen til de 578 beregningspunktene, som er fordelt i Møre og Romsdal, og Sogn og Fjordane.

## 5.4 Dembaty50

Datasettet har et MATLAB-format og inneholdt topografiske høyder i form av et rutenett. Dembaty50 er en kombinasjon av Kartverkets 50x50 m DTM og batymetri. DTM'en illustrerer den ekstreme topografien i testområdet, se figur 5.2.



Figur 5.2: Visualisering av den benyttede DTM'en med gråtoneverdier.

---

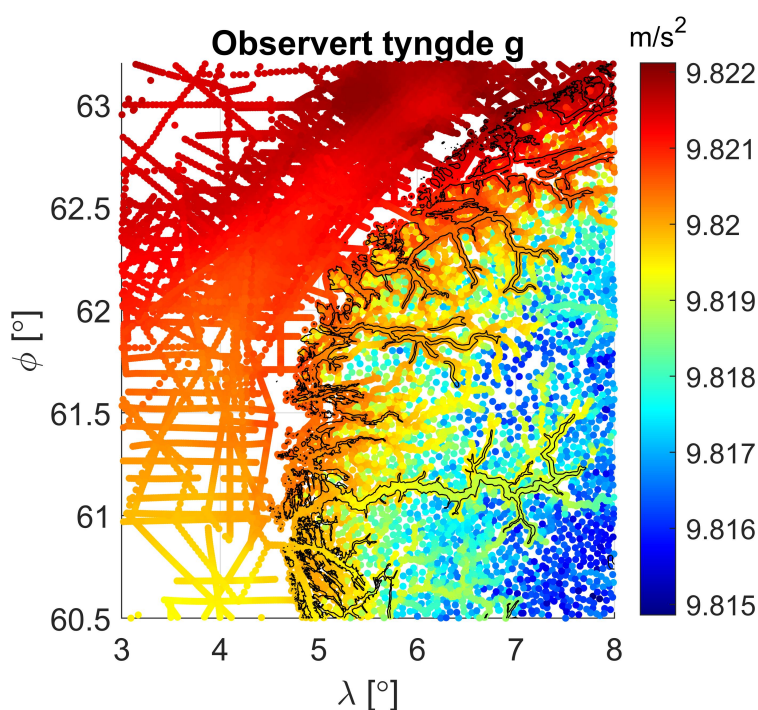
Statistikken til dembaty50 er vist i tabell 5.5.

Tabell 5.5: Minimum-, maksimum- og gjennomsnittsverdier for høydene i DTM'en

	min (m)	maks (m)	gjennomsnitt (m)
Dembaty50	-1490.990	2358.000	151.777

## 5.5 Tyngdedata

Datasettet har et MATLAB-format og består av punktnummer, koordinater, topografiske høyder, tyngdeobservasjoner og med et grovt anslag usikkerhet. Kartverket har som forberedelse gitt tilgang til en datasett med terrestriske tyngdemålinger på land og hav, og inneholder 29599 observasjoner på Nordvestlandet. Figur 5.3 viser posisjonen til de terrestriske tyngdemålingene, samt dens verdi for observert tyngde i SI-enhet.



Figur 5.3: Posisjonen til de terrestriske tyngdemålingene.

## 5.6 DTM2006

Datasettet har et binært format og inneholdt koeffisienter opp til grad 2159. DTM2006 er en global  $30'' \times 30''$  DTM. Modellen inneholder i all hovedsak data fra SRTM (Shuttle Radar Topography Mission) [Pavlis et al., 2007]. Ved hjelp av ICESat laser altimeterdata inneholder modellen ishøyder over Grønland og Antarktis. Over Antarktis er det benyttet data fra et prosjekt kalt BEDMAP. På hav har modellen benyttet seg av batymetri fra altimetri og dybde data fra *debt* soundings.



## 6 Metode

I dette kapitlet forklares hvordan beregninger og sammenligninger er foretatt.

### 6.1 Validering av Globale Potensialmodeller

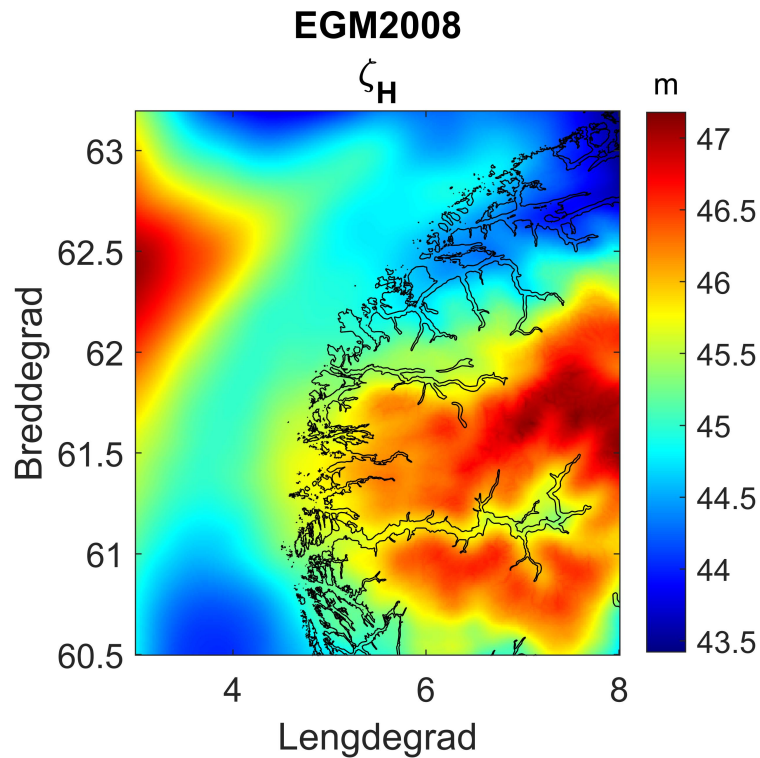
Beregningene relateres til referanseellipsoiden GRS80 med en *zero-tide* løsning. Målet er å bestemme potensialet på terrengets overflate ved hjelp av sfærisk-harmonisk syntese, for å deretter utlede gravimetrisk høydeanomalier (fra GPM) til sammenligning med geometriske høydeanomalier (fra GNSS/nivellement). Ellipsoidiske høyder er ofte ikke tilgjengelig for alle punkter høydeanomalier skal beregnes for. Dette kan en løse med en tilnærming ved hjelp av en DTM. Sfærisk-harmonisk syntese kan evalueres punktvis, men er svært tidkrevende.

Istedenfor ble det dannet et beregningsområde (rutenett) definert av utstrekningen til dembaty50, med en oppløsning på 1 bueminutt i lengdegradsretning og 0.5 bueminutt i breddegradsretning. Høydene i dembaty50 ble interpolert ved hjelp av kubisk interpolasjon til det definerte rutenettet. MATLAB-funksjonen `shsynthe.mat` ble benyttet for å beregne syntesen for alle punkter i det definerte rutenettet med en konstant høyde på 1100 m. Problematikken med denne metoden er at hele området er evaluert på samme høyde. En måte å løse dette på er å utvikle en Taylor-rekke av potensialet  $T$ , dens førstederiverte  $T_r$  og dens andrederiverte  $T_{rr}$  som følger

$$T(h) = T(h_0) + T_r(h_0)\Delta h + \frac{1}{2}T_{rr}(h_0)\Delta h^2, \quad (6.1)$$

hvor  $h$  er høyden på topografien,  $h_0$  er utviklingspunktet til rekken og er satt til gjennomsnittlig høyde på topografien, og  $\Delta h$  er residual høyde (differansen mellom topografisk høyde og gjennomsnittlig topografisk høyde). Alle høyder mindre enn 0 ble fjernet fra rutenettet, slik at Taylor-rekken ikke evaluerte potensialet  $T$  under havnivå. Bruns ligning (4.3) ble deretter benyttet for å beregne høydeanomalier fra potensialet  $T$ .

I beregningen ble det gjort en test på høydeanomalierne dersom topografiske høyder (tilnærmet ortometriske høyder) ble brukt istedenfor ellipsoidiske. Deretter ble det vurdert om denne "feilen" var signifikant ved sammenligning med geometriske høydeanomalier. Figur 6.1 viser beregnet høydeanomali ( $\zeta$ ), ved å bruke de ortometriske høydene i dembaty50.

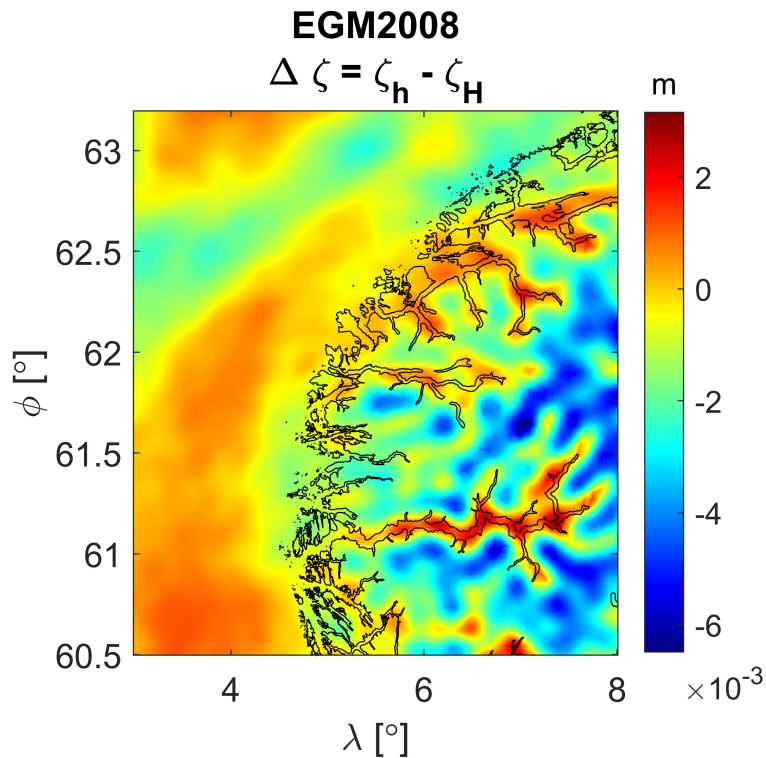


Figur 6.1: Høydeanomalier i interesseområdet beregnet fra de ortometriske høydene.

For å beregne ellipsoidiske høyder, ble høydeanomalien (tilnærmet geoidhøyde, se figur 6.1) tilført de ortometriske høydene ved

$$h(DTM) = H(DTM) + \zeta, \quad (6.2)$$

hvor  $h(DTM)$  er topografiens ellipsoidiske høyder,  $H(DTM)$  er topografiens høyde over havet, og  $\zeta$  er høydeanomalier utledet ved første iterasjon som er et estimat på geoidhøyden. Ved å gjenta beregningen av Taylor-rekken og Bruns ligning, ble potensialer på topografiens overflate og høydeanomalier beregnet. Figur 6.2 under viser differansen mellom  $\zeta$  utledet fra de ortometriske høydene i DTM, og  $\zeta$  utledet ved hjelp av ligning (6.2) (ellipsoidiske høyder).



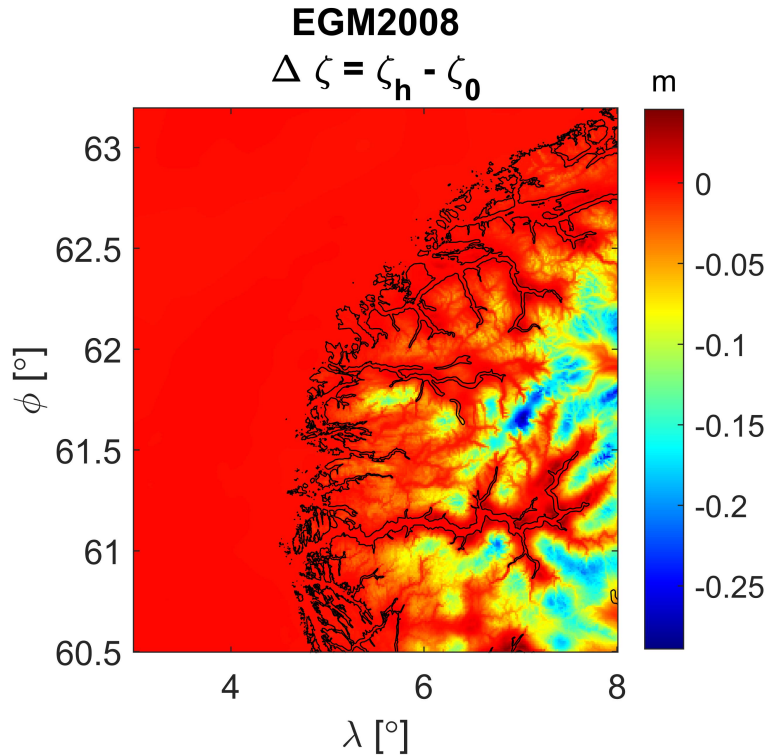
Figur 6.2: Differansen mellom  $\zeta$  utledet med de gitte høydene i DTM'en og  $\zeta$  utledet ved å legge til  $\zeta$  fra første iterasjon.

Tabell 6.1 viser statistikken på differansen mellom  $\zeta$  beregnet fra de gitte høydene i DTM'en og  $\zeta$  beregnet ved å legge til resultatet fra første iterasjon. Differansen har et maksimalt utslag på -6.5 mm i fjellområder og har et standardavvik på 1.4 mm. En feil i denne størrelsesorden er dermed ikke signifikant ved sammenligning av gravimetriske og geometriske høydeanomalier.

Tabell 6.1: Min-, maks-, gjennomsnittsverdi og standardavvik for differansen mellom  $\zeta$  beregnet fra de gitte høydene i DTM'en og  $\zeta$  beregnet ved å legge til  $\zeta$  fra første iterasjon. Enhet cm.

	min	maks	gjennomsnittsverdi	standardavvik
$\Delta\zeta$	-0.65	0.32	-0.10	0.14

Det ble også utført en test hvor  $\zeta$  ble beregnet på ellipsoiden, figur 6.3 viser differansen mellom  $\zeta$  beregnet på topografien og ellipsoiden.



Figur 6.3: Differansen mellom beregnet  $\zeta$  på topografien og ellipsoiden.

Statistikken på differansen mellom  $\zeta$  beregnet på topografien og ellipsoiden er vist i tabell 6.2.

Tabell 6.2: Minimum-, maksimum, gjennomsnittsverdi og standardavvik for differansen mellom  $\zeta$  beregnet fra de gitte høydene i DTM'en og  $\zeta$  beregnet ved å legge til  $\zeta$  fra første iterasjon. Enhet cm.

	Min	Maks	Gjennomsnittsverdi	standardavvik
$\Delta\zeta$	-28.9	4.58	-1.92	4.03

For å kunne sammenligne de forskjellige GPM'ene er det beregnet høydeanomalier  $\zeta$  for hver enkelt modell i form av et rutenett, som beskrevet over. Ved å benytte kubisk interpolasjon får en interpolert gridverdiene til justeringspunktene posisjon. Deretter ble differansen mellom gravimetrisk  $\zeta$  fra justeringspunktene og gravimetrisk  $\zeta$  fra GPM'ene beregnet med følgende ligning

$$\Delta\zeta = \zeta_{\text{geometrisk}} - \zeta_{\text{gravimetrisk}}. \quad (6.3)$$

For å få en dypere statistisk innsikt i de empiriske feilene, ble det utledet empiriske feilkovariansfunksjoner for å se om det var korrelasjon mellom de empiriske feilene. Funksjonen ble plottet sammen med en analytisk modell, som i utgangspunktet er tiltenkt beskrivelse av et signal og passer nødvendigvis ikke for å beskrive empiriske feil.

## 6.2 Validering av Regionale Geoidmodeller

Høydeanomaliene til kvasi-geoidmodellene ble interpolert til GNSS/nivellement-punktene ved å benytte kubisk interpolasjon. Deretter ble differansen mellom geometrisk høydeanomali og høydeanomaliene

---

til kvasi-geoidmodellene beregnet ved følgende formel

$$\Delta\zeta = \zeta_{\text{geometrisk}} - \zeta_{\text{kvasi-geoidmodell}}. \quad (6.4)$$

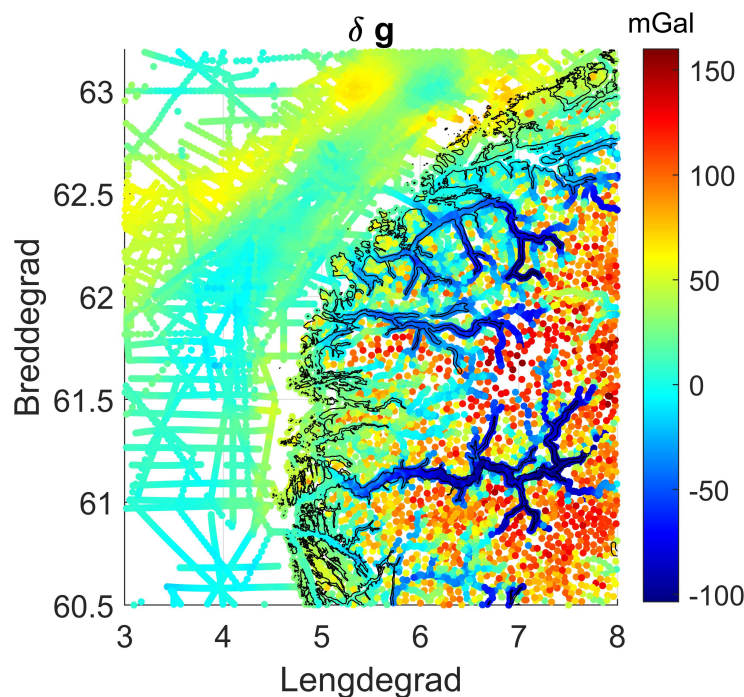
Empiriske feilkovariansfunksjoner ble deretter beregnet for å se om det var korrelasjon mellom de empiriske feilene og plottet sammen med en analytisk modell.

### 6.3 Redusere terrestriske tyngdeforstyrrelser med Globale Potensialmodeller

De terrestriske tyngdedataene kommer fra datasettet som ble presentert i kapittel 5.5. For å beregne tyngdeforstyrrelse fra GPM, ble det samme rutenettet og metoden for å utlede ellipsoidiske høyder fra ortometriske (se kapittel 6.1) benyttet. Deretter ble følgende Taylor-rekke brukt på rutenettet for å beregne tyngdeforstyrrelsen på topografiens overflate

$$T_r(h) = T_r(h_0) + T_{rr}(h_0)\Delta h. \quad (6.5)$$

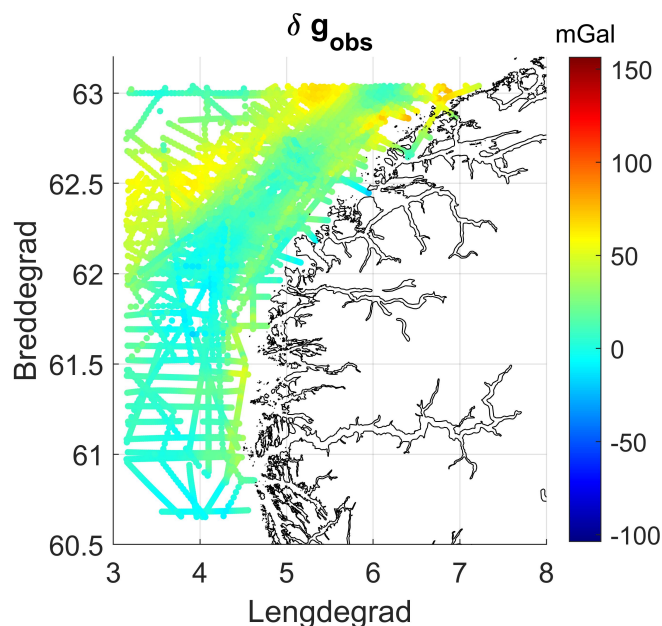
De ellipsoidiske høydene til observasjonspunktene ble beregnet ved å tilføre samme  $\zeta$  som i ligning (6.2). Tyngdeforstyrrelsen til de terrestriske observasjonene ble beregnet med ligning (3.2) og er vist i figur 6.4.



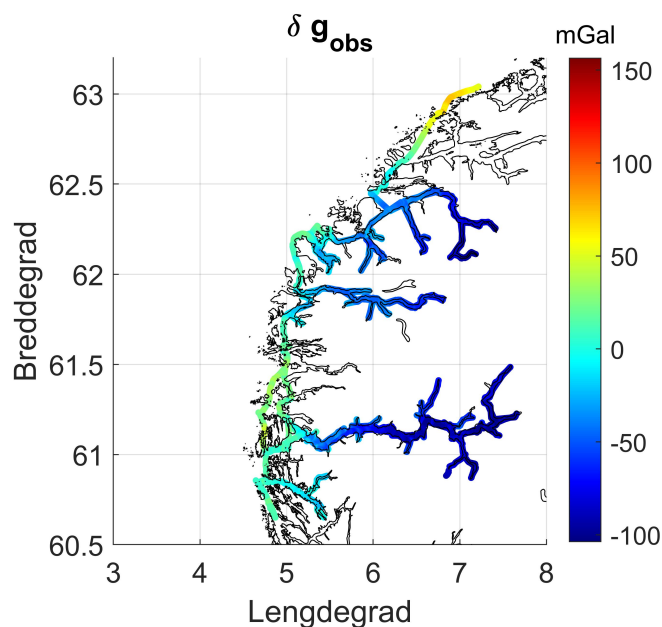
Figur 6.4: Tyngdeforstyrrelse beregnet for de terrestriske tyngdedataene.

Datasettet inneholder 29599 tyngdeobservasjoner, som fører til veldig store avstandsmatriser under beregningen av kovariansfunksjoner. Datamaskinen som ble benyttet klarte ikke å beregne kovariansfunksjoner med så store matriser, og en oppdeling av området var nødvendig. Beregningsområdet ble delt inn i hav-, fjord- og landområde. Med denne oppdelingen kan en se hvor godt de forskjellige GPM'ene presterer i de forskjellige områdene. Det er interessant siden GPM'ene baseres på forskjellige data og beregningsteknikker i disse områdene. Beregningsområdet ble også redusert iht. TGF-programvarens betingelser for beregningspunkter og DTM. Antall datapunkter som ble benyttet i videre beregninger var 26848.

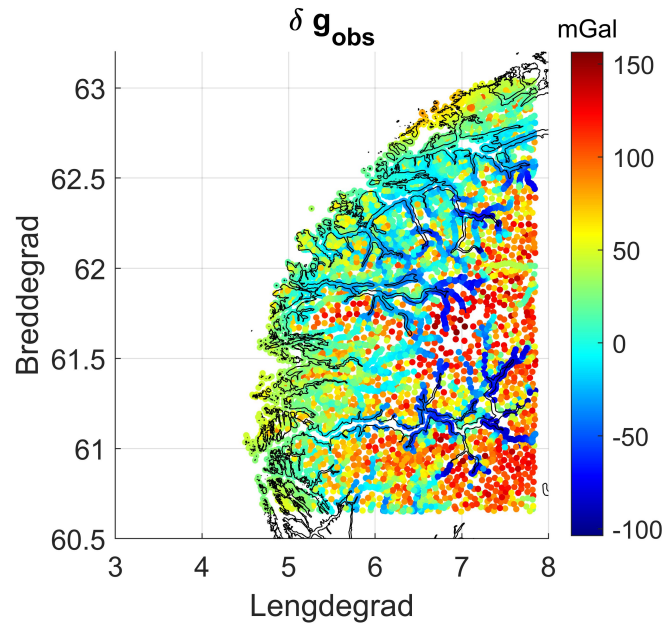
Tyngdeforstyrrelsen til observasjonspunktene er vist i figur 6.5 med oppdelingen i hav-, fjord- og landområde. I havområdet kan en se små positive verdier langs kysten og større positive verdier lengre ute på havet (spesielt i det nordlige området). De negative verdiene ligger stort sett mellom lengdegrad  $3^{\circ}$  og  $4.3^{\circ}$ , og breddegrad  $62.2^{\circ}$  og  $60.6^{\circ}$ . I fjordområdene er det tydelig at de negative verdiene ligger inne i fjordene, hvor det er veldig dypt, og små positive verdier langs kysten, hvor det er betydelig grunnere. I landområdet kan en se store positive verdier i de høyeste fjellområdene og de sterkt negative verdiene ligger inne i fjordene, nærme vannflaten. De mindre positive verdiene befinner seg stort sett lengre inne på land i områder med mindre høyder og langs kysten.



(a) Hav



(b) Fjord



(c) Land

Figur 6.5: Geografisk fordeling av punktene med hav, fjord og land inndeling, samt beregnet tyngdeforstyrrelse. (a) tyngdeforstyrrelse på hav, (b) tyngdeforstyrrelse i fjord og (c) tyngdeforstyrrelse på land.

Tabell 6.3 viser statistikken til de beregnede tyngdeforstyrrelsene i de tre inndelte områdene.

Tabell 6.3: Minimum-, maksimum-, gjennomsnittsverdi for tyngdeforstyrrelsene beregnet fra tyngdeobservasjonene, samt standardavvik. Enhet mGal.

Område	Min	Maks	Gjennomsnittsverdi	Standardavvik
Hav	-19.608	77.735	22.092	17.548
Fjord	-103.727	87.612	-44.776	40.279
Land	-98.948	156.463	17.049	46.749

Rutenettet som inneholdt tyngdeforstyrrelsen fra GPM, ble interpolert til observasjonspunktene for å kunne sammenligne de. Differansen ble deretter beregnet ved følgende formel

$$\Delta\delta g = \delta g_{obs} - \delta g_{GPM}. \quad (6.6)$$

Empiriske feilkovariansfunksjoner ble beregnet og plottet sammen med en analytisk modell.

## 6.4 Redusere terrestriske tyngdeforstyrrelser med topografiske effekter

De topografiske effektene ble beregnet med TGF-programvaren, som ble introdusert i kapittel 3.3. Effektene ble beregnet som tyngdeforstyrrelser, siden de skal brukes til å redusere terrestriske tyngdeforstyrrelser fra tidligere beregninger. Forklart i introduksjonen, så er beregningsområdet preget av store topografiske variasjoner. Det ble derfor valgt å ta hensyn til forskjellig tetthet i land-, hav- og fjordområder. Dette førte til to beregninger av topografiske effekter med forskjellig valg av tetthet,  $2.67 \text{ g/cm}^3$  (jordskorpen) og  $1.00 \text{ g/cm}^3$  (vann).

Tabell 6.4 viser valg av parametre for beregningene i TGF-programvaren. Siden DTM2006 er valgt som CoarseDEM og CoarseREF, blir det ikke noe bidrag fra punktmasse modellering i den ytre sonen, se figur 3.4.

Tabell 6.4: Valgte parametre for beregningene i TGF-programvaren.

Parametre	Første beregning	Andre beregning
<b>DetailedDEM</b>	dembaty50	dembaty50
<b>DetailedREF</b>	DTM2006	dem50
<b>TessDEM</b>	dembaty50	dembaty50
<b>TessREF</b>	DTM2006	dem50
<b>CoarseDEM</b>	DTM2006	DTM2006
<b>CoarseREF</b>	DTM2006	DTM2006
<b>Tetthet</b>	2.67 g/cm <sup>3</sup>	1.00 g/cm <sup>3</sup>
<b>ikind</b>	RTM gravitasjonsfelt	RTM gravitasjonsfelt
<b>itype</b>	103	103
<b>rzones</b>	[0.01, 0.02, 0.1, 0.5]	[0.01, 0.02, 0.1, 0.5]
<b>iflag</b>	sfærisk approksimasjon	sfærisk approksimasjon

dem50 er identisk med dembaty50, men uten batymetri. Residualterrenget mellom dembaty50 og dem50 består kun av fjorder og hav. For å unngå NaN (Not a real Number) i den andre beregningen, måtte høydene i dem50 løftes med 1 mm. Denne korreksjonen er så liten at den ikke vil gi noe signifikant utslag i beregningen av topografiske effekter. Den resulterende topografiske effekten fra de to beregningene ble gjort som følger

$$\delta g_{topo} = \delta g_{topo1} - \delta g_{topo2}, \quad (6.7)$$

hvor  $\delta g_{topo1}$  er beregnet topografisk effekt med tetthet 2.67 g/cm<sup>3</sup> og  $\delta g_{topo2}$  med tetthet 1.00 g/cm<sup>3</sup>.

Tabell 6.5 viser statistikken til beregnede topografiske effekter med tetthet 2.67 g/cm<sup>3</sup> og 1.00 g/cm<sup>3</sup>.

Tabell 6.5: Statistikk til beregnede topografiske effekter  $\delta g_{2.67\text{g/cm}^3}$  og  $\delta g_{1.00\text{g/cm}^3}$ . Enhet mGal.

	Min	Maks	Gjennomsnittsverdi	Standardavvik
$\delta g_{2.67\text{g/cm}^3}$	-205.607	73.815	-20.758	33.409
$\delta g_{1.00\text{g/cm}^3}$	-43.999	5.139	0.846	3.408

Reduksjonen av topografiske effekter ble gjort med følgende formel

$$\Delta \delta g = \delta g_{obs} - \delta g_{GPM} - \delta g_{topo}, \quad (6.8)$$

hvor  $\delta g_{obs}$  er tyngdeforstyrrelsen beregnet i observasjonspunkt,  $\delta g_{GPM}$  er tyngdeforstyrrelsen beregnet fra GPM og  $\delta g_{topo}$  er tyngdeforstyrrelsen til de topografiske effektene. Deretter ble empiriske kovariansfunksjoner beregnet og plottet sammen med en analytisk modell.

Med en feiltagelse ble effekten beregnet i en sfærisk approksimasjon, hvor en ellipsoidisk approksimasjon hadde vært ønskelig. Det ble derfor foretatt en testberegning i ellipsoidisk approksimasjon for å se på hvor stort utslaget denne feilen ville medføre. Tabell 6.6 viser statistikken til differansen mellom sfærisk og ellipsoidisk approksimasjon.



---

Tabell 6.6: Min-, maks-, gjennomsnittsverdi og standardavvik på differansen mellom sfærisk approksimasjon og ellipsoidisk. Enhet mGal.

	Min	Maks	Gjennomsnittsverdi	Standardavvik
Sfærisk-ellipsoidisk	-0.129	0.230	0.012	0.040

## 7 Resultater

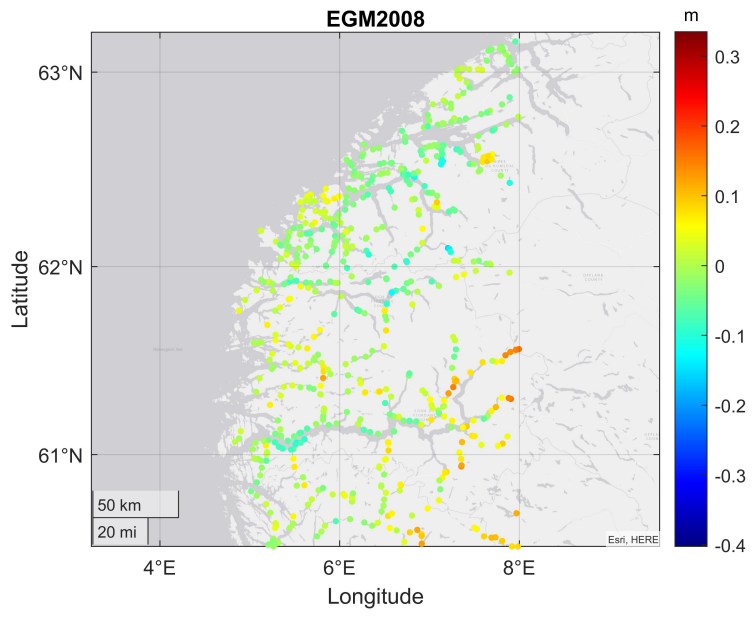
Dette kapittelet presenterer resultatene fra beregningene i denne oppgaven.

### 7.1 Validering av Globale Potensialmodeller

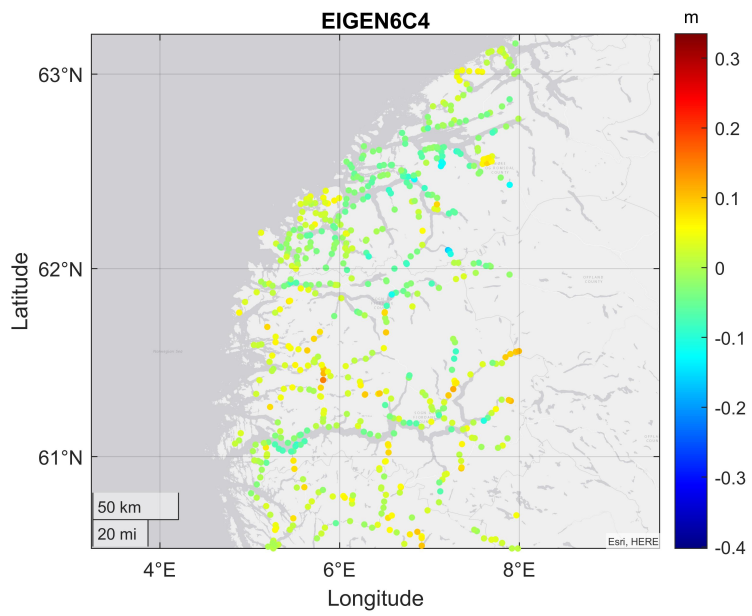
Figur 7.1 viser at EGM2008 og EIGEN6C4 er visuelt sett like. Dette er fordi på kontinent for bølgelengder over sfærisk-harmonisk grad 235, er EIGEN6C4 stort sett en rekonstruksjon av EGM2008. Innerst i Sognefjorden, ved  $7.90^\circ$  øst og  $61.50^\circ$  nord, har begge modellene signifikante positive empiriske feil (avvik fra GNSS/nivellement). Nord i interesseområdet, spesielt på Sunnmøre, er det visuelt sett helt identiske.

XGM2019 har stort sett i hele interesseområdet signifikante avvik fra GNSS/nivellement. Tydelige avvik langs Sognefjorden og langs kysten på Sunnmøre kan observeres. I Sognefjorden er feilene sterkt negative, i motsetning til kysten på Sunnmøre hvor feilene er sterkt positive. Empiriske feil i denne størrelsesordenen fra denne modellen var å forvente, siden XGM2019 inneholder potensialkoeffisienter opp til grad og orden 760, som tilsvarer en oppløsning på 30 km (større utelatelsesfeil). Potensialkoeffisienter for høyere gradstall mangler, og små signaturer i tyngdefeltet fanges ikke opp. Som forventet viser XGM2019e2159 betydelig forbedring, siden modellen inneholder potensialkoeffisienter opp til grad og orden 2190. Små signaturer i tyngdefeltet fanges opp og nøyaktigere beregninger er mulig å oppnå. XGM2019e viser en liten forbedring, f.eks., har de større negative avvikene ved  $7.2^\circ$  øst og  $62.1^\circ$  nord har avtatt, samt noen positive feil langs kysten.

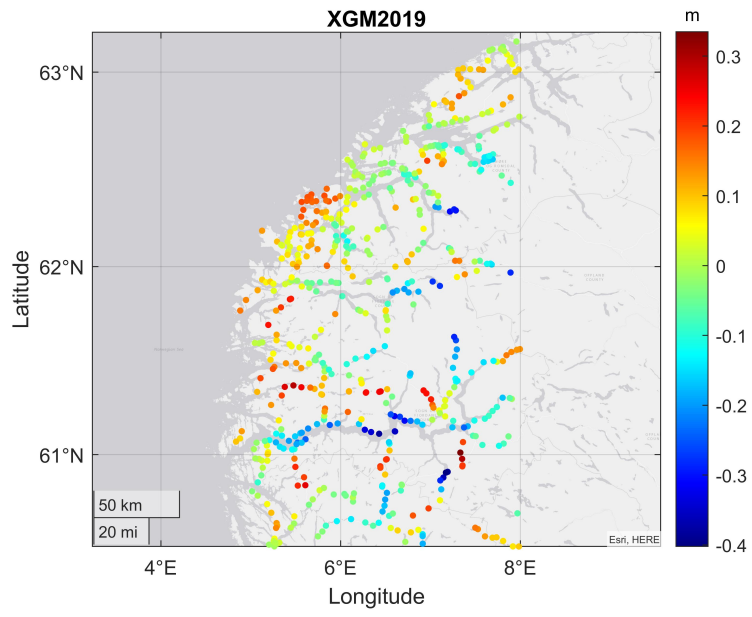
Figur 7.1 viser at høydeanomaliene generelt sett har lave verdier langs fjordene, og spesielt tydelig i Sognefjorden. Resultatene tyder på at det er mindre masse i disse områdene. Negative fortegn betyr at de gravimetriske høydeanomaliene er større enn de geometriske høydeanomaliene. Det vil si at GPM'ene ikke viser tydelig at signalet blir mindre i fjordområder, og dette skyldes antakeligvis oppløsningen til GPM'ene. Også en del av forklaringen på dette kan ha å gjøre med manglende tyngdeinformasjon i form av marine tyngdemålinger i Sognefjorden eller batymetri.



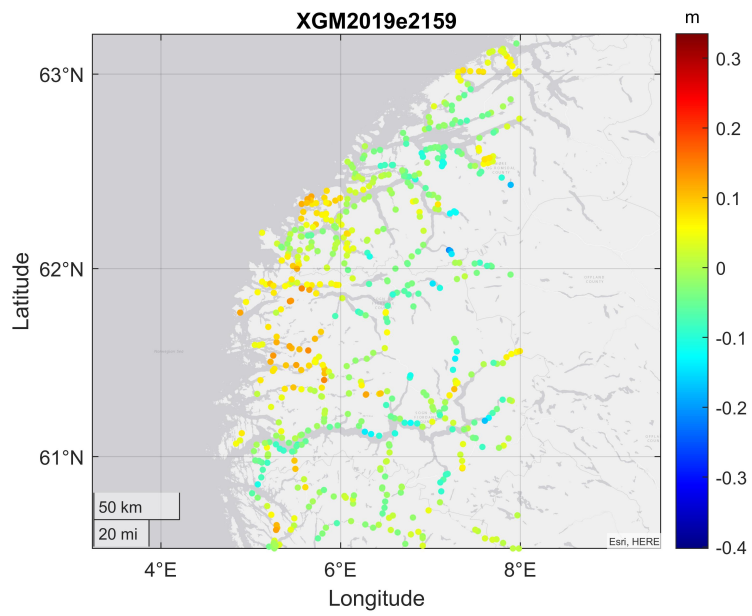
(a)



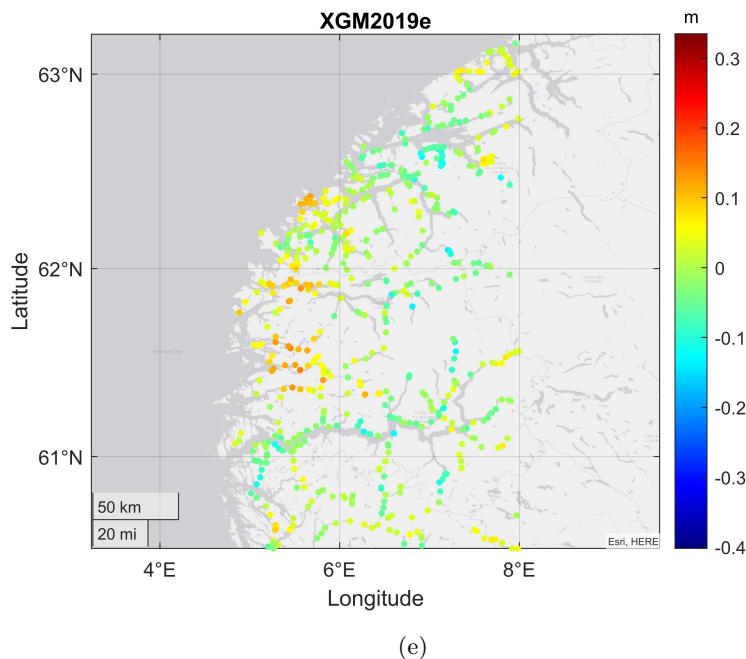
(b)



(c)



(d)



Figur 7.1: Differansen mellom geometrisk høydeanomali  $h - H$  og gravimetrisk høydeanomali  $\zeta$ . Gjennomsnittsverdiene for differansene er trukket fra for å bedre kunne sammenligne modellene. (a)  $(h-H) - \zeta^{EGM2008}$ , (b)  $(h-H) - \zeta^{EIGEN6C4}$ , (c)  $(h-H) - \zeta^{XGM2019}$ , (d)  $(h-H) - \zeta^{XGM2019e2159}$ , (e)  $(h-H) - \zeta^{XGM2019e}$ .

Statistikken utledet av differansene mellom GNSS/nivellement og gravimetrisk  $\zeta$  fra GPM'ene, er vist i tabell 7.1. Gjennomsnittsverdien representerer forskjellige valg av datum og andre systematiske avvik, og standardavvik beskriver i hvor stor grad differansene i de forskjellige beregningspunktene skiller seg fra hverandre. Denker [Denker, 2013] fant en korreksjon for å gjøre den gravimetrisk kvasi-geoiden sammenlignbar med EVRF2007

$$\zeta_P^{GPM} = \frac{T_P}{\gamma_Q} + \zeta_0^{EVRF2007}, \quad (7.1)$$

hvor  $\zeta_0^{EVRF2007} = +0.300\text{m}$ . Tillegget ( $\zeta_0^{EVRF}$ ) skal gjøre rede for potensialdifferansen  $W_0^{EVRF2007} - U_0$ . De GNSS/nivellerte punktene er i NN2000, som igjen er knyttet til EVRF2007. Dette forklarer hvorfor gjennomsnittsverdiene utledet i tabell 7.1 ligger på rundt 30 cm.

Tabell 7.1: Min-, maks- og gjennomsnittsverdi til differansene mellom  $\zeta^{GNSS/nivellement}$  og  $\zeta^{GPM}$  i beregningspunktene, samt standardavvik.

GPM	min (cm)	maks (cm)	gjennomsnittsverdi (cm)	standardavvik (cm)
EGM2008	9.12	41.35	25.31	5.10
EIGEN6C4	9.56	41.51	26.53	4.77
XGM2019	-17.08	56.68	23.18	12.58
XGM2019e2159	5.96	42.32	27.89	6.02
XGM2019e	14.07	44.13	29.20	5.46

Nye konstantavvik ved å legge til korreksjonen beskrevet av Denker [2013], er vist i tabell 7.2.

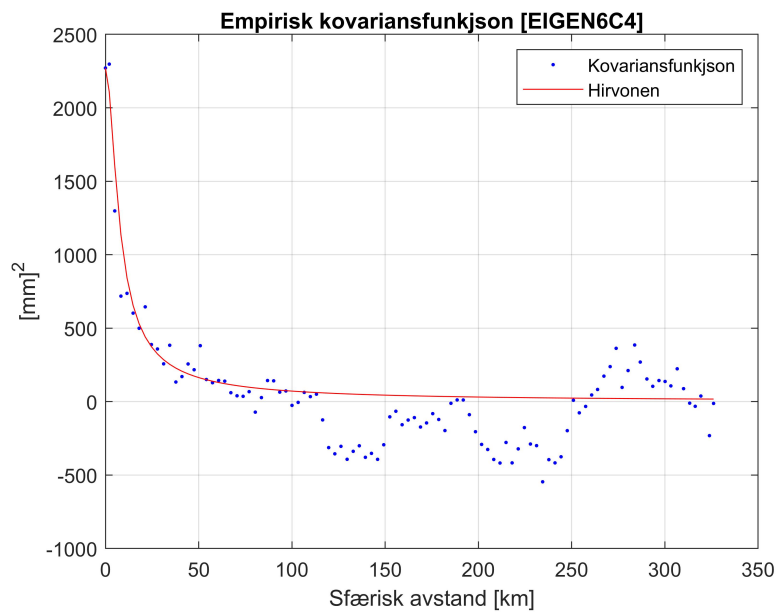
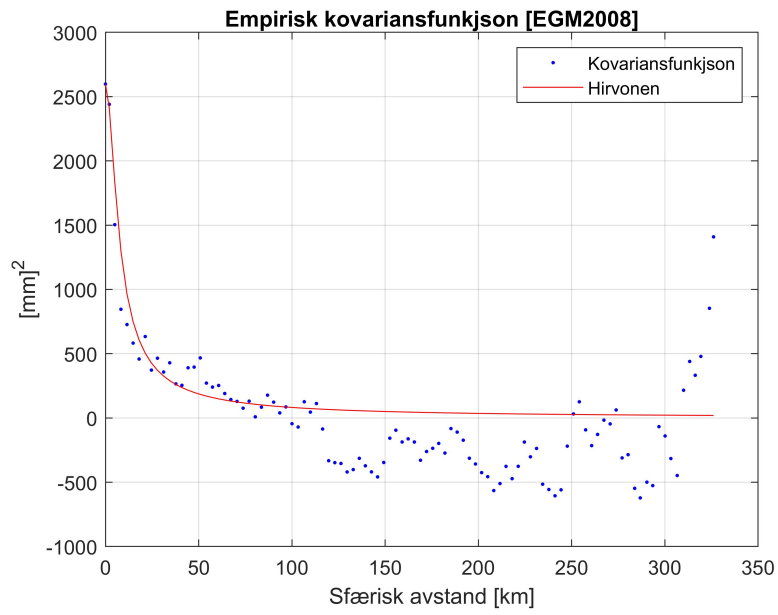
---

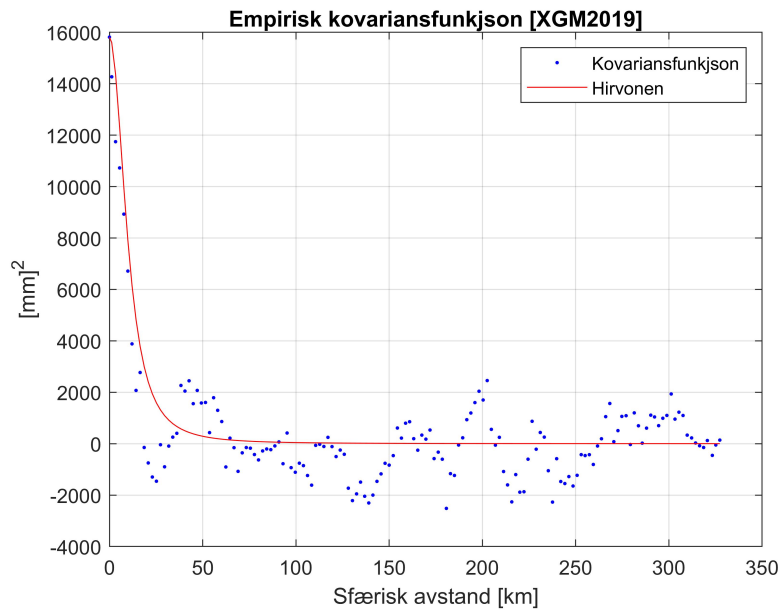
Tabell 7.2: Konstantavvik til GPM'ene ved å benytte korreksjonen beskrevet av Denker [2013]

GPM	konstantavvik (cm)
EGM2008	-4.69
EIGEN6C4	-3.47
XGM2019	-6.82
XGM2019e2159	-2.11
XGM2019e	-0.80

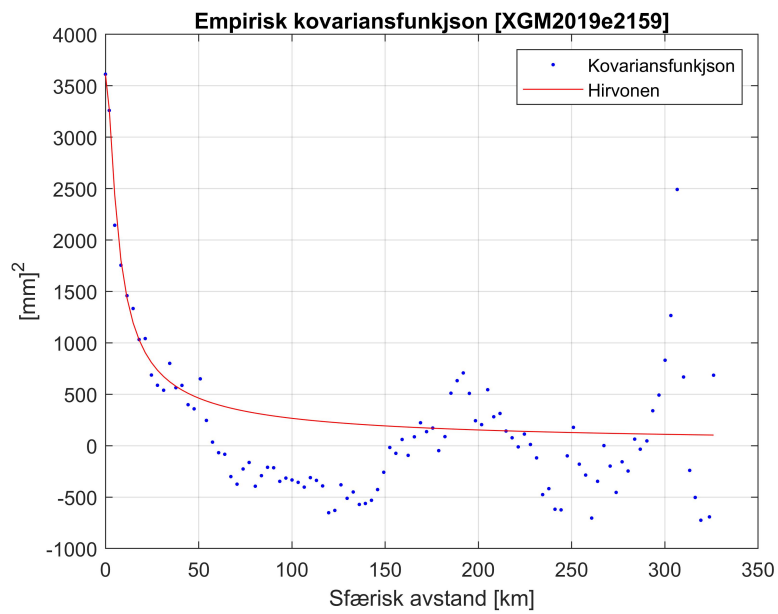
Plottene i figur 7.2 viser at den analytiske modellen representerer funksjonen godt. Funksjonene har stokastiske egenskaper, ved at den avtar og svinger rundt null. Dette er en egenskap som er sentral for statistisk analyse. For mindre avstander viser feilkovariansfunksjonen tydelig korrelasjon mellom empiriske feil, og avtar for større avstander. Funksjonen til EGM2008 og EIGEN6C4 er svært like. Korrelasjonen avtar mot null ved avstand 100 km. Den eneste forskjellen er spredningen av punkter ved større avstander.

Funksjonen til XGM2019 var som forventet, med store variasjoner av empiriske feil som skyldes oppløsningen til modellen. Korrelasjonen avtar mot null ved avstand 18 km. Variansen avtar ved økende oppløsning (grad og orden), se Figur 7.2(c)(d)(e). XGM2019e har større svinginger rundt null ved avstand 50 og 250 km. For XGM2019e2159 er disse svingingene litt mindre tydelig fordi feilen i XGM2019e2159 er generelt sett større. Funksjonen til de to modellene ser ut til å være helt like. De empiriske feilkovariansfunksjonene viser en sterk korrelasjon i empiriske feil, som avtar ved større avstander.



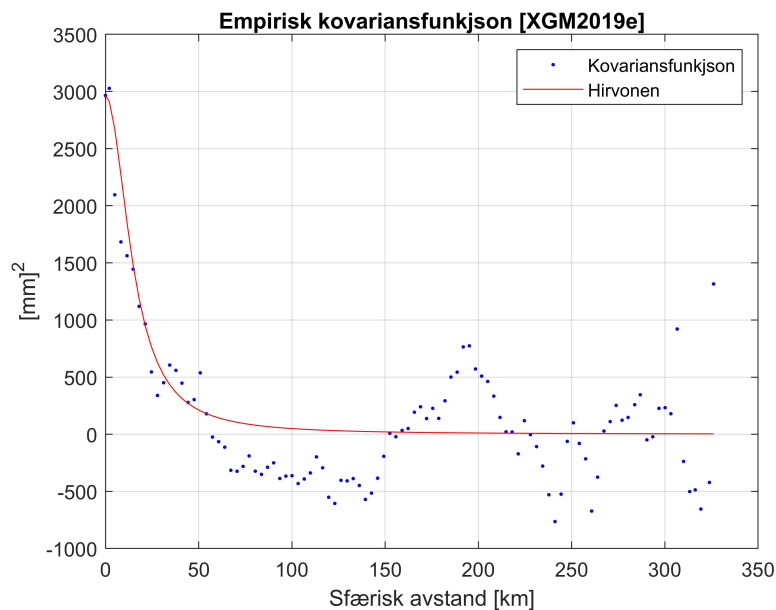


(c)



(d)





(e)

Figur 7.2: Figurene viser empiriske feilkovariansfunksjoner sammen med tilpasset analytisk modell (Hirvonen). (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e.

Tabell 7.3 viser  $\sqrt{C_0}$ , som er standardavvik ved  $s = 0$  (ved avstand 0), korrelasjonslengden  $\xi$  og krumningsparameteren  $p$  til den analytiske modellen. Korrelasjonslengden gir en beskrivelse på hvor glatt eller røft signalet er. Stor  $\xi$  tilsier et glatt signal med ingen signifikante variasjoner av signalet over mindre avstander. Liten  $\xi$  tilsier et røft signal med signifikante variasjoner av signalet over kortere avstander. Alle modellene har tilsynelatende små verdier for  $\xi$ , røffere signal. Det er viktig å merke seg at de utledede feilkovariansfunksjonene ikke representerer et signal, men empiriske feil.

Modellene EGM2008, EIGEN6C4 og XGM2019e2159 har lik verdi for korrelasjonslengden, altså lik variasjon av empirisk feil over kortere avstander, noe en kunne forvente siden de tre modellene har visse likheter, f.eks. samme oppløsning ( $N_{maks} = 2190$ ). XGM2019 og XGM2019e har større verdi for korrelasjonslengden. Som forventet har XGM2019 størst standardavvik ved  $s = 0$  og de andre modellene har betydelig mindre verdier. EIGEN6C4 har minst standardavvik på 47.7 mm.

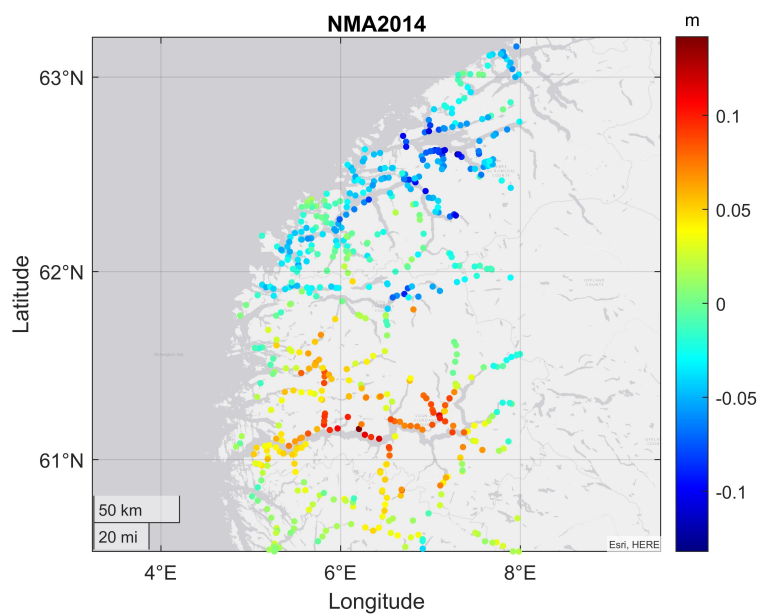
Tabell 7.3: Standardavvik  $\sqrt{C_0}$ , korrelasjonslengden  $\xi$  og krumningsparameteren  $p$  til de empiriske feilkovariansfunksjonene.

GPM	$\sqrt{C_0}$ (mm)	$\xi$ (km)	$p$
EGM2008	51.0	8.291	0.6
EIGEN6C4	47.7	8.291	0.6
XGM2019	125.8	9.874	1.4
XGM2019e2159	60.1	8.291	0.4
XGM2019e	54.5	14.824	1.1

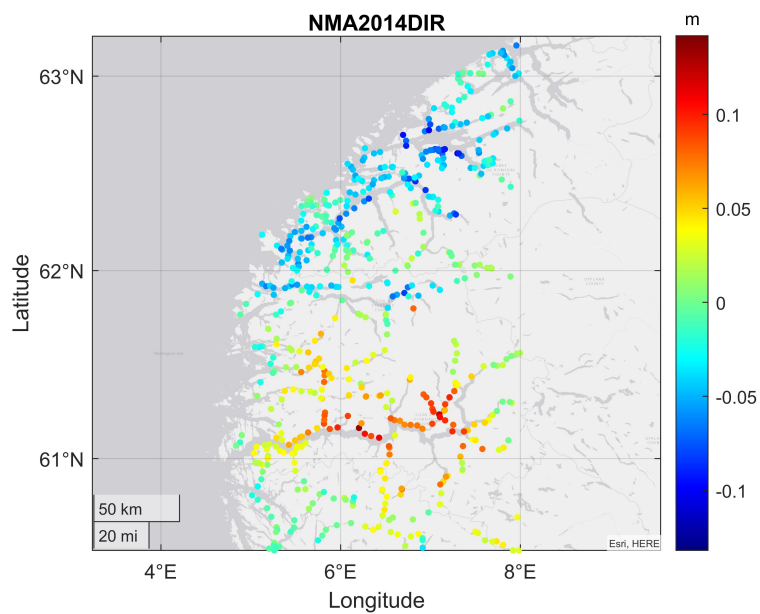
## 7.2 Validering av Regionale Geoidmodeller

Den geografiske fordelingen til differansen mellom geometrisk  $\zeta$  og  $\zeta$  fra RGM er vist i figur 7.3, hvor differansene er redusert for sin middelvei. Modellene NMA2014, NMA2014DIR og NKG2015 har tilsynelatende lik geografisk fordeling av positive og negative avvik. Sognefjorden har positive avvik og små negative avvik kan observeres lenger nord i interreseområdet. Visuelt sett ser det

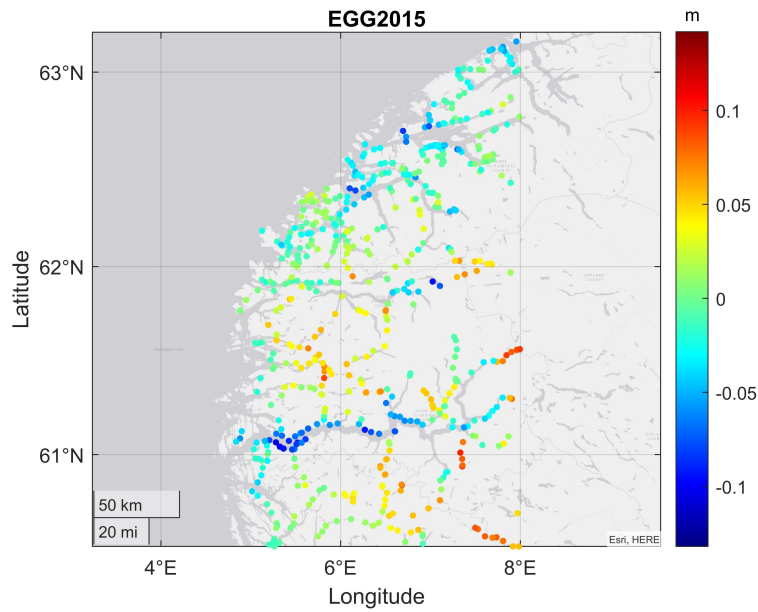
ut til at NKG2015 har mindre verdier for avvikene enn NMA2014 og NMA2014DIR. EGG2015 har tilsynelatende samme fordeling av positive og negative avvik som de globale modellene, f.eks. negative avvik langs Sognefjorden.



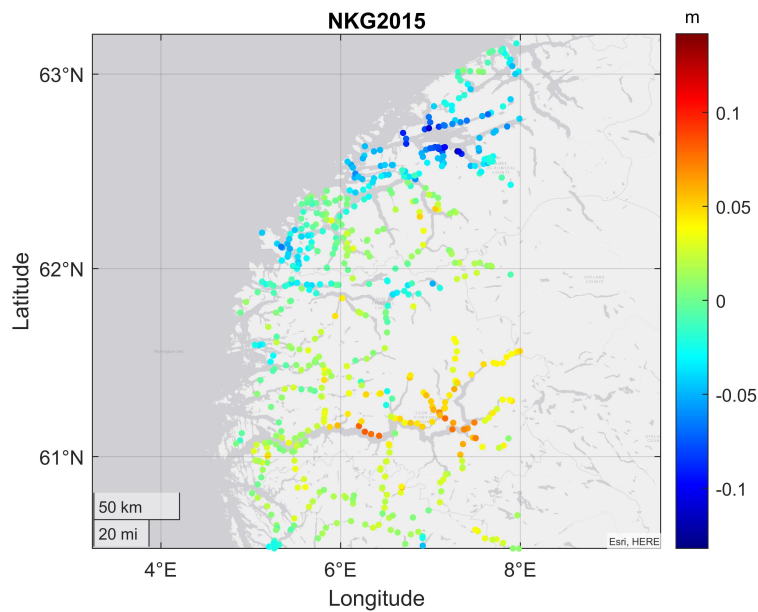
(a)



(b)



(c)



(d)

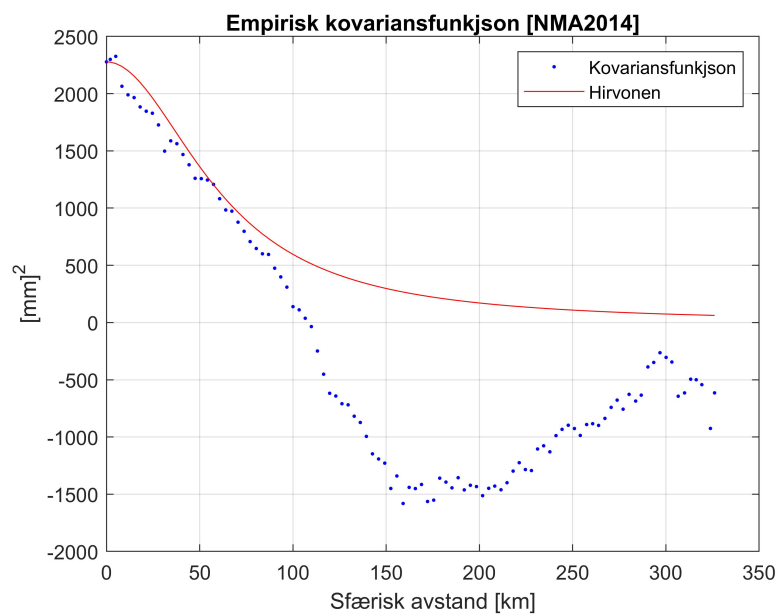
Figur 7.3: Differansen mellom geometrisk høydeanomali ( $h-H$ ) og gravimetrisk  $\zeta$ . Gjennomsnittsverdiene av differansene er trukket fra for å bedre kunne sammenligne modellene. (a)  $(h-H) - \zeta^{NMA2014}$ , (b)  $(h-H) - \zeta^{NMA2014DIR}$ , (c)  $(h-H) - \zeta^{EGG2015}$ , (d)  $(h-H) - \zeta^{NKG2015}$ .

Tabell 7.4 viser at NMA2014 har samme tilfelle som GPM'ene, større systematisk avvik. EGG2015 og NKG2015 har relativt små gjennomsnittsverdier, som tyder på at modellene er mer konsistent med GNSS/nivellementet. De har felles referanseparametre, f.eks, samme datum og *tide*-system. NKG2015 har minst standardavvik på differansene og NMA2014 har størst.

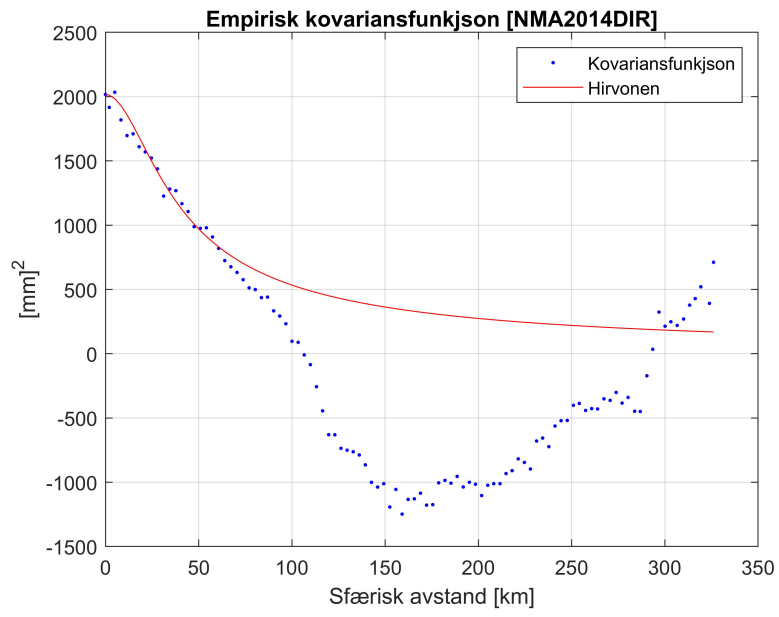
Tabell 7.4: Minimum, maksimum og gjennomsnittsverdi for differansene mellom  $\zeta^{GNSS/nivellement}$  og  $\zeta^{RGM}$  i beregningspunktene, samt standardavvik.

RGM	min (cm)	maks (cm)	gjennomsnittsverdi (cm)	standardavvik (cm)
NMA2014	10.41	37.80	23.62	4.78
NMA2014DIR	-79.53	-54.32	-67.68	4.49
EGG2015	-11.91	8.86	-1.29	3.79
NKG2015	-14.36	7.08	-1.18	3.48

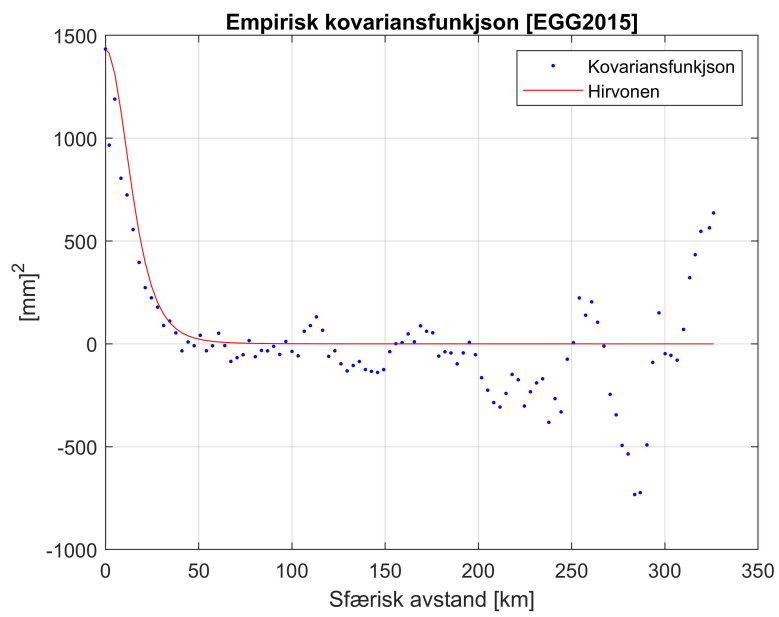
Figur 7.4 viser empiriske feilkovariansfunksjoner utledet for RGM'ene. Feilkovariansfunksjonen utledet fra EGG2015 har den typiske formen på en kovariansfunksjon. Vi ser tydelig korrelasjon i empiriske feil ved mindre avstander, og korrelasjonen avtar betydelig for større avstander. Funksjonen til NMA2014, NMA2014DIR og NKG2015 viser høy korrelasjon mellom empiriske feil for kortere avstander, men ved ca. sfærisk avstand 100 km blir korrelasjonen kraftig negativ. Dette skyldes den geografiske fordelingen av differansene, som er vist i figur 7.3.



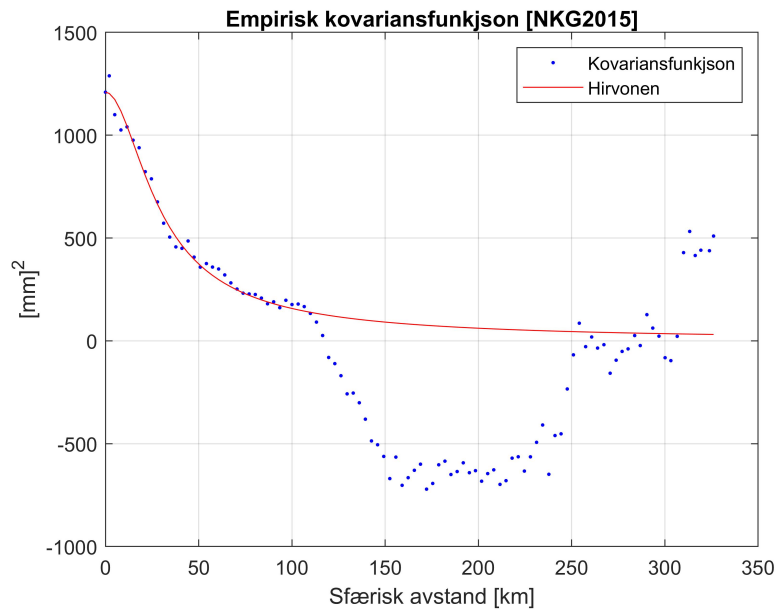
(a)



(b)



(c)



(d)

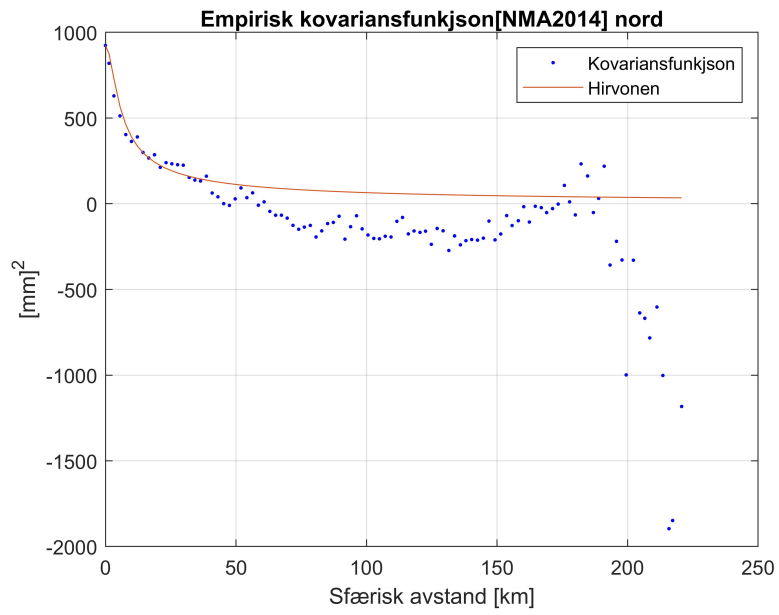
Figur 7.4: Empiriske feilkovariansfunksjoner sammen med tilpasset analytisk modell (Hirvonen). (a) NMA2014, (b) NMA2014DIR, (c) EGG2015, (d) NKG2015.

Statistikken til de empiriske feilkovariansfunksjonene for RGM'ene er vist i tabell 7.5.

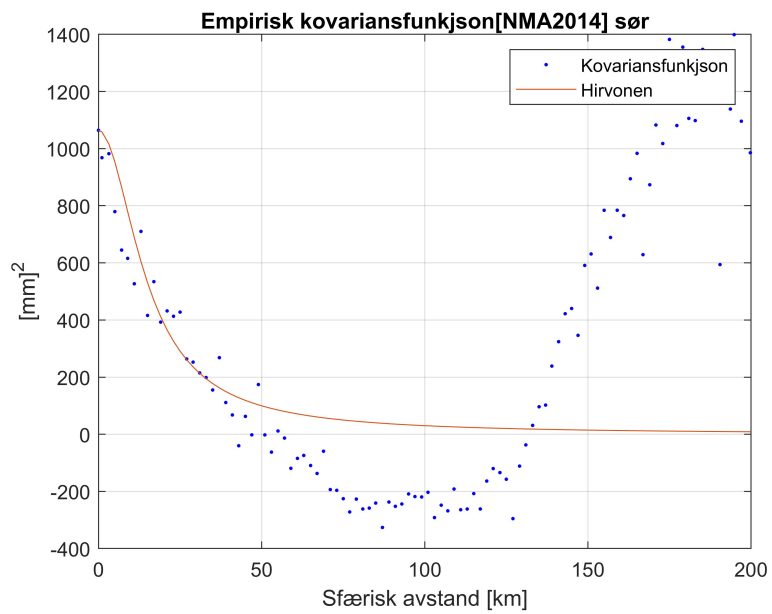
Tabell 7.5: Standardavvik  $\sqrt{C_0}$ , korrelasjonslengden  $\xi$  og krumningsparameteren  $p$  for de empiriske feilkovariansfunksjonene.

GPM	$\sqrt{C_0}$ (mm)	$\xi$ (km)	$p$
NMA2014	47.7	60.690	1.1
NMA2014DIR	44.9	47.544	0.5
EGG2015	37.9	14.824	3
NKG2015	34.8	31.197	0.7

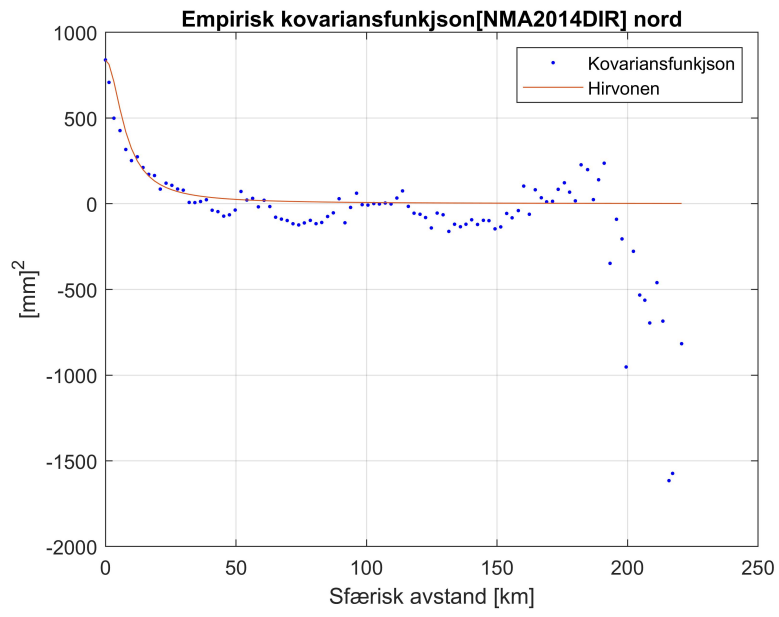
Den systematiske fordelingen av differansene ble redusert for, ved å dele området inn i nord og sør. Inndelingen av området ble gjort ved breddegrad  $61.6^\circ$ . Figur 7.5 viser nye empiriske feilkovariansfunksjoner med nord/sør inndeling av interesseområdet.



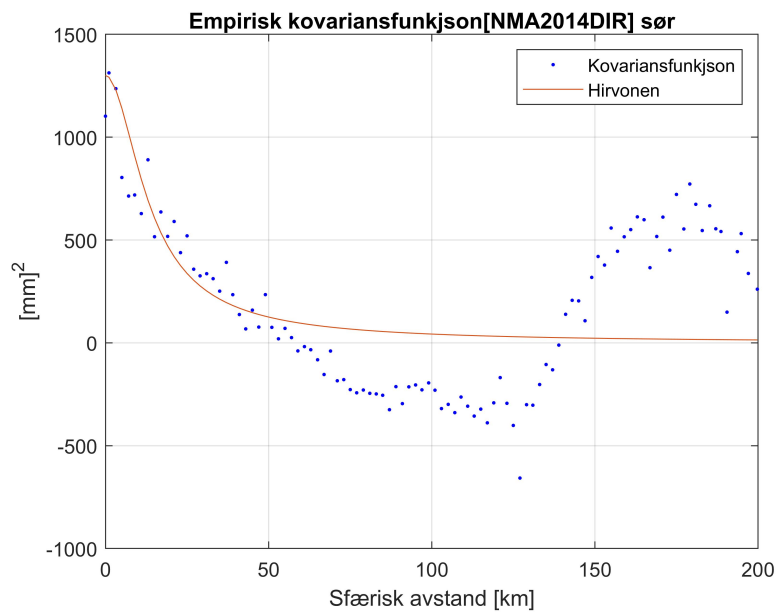
(a)



(b)

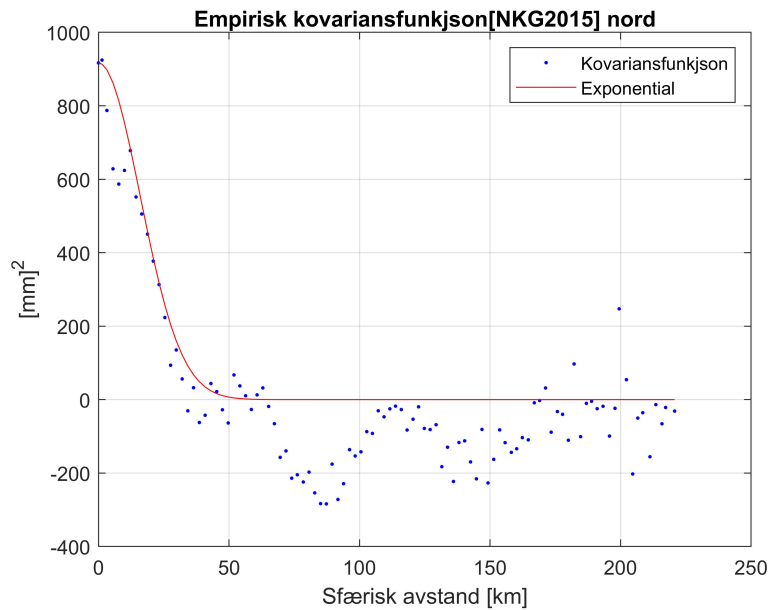


(c)

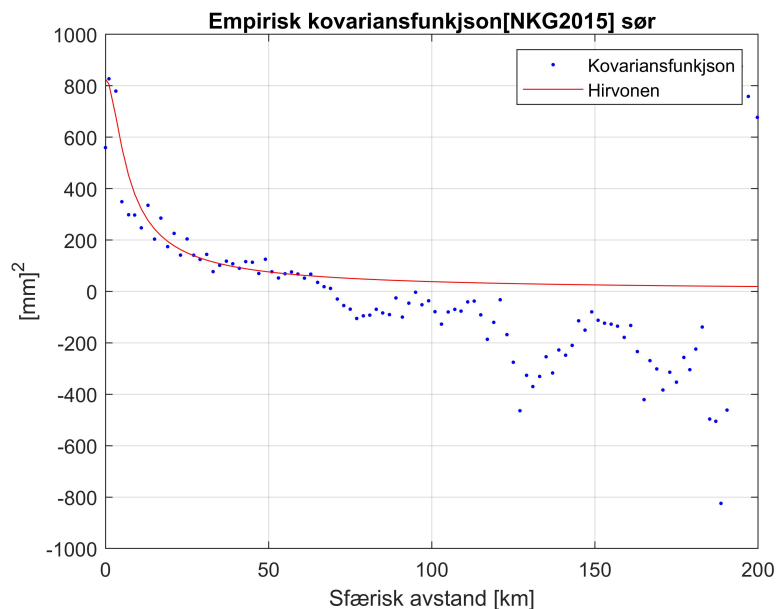


(d)





(e)



(f)

Figur 7.5: Nye empiriske feilkovariansfunksjoner med nord/sør inndeling av interesseområdet. (a) NMA2014 nord, (b) NMA2014 sør, (c) NMA2014DIR nord, (d) NMA2014DIR sør, (e) NKG2015 nord, (f) NKG2015 sør.

Etter inndeling av området kan en se at de ikke-stokastiske egenskapene til NKG2015 funksjonen er redusert og formen ligner mer en typisk kovariansfunksjon, se figur 7.5. I det nordlige området går korrelasjonen mot null ved avstand 40 km og i det sørlige området ved avstand 60 km. Funksjonen til NMA2014 og NMA2014DIR i det sørlige området inneholder fortsatt systematiske andeler, som gjør at funksjonen ikke ser helt stokastisk ut. Den empiriske feilkovariansfunksjonen til NMA2014 for det nordlige området, viser tydelig korrelasjon i empiriske feil for mindre avstander og som avtar gradvis mot 0 ved sfærisk avstand 60 km. For det sørlige området avtar korrelasjonen mot null ved avstand 50 km. I det nordlige området er funksjonen til NMA2014DIR ganske lik NMA2014. NMA2014DIR har litt lavere korrelasjon ved kortere avstander og går mot null ved avstand 40 km. I det sørlige området går korrelasjonen mot null ved avstand 60 km.

Statistikken til den tilpassede modellen er vist i tabell 7.6. NMA2014DIR har mindre standardavvik i det nordlige området, hvor NKG2015 har minst standardavvik i det sørlige området. Korrelasjonslengden i det nordlige området til NMA2014 og NMA2014DIR er betydelig mindre enn i det sørlige området, hvor NKG2015 har minst korrelasjonslengde i det sørlige området.

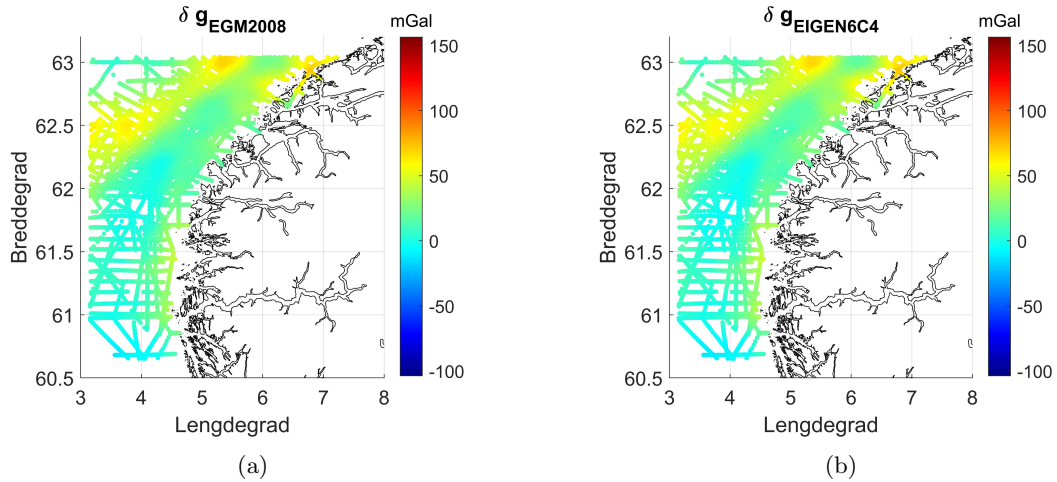
Tabell 7.6: Standardavvik  $\sqrt{C_0}$ , korrelasjonslengden  $\xi$  og krumningsparameteren  $p$  for de nye empiriske feilkovariansfunksjonene.

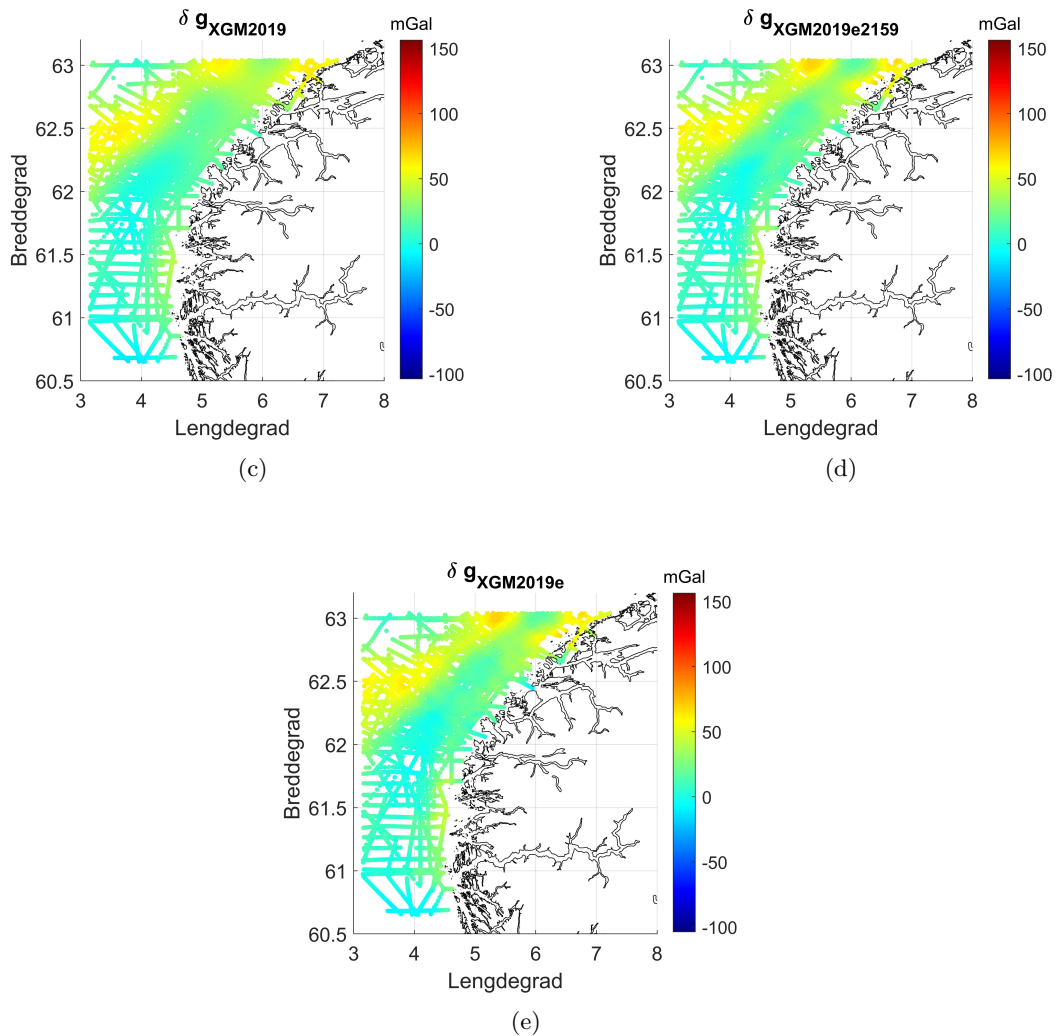
GPM	$\sqrt{C_0}$ (mm)	$\xi$ (km)	$p$
NMA2014 [nord]	30.4	7.790	0.4
NMA2014 [sør]	32.6	15.000	0.9
NMA2014DIR [nord]	29.0	7.790	0.9
NMA2014DIR [sør]	36.1	14.000	0.8
NKG2015 [nord]	30.3	18.784	0.9
NKG2015 [sør]	28.8	8.000	0.5

### 7.3 Terrestriske tyngdeforstyrrelser redusert for Globale Potensialmodeller

Tyngdeforstyrrelsen beregnet fra GPM'ene i hav-, fjord- og landområdet er vist i figur 7.6, 7.7 og 7.8.

I figur 7.6 kan en se at de beregnede tyngdeforstyrrelsene fra EGM2008, EIGEN6C4, XGM2019e2159 og XGM2019e har ganske lik geografisk fordeling av tyngdeforstyrrelsene og dens verdier. EGM2008, EIGEN6C4 og XGM2019e2159 har lik spektral oppløsning ( $N_{maks} = 2190$ ), men XGM2019e har en betydelig større oppløsning ( $N_{maks} = 5540$ ). XGM2019 skiller seg ut ved at den ikke klarer å fange opp de større positive verdiene i det nordlige området, grunnet sin begrensede spektrale oppløsning ( $N_{maks} = 760$ ).





Figur 7.6: Tyngdeforstyrrelse beregnet fra GPM'ene i havområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e.

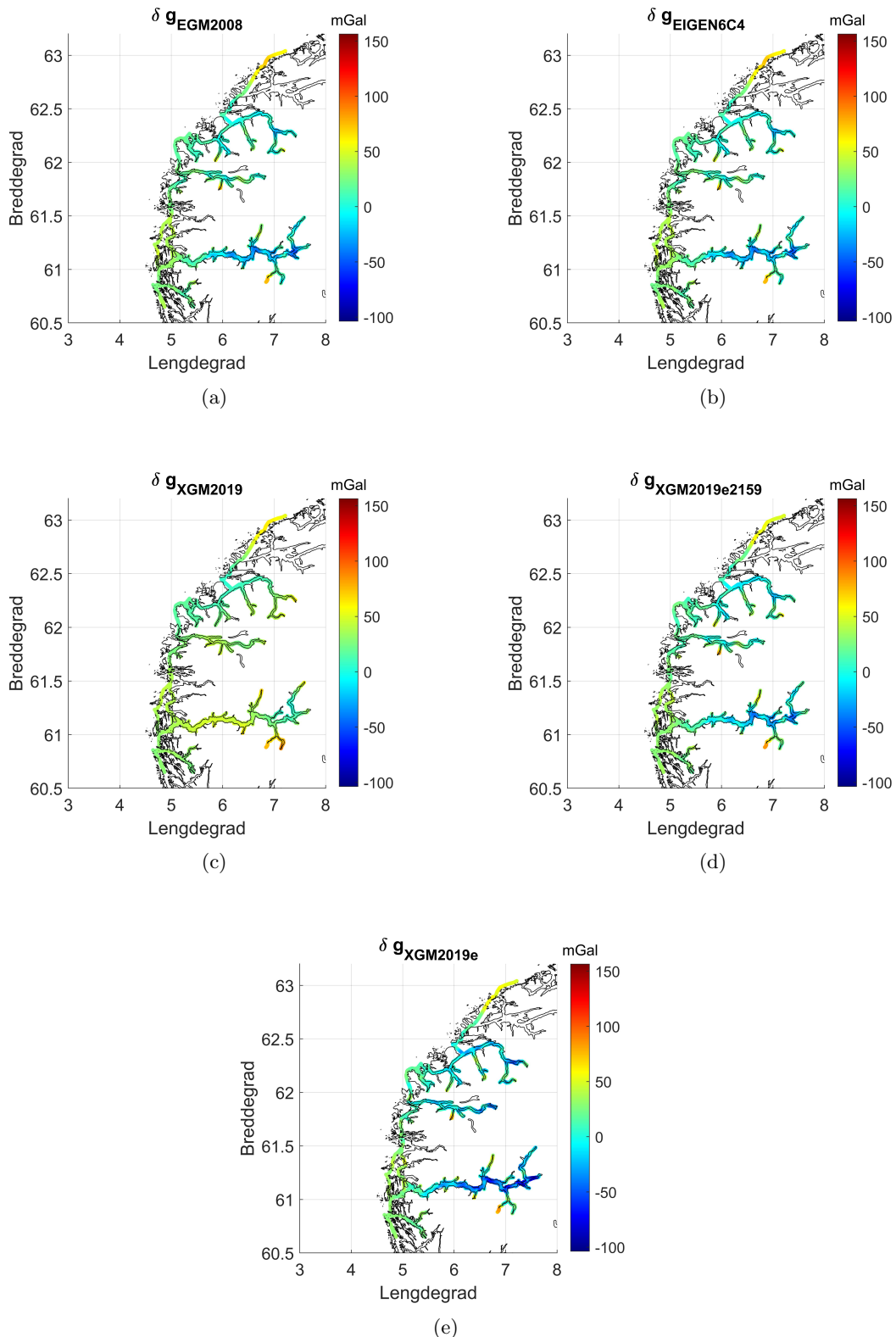
Statistikken til beregnede tyngdeforstyrrelsene i havområdet fra de forskjellige GPM'ene er vist i tabell 7.7. EIGEN6C4 har minst gjennomsnittsverdi, hvor XGM2019 har den største. Når det gjelder standardavvik er det XGM2019 som har minst verdi og EIGEN6C4 som har størst. På grunn av XGM2019 sin begrensede oppløsning (korte bølgelengder er ikke med), er modellen glattere enn de andre modellene og dermed har minst standardavvik (mindre signalvariasjoner).

Tabell 7.7: Min-, maks-, gjennomsnittsverdi og standardavvik til tyngdeforstyrrelsene beregnet fra GPM'ene i havområdet. Enhet mGal.

GPM	min	maks	gjennomsnittsverdi	standardavvik
EGM2008	-11.728	72.205	23.428	17.182
EIGEN6C4	-11.936	73.003	22.419	17.593
XGM2019	-12.088	63.885	23.620	16.810
XGM2019e2159	-9.930	69.681	23.208	17.425
XGM2019e	-10.246	70.738	23.080	17.535

Figur 7.7 viser beregnede tyngdeforstyrrelser fra de forskjellige GPM'ene i fjordområdet. EGM2008, EIGEN6C4 og XGM2019e2159 er visuelt sett veldig like. De klarer å plukke opp fjordens signaturer og har stort sett negative verdier innerst i fjordene. XGM2019 med sin begrensede oppløsning klarer ikke å fange opp fjordens signaturer, og får små positive verdier i fjordene. XGM2019e med

sin store spektrale oppløsning klarer å fange opp de små-skala signaturene i fjordene og plukker opp større negative verdier enn de andre modellene.



Figur 7.7: Tyngdeforstyrrelse beregnet fra GPM'ene i fjordområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e.

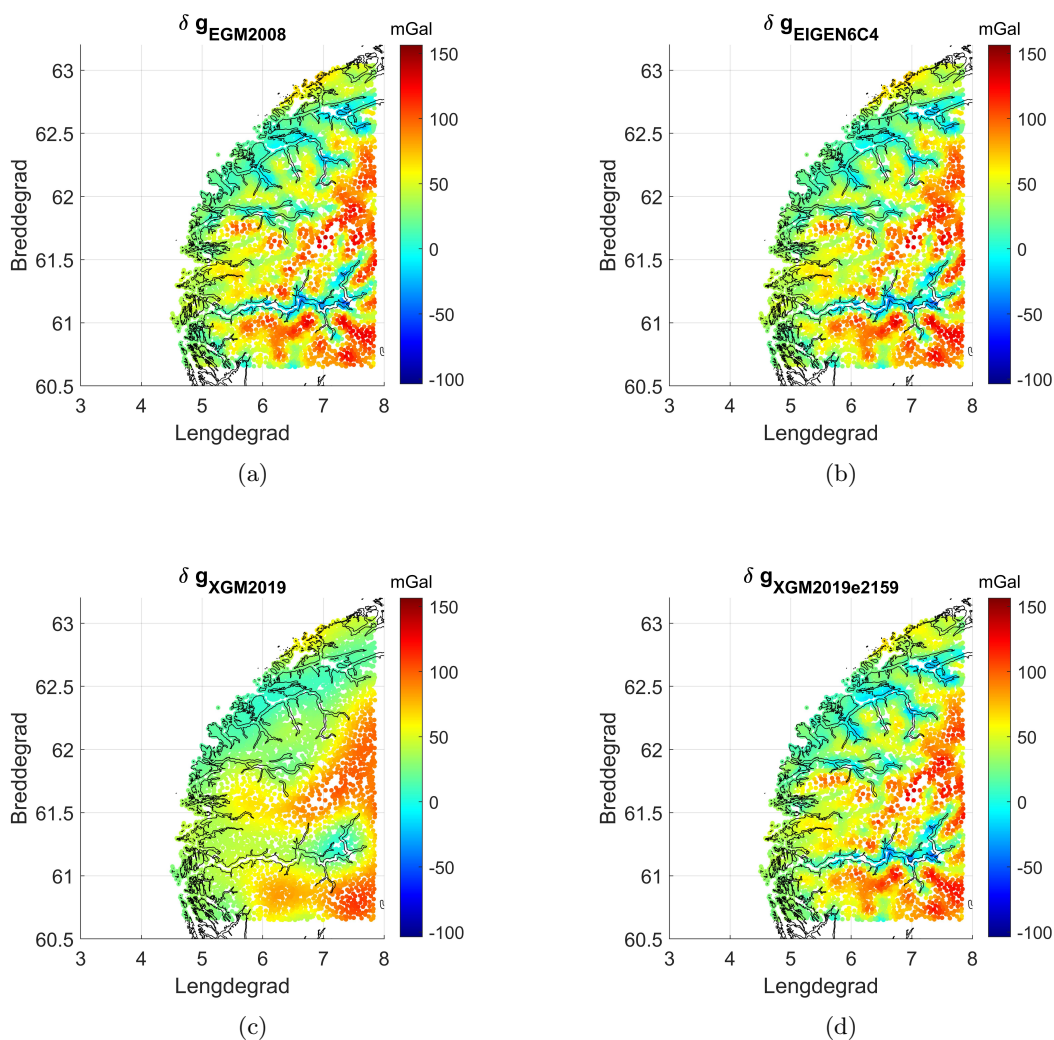
Statistikken til beregnede tyngdeforstyrrelsene i fjordområdet fra de forskjellige GPM'ene er vist i

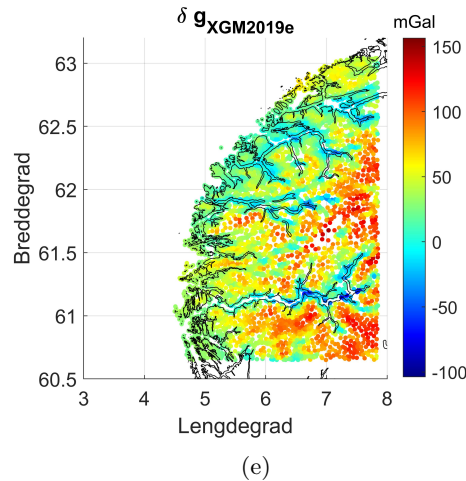
tabell 7.8. XGM2019e har minst gjennomsnittsverdi og størst standardavvik. Modellen har betydelig større oppløsning, og inneholder derfor flere signalvariasjoner som fører til større standardavvik. XGM2019 med sin begrensede oppløsning har minst standardavvik, fordi modellen inneholder mindre signalvariasjoner.

Tabell 7.8: Min-, maks-, gjennomsnittsverdi og standardavvik for tyngdeforstyrrelsene beregnet fra GPM'ene i fjordområdet. Enhet mGal.

GPM	min	maks	gjennomsnittsverdi	standardavvik
EGM2008	-54.634	76.672	7.473	23.339
EIGEN6C4	-53.934	76.821	7.533	23.496
XGM2019	1.390	89.420	33.001	15.866
XGM2019e2159	-52.382	86.300	9.223	22.606
XGM2019e	-98.123	89.280	-1.763	30.911

Figur 7.8 viser tyngdeforstyrrelsene beregnet fra GPM'ene i landområdet. EGM2008, EIGEN6C4 og XGM2019e2159 er visuelt sett like. XGM2019 skiller seg ut ved at den har et veldig langbølget signal, dvs. mindre signalvariasjoner som fører til glattere figur. XGM2019e skiller seg ut ved at den fanger opp de små-skala signaturene til topografien, modellen inneholder flere signalvariasjoner.





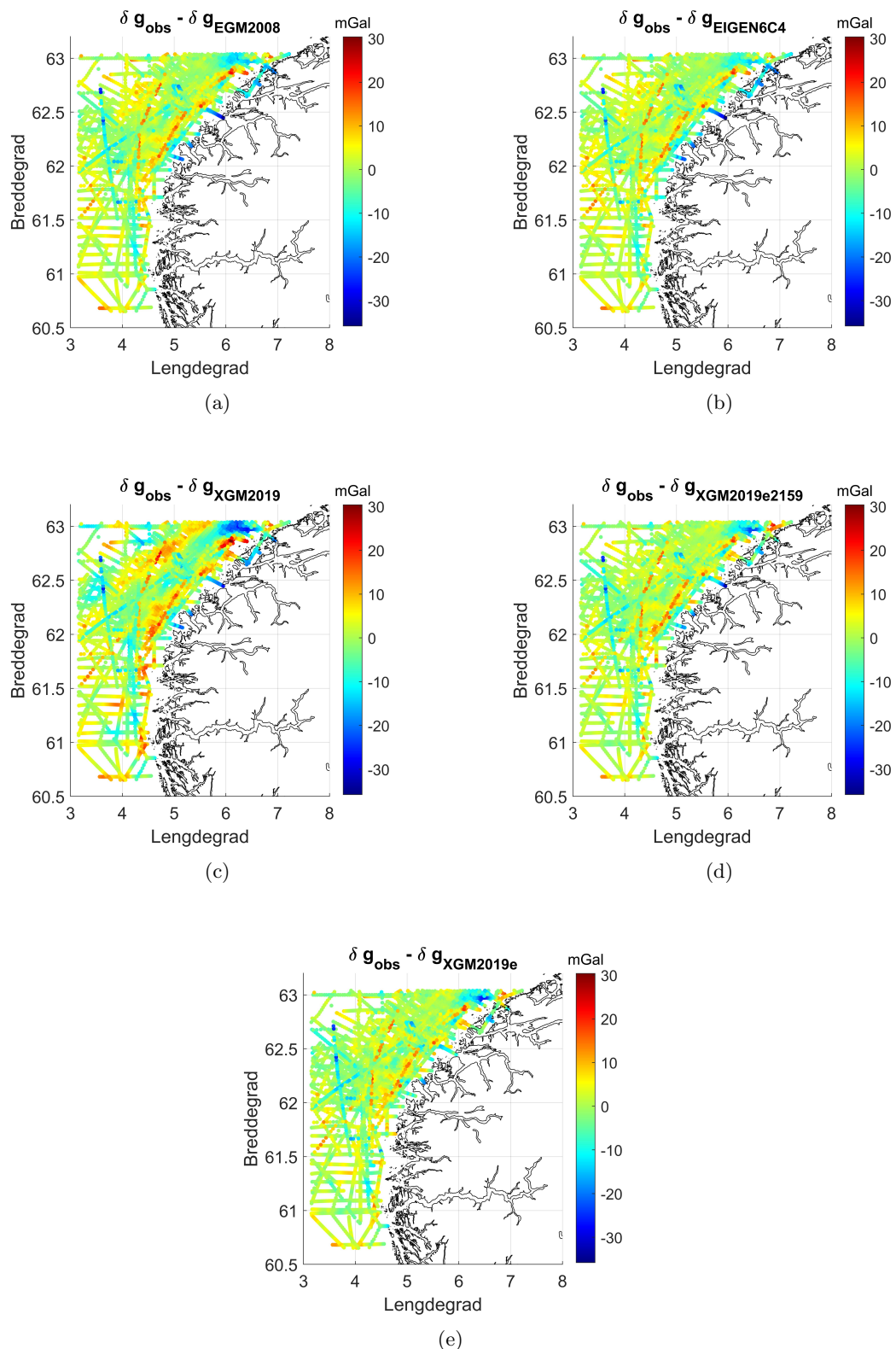
Figur 7.8: Tyngdeforstyrrelse beregnet fra GPM'ene i landområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e.

Statistikken til tyngdeforstyrrelsene beregnet fra GPM'ene i landområdet, er vist i tabell 7.9. Også her er det XGM2019e som har minst gjennomsnittsverdi og størst standardavvik, og XGM2019 har størst gjennomsnittsverdi og minst standardavvik. Relatert til forklaringen i fjordområdet og på land, så har XGM2019 ikke klart å fange opp de negative anomaliene helt nede i fjordkanten og heller ikke de største toppene på de omkringliggende fjellene.

Tabell 7.9: Min-, maks-, gjennomsnittsverdi og standardavvik for tyngdeforstyrrelsene beregnet fra GPM'ene i landområdet. Enhet mGal.

GPM	min	maks	gjennomsnittsverdi	standardavvik
EGM2008	-50.460	135.737	37.808	29.123
EIGEN6C4	-49.725	135.798	37.777	29.011
XGM2019	2.576	109.963	40.995	22.782
XGM2019e2159	-48.826	132.569	37.336	28.431
XGM2019e	-85.634	146.099	34.152	31.116

Differanse mellom terrestriske tyngdeforstyrrelser og tyngdeforstyrrelser beregnet fra forskjellige GPM'er i haveområdet er vist i figur 7.9. Reduksjonen for alle modellene ser visuelt sett ganske like ut, eneste området på havet hvor det er signifikante forskjeller mellom differansene er mellom lengdegrad  $6^{\circ} - 7^{\circ}$  og breddegrad  $62.5^{\circ} - 63^{\circ}$ . EIGEN6C4 har bare noen positive avvik i dette området, hvor EGM2008, XGM2019e2159 og XGM2019e har større varierende positive/negative avvik. XGM2019 skiller seg spesielt ut, og viser generelt sett større positive/negative avvik i hele området.



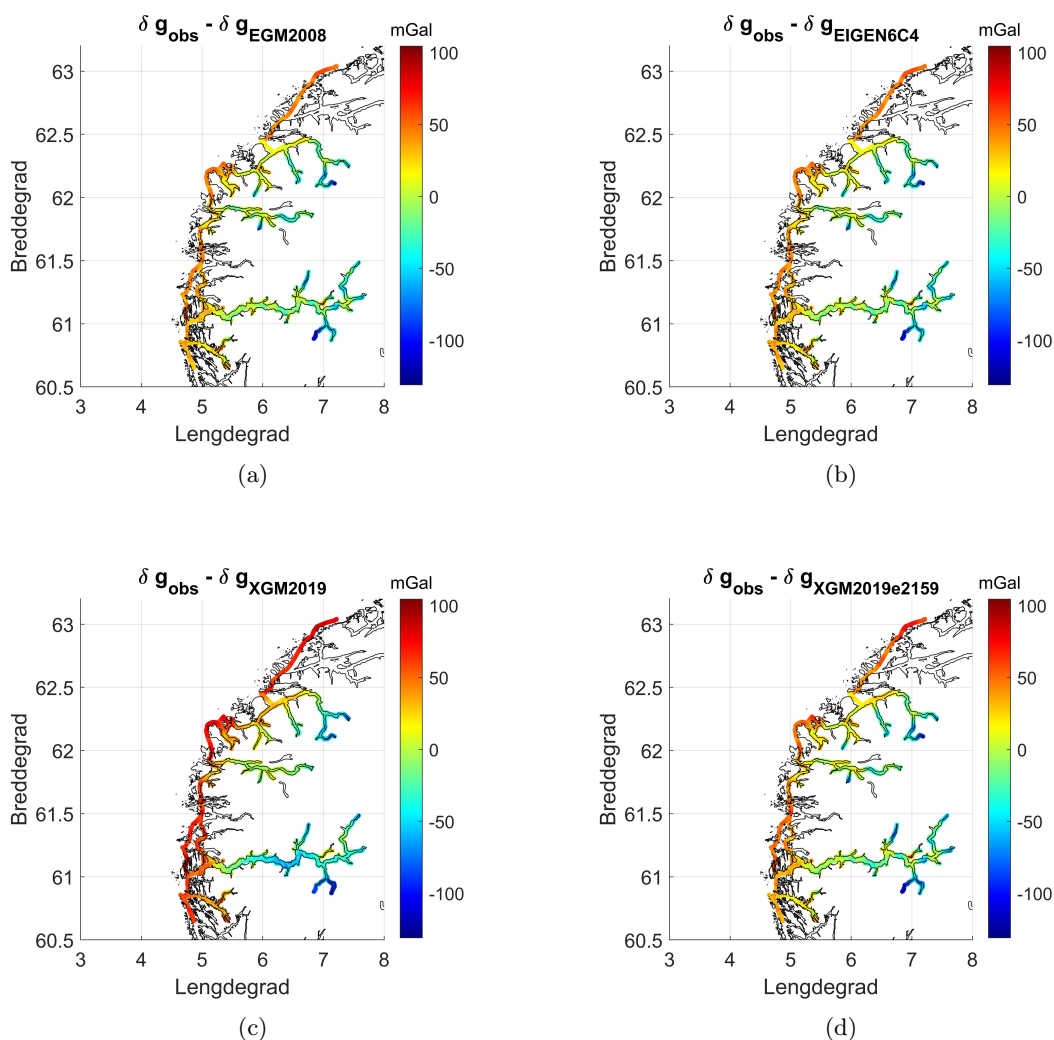
Figur 7.9: Differanse mellom terrestriske tyngdeforstyrrelser og tyngdeforstyrrelser beregnet fra forskjellige GPM'er i havområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e.

Statistikken til differanse mellom terrestriske tyngdeforstyrrelser og tyngdeforstyrrelser beregnet fra forskjellige GPM'er i haveområdet er vist i tabell 7.10. EIGEN6C4 har minst gjennomsnittlig verdi og XGM2019 har størst. XGM2019e har minst standardavvik og XGM2019 har størst.

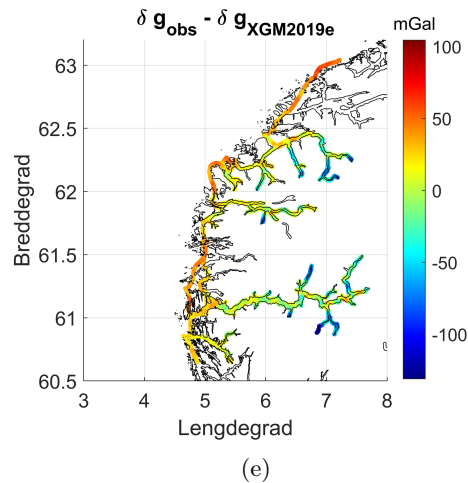
Tabell 7.10: Min-, maks-, gjennomsnittsverdi og standardavvik til differanse mellom terrestriske tyngdeforstyrrelser og tyngdeforstyrrelser beregnet fra GPM'er i havområdet. Enhet mGal.

GPM	min	maks	gjennomsnittsverdi	standardavvik
EGM2008	-35.712	20.932	-1.336	4.948
EIGEN6C4	-36.150	18.933	-0.342	4.691
XGM2019	-28.460	28.875	-1.534	6.808
XGM2019e2159	-33.717	22.010	-1.123	4.688
XGM2019e	-28.543	17.560	-0.994	4.582

Differanse mellom terrestriske tyngdeforstyrrelser og tyngdeforstyrrelser beregnet fra forskjellige GPM'er i fjordområdet er vist i figur 7.10. EGM2008, EIGEN6C4 og XGM2019e2159 er visuelt sett helt like. De har mindre positive avvik langs kysten og negative avvik inne i fjordene. XGM2019 viser større positive avvik langs kysten og større negative avvik inne i fjordene. Siden XGM2019 ikke har fanget opp fjordene har den redusert signalet inne i fjorden betraktelig, som fører til større negative avvik i fjordområder. XGM2019e har generelt sett mindre positive/negative avvik langs kysten og inne i fjordene.







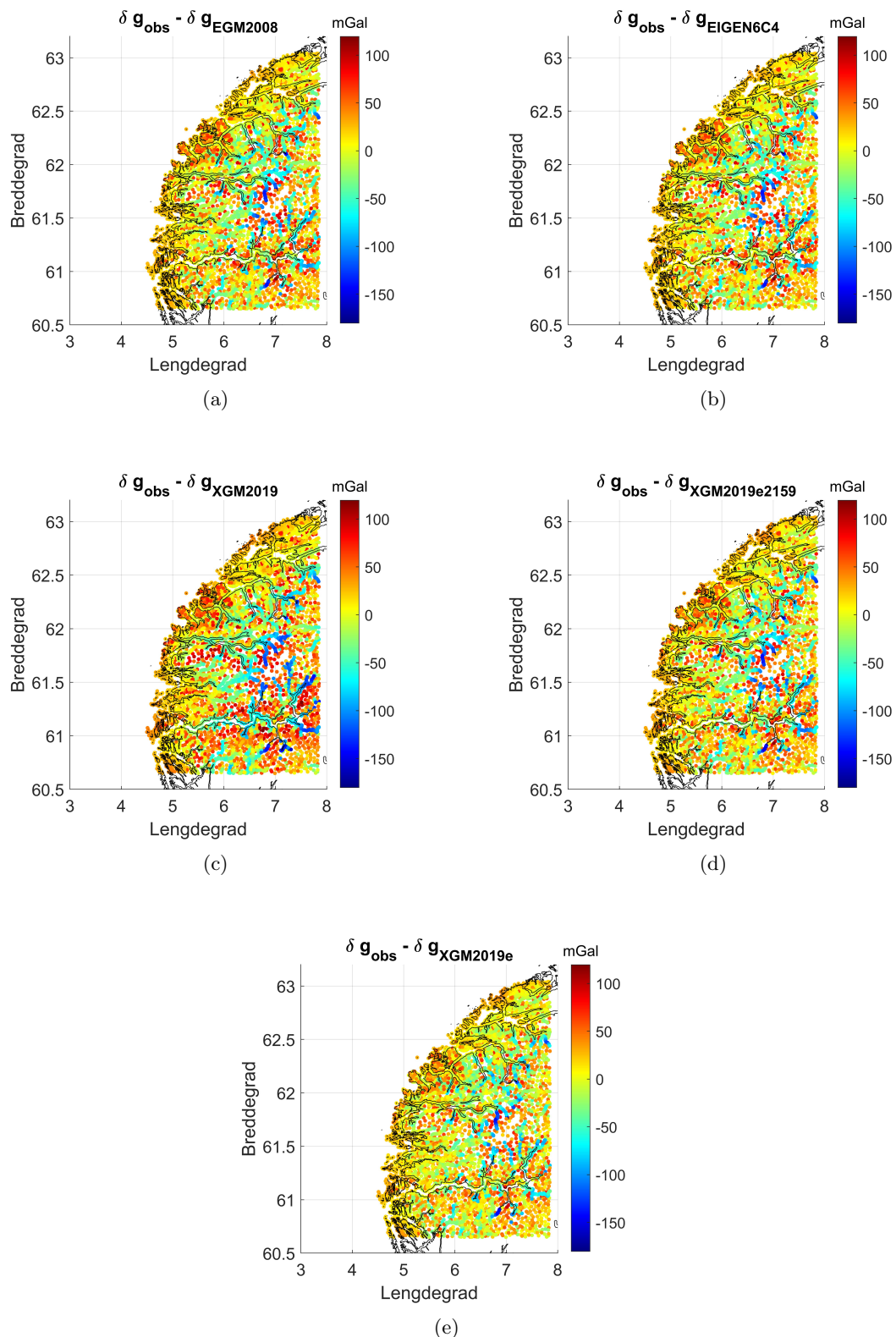
Figur 7.10: Differanse mellom terrestriske tyngdeforstyrrelser og tyngdeforstyrrelser beregnet fra forskjellige GPM'er i fjordområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e.

Statistikken til differanse mellom terrestriske tyngdeforstyrrelser og tyngdeforstyrrelser beregnet fra forskjellige GPM'er i fjordområdet er vist i tabell 7.11. XGM2019 har størst gjennomsnittsverdi og standardavvik. EGM2008 og EIGEN6C4 har veldig lik verdi for standardavvik, hvor EIGEN6C4 har litt mindre verdi. For XGM-modellen kan vi se at økende oppløsning fører til mindre standardavvik.

Tabell 7.11: Min-, maks-, gjennomsnittsverdi og standardavvik til differanse mellom terrestriske tyngdeforstyrrelser og tyngdeforstyrrelser beregnet fra forskjellige GPM'er i fjordområdet. Enhet mGal.

GPM	min	maks	gjennomsnittsverdi	standardavvik
EGM2008	-169.107	18.976	-52.249	29.300
EIGEN6C4	-169.247	18.679	-52.313	29.233
XGM2019	-174.022	26.725	-77.745	43.454
XGM2019e2159	-178.936	35.718	-54.004	32.418
XGM2019e	-174.033	38.175	-43.026	30.281

Differanse mellom terrestriske tyngdeforstyrrelser og tyngdeforstyrrelser beregnet fra forskjellige GPM'er i landområdet er vist i figur 7.11. EGM2008, EIGEN6C4 og XGM2019e2159 er visuelt sett like. Negative avvik ligger for det meste i mindre daler og langs mindre fjorder. De positive avvikene ligger i brattere fjellparti. XGM2019 viser generelt sett større avvik, sammenlignet med XGM2019e som har mindre avvik.



Figur 7.11: Differanse mellom terrestriske tyngdeforstyrrelser og tyngdeforstyrrelser beregnet fra forskjellige GPM'er i landområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e.

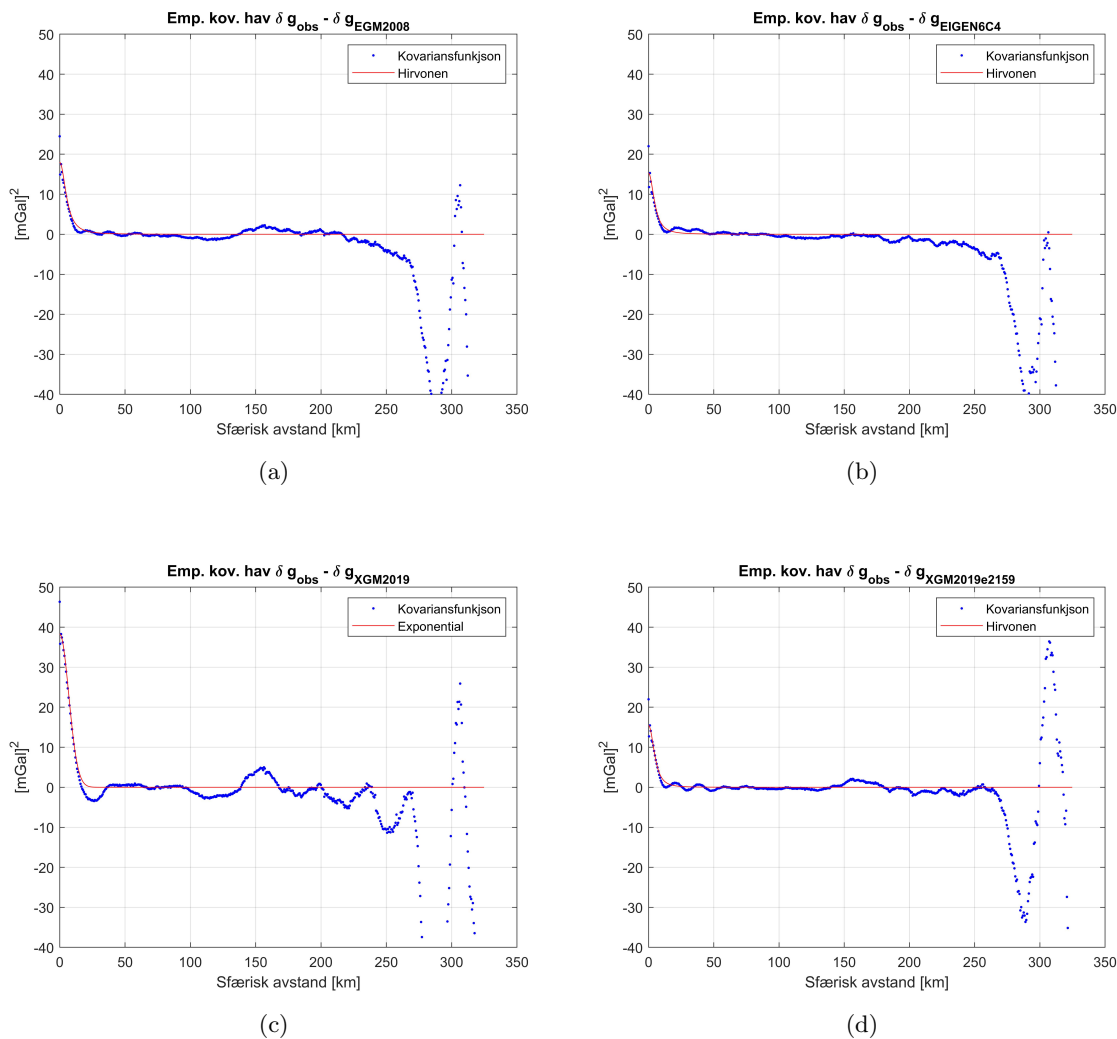
Statistikken til differanse mellom terrestriske tyngdeforstyrrelser og tyngdeforstyrrelser beregnet fra forskjellige GPM'er i landområdet er vist i tabell 7.12. XGM2019e har både minst gjennomsnittsverdi og standardavvik, sammenlignet med XGM2019 som har størst gjennomsnittsverdi og

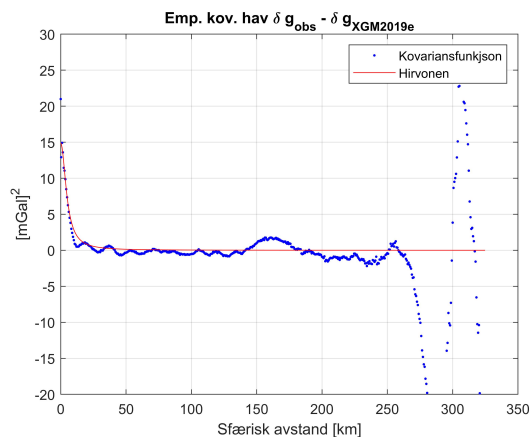
standardavvik. EGM2008 og EIGEN6C4 har ganske lik verdi for standardavvik, men EIGEN6C4 har litt mindre verdi.

Tabell 7.12: Min-, maks-, gjennomsnittsverdi og standardavvik til differanse mellom terrestriske tyngdeforstyrrelser og tyngdeforstyrrelser beregnet fra forskjellige GPM'er i landområdet. Enhet mGal.

GPM	min	maks	gjennomsnittsverdi	standardavvik
EGM2008	-196.423	98.798	-20.759	35.659
EIGEN6C4	-196.380	98.371	-20.733	35.594
XGM2019	-182.912	100.845	-23.951	42.899
XGM2019e2159	-200.580	91.276	-20.298	36.838
XGM2019e	-193.417	79.964	-17.116	32.580

Figur 7.12 viser beregnet empirisk kovariansfunksjon i havområdet. Figurene viser høy korrelasjon mellom differansene for mindre avstander, og som avtar gradvis mot null for lengre avstander, deretter svinger de rundt 0. Funksjonen til EGM2008 og EIGEN6C4 er visuelt sett helt like. Funksjonene til XGM2019e2159 og XGM2019e er også relativt like, men skiller seg ut i den forstand at de har noen små svinginger rundt null mellom sfærisk avstand 4-50 km. XGM2019 har den funksjonen som skiller seg mest ut ved at den har størst korrelasjon for kortere avstander og noen større svinginger rundt null for lengre avstander.





(e)

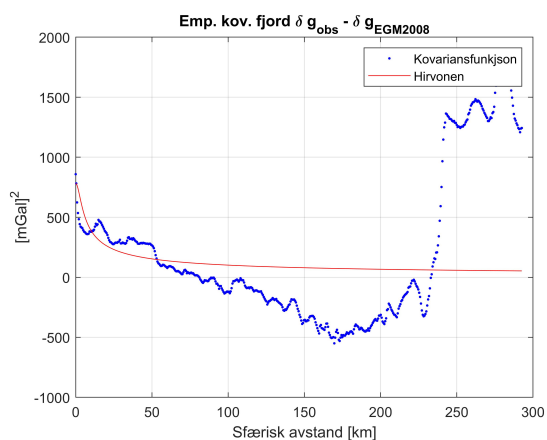
Figur 7.12: Empirisk kovariansfunksjon beregnet fra differanse mellom terrestriske tyngdeforstyrrelser og tyngdeforstyrrelser beregnet fra forskjellige GPM'er i havområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e.

Tabell 7.13 viser standardavviket  $\sqrt{C_0}$ , korrelasjonslengden  $\xi$  og krumningsparameteren  $p$  til den analytiske funksjonen i havområdet. Funksjonen til XGM2019e har minst standardavvik og en relativt lav korrelasjonslengde. Funksjonen til XGM2019 har størst standardavvik og korrelasjonslengde.

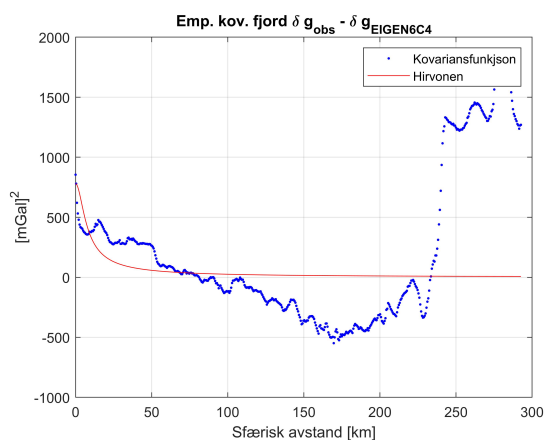
Tabell 7.13: Standardavvik  $\sqrt{C_0}$ , korrelasjonslengden  $\xi$  og krumningsparameteren  $p$  for empirisk kovariansfunksjon i havområdet.

GPM	$\sqrt{C_0}$ (mGal)	$\xi$ (km)	$p$
EGM2008	4.243	5.530	1.3
EIGEN6C4	3.912	4.890	1.3
XGM2019	6.187	8.130	1.0
XGM2019e2159	3.933	4.950	1.6
XGM2019e	3.861	4.890	1.0

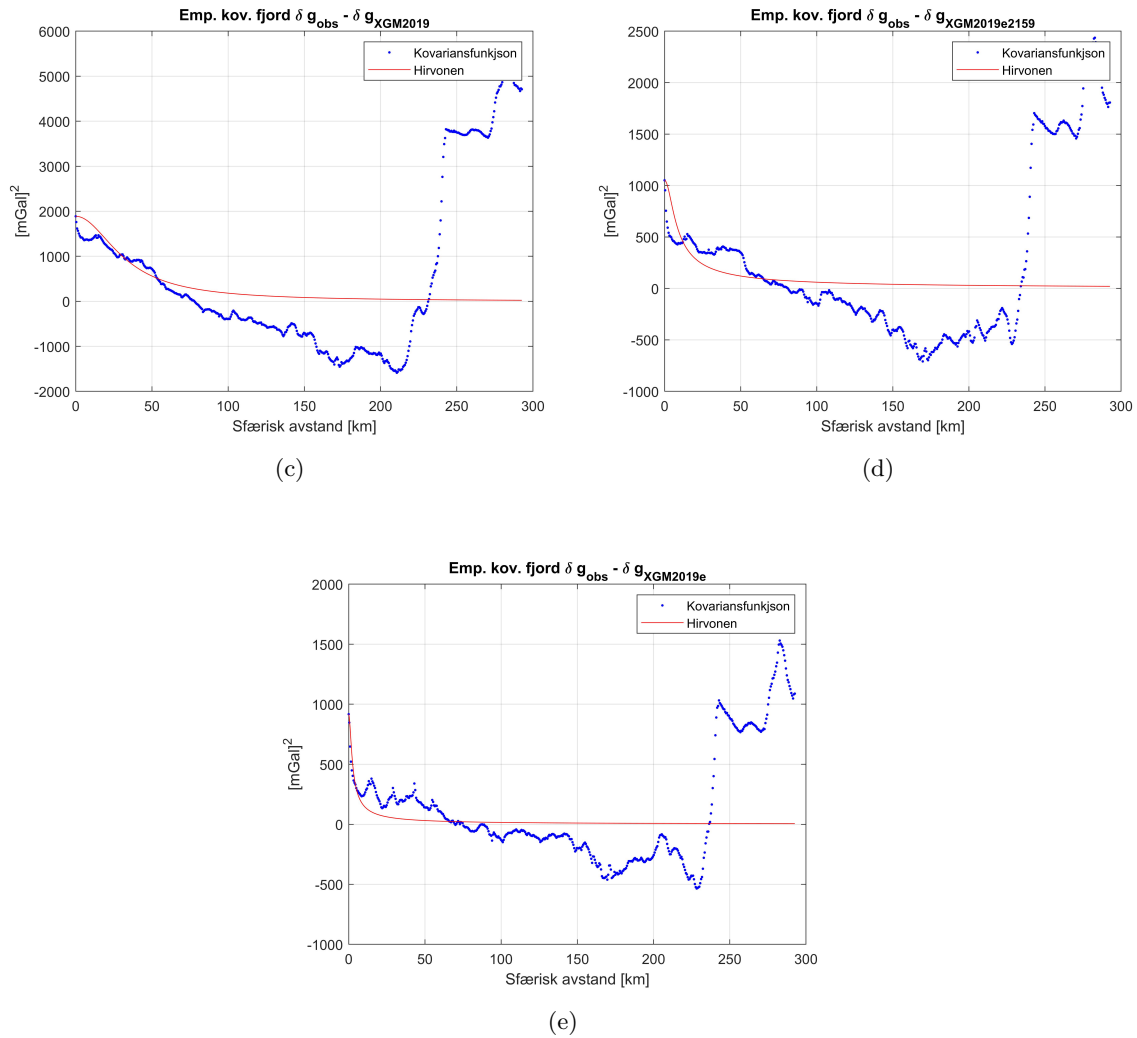
Figur 7.13 viser empirisk kovariansfunksjon i fjordområdet. Funksjonene er visuelt sett like, bortsett fra XGM2019, som har betydelig større korrelasjon mellom punkter for kortere avstander og negativ korrelasjon ved sfærisk avstand 200 km.



(a)



(b)



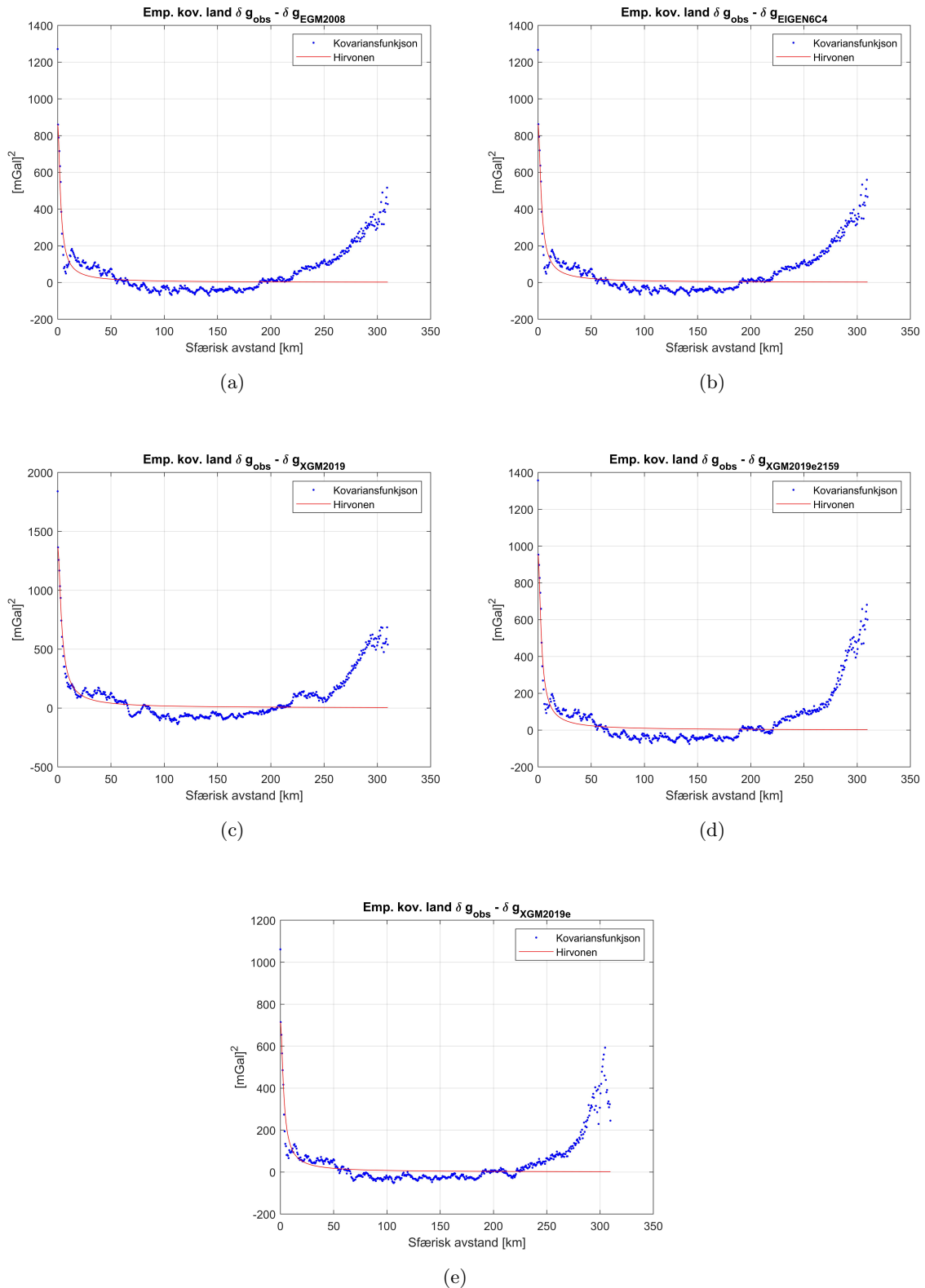
Figur 7.13: Empirisk kovariansfunksjon beregnet fra differanse mellom terrestriske tyngdeforstyrrelser og tyngdeforstyrrelser beregnet fra forskjellige GPM'er i fjordområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e.

Tabell 7.14 viser standardavvik  $\sqrt{C_0}$ , korrelasjonslengden  $\xi$  og krumningsparameteren  $p$  til den analytiske funksjonen i fjordområdet. Funksjonen til EGM2008 og EIGEN6C4 har relativt lik verdi for standardavvik, men EIGEN6C4 har en litt mindre verdi for korrelasjonslengden. Funksjonen til XGM2019 har størst standardavvik og korrelasjonslengde.

Tabell 7.14: Standardavvik  $\sqrt{C_0}$ , korrelasjonslengden  $\xi$  og krumningsparameteren  $p$  for empirisk kovariansfunksjon i fjordene.

GPM	$\sqrt{C_0}$ (mGal)	$\xi$ (km)	$p$
EGM2008	27.964	10.000	0.3
EIGEN6C4	27.927	8.500	0.6
XGM2019	43.451	32.522	1.0
XGM2019e2159	32.416	10.000	0.5
XGM2019e	30.279	2.940	0.5

Figur 7.14 viser empirisk kovariansfunksjon for landområdet. Høy korrelasjon for mindre avstander, som avtar kraftig for økende avstander. Alle funksjonene er visuelt sett like, men XGM2019 skiller seg ut ved at den har betydelig større korrelasjon mellom punkter for mindre avstander og større svingning rundt null.



Figur 7.14: Empirisk kovariansfunksjon beregnet fra differanse mellom terrestriske tyngdeforstyrrelser og tyngdeforstyrrelser beregnet fra forskjellige GPM'er i landområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e.

Tabell 7.15 viser standardavvik  $\sqrt{C_0}$ , korrelasjonslengden  $\xi$  og krumningsparameteren  $p$  til den analytiske funksjonen i landområdet. Funksjonene til EGM2008 og EIGEN6C4 har veldig lik standardavvik, hvor EGM2008 har litt mindre verdi for korrelasjonslengden. Funksjonen til XGM2019

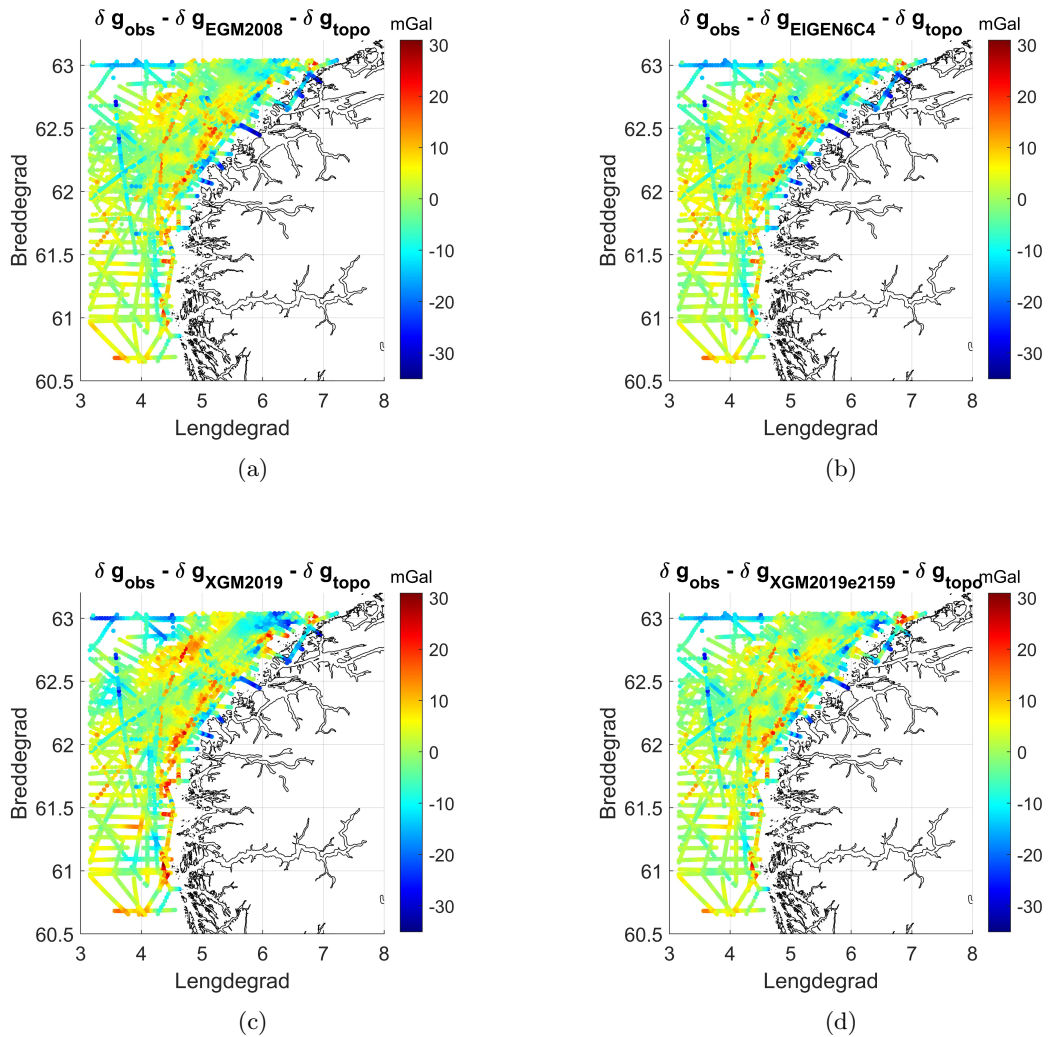
har høyest standardavvik og korrelasjonslengde. XGM2019e har minst standardavvik og har lik korrelasjonslengde som EIGEN6C4 og XGM2019e2159.

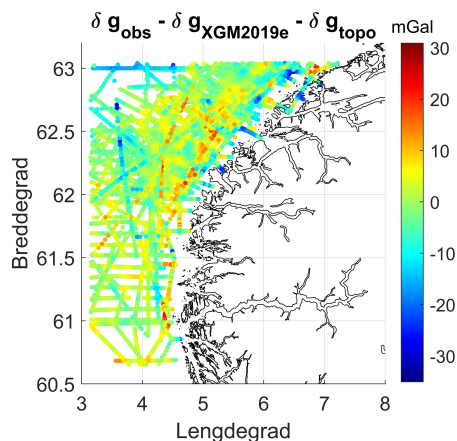
Tabell 7.15: Standardavvik  $\sqrt{C_0}$ , korrelasjonslengden  $\xi$  og krumningsparameteren  $p$  for empirisk kovariansfunksjon i landområdet.

GPM	$\sqrt{C_0}$ (mGal)	$\xi$ (km)	$p$
EGM2008	29.324	3.000	0.6
EIGEN6C4	29.355	3.414	0.6
XGM2019	36.932	4.037	0.6
XGM2019e2159	30.874	3.414	0.6
XGM2019e	26.730	3.414	0.6

## 7.4 Terrestriske tyngdeforstyrrelser redusert for topografiske effekter

Figur 7.15 viser terrestriske tyngdeforstyrrelser som er redusert for topografiske effekter i havområdet. Ved å se på tidligere figur for havområdet (7.9), er det visuelt sett ingen endringer på det resterende signalet.





(e)

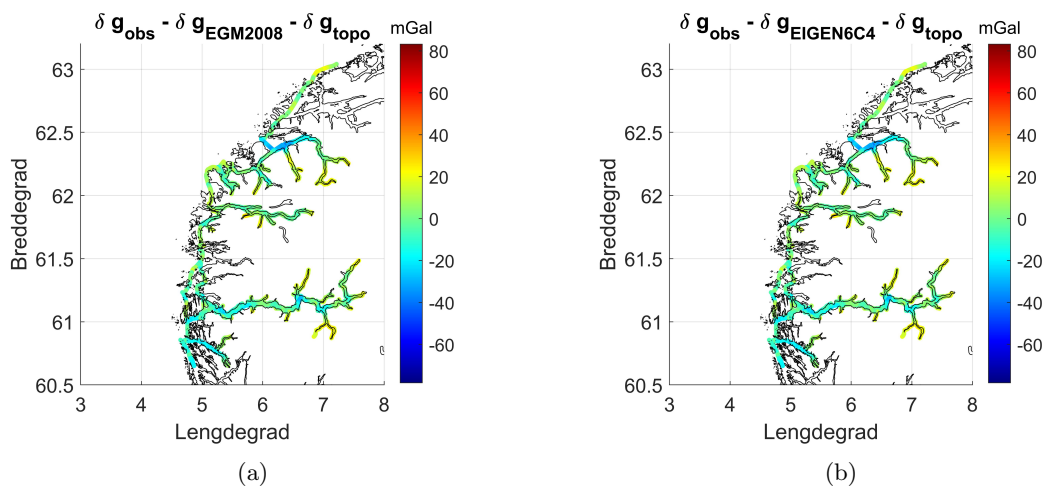
Figur 7.15: Tyngdeforstyrrelser etter reduksjon av GPM og topografiske effekter i havområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e.

Tabell 7.16 viser statistikken til de topografiske reduserte tyngdeforstyrrelsene i havområdet. XGM2019 har minst gjennomsnittsverdi hvor EIGEN6C4 har størst. XGM2019 har størst standardavvik, hvor XGM2019e har minst.

Tabell 7.16: Min-, maks-, gjennomsnittsverdier og standardavvik til de topografiske reduserte tyngdeforstyrrelsene i havområdet. Enhet mGal.

GPM	min	maks	gjennomsnittsverdi	standardavvik
EGM2008	-32.454	23.473	1.362	5.896
EIGEN6C4	-32.709	23.606	2.356	5.902
XGM2019	-28.046	32.086	1.164	6.873
XGM2019e2159	-28.357	28.813	1.576	5.826
XGM2019e	-25.242	28.597	1.704	5.637

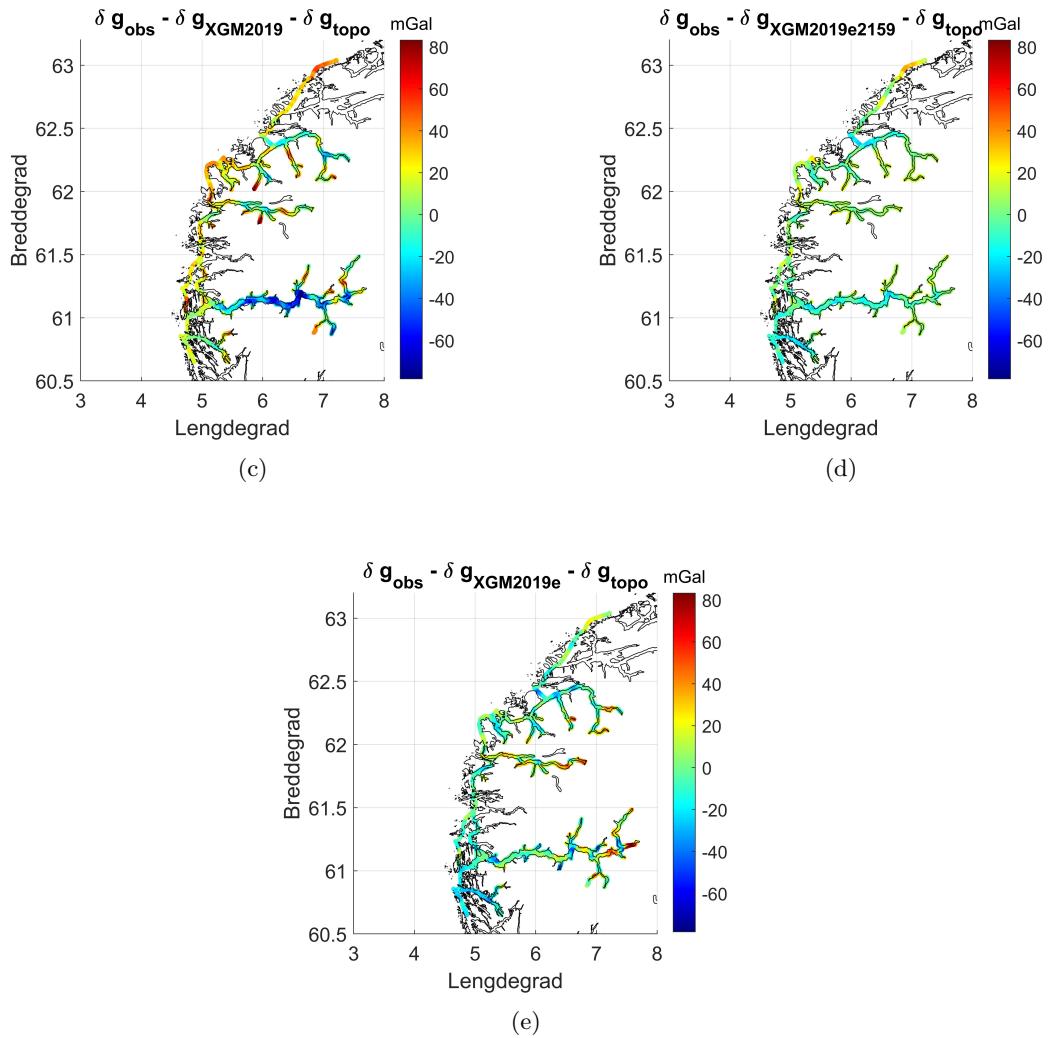
Figur 7.16 viser terrestriske tyngdeforstyrrelser som er redusert for topografiske effekter i fjordområdet. For EGM2008, EIGEN6C4 og XGM2019e2159 kan vi se at signalet til tyngdeforstyrrelsene har blitt redusert betraktelig, hvor en får et mye mer glatt signal. XGM2019e har også blitt redusert, men har noen større positive verdier inne i fjordene, f.eks Sognefjorden og Hjørundfjorden. XGM2019 viser store negative verdier i Sognefjorden og noen små positive verdier lengre inne i de mindre fjordene, samt langs kysten lenger nord i området.



(a)

(b)





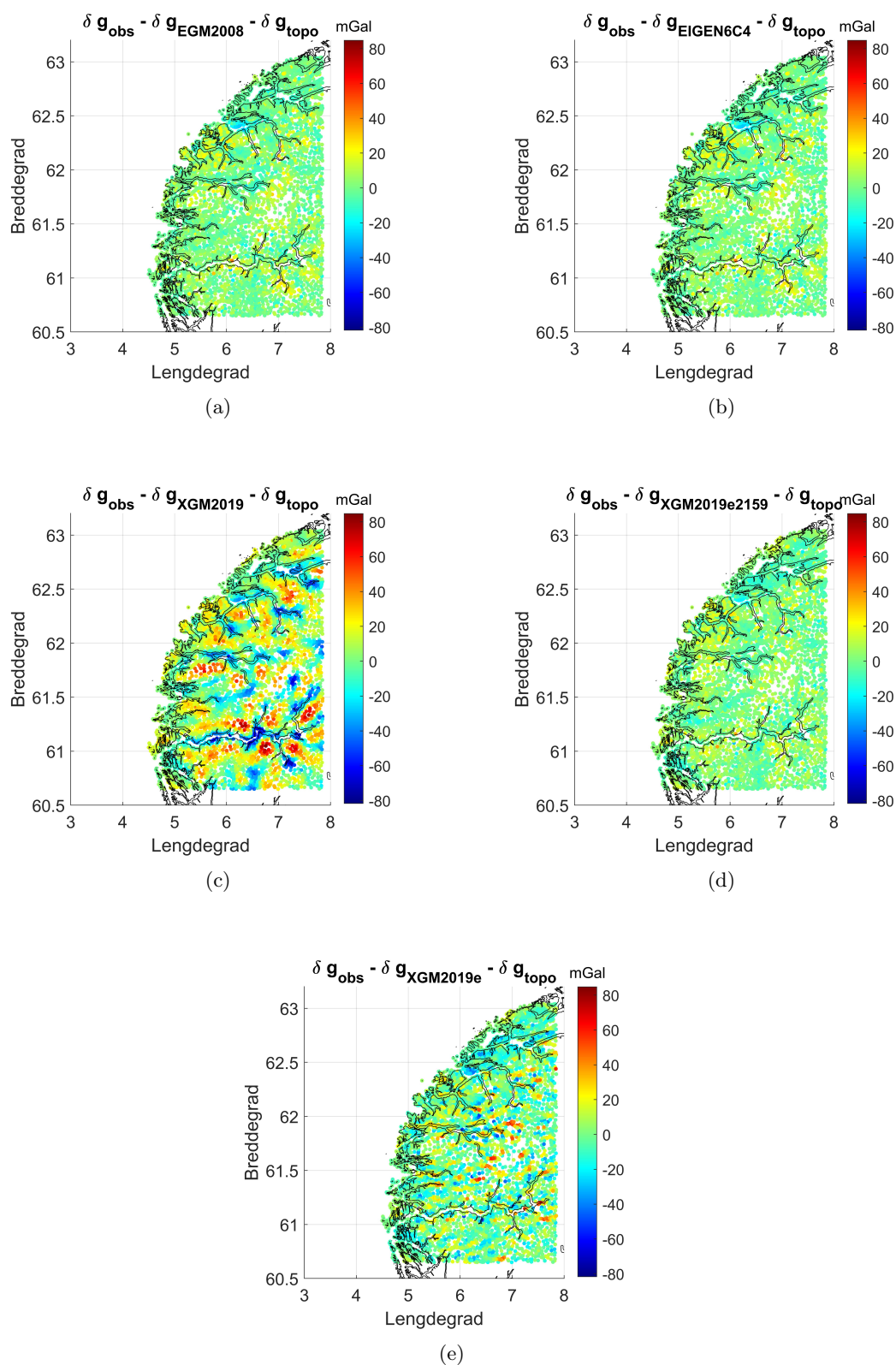
Figur 7.16: Tyngdeforstyrrelser etter reduksjon av GPM og topografiske effekter i fjordområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e.

Tabell 7.17 viser statistikken til de topografiske reduserte tyngdeforstyrrelsene i fjordområdet. XGM2019 har betydelig størst gjennomsnittsverdi, hvor XGM2019e har minst. XGM2019e2159 har minst standardavvik hvor XGM2019 har betydelig størst.

Tabell 7.17: Min-, maks-, gjennomsnittsverdier og standardavvik til de topografiske reduserte tyngdeforstyrrelsene i fjordområdet. Enhet mGal.

GPM	min	maks	gjennomsnittsverdi	standardavvik
EGM2008	-54.146	23.246	-11.833	11.910
EIGEN6C4	-54.453	22.949	-11.897	11.946
XGM2019	-115.672	35.951	-37.329	27.286
XGM2019e2159	-43.659	39.988	-13.588	10.998
XGM2019e	-51.412	80.663	-2.609	19.687

Figur 7.17 viser terrestriske tyngdeforstyrrelser som er redusert for topografiske effekter i landområdet. For EGM2008, EIGEN6C4 og XGM2019e2159 har signalet blitt kraftig redusert og viser et betydelig glattet signal. XGM2019e viser også til et glattet signal men har fortsatt noen større positive verdier lenger inne i fjellområdene. Et fellestrekk for EGM2008, EIGEN6C4, XGM2019e2159 og XGM2019e er at de viser noen mindre negative avvik i Ålesund området. XGM2019 har større negative avvik langs fjordene og større positive avvik i de bratte fjellområdene.



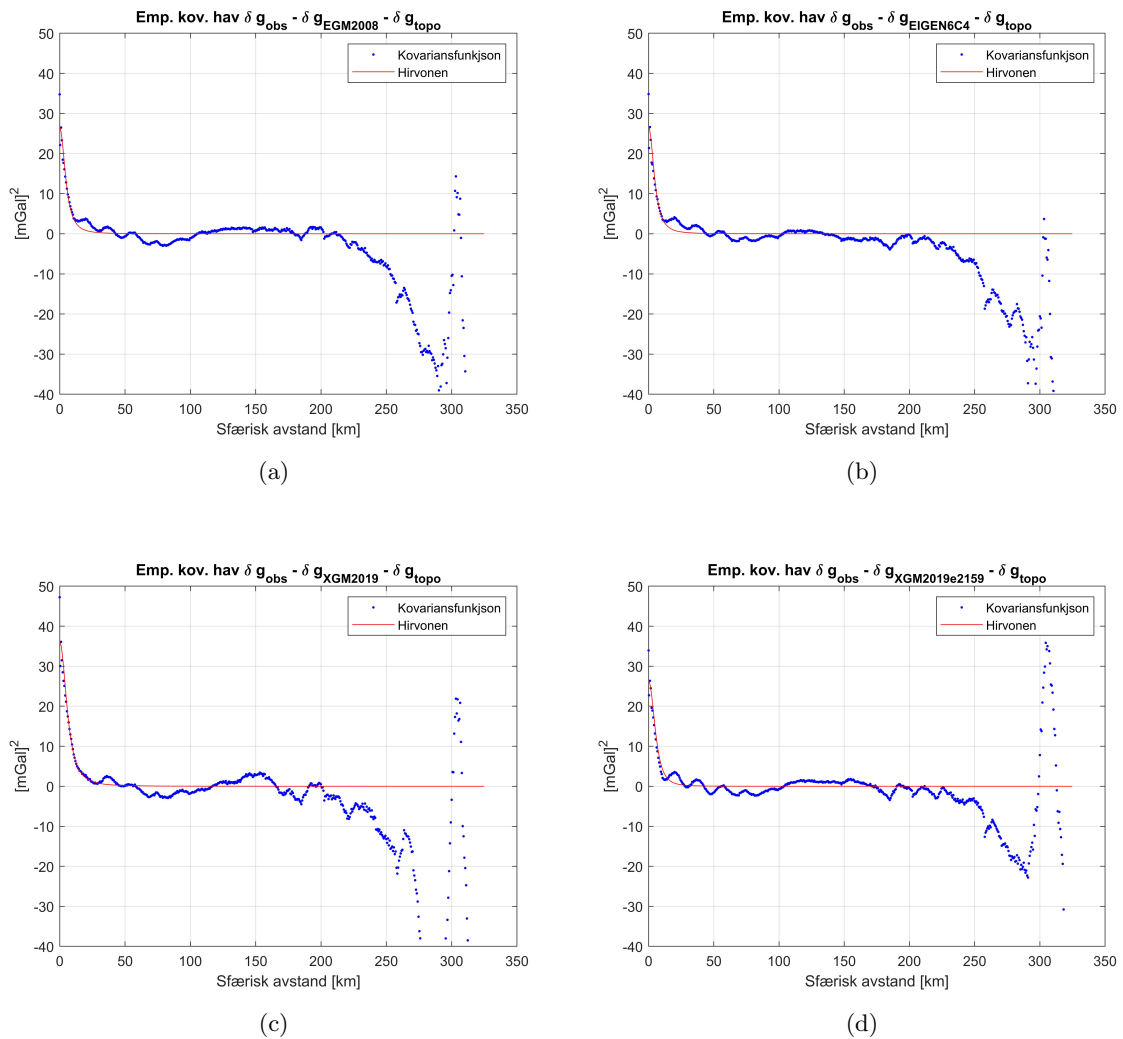
Figur 7.17: Tyngdeforstyrrelser etter reduksjon av GPM og topografiske effekter i landområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e.

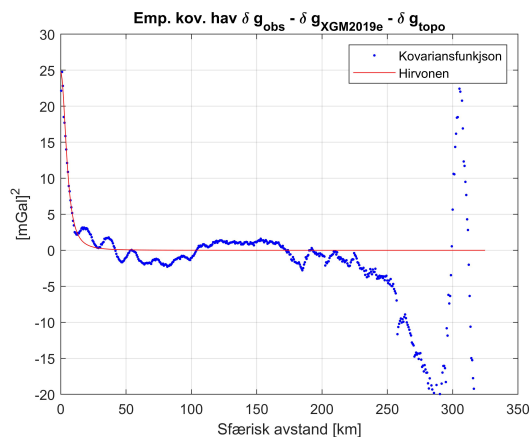
Tabell 7.18 viser statistikken til de topografiske reduserte tyngdeforstyrrelsene i landområdet. XGM2019e viser størst gjennomsnittsverdi hvor EGM2008 har minst. XGM2019 har betydelig størst standardavvik, hvor EGM2008 har minst.

Tabell 7.18: Min-, maks-, gjennomsnittsverdier og standardavvik til de topografiske reduserte tyngdeforstyrrelsene i landområdet. Enhet mGal.

GPM	min	maks	gjennomsnittsverdi	standardavvik
EGM2008	-31.872	42.937	1.179	7.022
EIGEN6C4	-32.350	43.969	1.205	7.038
XGM2019	-83.707	82.764	-2.013	20.552
XGM2019e2159	-27.241	38.121	1.640	7.308
XGM2019e	-54.904	81.053	4.821	14.713

Figur 7.18 viser empiriske kovariansfunksjoner for havområdet, sammen med den analytiske modellen Hirvonen. Funksjonen til alle modellene er veldig like, men XGM2019 skiller seg ut ved at den har litt større korrelasjon for mindre avstander. Funksjonen til XGM2019e2159 og XGM2019e skiller seg litt ut ved at de har noen større svinginger mellom sfærisk avstand 10-100 km.





(e)

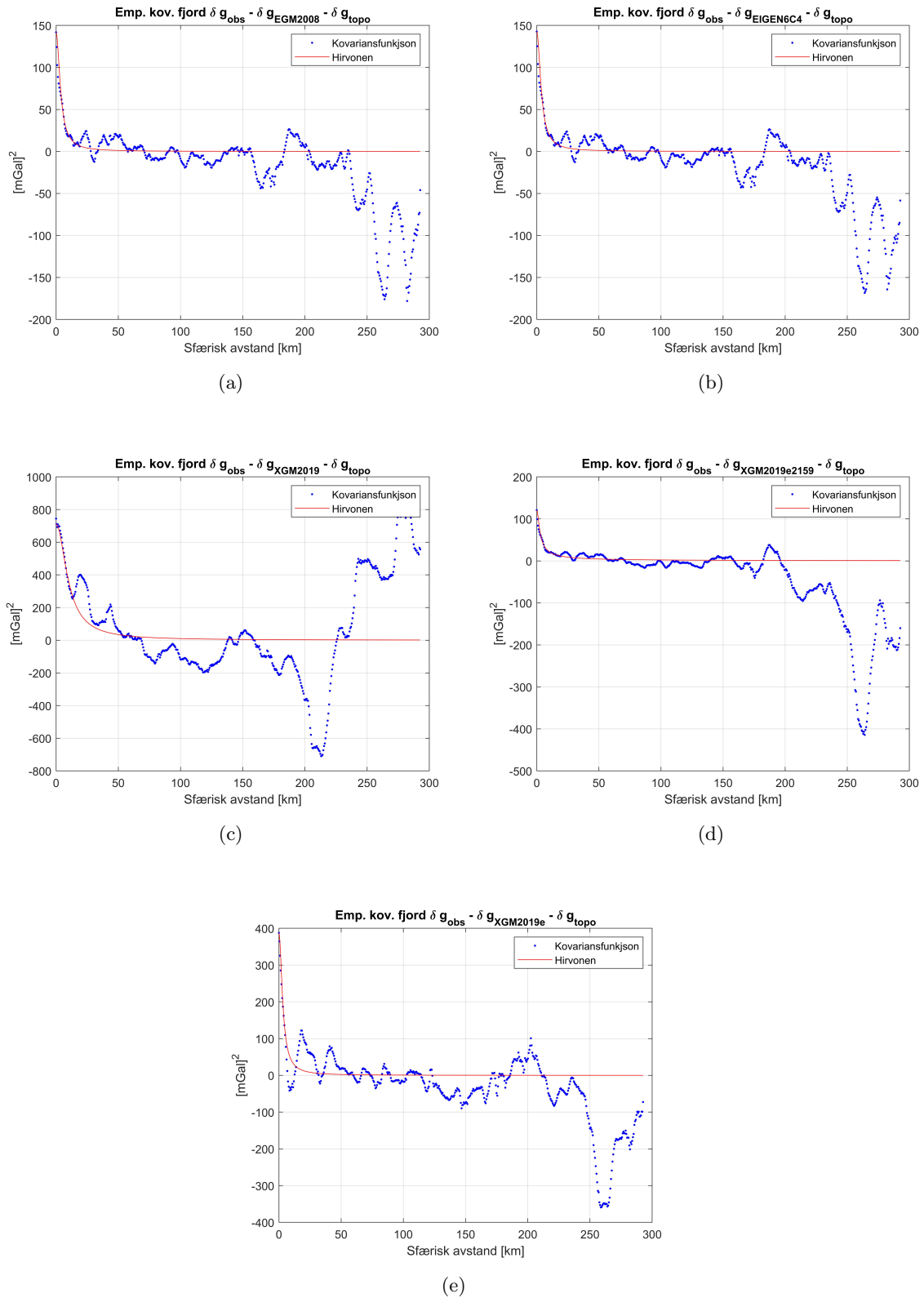
Figur 7.18: Empirisk kovariansfunksjon etter reduksjon av GPM og topografiske effekter i havområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e.

Tabell 7.19 viser standardavvik  $\sqrt{C_0}$ , korrelasjonslengden  $\xi$  og krumningsparameteren  $p$  til den analytiske funksjonen i havområdet. Vi ser at at funksjonen som er tilpasset XGM2019e har minst standardavvik, hvor XGM2019 har størst. XGM2019 har også størst korrelasjonslengde, hvor EGM2008, EIGEN6C4 og XGM2019e har lik verdi.

Tabell 7.19: Standardavvik  $\sqrt{C_0}$ , korrelasjonslengden  $\xi$  og krumningsparameteren  $p$  for empirisk kovariansfunksjon i havområdet.

GPM	$\sqrt{C_0}$ (mGal)	$\xi$ (km)	$p$
EGM2008	5.146	4.890	1.4
EIGEN6C4	5.158	4.890	0.9
XGM2019	6.007	6.183	1.4
XGM2019e2159	5.133	5.530	1.8
XGM2019e	4.975	4.890	1.4

Figur 7.19 viser empiriske kovariansfunksjoner for fjordområdet, sammen med den analytiske modellen Hirvonen. XGM2019 skiller seg ut ved at funksjonen viser stor korrelasjon i punkter for mindre avstander, samt store signifikante svingninger. Funksjonen til EGM2008 og EIGEN6C4 er visuelt sett like, hvor de starter med tydelig korrelasjon mellom punkter ved kortere avstander som avtar gradvis mot null. Deretter svinger de rundt null for de lengre avstandene. XGM2019e2159 skiller seg ut ved at funksjonen er relativt glatt med lav korrelasjon ved kortere avstander, og som etterhvert har mindre svingninger rundt null for lengre avstander. XGM2019e viser tydelig korrelasjon ved avstand null og som avtar betraktelig ved sfærisk avstand 4 km. Deretter har funksjonen større svingninger rundt null for lengre avstander.



Figur 7.19: Empirisk kovariansfunksjon etter reduksjon av GPM og topografiske effekter i fjordområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e.

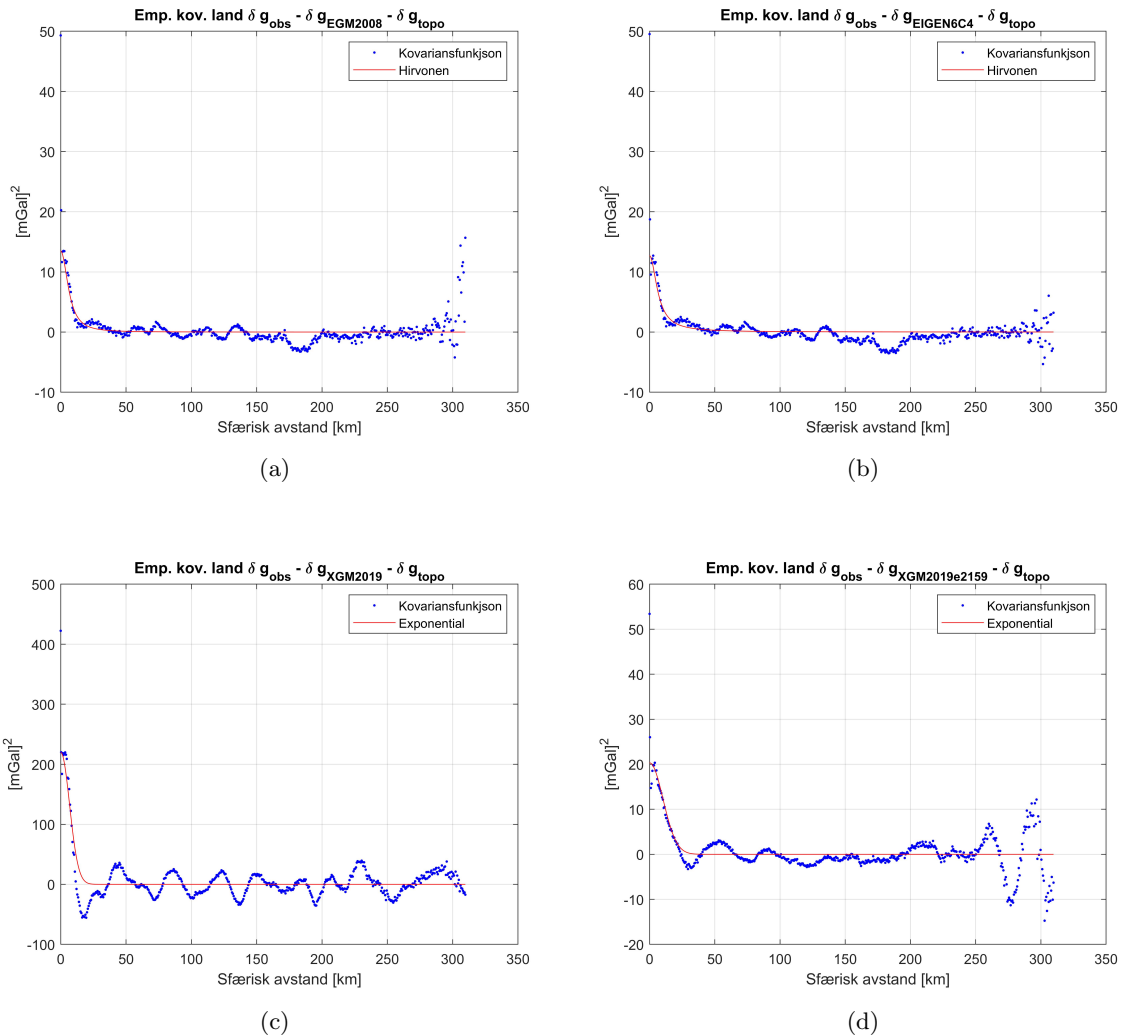
Tabell 7.20 viser standardavvik  $\sqrt{C_0}$ , korrelasjonslengden  $\xi$  og krumningsparameteren  $p$  til den analytiske funksjonen i fjordområdet. Funksjonen til XGM2019e2159 har minst standardavvik og relativt liten korrelasjonslengde. Funksjonen til XGM2019 har betydelig størst standardavvik og

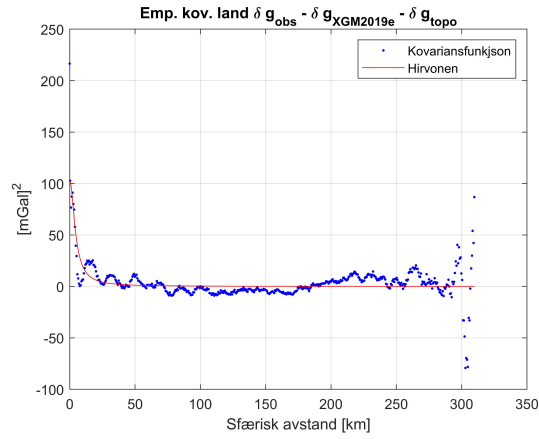
korrelasjonslengde. Siden funksjonalitetene til EGM2008 og EIGEN6C4 er veldig like, viser de også like funksjonsparametre.

Tabell 7.20: Standardavvik  $\sqrt{C_0}$ , korrelasjonslengden  $\xi$  og krumningsparameteren  $p$  for empirisk kovariansfunksjon i fjordområdet.

GPM	$\sqrt{C_0}$ (mGal)	$\xi$ (km)	$p$
EGM2008	11.909	3.808	0.9
EIGEN6C4	11.945	3.808	0.9
XGM2019	26.667	10.255	0.9
XGM2019e2159	10.997	3.223	0.5
XGM2019e	19.686	3.223	0.9

Figur 7.20 viser empiriske kovariansfunksjoner for landområdet. Den analytiske modellen Hirvonen passet best for funksjonene til EGM2008, EIGEN6C4 og XGM2019e. Den analytiske Eksponentialmodellen passet best for funksjonene til XGM2019 og XGM2019e2159. Funksjonen til EGM2008 og EIGEN6C4 er visuelt sett veldig like, ved at de har korrelasjon mellom punkter for mindre avstander som avtar raskt mot null ved lengre avstander. Deretter har funksjonene små svinginger rundt null for lengre avstander. I forhold til EGM2008 og EIGEN6C4, viser XGM2019e2159 litt høyere korrelasjon for kortere avstander, og som avtar mot null for lengre avstander. Funksjonen har også noe større svinginger rundt null for større avstander. Funksjonene til XGM2019 og XGM2019e skiller seg ut ved at de viser størst korrelasjon mellom punkter for mindre avstander og har store svinginger rundt null for de lengre avstandene.





(e)

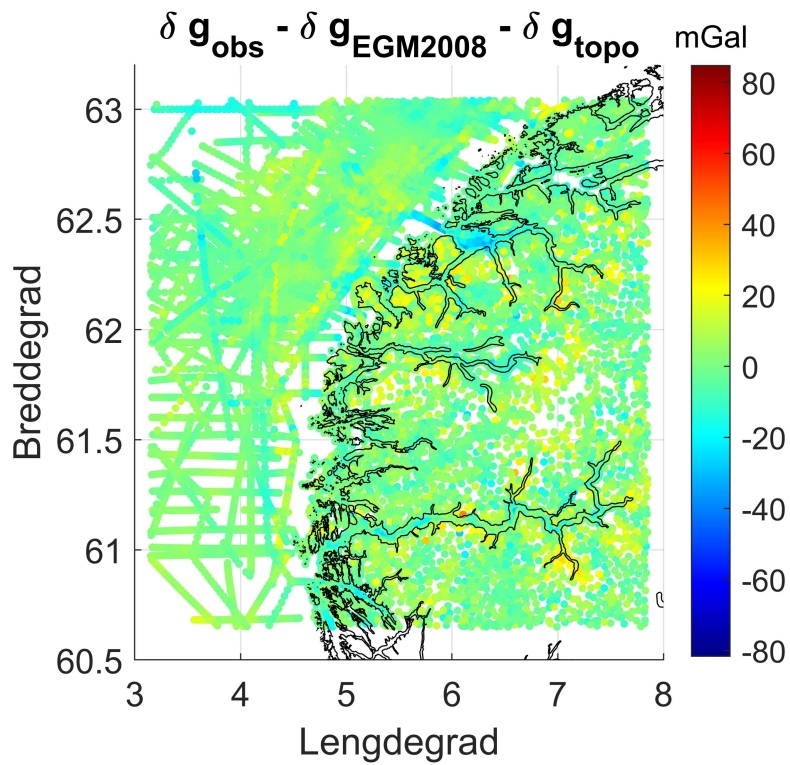
Figur 7.20: Empirisk kovariansfunksjon etter reduksjon av GPM og topografiske effekter i landområdet. (a) EGM2008, (b) EIGEN6C4, (c) XGM2019, (d) XGM2019e2159, (e) XGM2019e.

Tabell 7.21 viser standardavvik  $\sqrt{C_0}$ , korrelasjonslengden  $\xi$  og krumningsparameteren  $p$  til den analytiske funksjonen i landområdet. Funksjonen til EIGEN6C4 har minst standardavvik hvor XGM2019 har størst. XGM2019e har minst korrelasjonslengde hvor XGM2019e2159 har størst.

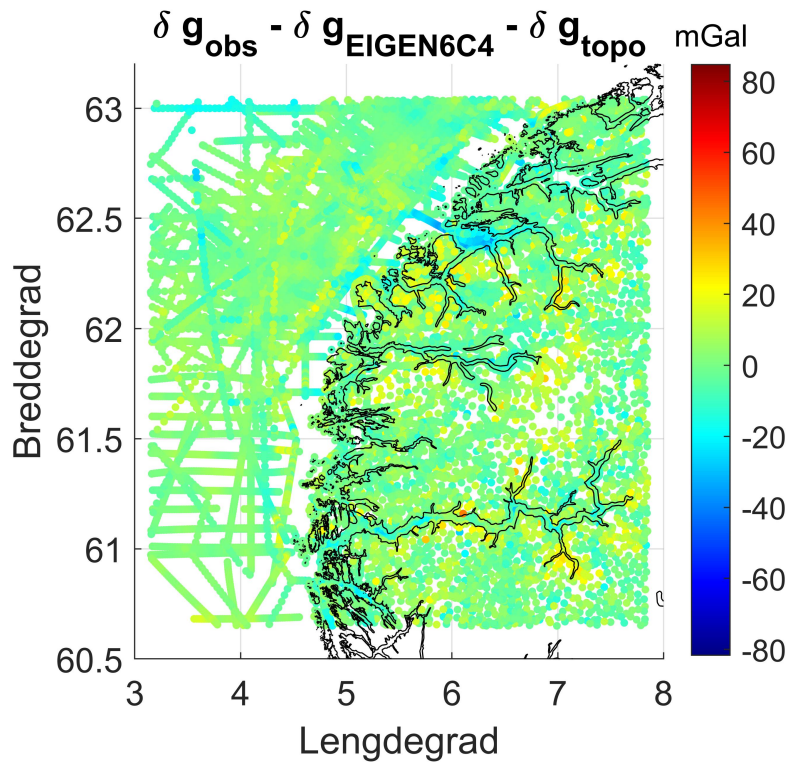
Tabell 7.21: Standardavvik  $\sqrt{C_0}$ , korrelasjonslengden  $\xi$  og krumningsparameteren  $p$  for empirisk kovariansfunksjon i landområdet.

GPM	$\sqrt{C_0}$ (mGal)	$\xi$ (km)	$p$
EGM2008	3.673	6.500	1.2
EIGEN6C4	3.564	6.800	0.9
XGM2019	14.836	7.950	
XGM2019e2159	4.509	12.093	
XGM2019e	10.134	4.653	0.9

Residuale anomalier (reduisert for GPM og topografiske effekter) for alle tre områdene er vist i figur 7.21-7.25.

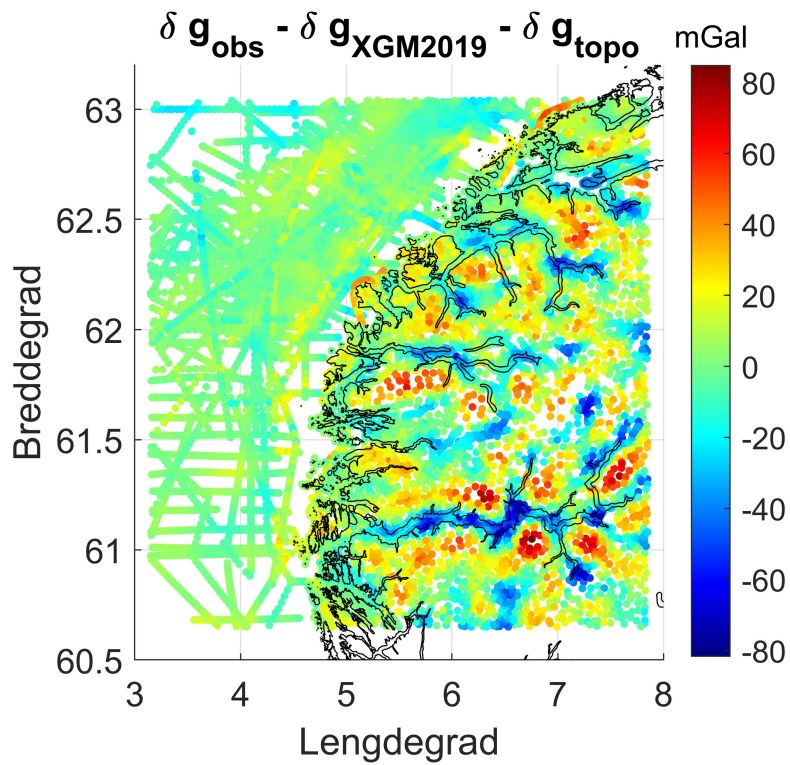


Figur 7.21: Residuale anomalier for hele beregningsområdet med EGM2008 som GPM.

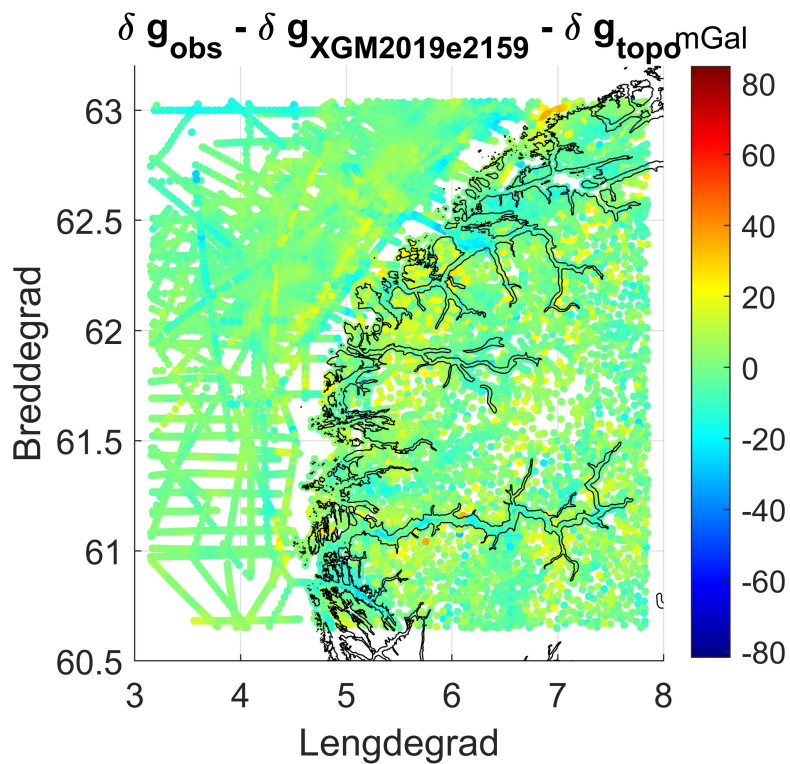


Figur 7.22: Residuale anomalier for hele beregningsområdet med EIGEN6C4 som GPM.

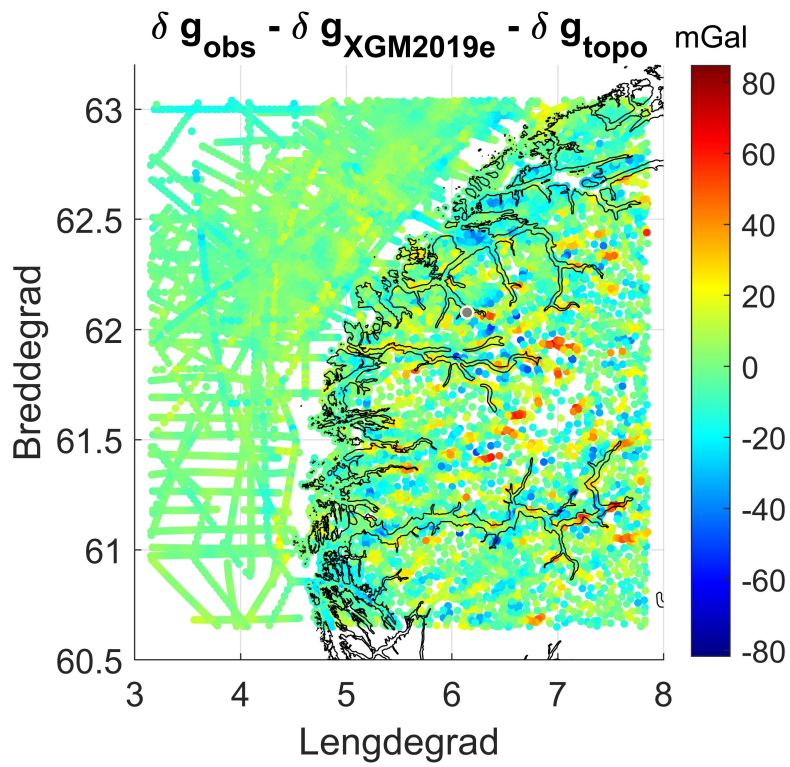




Figur 7.23: Residuale anomalier for hele beregningsområdet med XGM2019 som GPM.



Figur 7.24: Residuale anomalier for hele beregningsområdet med XGM2019e2159 som GPM.



Figur 7.25: Residuale anomalier for hele beregningsområdet med XGM2019e som GPM.

## 8 Diskusjon

### 8.1 Validering av Globale Potensialmodeller og Regionale Geoidmodeller

Ikke alle GPM'ene passer like godt til GNSS/nivellement. Fra tabell 7.1 kan en se at alle modellene ser ut til å ha samme konstantavvik som beskrevet av Denker [2013]. Avviket forekommer av forskjellig valg av datum. GNSS/nivellementet relateres til EVRF2007 med fundamentalpunkt NAP. For GPM finnes det egentlig ikke et eksplisitt valg datum som i tilfelle EVRF, men er valgt implisitt for å løse randverdi problemet. EIGEN6C4, med en oppløsning på 10 km, har minst standardavvik til differansene, men EGM2008 med lik oppløsning har litt høyere verdi for standardavvik. Siden EIGEN6C4 og EGM2008 består av omtrent samme data, viser dette at EIGEN6C4 sin implementasjon av GOCE-data har økt modellens nøyaktighet for modellering av tyngdefeltet. XGM2019, med en oppløsning på 30 km, har ikke fanget opp de mindre topografiske effektene, og viser derfor større standardavvik til differansene. XGM2019e2159 som har samme oppløsning som EGM2008 og EIGEN6C4, og XGM2019e med betydelig større oppløsning på 4 km, viser større standardavvik mellom differansene. XGM-modellene benytter kun et syntetisk tyngdedatasett basert på DTM, for å modellere topografisk tyngdeeffekt mellom grad 761-5540 (761-2190 for XGM2019e2159). Det syntetiske tyngdedatasettet klarer ikke å matche de terrestriske tyngdeobservasjonene til EGM2008 og EIGEN6C4 innenfor dette spektrale området. I datasituasjonen i verden som helhet, er det store områder med mangel på tyngdeobservasjoner. Det syntetiske datasette blir brukt til å dekke over områdene med manglende data, for å få god global dekning. Norge har et tett og godt datasett med tyngdeanomalier, og ved å basere en GPM på disse, viser seg å gi et tilfredsstillende resultat. Dette blir synlig i tabell 7.3, hvor de empiriske feilkovariansfunksjonene til XGM2019e2159 og XGM2019e har større standardavvik enn EGM2008 og EIGEN6C4.

Resultatene viser at ikke alle RGM'ene passer like godt til GNSS/nivellementet. Dette kommer frem i tabell 7.4 der NMA2014 viser samme tendens som GPM'er, med et konstantavvik på 23.62 cm. NMA2014DIR viser et stort konstantavvik på -67.68 cm. Hva dette store avviket kommer fra krever videre undersøkelse av modellen. EGG2015 og NKG2015 er de RGM'ene som passer best med GNSS/nivellementet og viser minst konstantavvik. De har også mindre standardavvik til differansene, hvor NKG2015 har minst. NKG2015 viser bedre resultat enn NMA2014, som kan komme av at NKG2015 er en nyere modell, basert på et fullstendig overhalt terrestrisk tyngdedatasett og oppdatert terrengmodell.

Feilkovariansfunksjonene til NMA2014, NMA2014DIR og NKG2015 ser ut til å inneholde egenskaper som gjør at funksjonene ikke er stokastiske. Funksjonene har den samme trenden mellom avstand 100 og 250 km. Fra figur 7.3, som gir oversikt over den geografiske fordelingen av de empiriske feilene, viser en systematisk fordeling av de positive og negative feilene. Sør i interesseområdet observeres hovedsakelig feil med positive verdier, mens nord i området observeres feil med negative verdier. Denne systematiske fordelingen av feil forårsaker den ikke-stokastiske egenskapen til feilkovariansfunksjonen. Inhomogene og ikke-isotropiske egenskaper kan forekomme av f.eks., feil i tyngdeobservasjoner, punktkoordinater og nivellement. Ved å vektlegge de terrestriske målingene mer enn satellittmålinger, kan også ikke-stokastiske egenskaper komme tydeligere frem.

Etter inndelingen av nord/sør området, er de empiriske feilkovariansfunksjonene ikke helt stokastiske, spesielt i det sørlige området. Dette er spesielt tydelig for NMA2014 og NMA2014DIR. De viser

---

de samme tendensene, men den ikke-stokastiske egenskapen er litt mer redusert i NMA2014DIR. Dette kan forklares ved at vektene mellom satellitt og terrestriske data har blitt oppdatert, se Gerlach and Ophaug [2017]. Det er verdt å merke seg at NMA2014 og NMA2014DIR relateres til referanseellipsoiden WGS84 i et *tide-free* system. Dette kan medføre at selv etter nord/sør inndelingen, vil deterministiske egenskaper fortsatt være synlig i de empiriske feilkovariansfunksjonene. For NKG2015 er disse ikke-stokastiske egenskapene redusert betraktelig etter inndelingen, se figur 7.5. Empiriske feilkovariansfunksjonen til NKG2015 viser motsatt tendens av NMA2014 og NMA2014DIR ved inndeling i nord og sørlig område, se 7.6. Den ikke-stokastiske oppførselen er mindre synlig for GPM'ene, siden feilen til modellene generelt sett er større. Dette kommer av utelatelsesfeilen som GPM'ene inneholder.

EGG2015 er en europeisk modell som er tilpasset Europa, ved at vektene mellom satellitt- og terrestriske data er optimal for hele Europa. Vektene er derimot ikke nødvendigvis optimal for Norge. I Gerlach and Ophaug [2017] ble det undersøkt hvor godt vektingen mellom satellitt og terrestriske data passet med det norske terrestriske datasettet. EGG2015 antar en presisjon ( $\sigma^{\Delta g}$ ) på 0.2 mGal for de terrestriske dataene. Det viser seg at antagelsen er for optimistisk, og en bedre verdi for feil i Norge ligger på 2.0 mGal. Dette betyr ikke nødvendigvis at EGG2015 passer dårlig til bruk i Norge, men at tilpasningen kan forbedres ved å vekte de terrestriske dataene i større eller mindre grad.

## 8.2 Reduserte terrestriske tyngdeforstyrrelser

Beregnete tyngdeforstyrrelser fra XGM2019 viser minst standardavvik i alle områder, se figur 7.6, 7.7 og 7.8. Dette kan forklares ved at det er en glattere modell, siden den ikke inneholder kortere bølgelengder ( $N_{maks} = 760$ ), og har derfor mindre signalvariasjoner. Denne effekten er spesielt tydelig i fjord og landområder, hvor det er mye mer topografiske effekter. I havområdet er dette ikke så synlig, siden signalet er relativt glatt på havet (lite topografiske variasjoner). Modellene XGM2019e2159, EGM2008 og EIGEN6C4 har relativt likt standardavvik i alle områder, hvor XGM2019e viser størst standardavvik, spesielt i fjord og landområder. Dette kan forklares ved at XGM2019e2159, EGM2008 og EIGEN6C4 som har lik oppløsning ( $N_{maks} = 2190$ ), fanger opp like signalvariasjoner. XGM2019e med sin høye oppløsning inneholder flere signalvariasjoner, og blir dermed ikke så glatt (større standardavvik).

I figur 7.9, som viser terrestriske tyngdeforstyrrelser redusert for GPM, kan det observeres noe som ligner forskjellige striper. Stripene kan forklares som bias mellom forskjellige skipsgravimetriske målekampanjer. Denne systematiske andelen er synlig i kovariansfunksjonene på havområdet, hvor funksjonens varians ( $C_0$ ) er tilsynelatende høyere enn selve kovariansfunksjonen. For at den analytiske modellen skulle tilpasses kovariansfunksjonen måtte en ny verdi for  $C_0$  settes. En ønsket løsning hadde vært å finne størrelsen på biasene til hver målekampanje, redusert målekampanjene med disse og deretter foretatt beregningene. Ukorrelerte komponenter blir dermed fjernet.

Kovariansfunksjonen i fjordområder, etter reduksjon av GPM, viser at den analytiske modellen ikke er spesielt godt tilpasset funksjonen. Signalet inneholder ikke-stokastiske egenskaper, som skaper dette problemet. Den geografiske fordelingen av fjordpunktene, vist i figur 7.13, viser at anomaliene ligger på linje med en inhomogen fordeling av punktene. Dette bryter med forutsetningen for å evaluere et stokastisk signal, som krever at signalet skal være homogent og isotropisk. Kovariansfunksjonene mellom avstand 10-170 km er nesten lineær. Siden signalet inneholder denne deterministiske egenskapen får en ikke tilpasset noen analytisk modell, og en god analyse av funksjonen er ikke mulig. For videre arbeid hadde det vært interessant med en prediksjon av reduserte tyngdeforstyrrelser i utvalgte områder, spesielt i fjordområdet, for å få bukt på denne ikke-isotropiske fordelingen av punkter.

Topografiske reduksjonene på havet, har nesten ikke gitt noe utslag. Ute på havet er det lite topografiske variasjoner, og viser derfor at signalet er nesten uforandret. XGM2019e inneholder den nyere *satellite-only*-modellen GOCO06S, og sammen med det syntetiske datasettet gir det en bedre modellering av havets topografi enn EGM2008 og EIGEN6C4. Dette vises i statistikken (tabell 7.16) og dens kovariansfunksjon (figur 7.18), hvor dens residual signal har minst standardavvik

---

(glattere signal). Dette gjelder også for XGM2019e2159, som viser bedre redusert signal enn de andre modellene med tilsvarende oppløsning.

RTM-beregningen i TGF-programvaren, ved å benytte DTM med batymetri, viser seg å gi et tilfredsstillende resultat. I fjordområdet kan en tydelig se at signalet er betraktelig redusert, se figur 7.16. Kovariansfunksjonene får mindre standardavvik og det blir lettere å tilpasse en analytisk modell, der deterministiske egenskaper er redusert, se tabell 7.20. Kovariansfunksjonen til EGM2008, EIGEN6C4 og XGM2019e2159 viser glattest signal, hvor den sistnevnte har minst standardavvik. XGM-modellen er en nyere GPM, med oppdaterte datakilder for modellering av tyngdefeltet, og viser derfor bedre resultat i fjordområdet enn de andre modellene med tilsvarende oppløsning.

I de topografiske reduserte tyngdeforstyrrelsene i fjord- og landområdet, gir XGM2019e noen større positive residualanomalier inne i fjordene og på fjelltopper, se figur 7.16 og 7.17. DTM2006 er benyttet som DetailedREF (referanseflaten) og de topografiske effektene beregnet fra RTM-modellen er relatert til DTM2006. Siden DTM2006 har en oppløsning på  $N_{maks} = 2159$ , tar RTM-modellen hensyn til alle topografiske masser innenfor dette spekteret. XGM2019e har en oppløsning på  $N_{maks} = 5540$ , og tar derfor med effekter til grad 5540. Dette fører til at effektene mellom grad 2160 og 5540 blir redusert to ganger. Bruken av XGM2019e og DTM2006 som referansetopografi i beregningen av topografiske effekter blir derfor inkonsistent. Det kommer også tydeligere frem i statistikken til de topografiske reduserte tyngdeforstyrrelsene i fjord og landområdene. Standardavviket til de residuale anomaliene stiger. Denne effekten kan også observeres for de andre modellene (EGM2008, EIGEN6C4 og XGM2019e2159), men i mye mindre grad siden modellene er mer konsistent med DTM2006. Figur 7.21, 7.22 og 7.24 viser reduserte anomalier for hele beregningsområdet, og små positive anomalier kan observeres inne i fjordene. For XGM2019e burde det blitt benyttet en annen referansetopografi, som tar hensyn til effekter helt til grad 5540. Dette lot seg ikke gjøre pga. manglende datasett for referansetopografi av en så høy oppløsning.

Residualsignalet i landområdet er kraftig redusert, se figur 7.11 og 7.17. Igjen ser en effekten av at XGM-modellene har benyttet seg av et syntetisk datasett for å modellere topografien. Kovariansfunksjonen til XGM2019e2159 viser større standardavvik enn EGM2008 og EIGEN6C4, som har tilsvarende oppløsning. De to sistnevnte benytter seg av terrestriske tyngdeobservasjoner i hele spekteret, dvs. til  $N_{maks} = 2190$ . XGM-modellene benytter seg av terrestriske tyngdedata bare til  $N = 761$ . Mellom  $N = 761 - 5540$  er kun det syntetiske datasettet brukt. Innenfor dette spekteret kan XGM-modellene bare redusere ut topografiske effekter, men ikke tetthetsanomalier. Dette resulterer i en større signalvarians og korrelasjonslengde. EIGEN6C4 viser et litt mer glattet signal enn EGM2008, som igjen viser forbedringen ved å implementere GOCE-data i tyngdefeltmodelleringen.

I beregningen av de topografiske massene, kunne en muligens forandre integrasjonsgrensene noe. Valget av integrasjonsgrense kan en se i tabell 6.4. Strengt tatt skal RTM-massene i avstand som tilsvarer 2-3 ganger oppløsningen til referansetopografien tas hensyn til. Integrasjonsgrensene til tesseroider ble satt til  $0.02^\circ - 0.1^\circ$  og burde derfor blitt satt til  $0.02^\circ - 0.3^\circ$ , fordi DTM2006 har en oppløsning på 10 km. I TGF-programvaren ble topografiske effekter beregnet med en sfærisk approksimasjon, hvor en ellipsoidisk approksimasjon hadde vært ønskelig. I en ellipsoidisk approksimasjon tar beregningene hensyn til ellipsoidens krumning, og ved en sfærisk approksimasjon tar beregningene hensyn til kulens krumning. Dette er en egenskap TGF-programvaren tilbyr beregninger for større områder. Differansen mellom sfærisk og ellipsoidisk approksimasjon viste et standardavvik på 0.04 mGal og et maksimalt utslag på 0.23 mGal, feilen er derfor ikke stor. Det hadde vært ønskelig å oppdatere integrasjonsgrensene og foretatt en ellipsoidisk approksimasjon. Dette ble ikke gjort siden beregningen av topografiske effekter for 26848 punkt er svært tidkrevende.

Beregningene av de ellipsoidiske høydene i beregningsområdet kunne ha blitt gjort ved å tilføre kvasi-geoiden NKG2015. Modellen viste best resultat ved sammenligning med GNSS/nivellement, og en mulig forbedring av beregningen til tyngdeforstyrrelser er derfor mulig.

## 9 Konklusjon

For å beregne en god regional geoide på Nordvestlandet, må tyngdefeltets signalegenskaper undersøkes i detalj. Det målte tyngdesignalet må reduseres for flere kjente signalkomponenter for å oppnå et glatt signal, som er lettere håndterlig i videre beregning av geoiden. Sfærisk-harmonisk syntese er benyttet på utvalgte GPM'er, og validert ved sammenligning med GNSS/nivellement. Utvalgte RGM'er ble også validert ved sammenligning med GNSS/nivellement. For å undersøke tyngdefeltets signalegenskaper på Nordvestlandet ble tyngdeanomalier beregnet, både terrestriske og basert på GPM. Terrestriske tyngdedata ble redusert for GPM og topografiske effekter, for å deretter kunne undersøke signalegenskapene til residualsignalet.

Når en skal beregne gravimetrisk høydeanomali til sammenligning med GNSS/nivellement (geometrisk høydeanomali), er det liten forskjell om en benytter topografiske høyder (tilnærmet ortometriske høyder) i stedet for ellipsoidiske. Ved nærmere undersøkelser i oppgaven, ble det funnet at forskjellen gav maksimalt utslag på 6.5 mm i fjellområder. Som oftest har man ikke ellipsoidiske høyder tilgjengelig for alle punkter en ønsker å beregne høydeanomali for. Dersom man ønsker en bedre tilnærming til ellipsoidiske høyder, kan man beregne høydeanomali  $\zeta$  ved bruk av  $H$ , og deretter beregne høydeanomali igjen ved bruk av  $h = H + \zeta$ .

Sammenligningen av gravimetriske høydeanomalier fra GPM og GNSS/nivellement, viser at de nyere modellene passer bedre til GNSS/nivellementet. De har et mindre konstantavvik enn de eldre modellene. Ved å legge til korreksjonen beskrevet av Denker [2013], se ligning (7.1), viser XGM2019e et konstantavvik på -0.8 cm, hvor EGM2008 har 4.7 cm. De nyere modellene baserer seg på oppdaterte satellittsystemer som er mer kompatibelt med GNSS/nivellementet. Presisjonen til GPM'ene som inneholder terrestriske tyngdemålinger i hele spekteret (EGM2008 og EIGEN6C4) er vesentlig bedre enn XGM-modellene, som inneholder terrestriske tyngdemålinger til  $N = 761$  og syntetisk tyngde mellom  $N = 761 - 5540$ . EIGEN6C4 gav det mest tilfredsstillende resultatet med minst standardavvik til differansene på 4.77 cm. Valideringen av RGM'ene sammenlignet med GNSS/nivellement, viste at NKG2015 er best tilpasset GNSS/nivellementet. Modellen har et konstantavvik på -1.18 cm og en presisjon på 3.48 cm. Ved å se bort i fra NMA2014DIR, er NMA2014 den modellen som passer dårligst, med et konstantavvik på 23.62 cm og en presisjon på 4.78 cm. NMA2014DIR viser til bedre presisjon på 4.49 cm, fordi vektingen mellom satellitt og terrestriske data til modellen er optimalisert.

Reduksjonen av topografiske effekter, beregnet med TGF-programvaren, viser til tilfredsstillende residualanomalier, spesielt i landområdet med EIGEN6C4 som GPM. Etter reduksjon av topografiske effekter, viser kovariansfunksjonen til det reduserte signalet en mer stokastisk oppførsel. Deterministiske effekter er redusert for, og de analytiske modellene er bedre tilpasset funksjonen.

I videre arbeid hadde det vært interessant å teste flere forskjellige metoder for å beregne de topografiske effektene. Ved å utøve tester som kan sammenlignes med resultatene fra TGF-programvaren, kan en vurdering om det er nødvendig å implementere flere forskjellige geometrier for disse beregningene foretas. Det hadde også vært interessant å undersøke forbedringen ved å ta hensyn til batymetri, i stedet for å sette høydene til sjøs lik null, noe som ofte gjøres i RTM-beregninger.

For videre arbeid hadde det også vært interessant å utøvd en prediksjon av reduserte tyngdeanomalier i spesifikke områder, f.eks fjorder. I oppgaven er det vist at fordelingen av punkter i fjorder ikke er helt optimal, siden observasjonene ligger på linje. Dette fører til signalvariasjoner i kun en retning, og bryter med forutsetningen om et stokastisk signal, som krever en homogen og isotropisk

---

fordeling av punkter. EIGEN6C4 viste det mest tilfredsstillende reduksjonsresultatet med mindre signalvariasjoner, dvs. glattet signal. Dermed hadde det vært interessant å gå videre med de i videre undersøkelser og beregninger av geoiden.

# Bibliografi

- J Ågren, G Strykowski, M Bilker-Koivula, O Omang, S Mårdla, T Oja, I Liepinš, E Paršeliūnas, R Forsberg, J Kaminskis, et al. On the development of the new nordic gravimetric geoid model nkg2015. In *IAG Symposium on Gravity, Geoid and Height Systems, Thessaloniki, Greece*, pages 19–23, 2016.
- Christian Gerlach og Vegard Ophaug. Least-squares prediction and collocation. Technical report, NMBU, 2021.
- Heiner Denker. Regional gravity field modeling: theory and practical results. In *Sciences of geodesy-II*, pages 185–291. Springer, 2013.
- Heiner Denker. A new european gravimetric (quasi) geoid egg2015. *26th IUGG General Assembly, June*, 2015.
- Heiner Denker, Ludger Timmen, Christian Voigt, Stefan Weyers, Ekkehard Peik, Helen S Margolis, Pacôme Delva, Peter Wolf, and Gérard Petit. Geodetic methods to determine the relativistic redshift at the level of  $e-18$  in the context of international timescales: a review and practical results. *Journal of Geodesy*, 92(5):487–516, 2018.
- Ch Förste, Sean L Bruinsma, Oleg Abrikosov, Jean-Michel Lemoine, T Schaller, HJ Gtze, J Ebbing, JC Marty, F Flechtner, G Balmino, et al. Eigen-6c4 the latest combined global gravity field model including goce data up to degree and order 2190 of gfz potsdam and grgs toulouse. *GFZ Data Services. doi*, 10, 2014.
- Christian Gerlach. Satellite gravimetry and global gravity models, terrestrial gravity anomalies on regional scales. *Lecture Notes and Exercises on Physical Geodesy, April*, 2020.
- Christian Gerlach and Vegard Ophaug. Accuracy of regional geoid modelling with goce. In *International Symposium on Gravity, Geoid and Height Systems 2016*, pages 17–23. Springer, 2017.
- Bernhard Hofmann-Wellenhof and Helmut Moritz. *Physical geodesy*. Springer Science & Business Media, 2006.
- Dagny I Lysaker and Olav Vestøl. The norwegian vertical reference frame nn2000. 2020.
- Vegard Ophaug. Potensialteori. *Forelesningsnotater, Februar*, 2020a.
- Vegard Ophaug. Høyder. *Forelesningsnotater, April*, 2020b.
- Nikolaos K Pavlis, John K Factor, and Simon A Holmes. Terrain-related gravimetric quantities computed for the next egm. In *Proceedings of the 1st international symposium of the international gravity field service*, volume 18, pages 318–323, 2007.
- Meng Yang, Christian Hirt, and Roland Pail. Tgf: A new matlab-based software for terrain-related gravity field calculations. *Remote Sensing*, 12(7):1063, 2020.
- P Zingerle, R Pail, T Gruber, and X Oikonomidou. The combined global gravity field model xgm2019e. *Journal of Geodesy*, 94(7):1–12, 2020.





**Norges miljø- og biovitenskapelige universitet**  
Noregs miljø- og biovitenskapelige universitet  
Norwegian University of Life Sciences

Postboks 5003  
NO-1432 Ås  
Norway