



Norges miljø- og
biovitenskapelige
universitet

Masteroppgave 2019 30 stp
Fakultet for realfag og teknologi

Regional geoideberegning i et testfelt på Sunnmøre

Regional geoid computation in a testbed in
Sunnmøre

Sjur Vorkinn

Master/Teknologi (sivilingeniør) – Geomatikk – Kart, satellitter og 3D-
modellering

Sammendrag

Å gjennomføre en regional tyngdefeltsmodellering er gjennomførbart. Problemet er bare at tiden kan bli veldig knapp. Som et resultat av dette ble den endelige kvasigeoiden ikke ferdigstilt. Likevel er mange av størrelsene og verdiene, som inngår i denne ferdigstillingen, ferdig utregnet. Alt forarbeidet til den regional tyngdefeltsmodelleringen virker å være godt. Residualsignalet (tyngdeanomaliene) går fra å ha en rms-verdi på 49.42 mGal til å ha en rms-verdi på 21.40.

Forord

Denne oppgaven markerer slutten på mastergraden min i Geomatikk ved Norges Miljø og Biovitenskapelige Universitet, og 3 fine år på Ås. Dette har vært et prosjekt som har gått februar til mai 2019, og som har tatt for seg en regional tyngdefeltsmodellering med radielle basisfunksjoner på et datasett i et testområde på Sunnmøre.

Jeg vil takke veilederne mine postdoktor Vegard Ophaug ved seksjonen for geomatikk under instituttet for Realfag og Teknologi og Dr. Ing. Christian Gerlach ved Bavarian Academy of Sciences and Humanities, for uvurderlig hjelp med denne masteroppgaven. Jeg hadde ikke klart å komme så langt på vei i en kvasigeoideberegning hadde det ikke vært for den jobben de har lagt ned før meg. Jeg vil også rette en takk til Vegard og Christian igjen, som har utviklet mesteparten av programmene/rutinene som jeg har benyttet meg av.

Jeg vil også rette en stor takk til familien min som har hjulpet meg gjennom de 8 årene jeg har vært en fattig og enslig student.

Sjur Vorkinn

Ås, 15. Mai 2019 kl.00.31

Innhold

1	Problemstilling/introduksjon	1
2	Teori	2
2.1	Remove-Restore teknikken	2
2.1.1	Residualet til tyngdeanomaliene	2
2.1.2	Høydeanomaliene	2
2.1.3	Normalhøyder	2
2.2	Referansesystem, geodetiske koordinater og normaltyngden	3
2.2.1	GRS80	3
2.2.2	Geodetiske koordinater	3
2.2.3	Normaltyngden	4
2.3	Sfæriskharmonisk syntese	4
2.3.1	Generelt	4
2.3.2	Point	5
2.3.3	Grid	5
2.4	Radielle basisfunksjoner	5
2.5	Splinekjernen (SK)	6
2.6	Gradvarians	6
2.7	Grid	6
2.7.1	Lat/lon grid	6
2.7.2	Reuter grid	7
2.7.3	Datadrevet grid	8
2.8	Regularisering	10
2.8.1	Tikhonov regularisering	10
2.8.2	L-kurve	10
3	Databehandling	11
3.1	Datasettet	11
3.2	Terrengkorleksjon	11
3.3	Atmosfærisk korleksjon	16
3.4	Feil i datasettet	17
3.5	Globale tyngdeanomalier	20
3.6	Residual-tyngdeanomalier	20
4	Geoideberegninger med RBFs	26
4.1	Kvasigeoiden	26
4.2	Splinekoeffisientene	26

4.3	Regularisering	26
4.4	Tidsbruk	26
4.5	Ressursbruk	26
4.6	Optimalisering av kode	33
4.7	Uønskede effekter	33
4.8	Kvalitetsmål	34
5	Konklusjon og fremtidsperspektiv	38

Tabeller

3.1	Feil funnet i datasettet nkgdb_sunmore.	20
3.2	Statistikk for tyngdeanomaliene i dataområde 2 for hvert enkelt steg i remove-restore prosessen.	24
3.3	Statistikk for tyngdeanomaliene i dataområde 1 før sletting av datapunkter med feil.	24
3.4	Statistikk for tyngdeanomaliene i dataområde 2 før sletting av datapunkter med feil.	24
3.5	Endelig tatistikk for tyngdeanomaliene i dataområde 2.	25
4.1	Tabellen viser de statistiske egenskapene til ulike høydeanomalidatasett. Disse datasettene kommer fra de ulike remove-restore stegene.	31
4.2	Tabellen viser de statistiske egenskapene til ulike høydeanomalidatasett. Datasettene gjelder for diskrete koordinater, som kommer fra det regulære lat-lon gridet knyttet til interesseområdet.	31
4.3	De statistiske egenskapene til utjevningsresidualene.	31
4.4	Statistikk knyttet til regulariseringen.	33
4.5	Tidsbruk for ulike beregninger.	33
4.6	Tabellen viser de statistiske egenskapene til ulike høydeanomalidatasett. Datasettene gjelder for diskrete koordinater, som kommer fra datasettet HREF2025.	34

Figurer

2.1	Dimensjonsløs gradvarians EGM2008	7
2.2	Lat/lon grid	8
2.3	Reuter grid	9
3.1	Terrestriske tyngdedata for sunnmøreområdet	12
3.2	DEM med batymetri	13
3.3	Dataområdene og interesseområde	14
3.4	MST	15
3.5	Kall	16
3.6	Δg_{RTM}	17
3.7	ζ_{RTM}	18
3.8	$\Delta g_{RES, uendret}$	19
3.9	Tyngdeanomalier, GOCO05s og EGM2008	21
3.10	Tyngdeanomali-reduksjon	22
3.11	Δg_{RES}	23
4.1	Globale høydeanomalier	27
4.2	Høydeanomalier, GGM, RTM	28
4.3	Residual-høydeanomalier	29
4.4	Endelig høydeanomali	30
4.5	Splinekoeffisientene	32
4.6	Error	35
4.7	Kvaliteten til kvasigeoiden	36

Kapittel 1

Problemstilling/introduksjon

Er det mulig å få beregnet en kvasigeoide via en regionaltyngdefeltsmodellering? Hvilke forhold må tas skal man få til dette? Hvilke teknikker og metoder kan brukes? Hvor god kan en slik referanseflate bli, sammenlignet med en eksterne validerings punkter? Dette skal denne masteroppgaven prøve å gi svar på.

Kapittel 2

Teori

2.1 Remove-Restore teknikken

Problemet med en regional kvasigeoideberegning er at dataene, i de fleste tilfeller, kun er tilgjengelige i interesseområdet og litt utenfor. Dette gjør det vanskelig å modellere geoiden av to grunner. Den første grunnen er at den kortbølgede andelen av signalet ikke kan representeres av de diskrete observasjonene [1]. Det andre problemet er at de globale langbølgede signalandelene ikke fanges opp av dataene, fordi dataområdet er for lite.

Med dette utgangspunktet ble RCR- teknikken laget. Man fjerner den langbølgede og kortbølgede delen av signalet, henholdsvis med en GPM (global potensialmodell) og en RTM (residual terrain modell). Det vi sitter igjen med er et signal som er mellombølget. Dette signalet brukes så til modellere høydeanomaliene. Tilslutt legger man de bidragene man fjernet i det første steget tilbake for få den fulle kvasigeoiden.

Formlene for sammenhengen i RCR kan sees under:

2.1.1 Residualet til tyngdeanomaliene

$$\Delta g = g - \gamma_Q + \Delta g_{ATM} \quad (2.1)$$

$$\Delta g_{RES} = \Delta g - \Delta g_{GGM} - \Delta g_{RTM} \quad (2.2)$$

2.1.2 Høydeanomaliene

$$\zeta = \zeta_{GGM} + \zeta_{RTM} + \zeta_{RES} \quad (2.3)$$

2.1.3 Normalhøyder

Normalhøyder er definert på omtrent akkurat samme måte som ortometriske høyder, der normalhøyden er avstanden fra kvasigeoiden til et punkt på overflaten (eller avstanden fra ellipsoiden til telluroiden).

$$\zeta = h - H^* \quad (2.4)$$

2.2 Referansesystem, geodetiske koordinater og normal-tyngden

2.2.1 GRS80

Referanseflaten brukt i denne oppgaven vil alltid være GRS80-ellipsoiden. Grunnen til dette er at de to globale potensialmodellene GOCO05s og EGM2008, var tilgjengelige i format referert til akkurat denne ellipsoiden. I tillegg er dataene for nivellement/GNSS-punktene til Kartverket referert til GRS80-referansesystemet. Disse dataene brukes som ekstern validering av kvasigeoiden, og for å slippe å konvertere koordinater ble valget GRS80.

De viktigste størrelsene som benyttes fra GRS80-referansesystemet er henholdsvis storehalvakse, flattrykningen, gravitasjonskonstanten, gjennomsnittlig vinkelhastighet og normalpotensialet på ellipsoideflaten:

$$\begin{aligned} a &= 6378137.000m \\ f &= 1/298.257222101 \\ GM &= 3.986005 \cdot 10^{14} \frac{m^3}{s^2} \\ \omega &= 7.292115 \cdot 10^{-5} \frac{rad}{s} \\ U_0 &= 62636860.85 \frac{m^2}{s^2} \end{aligned}$$

2.2.2 Geodetiske koordinater

For å transformere tradisjonelle bredde- og lengdegrader, som er knyttet til en sfærisk rotasjonssymmetrisk modell av jorda med en veldefinert meridian, må man bestemme seg for hvilken ellipsoide de geodetiske koordinatene skal referere seg til. I dette tilfellet vil det være GRS80-ellipsoiden. Ved å kjenne den store halvaksen (a) og flattrykningen (f) til denne ellipsoiden kan man regne ut en rekke størrelser:

$$\begin{aligned} b &= (1 - f) \cdot a \\ e &= \frac{a^2 - b^2}{a^2} \\ N &= \frac{a}{\sqrt{1 - e \cdot \sin^2 \varphi_E}} \end{aligned}$$

Disse verdiene, sammen med ellipsoidisk høyde, inngår så i beregningen av geosentriske koordinater (ECEF).

$$\begin{aligned} x &= (N + h_E) \cdot \cos \varphi_E \cdot \cos \lambda_E \\ y &= (N + h_E) \cdot \cos \varphi_E \cdot \sin \lambda_E \\ z &= (N \cdot (1 - e) + h_E) \cdot \sin \varphi_E \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ p &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

I dette tilfellet kjenner vi ikke den ellipsoidiske høyden til datapunktene. Derfor approksimeres de med normalhøydene. Geodetisk bredde og lengdegrad blir:

$$\varphi_G = \arctan\left(\frac{z}{p}\right) \quad (2.5)$$

$$\lambda_G = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2.6)$$

For å løse problemet med at den ellipsoidiske høyden er ukjent, må verdien approksimeres med normalhøyder. Deretter kan kvasigeoiden beregnes, og denne verdien legges så sammen med normalhøyden ved en ny iterasjon.

2.2.3 Normaltyngden

Normaltyngden på telluroiden brukes når man skal gå fra anomalt potensial (T) til høydeanomalier (ζ), men også når man skal redusere tyngdeanomaliene til et residualsignal (Δg_{RES}). For å finne normaltyngden må man først kjenne normaltyngden på ellipsoiden (γ_0). Formelen for (γ_0) er bedre kjent som Somiglianas formel:

$$\gamma_0 = \frac{a \cdot \gamma_a \cdot \cos^2 \varphi + b \cdot \gamma_b \cdot \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \quad (2.7)$$

Cassinis formel fra 1930 finner normaltyngden for lave h over ellipsoiden:

$$\gamma(\varphi, h) = \gamma_0 \cdot \left[1 - \frac{2}{a} \cdot (1 + f + m - 2 \cdot f \cdot \sin^2 \varphi) \cdot h + \frac{3}{a^2} \cdot h^2\right] \quad (2.8)$$

$$m = \frac{\omega^2 a}{\gamma_a} \omega^2$$

Skal man beregne normaltyngden på telluroiden, som gjelder i tilfellet med etableringen av Δg_{RES} , blir det definisjonsmessig riktig å bruke normalhøydene fra datasettet. For interesseområdet og det tilhørende regulære ζ -gridet kjenner vi ikke normalhøydene. Disse må approksimeres med høyder fra en DTM og interpolasjon (kubisk).

2.3 Sfæriskharmonisk syntese

2.3.1 Generelt

Når vi skal bruke remove-restore teknikken for å beregne en kvasigeoide, må vi benytte oss av sfæriskharmonisk syntese for å finne de globale og lavfrekvente signalet. Både når man skal finne reduksjonsbidraget Δg_{GGM} , og bidraget til høydeanomaliene ζ_{GGM} . Å fjerne den langbølgede delen fungerer dermed som et høypassfilter, der det høyprevente signalet for passere [1].

2.3.2 Point

Tyngdeanomalierne for GOCO05s og EGM2008 kan kalkuleres ved å henholdsvis bruke formlene [7]:

$$\Delta g_{GOCO05s} = \sum_{n=0}^{250} \lambda_n^g \sum_{m=0}^n [\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \cdot \bar{P}_{nm}(\cos\varphi) \quad (2.9)$$

$$\Delta g_{EGM} = \sum_{n=251}^{2190} \lambda_n^g \sum_{m=0}^n [\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \cdot \bar{P}_{nm}(\cos\varphi) \quad (2.10)$$

Tyngdeanomalierne til de globale modellene må ha en verdi i datapunktene for at en reduksjon skal kunne gjennomføres. Siden dataene ikke ligger på et regulært grid, må beregningene skje punktvis, og ikke via matriseoperasjoner.

Dette gjelder også beregningen av de globale høydeanomalierne som man legger tilbake i restore steget. For en mer korrekt ζ_{GGM} -verdi (Global Gravity Model) finner man først det anomale potensialet, for så å dele på normaltyngden på telluroiden. Den sfærisk-harmoniske syntesen blir da:

$$T_{GOCO05s} = \sum_{n=0}^{250} \lambda_n^T \sum_{m=0}^n [\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \cdot \bar{P}_{nm}(\cos\varphi) \quad (2.11)$$

$$T_{EGM} = \sum_{n=251}^{2190} \lambda_n^T \sum_{m=0}^n [\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \cdot \bar{P}_{nm}(\cos\varphi) \quad (2.12)$$

$$\lambda_n^T = \frac{GM}{R} \cdot \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \quad (2.13)$$

For å finne høydeanomalierne til GGM'ene brukes sammenhengen:

$$\zeta = \frac{T}{\gamma Q} \quad (2.14)$$

Å kombinere to globale potensialmodeller på denne måten, ved å kutte EGM2008 i to, og lime den sammen med GOCO05s ved harmonisk grad 250 er en kraftig forenkling. For fremtidige kvasigeoideberegninger kunne man kanskje vært interessert å gjøre dette annerledes, og sjekke hvor mye forenklingen påvirket sluttresultatet.

2.3.3 Grid

Versjonen av shs som benytter matriseoperasjoner, ble brukt ved etableringen av den gjennomsnittlige overflate topografien (MST) brukt i forbindelse med terrengkorreksjoner. Se avsnitt 3.2.

2.4 Radielle basisfunksjoner

Radielle basisfunksjoner er sagt å ha kvasi-lokale egenskaper [10]. Disse funksjonene er veldefinerte for hele kloden, noe som skyldes legendrefunksjonen, derav navnet kvasi. Den lokale

delen av navnet kommer av at omtrent all energien til funksjonen er i nærområdet rundt funksjonssenteret. Funksjonene er derfor globale, men skarpe. På grunn av denne kvasi-lokale egenskapen egner de seg godt til bruk ved en regional geoideberegning.

2.5 Splinekjernen (SK)

Splinekjernen er en spesifikk RBF. Koeffisienten til denne funksjonen er [7]:

$$B^{SK}(\psi_{Pk}) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \lambda_n B_n^{SK} Y_{nm}^R(\varphi_p, \lambda_p) Y_{nm}^R(\varphi_k, \lambda_k) \quad (2.15)$$

Designmatrisene blir ut i fra SK:

$$A_{kq}^{\Delta g} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \lambda_n^{\Delta g} B_n^{SK} Y_{nm}^R(\varphi_k, \lambda_k) Y_{nm}^R(\varphi_q, \lambda_q) \quad (2.16)$$

$$A_{pk}^T = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \lambda_n^T B_n^{SK} Y_{nm}^R(\varphi_p, \lambda_p) Y_{nm}^R(\varphi_k, \lambda_k) \quad (2.17)$$

2.6 Gradvarians

Formelen for dimensjonsløs gradvarians brukt ved etableringen av designmatrisene i RBF-steget er Kaulas formel:

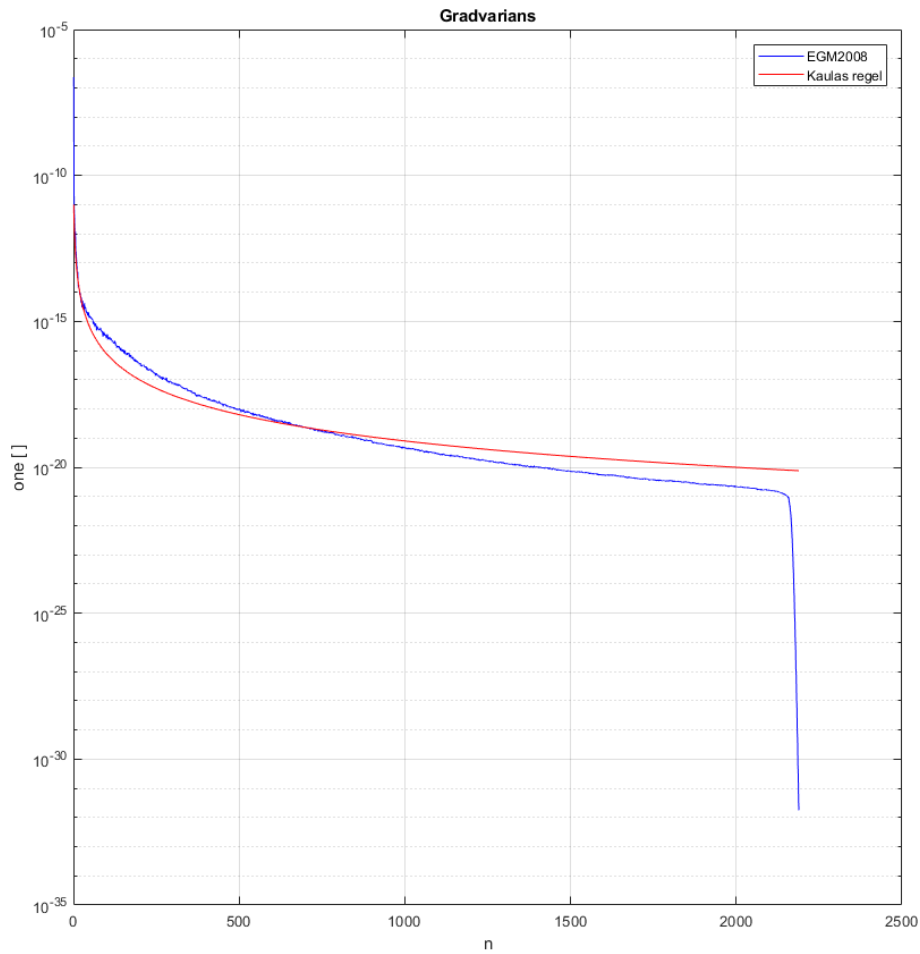
$$cn = \frac{1}{2} \frac{1.6 \cdot 10^{-10}}{n^3} \quad (2.18)$$

Figur 2.1 viser forskjellen mellom tilnærmingen, som Kaulas formell er, og dimensjonsløs gradvarians fra EGM2008. Grunnen til at Kaulas formel blir brukt her er at vi ikke kjenner gradvariansen til residualsignalet som skal modelleres med RBF.

2.7 Grid

2.7.1 Lat/lon grid

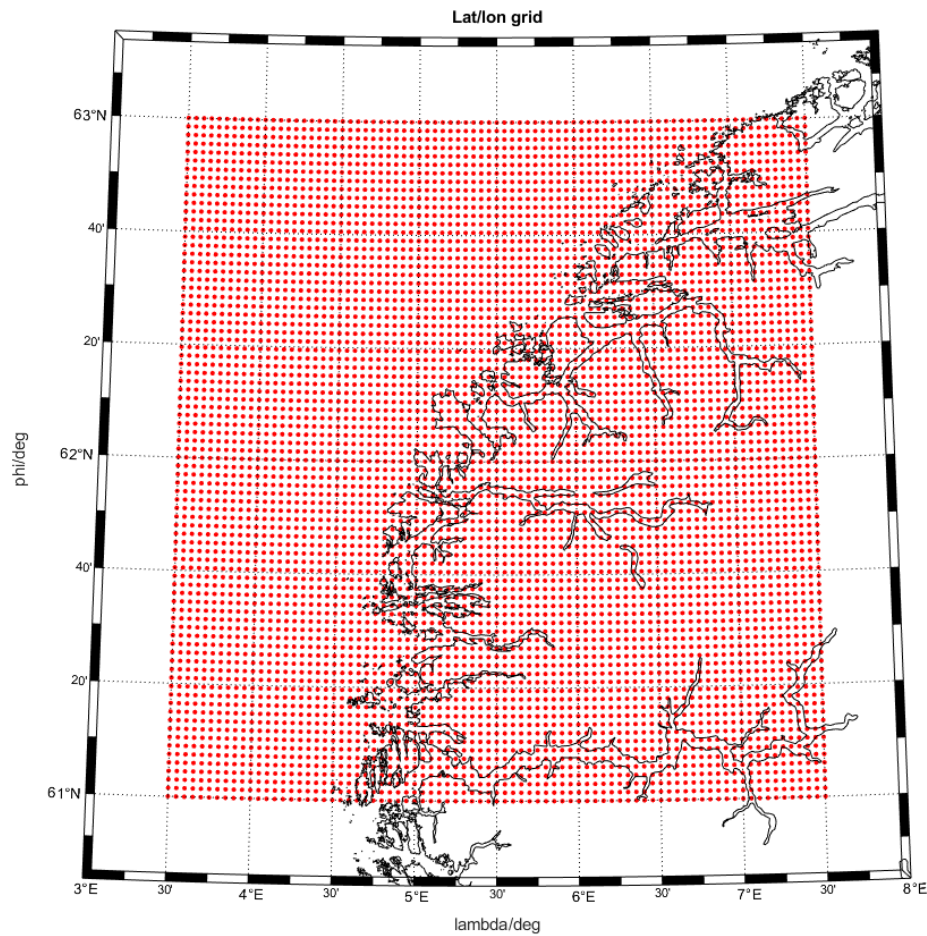
Et lat-lon grid består av mange koordinatpar, der koordinatene har en breddegrad (φ) og lengdegrad (λ). Disse refererer seg til en sfære eller ellipse, og de er jevnt fordelt i gradmessig forstand. Vektoren til bredde- og lengdegraden har dermed en start- og sluttverdi, med et konstant intervall ($\Delta\varphi$ og $\Delta\lambda$) mellom seg. Denne konstante faktorene gjør at punktene i øst-vest retning (λ -verdiene) fortettes, noe som ikke er ønskelig når man skal beregne en kvasigeoide med radielle basisfunksjoner (RBF). Grunnen til at dette ikke er ideelt er at kolonnenen i designmatrisene da blir for like, problemet blir dårlig stilt og løsningen blir enten dårlig eller umulig å finne. Problemene med å bruke et regulært grid blir større jo lenger nord du kommer. Dette kommer av at forholdet mellom småsirkelene og storsirkelen ved ekvator er: $\cos \varphi$. Figur 2.2 representerer et slikt grid.



Figur 2.1: Dimensjonsløs gradvarians for den globale potensialmodellen EGM2008, sammen med Kaulas formel.

2.7.2 Reuter grid

Reutergridet er, i motsetning til lat-lon gridet, jevnt fordelt både i nord-sør og øst-vest. Jo lenger nord du kommer jo færre punkter finner man langs småsirkene, en såkalt equidistribution [8]. Poenget med dette gridet er at arealet rundt et koordinatpar omtrent er like store som for alle andre par. Gridets tetthet styres av parameteren γ [4] og området gridet skal dekke, jo større γ jo flere koordinatpar i gridet. Figur 2.3 representerer et slikt grid.

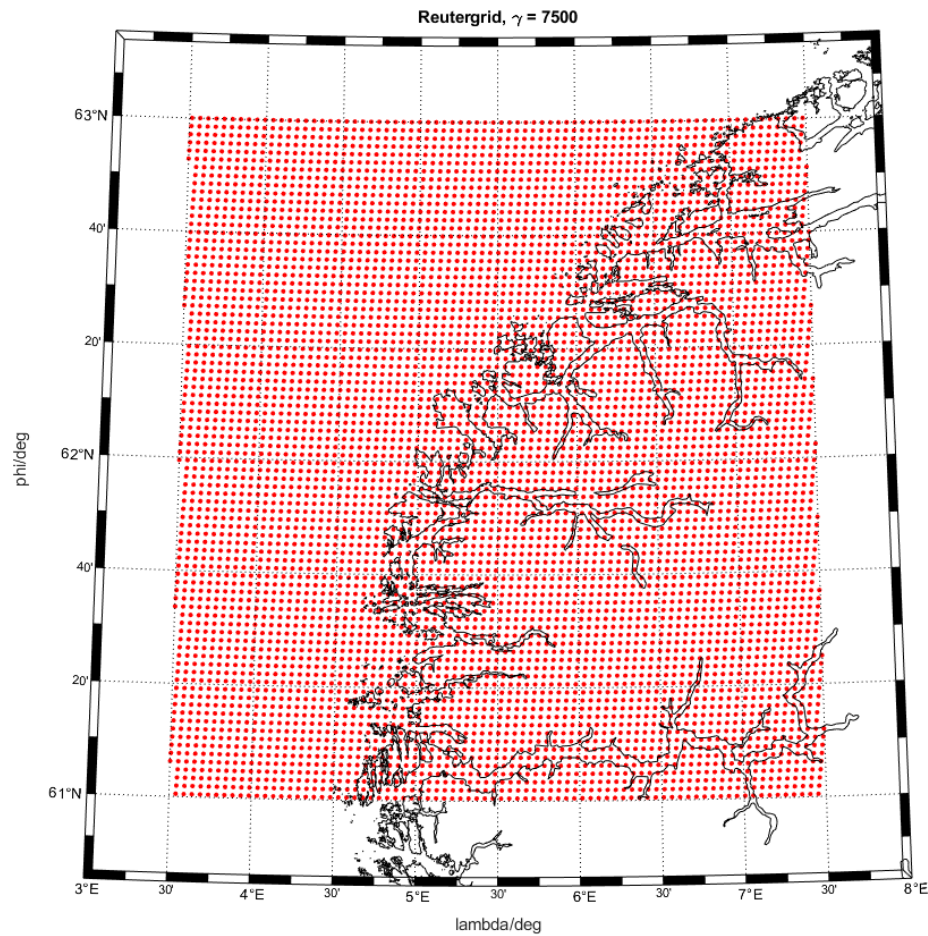


Figur 2.2: Lat-lon grid over interesseområdet.

2.7.3 Datadrevet grid

Et datadrevet grid er ikke et regulært grid, slik som et lat-lon grid og et reuter grid er. Dette betyr at det ikke er noen parametre som styrer plasseringen av punkter. Plasseringen av punkter, i dette tilfelle plasseringen av RBF, styres heller av en rekke kriterier. En løsningsstrategi for å plassere RBF på et irregulært grid ble foreslått av [5]:

1. Lage et grovt reuter grid. Plassere SK i disse punktene med en felles båndbredde (N_{max}). Optimal båndbredde og γ -parameter bestemmes med en GCV (Generalized Cross-Variance) funksjon. Det optimale grove gridet vil være en god løsning for områder med lite data og lite signalvariasjon.
2. Beregne en kvasigeoidløsning ved utjevning. Resultatet blir ikke kvasigeoidløsningen



Figur 2.3: Reuter grid over interesseområdet.

i seg selv, men et sett med residualer (se formel).

3. Residualene brukes så som en kandidatliste for plassering av nye funksjoner, SK. Residualene vil ha samme koordinat som datapunktene.
4. Itereringsgangen blir som følger:
 - 4.1. Finner største residual fra utjevning.
 - 4.2. Residualen må være større enn en hvis verdi, τ_1
 - 4.3. Antall punkter i en radius mindre enn Ψ_c av kandidatpunktet må være større enn q . Disse datapunktene må ha en gjennomsnittlig residualverdi større enn τ_2 . Dette for å unngå at uteliggere med feil modelleres.

- 4.4. Avstanden fra den nye funksjonen til allerede eksisterende funksjoner (grovt reuter grid eller tidligere kandidater) være minst Ψ_{min} . Dette for å unngå at ingen av RBF/SK kansellerer hverandre ut. Noe som fører til en dårlig løsning og et dårlig stilt system.
- 4.5. Passerer kandidaten denne testen, kjøres det en ny utjevning. Denne utjevningen gjelder ikke alle datapunktene/SK, men kun for punktene innenfor sfæren Ψ_c
5. Iterasjonen slutter når kandidatlisten er tom.

Antall nye SK sier noe om hvor bra denne løsningen er. For mange nye splinekjerne betyr et for grovt utgangspunkt (reuter), for få må betyr et for fint. Hva som er for få og for mange er avhengig av ønsket interesseområde. Noen steder er det nok med noen hundre nye SK, andresteder noen tusen.

2.8 Regularisering

Regularisering er nødvendig når kondisjonstallet til normaligningsmatrisa er høyt. Typisk i størrelsesorden 10^{20} . Er kondisjonstallet for høyt er ikke systemet løsbart, altså singulært. Dette kommer av at flere av kolonnene i designmatrisa er for like. Jobber vi med RBF, så er kolonnene sannsynligvis like fordi vi har plassert ut for mange SK i et område med lite data. Et dårlig stilt problem vil være mer sannsynlig når splinegridet er regulært, enn når det er irregulært (datadrevet grid). Dette fordi risikoen for tett plasserte splines er høyere.

2.8.1 Tikhonov regularisering

En vanlig måte å regularisere på kalles Tikhonov regularisering. Løsningen for et dårlig stilt problem, gir følgende observasjonsligning [9]:

$$x_\alpha = (A^T P A + \alpha K)^{-1} A^T P l \quad (2.19)$$

Denne formelen kan forenkles hvis vi ikke vokter målingene, sammen med $K = I$ (identitetsmatrisa).

$$x_\alpha = (A^T A + \alpha I)^{-1} A^T l \quad (2.20)$$

Erstatter vi den ukjente (x) med splinekoeffisienten (d) får vi:

$$d_\alpha = (A^{\Delta g^T} A^{\Delta g} + \alpha I)^{-1} A^{\Delta g^T} \Delta g \quad (2.21)$$

2.8.2 L-kurve

Som navnet tilsier har L-kurven form som en L, eller i hvert fall noe som ligner. Dette gjelder for de aller fleste utjevningen som gjøres. L-kurven oppstår når man plottet løsningsnormen mot residualnormen, og tanken er at den optimale regulariseringsparameteren α eksisterer i vinkelen i L'en. α regnes numerisk ut ved å se på verdiene til løsningsnormen og residualnormen i dette optimale punktet langs kurven, for så bruke disse verdiene formlene under [1]:

$$\kappa(\alpha) = \frac{\dot{\xi}\ddot{\eta} - \ddot{\eta}\dot{\xi}}{(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2)^{3/2}} = \max \quad (2.22)$$

$$\dot{\kappa}(\alpha) = 0 \quad (2.23)$$

Kapittel 3

Databehandling

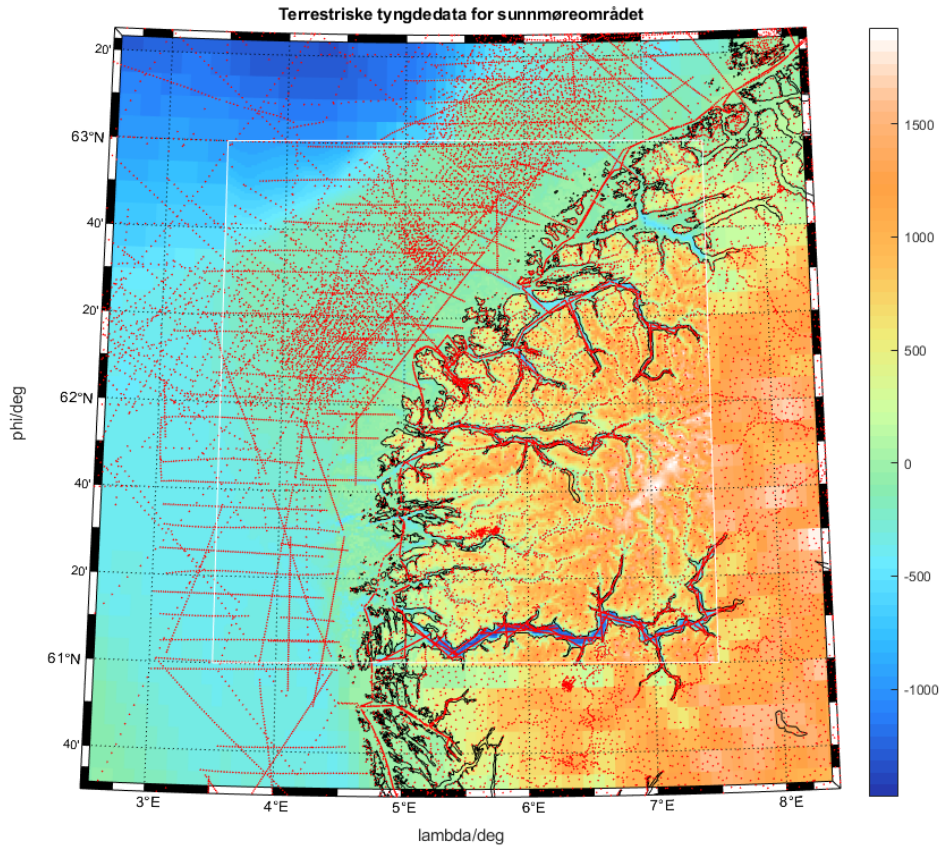
3.1 Datasettet

De terrestriske tyngdedataene, som er brukt i forbindelse med denne kvasi-geoideberegningen, er levert av Kartverket. Området som dataene ligger i er på ca. 333x333 km, og koordinatene ligger mellom $60.5^\circ \leq \varphi_E \leq 63.5^\circ$ og $2.5^\circ \leq \lambda_E \leq 8.5^\circ$ (se figur 3.1). Disse dataene er samlet inn over en lengre periode, og er sentrert rundt et tyngdelaboratorie på Sunnmøre med en datatetthet mye høyere en ellers i landet. Denne tettheten ligger grovt sett på rundt 0.32 målinger per kvadratkilometer, med en gjennomsnittlig avstand mellom punktene på ca. 2 km. Gjennomsnittlig var minste avstand til nærmeste datapunkt 0.654 km. Tyngdemålingene er gjort til havs og i fjorder, med instrumenter båret av fly eller båt. På land er målingene for det meste gjort med et relativt gravimeter i GNSS/nivellements punkter. Dette datasettet består av en matrise som har dimensjon 33600x6. Der hver enkelt kolonne representerer en størrelse. Disse størrelsene er: id, breddegrad, lengdegrad, normalhøyder (NN2000), tyngdeverdi (*mGal*) og et kvalitetsmål (*mGal*).

3.2 Terrengkorreksjon

For å oppnå et mellombølget og relativt glatt residuals signal, til bruk med RBF, kan man korrigere tyngdenomalierne for variasjoner i topografien. Dette fordi topografien, særlig på land, kan ha en høyfrekvent struktur. M.a.o varierer massene under/rundt de ulike målepunktene mye, over en kort avstand. En av måtene for å beregne en terrengreduksjon på er å beregne en såkalt residual terreng modell (RTM). Fordelene med en slik reduksjon, i motsetning til andre måter, er at det kun er den høyfrekvente delen av terrenget som modelleres og som det reduseres for. Dette gjøres ved å bruke to ulike DEM'er, en grov referanseflate og en detaljert modell. Begge modellene dekker samme område (se figur 3.2), der den grove referanseflaten er laget ved å bruke SHS sammen med sfærisk harmoniske koefisienter for en spesifikk DTM (se figur 3.2).

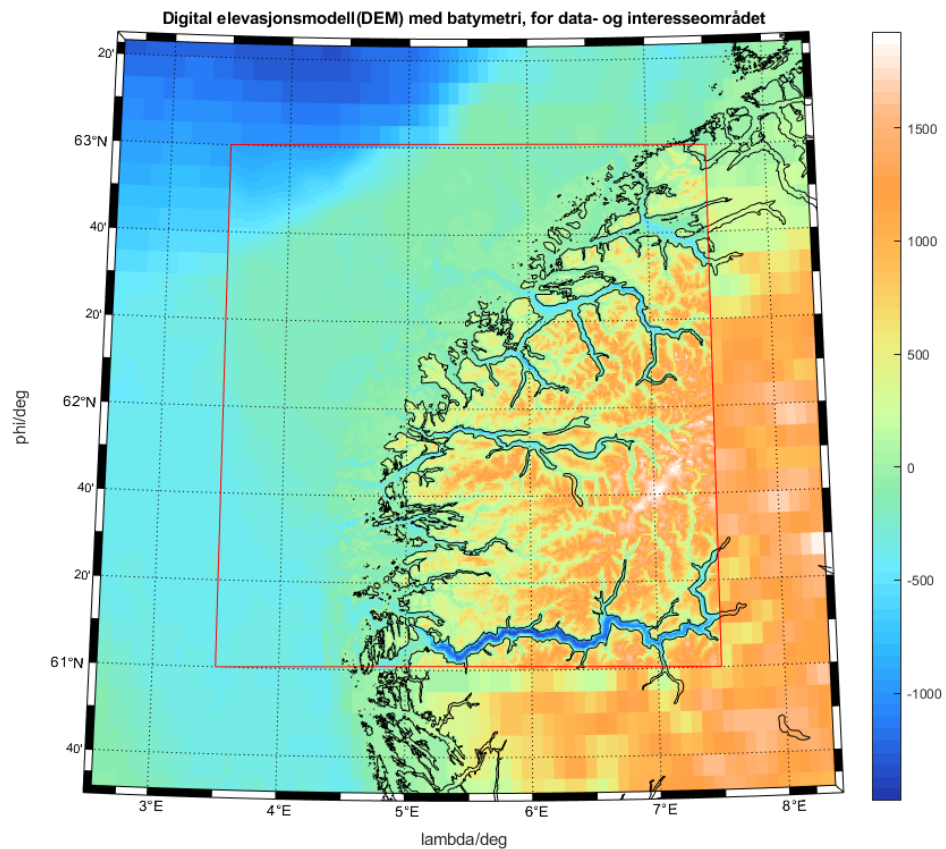
Den høyfrekvente signalet lages ved å regne ut forskjellen mellom den faktiske topografien (fint grid) og referansetopografien (grovt grid). Resultatet blir [1] høyfrekvent, med negative og positive verdier som varierer hyppig med avstand. Noe som igjen betyr at bidragene fra RTM'en kansellerer hverandre ut ved en tilstrekkelig lang avstand unna det aktuelle



Figur 3.1: Hele dataområdet for de terrestriske tyngdedataene brukt i kvasi-geoideberegningen. Den hvite bosken representerer interesseområde.

datapunktet. Dette betyr at det ikke er nødvendig å beregne korreksjoner for den ytre sonen (der det ikke finnes data).

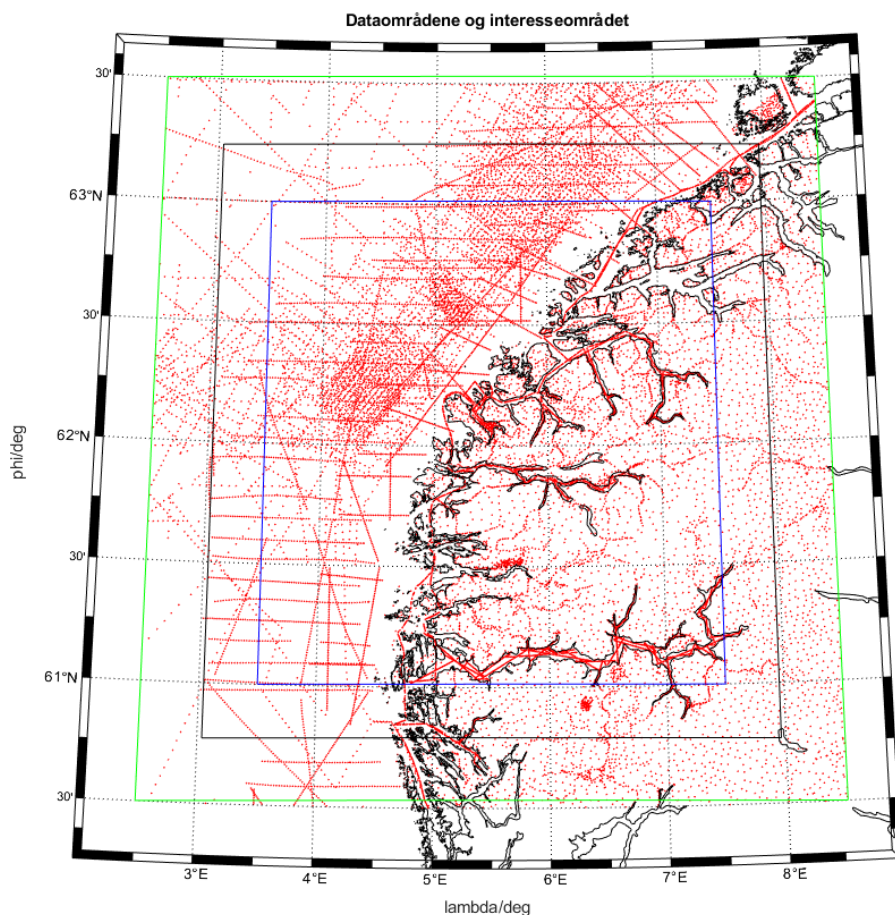
Størrelsen av dataområde 2 bestemmes ut i fra dataområde 1 og oppløsningen til referansemodellen (den grove/glate DEM'en). Oppløsningen til denne gridet er satt til 5' nord-sør, og 10' øst-vest. Dette tilsvarer en ca. 10 kilometers oppløsning i begge retninger (fordi dataene ligger på ca. 60 grader nord). Ut i fra disse valgene vil det være nok å beregne RTM'en i en radius rundt datapunktet på 30 km, siden radiusen må være 2-3 ganger større enn oppløsningen til referansemodellen [3]. Videre fører dette til at dataområde 2 blir 30 km mindre til alle kanter (se figur 3.3). Dette tilsvarer ca. 0.27 grader nord-sør og 0.54 øst-vest. Grunnen til at vi ikke kan beregne en RTM for dataområde 1, og således beholde alle dataene er at



Figur 3.2: Kombinasjon av to DEM med batymetri. En glatt for dataområde 1 og en detaljert for interesseområde. Størrelsen på områdene i plottet er ikke representativ for den virkelige størrelsen som inngikk i Gravsoftprogrammet.

den høyoppløste DEM'en ikke dekker områdene utenfor dataområde 1.

Ulempen ved å beregne en RTM kontra mer tradisjonelle terrengekorreksjoner, er at en harmonisk korreksjon må utføres. Dette gjelder for stasjoner i dype daler, der den grove gjennomsnittlige overflate topografien (MST) bidrar til at stasjonene havner inne i massene ($H_P \ll H_{MST}$) [1]. På figur 3.4 ser man tydelig at høyden til Sognefjorden, og dermed høyden til nivellements punkter langs veiene ved Sognefjorden, er mye høyere en faktisk høyde. Egentlig skulle man gjort en harmonisk korreksjon for disse datapunktene, men dette er ikke blitt gjort.



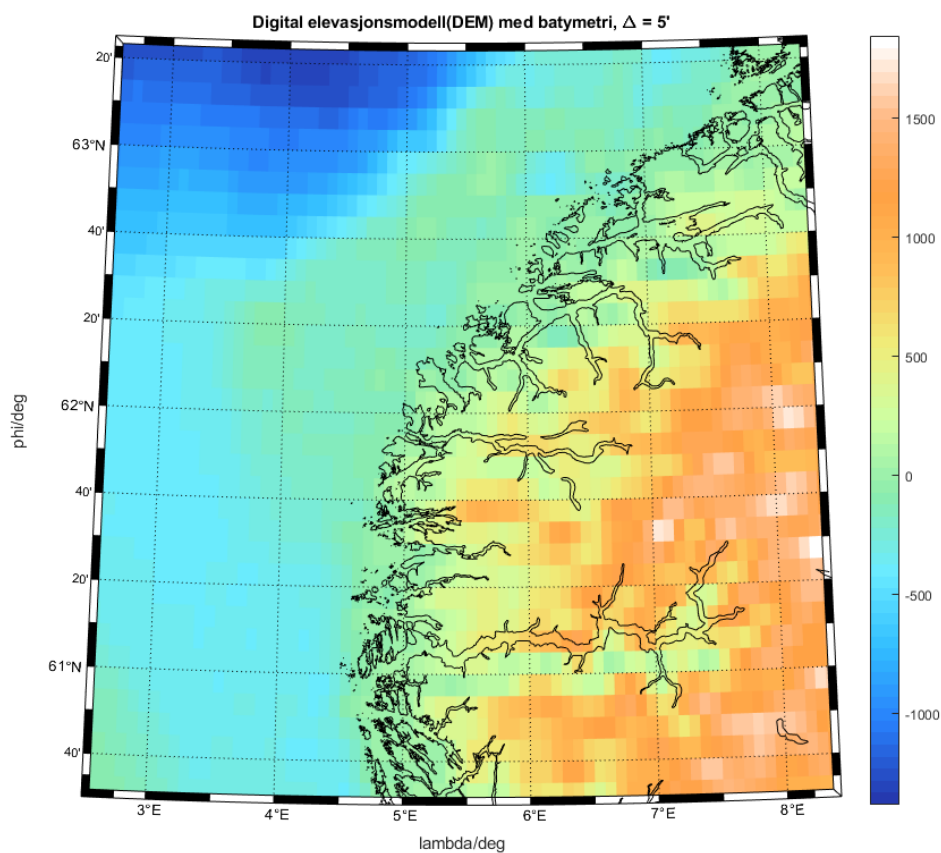
Figur 3.3: De ulike dataområdene, som følger av RTM-beregningen, samt interesseområde. Grønt: Dataområde 1, svart: dataområde 2 og blått: interesseområde.

Formelen for H_{MST} er:

$$H_{MST} = \sum_{n=0}^{N_{max}} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \varphi_E) [C_{nm}^{DTM2006} \cos m\lambda_E + S_{nm}^{DTM2006} \sin m\lambda] \quad (3.1)$$

Der de sphæriske harmoniske koeffisientene kommer fra "Coeff Height and depth to 2190 DTM2006". Valg av N_{max} ble satt til 2159, siden den globale andelen dg_{GM} som ble beregnet kun går til grad 2159. Dette er fordi EGM2008 kun går til grad 2190. Uoverenstemmelsen mellom disse verdiene skyldes at transformasjonen av EGM2008 fra sfæriske til ellipsoidiske verdier, skaper ekstra "harmoniske grader".

De andre parameterne som ble brukt i TC-programmet kan sees i figur 3.5. Dembaty_50g_sunnmøre



Figur 3.4: Gjennomsnittlig overflate topografi. Størrelsen på området i plottet er ikke representativ for den virkelige størrelsen som inngikk i Gravsoftprogrammet.

er den høyoppløste DEM'en (50 meter). Denne er brukt som både grovt og fint grid. $H_{2190} = H_{MST}$. De andre verdiene beskriver hvilke størrelser som skal beregnes, med hvilken metode, sluttgridkoordinater og radius. Radiusen tilsvarer 2-3 ganger oppløsningen til MST, altså skal koordinater i randen innenfor 30 km forsvinne. Et viktig moment ved bruk av GRAVSOF-programmet TC er at alle matrisene må ha samme struktur. Matrisene må gå fra nord til sør, vest til øst.

Reduksjonen til Δg og bidraget til ζ kan sees i henholdsvis figur 3.6 og figur 3.7. Statistikken knyttet til disse figurene er i tabell 3.2 og tabell 4.1. Drøfting av reduksjonene som fører til Δg_{RES} og bidragene til kvasigeoiden ζ finnes i kapittel 3.6 og kapittel 4.1. Det totale antall datapunkter krympet som følge av terrengkorreksjonssteget. Det nye antall datapunkter er

```

tc <<!
nkgdb_sunnmøre_update_v1.dat      tc <<!
dembaty_50g_sunnmøre.gri          nkgdb_sunnmøre_update.dat
dembaty_50g_sunnmøre.gri          dembaty_50g_sunnmøre.gri
H_2190.gri                         dembaty_50g_sunnmøre.gri
dg_RTM.dat                         H_2190.gri
5 4 0 1 2.67                       zeta_RTM.dat
60.6 63.4 2.5 8.5                   5 4 0 0 2.67
30.0 0                               60.7 63.3 2.5 8.5
!                                     30.0 0
!                                     !
!                                     !

```

Figur 3.5: De ulike parameterne som brukt ved beregning av RTM-bidraget til ζ og Δg .

28384 (ned fra 33600).

3.3 Atmosfærisk korreksjon

Vekten av atmosfæren over målepunktet gjør at tyngden til massene under blir delvis kansellert. Siden de ulike målepunktene har forskjellig høyde, vil det negative bidraget atmosfæren har på tyngdedataene derfor variere fra datapunkt til datapunkt. Siden effekten er variabel ønsker man å modellere en korreksjon som man legger til tyngdeanomalierne for kompensere for atmosfæremassens ulike bidrag.

Å modellere atmosfæren er lettere sagt enn gjort, siden lavtrykk- og høytrykkssystemene er i stadig bevegelse, noe som fører til ulikt trykk per tidsenhet. Det riktige hadde vært å korrigere atmosfæren med en modell som tok hensyn til måletidspunktet. Dette er ikke gjort. Formler som prøver å beskrive sammenhengen mellom stasjonshøyde og tyngdeanomalikorreksjon for atmosfæren tar kun hensyn til høyden over gjennomsnittlig havnivå. Referansehøyden for denne korreksjonen er midlere havnivå, og verdien her er rundt 0.874 mGal for tyngdeanomalierne. Man antar så en statisk atmosfære, og bruker enkle fysiske lover for å bestemme bidraget for høyden h . En slik formel er [2]:

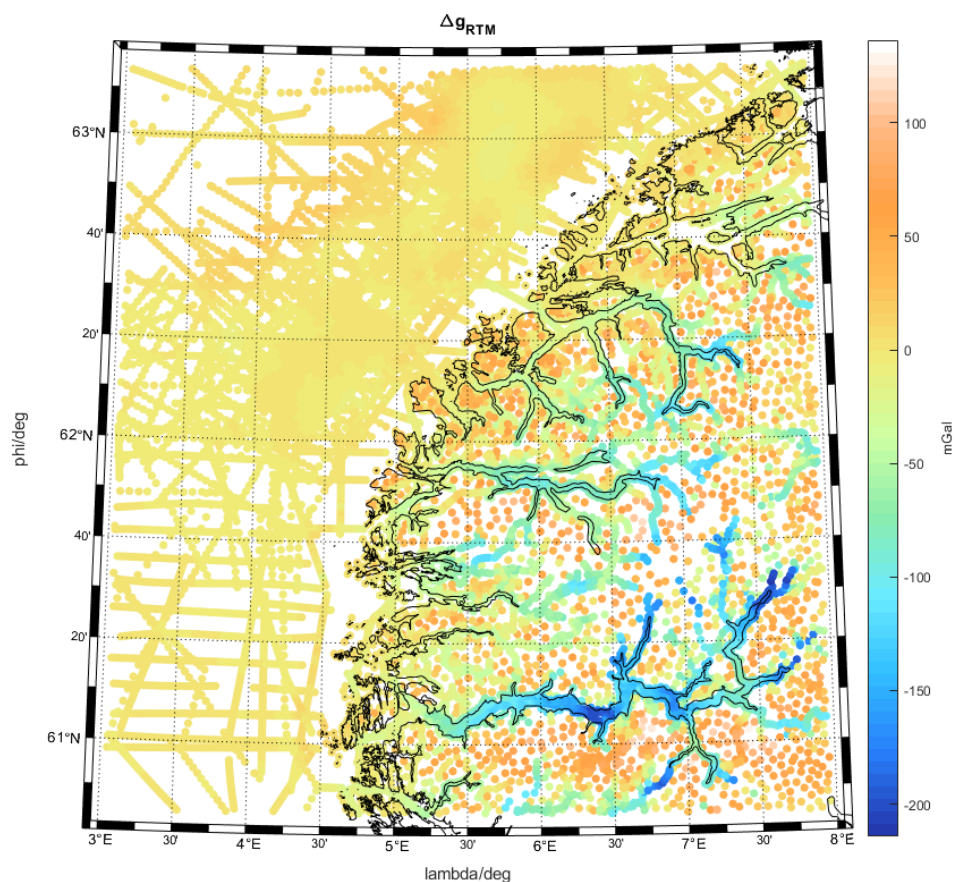
$$\Delta g_{ATM} = 0.874 - 9.9 \cdot 10^{-5} \cdot H_m + 3.5635 \cdot 10^{-9} \cdot H_m \quad (3.2)$$

En annen formel som kan brukes er:

$$H_{km}^* = \frac{H^*}{1000}$$

$$\Delta g_{ATM} = 0.87 \cdot e^{-0.116 \cdot H_{km}^{*1.057}} \quad (3.3)$$

Ut i fra formel 3.3 er det lettere å se at det negative bidraget atmosfæren har på tyngdeverdiene blir mindre med større stasjonshøyde. Tallverdien til den atmosfæriske korreksjonen vil

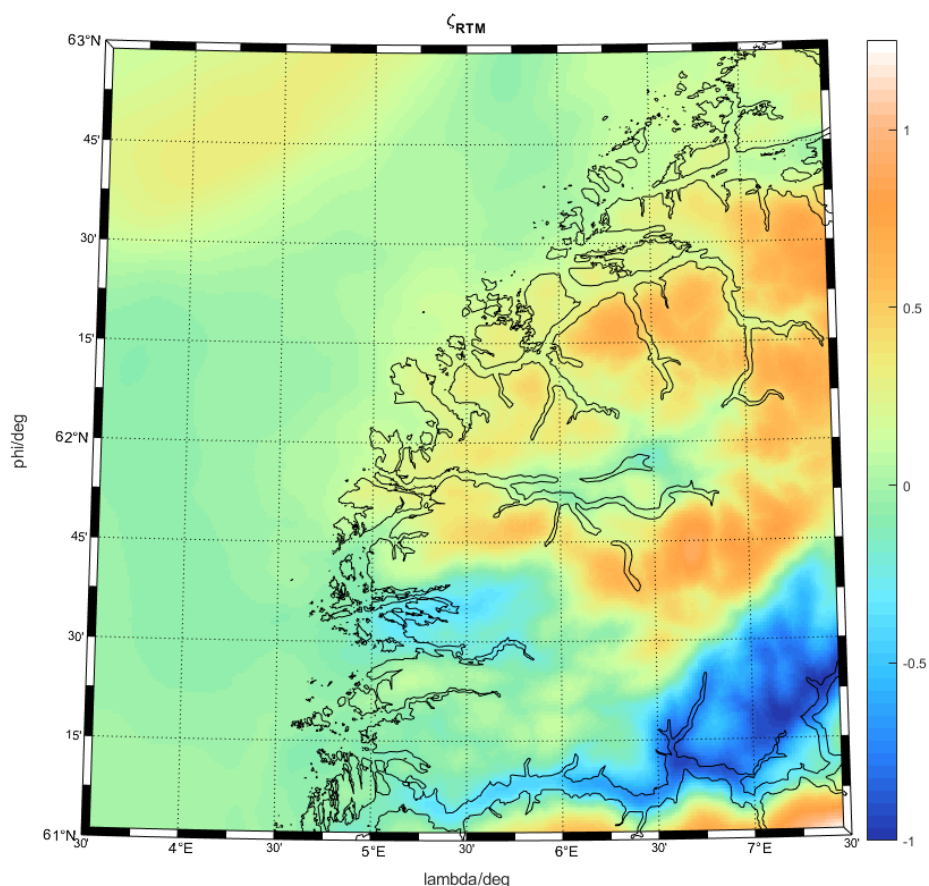


Figur 3.6: RTM-reduksjonen til tyngdeanomalierne.

dermed ligge mellom 0.5 og 0.874 mGal for Norge. Siden effekten er negativ må korreksjonen legges til tyngdeverdiene. Egentlig må også atmosfærens bidrag til selve kvasigeoiden ζ_{ATM} regnes ut, men dette er ikke nødvendig siden bidraget denne verdien har kun er noen få millimeter [1].

3.4 Feil i datasettet

Feil i datasettet ble synlig først etter at residual-tyngdeanomaliverdiene (Δg_{RES}) ble dannet. Grunnen til dette var at både tyngdeanomalierne (Δg), den globale andelen (Δg_{GGM}) og terrenngkorreksjonen (Δg_{RTM}) så tilsynelatende fine ut. Kombinasjonen av disse størrelsene viste derimot noe annet (se figur 3.8). I alt 14 uteliggere ble funnet ved visuell inspeksjon av

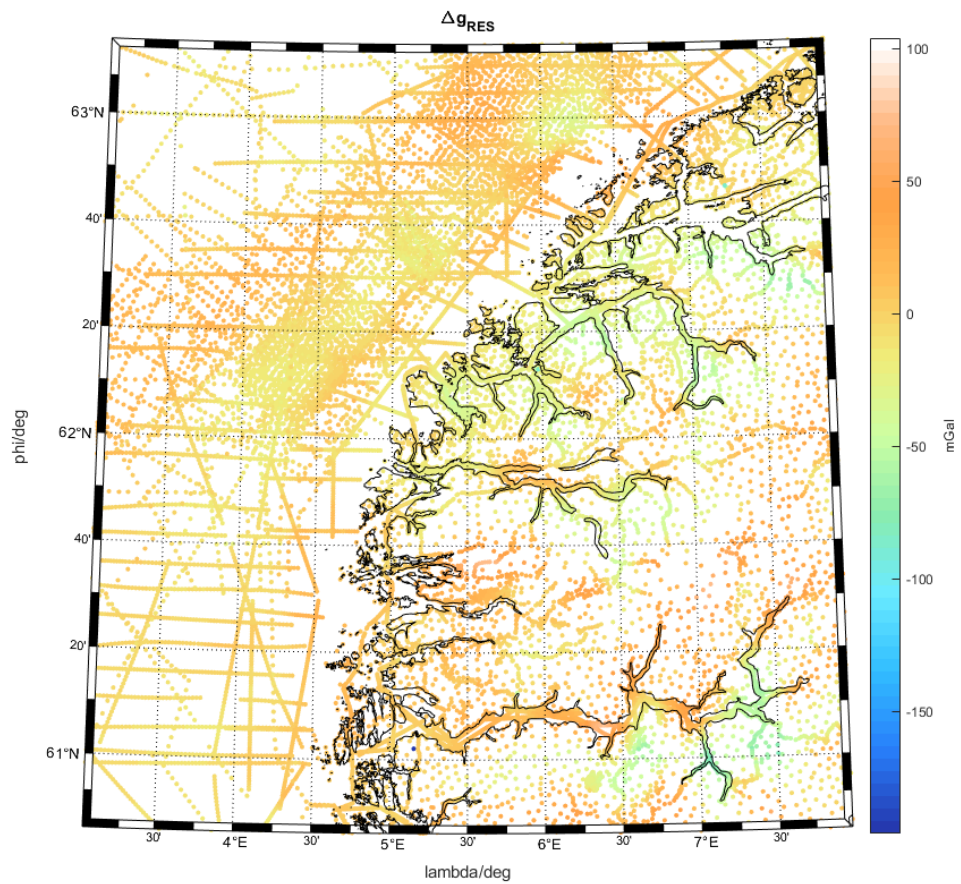


Figur 3.7: RTM-bidraget til høydeanomalierne.

Δg_{RES} -datasettet. Feil i disse punktene skyldes (tabell 3.1) :

Feil koordinat vil gjøre at terrengkorreksjonsverdien Δg_{RTM} blir feil. Dette er fordi koordinatene til målestasjonene brukes til bestemme høyden til målestasjonen via den digitale elevasjonsmodellen (DEM). Feil koordinat sammen med høyde betyr feil korreksjonsverdi. Små feil i koordinatene vil nok ikke påvirke det globale bidraget til tyngdeanomalierne (Δg_{RES}) nevneverdig, siden det er et glatt og langbølget signal. Likevel må punkter med feil koordinat slettes fra datasettet på grunn av feil terrengkorreksjon.

Feil i høyde påvirker ikke beregningen av terrengkorreksjonen. Dette er fordi høyden som brukes her kommer fra DEMen og ikke datasettet. Derimot påvirker denne feilen beregningen av både normaltyngden på telluroiden (γ_Q) og den globale andelen. For normaltyngden inngår høyden direkte, mens for det globale signalet gir feil stasjonshøyde feil geodetisk breddegrad



Figur 3.8: Residualtyngdeanomalierne for hele dataområdet (område 1). Plottet inneholder unormale verdier som skyldes feil i datasettet. To av disse kan sees tydelig, ved ca. $[61.03^\circ, 5.15^\circ]$ og $[62.22^\circ, 5.97^\circ]$

Tabell 3.1: Feil funnet i datasettet nkgdb _ sunnmore.

Id	φ_E	λ_E	H^*	$\text{\textit{Årsak}}$
	$^{\circ}$	$^{\circ}$	m	
300036035	61.5563	7.7415	1174	Feil i øst-koordinat
300042546	62.1188	6.5332	4	Feil i øst-koordinat
321000187	61.0348	5.1538	72	Feil høyde (722.4 m)
321005296	62.1188	6.5330	4	Feil i øst-koordinat
321009656	62.7740	7.2628	134.9	Tunnelmåling
321009657	62.7800	7.2518	143.9	Tunnelmåling
321024796	62.2297	5.8860	0	Tunnelmåling
321024797	62.2187	5.9115	0	Tunnelmåling
321024798	62.2180	5.9367	0	Tunnelmåling
321024799	62.2175	5.9565	0	Tunnelmåling
321024800	62.2172	5.9733	0	Tunnelmåling
321024801	62.2223	5.8947	0	Tunnelmåling
321024802	62.2375	5.8882	0	Tunnelmåling
321025114	61.2085	5.8222	11.2	Feil høyde/feil koord.

og feil sfærisk radius. Den globale andelen påvirkes igjen i mindre grad (som nevnt over), enn normaltyngden som vil være det største bidraget til feil residual-tyngdeanomali. Data med feil høyde må også slettes.

Tilslutt må målinger gjort inne i tunneler fjernes fra datasettet. Dette fordi målingene ikke er gjort på overflaten av topografien, noe som er krav når man skal bruke tyngdeanomali til å beregne en kvasigeoide (jf. Molodenskii). I tillegg vil terrengkorreksjonen til de aktuelle punktene bli feil, siden TC-programmet antar at korreksjonene skal skje på overflaten av topografien (m.a.o. feil høyde/massene over tunnelen blir neglisjert).

Gjennværende datapunkter blir, etter fjerningen av disse punktene, 28370.

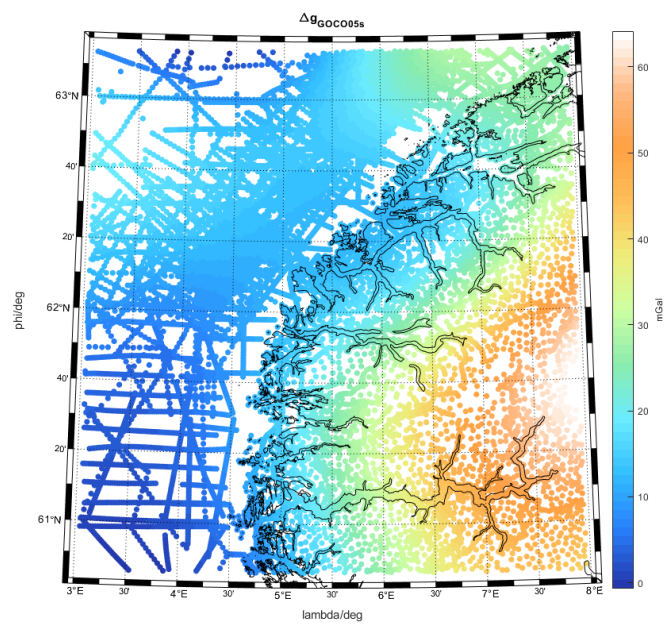
3.5 Globale tyngdeanomali

Det globale bidraget til tyngdeanomaliene kommer fra potensialmodellene GOCO05s og EGM2008. Hensikten med å fjerne disse verdiene fra tyngdesignalet er at vi ønsker et mellombølget signal, som vil være greiere å modellere med RBF. Tyngdeanomaliene til disse vil ha en langbølget struktur. Dette ser vi i figur 3.9a og figur 3.9b. Statistikken til disse figurene finnes i tabell 3.2.

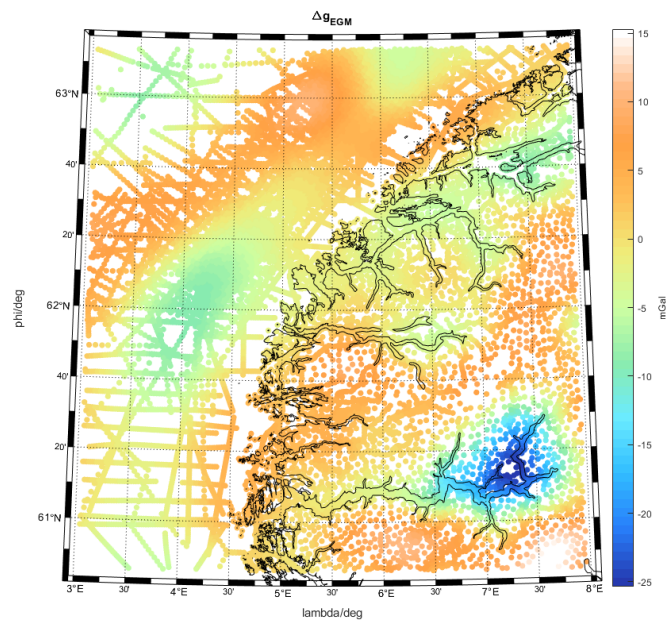
3.6 Residual-tyngdeanomali

Residualsignalet til tyngdeanomaliene Δg_{RES} finnes ved å bruke formel 2.2. Altså redusere de terrestriske tyngdedataene ned til et mellombølget og glatt signal. Ut i fra figur 3.8 ser vi at dette stemmer. Signalet har en bølgelengde på ca. 50-75 km.

Figur 3.10a, 3.10b og 3.11, sammen med tabell 3.2, 3.3, 3.4 og 3.5 illustrerer at de ulike bidragene til endelig tyngdeanomali-residual må være korrekte. Tabell 3.5 understreker dette godt. Det er viktig å understreke at det er normalt at de globale modellene bidrar til å forverre rms-verdien til datasettene.

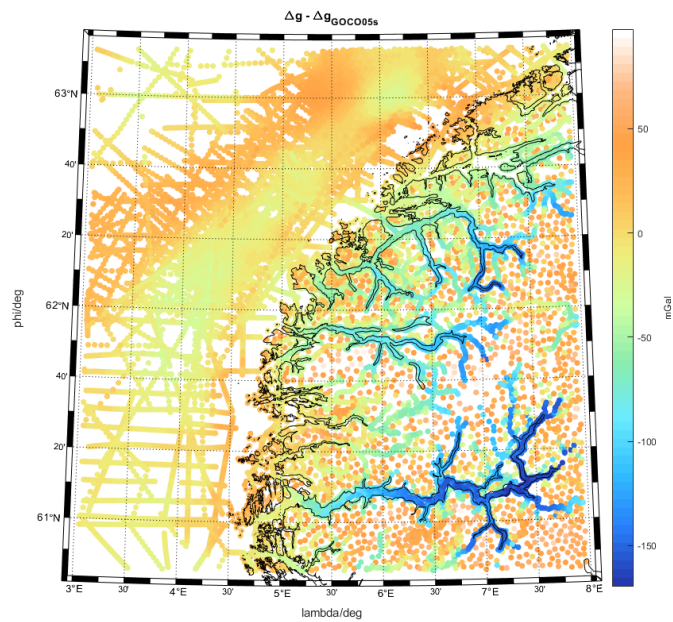


(a)

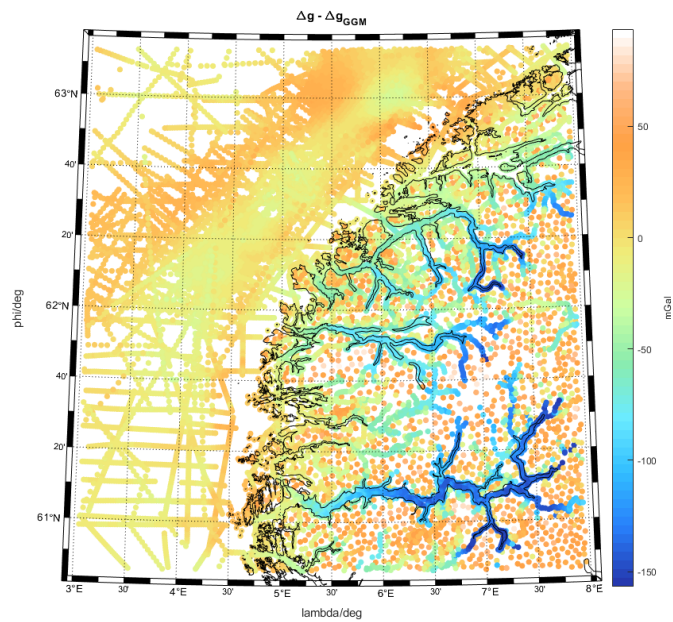


(b)

Figur 3.9: Figur (a) viser tyngdeanomalierne til GOCO05s. Figur (b) viser tyngdeanomalierne til EGM2008.

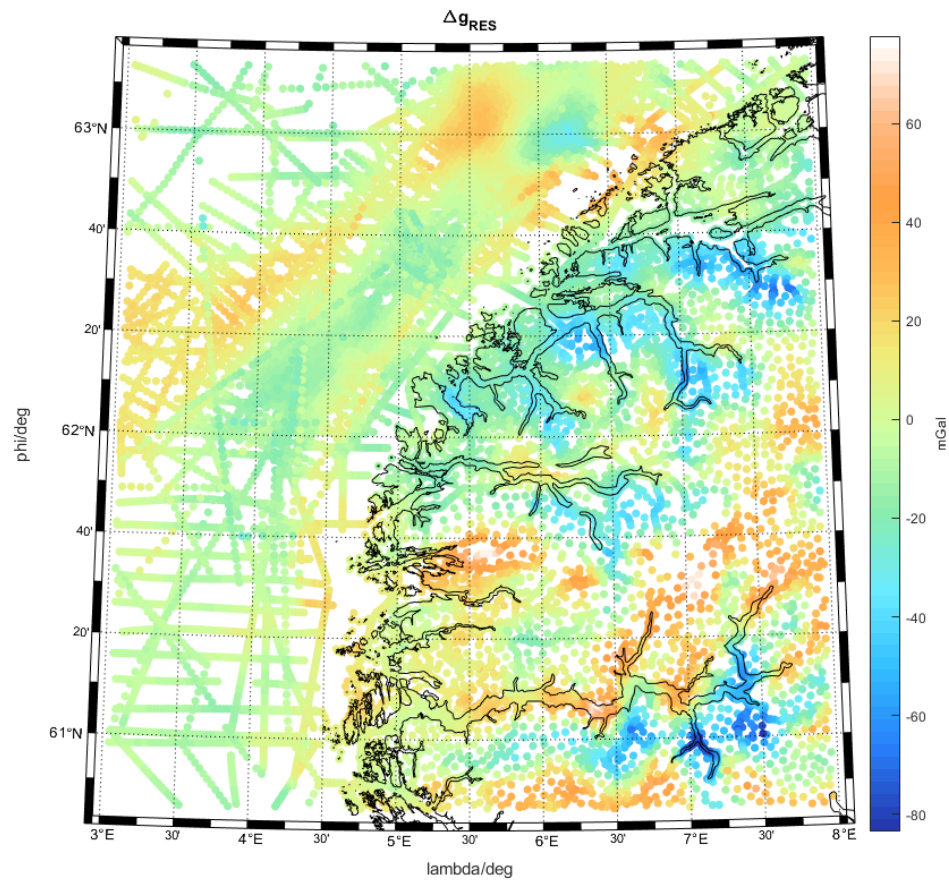


(a)



(b)

Figur 3.10: Figur (a) viser tyngdedataene minus normaltyngden, atmosfærisk korreksjon og globale verdier fra GOCO05s. Figur (b) viser det samme, men i tillegg er anomaliene fra EGM2008 fjernet. Figurene skal illustrere at signalet går fra et komplekst signal til et mer mellombølget signal.



Figur 3.11: Residualtyngdeanomalierne for dataområde 2.

Det endelige residualt har en snittverdi på $-3.91mGal$ og rms på $21.4mGal$. Dette er ikke veldig små tall, men ikke ulikt det Pock et al. (2015)[6] fant. Deres rms-verdi var på $11.06mGal$.

Tabell 3.2: Statistikk for tyngdeanomaliene i dataområde 2 for hvert enkelt steg i remove-restore prosessen.

	$\Delta g_{GOCO05s}$	$\Delta g_{EGM2008}$	Δg_{GGM}	Δg_{RTM}	Δg_{ATM}
Enhet	$mGal$	$mGal$	$mGal$	$mGal$	$mGal$
min	-0.6744	-25.3499	-6.5702	-214.1526	0.6775
maks	64.1490	15.2943	70.4669	136.3039	0.8700
gjenns.	22.8532	-1.7121	21.1411	-28.7832	0.8595
std	13.8153	6.3787	12.4998	52.6197	0.0291
rms	26.7044	6.6044	24.5598	59.9767	0.8599

Tabell 3.3: Statistikk for tyngdeanomaliene i dataområde 1 før sletting av datapunkter med feil.

	$g - \gamma_Q$	dg	$\Delta g -$ $\Delta g_{GOCO05s}$	$\Delta g -$ Δg_{GGM}	Δg_{RES}
Enhet	$mGal$	$mGal$	$mGal$	$mGal$	$mGal$
min	-129.3669	-128.4906	-169.6714	-156.7352	-196.1505
maks	190.3129	191.4890	127.4179	112.4557	104.0414
gjenns.	-7.8682	-6.9832	-30.3935	-28.8710	-3.3169
std	48.0652	48.0858	53.2772	49.4105	21.2532
rms	48.7042	48.5896	61.3363	57.2263	21.5102

Tabell 3.4: Statistikk for tyngdeanomaliene i dataområde 2 før sletting av datapunkter med feil.

	$g - \gamma_Q$	Δg	$\Delta g -$ $\Delta g_{GOCO05s}$	$\Delta g -$ Δg_{GGM}	Δg_{RES}
Enhet	$mGal$	$mGal$	$mGal$	$mGal$	$mGal$
min	-129.3669	-128.4906	-169.6714	-156.7352	-196.1505
maks	145.5820	146.6992	97.8140	93.6752	104.0414
gjenns.	-12.4433	-11.5614	-34.4139	-32.7014	-3.9246
std	47.8341	47.8509	54.6045	50.5969	21.0988
rms	49.4253	49.2270	64.5435	60.2440	21.4603

Tabell 3.5: Endelig statistikk for tyngdeanomaliene i dataområde 2.

	$g - \gamma_Q$	Δg	$\Delta g -$ $\Delta g_{GOCO05s}$	$\Delta g -$ Δg_{GGM}	Δg_{RES}
Enhet	<i>mGal</i>	<i>mGal</i>	<i>mGal</i>	<i>mGal</i>	<i>mGal</i>
min	-117.7140	-116.8440	-169.6714	-156.7352	-83.4899
maks	145.5820	146.6992	97.8140	93.6752	77.6798
gjenns.	-12.4316	-11.5497	-34.4029	-32.6908	-3.9076
std	47.8345	47.8513	54.6094	50.5998	21.0392
rms	49.4227	49.2246	64.5418	60.2407	21.3986

Kapittel 4

Geoideberegninger med RBFs

4.1 Kvasigeoiden

Resultatet fra syntesen ble dårlig, dette gjaldt for begge reutergridene. Med $\gamma = 2160$ var dette ventet, siden antallet splines på dette gridet var alt for få. Derimot var det uventet at $\gamma = 7000$ skulle gi en dårlig løsning. Grunnen til dette diskuteres i et senere avsnitt. Bidragene til den endelige kvasigeoiden fra de andre stegene (GGM, RTM) virket bedre. Resultatet kan sees i figur 4.1a, 4.1b, 4.2a osv. Tilhørende tabeller med statistikk er: Tabell 4.1.

4.2 Splinekoeffisientene

Splinekoeffisienten er per definisjon dimensjonsløs. Selv dette er tilfellet ønsker vi likevel at de skal ha samme struktur/mønster som geoiden. For de to løsningene var dette ikke tilfellet. Se figur 4.5a og figur 4.5b.

4.3 Regularisering

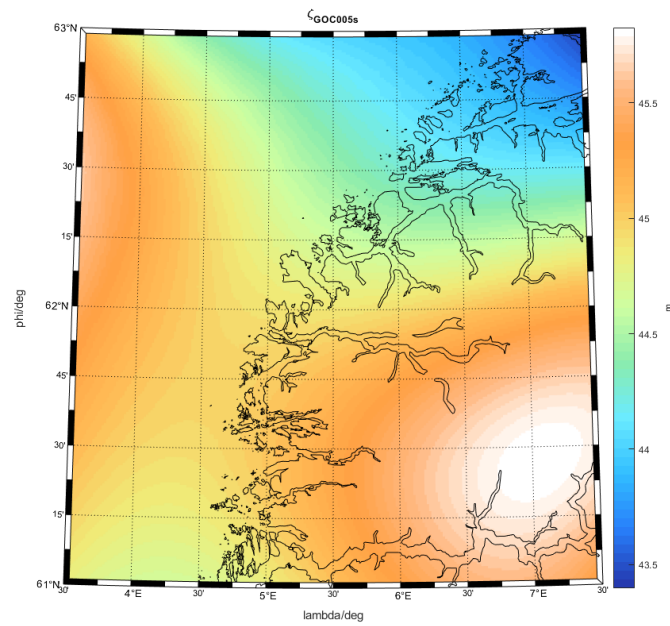
Regularisering av systemene (for $\gamma = 2160$ og $\gamma = 2160$) var ikke nødvendig. Dette var fordi antallet splines var for lavt. Tabell 4.4 viser valg av α , samt effekten denne regulariseringen hadde.

4.4 Tidsbruk

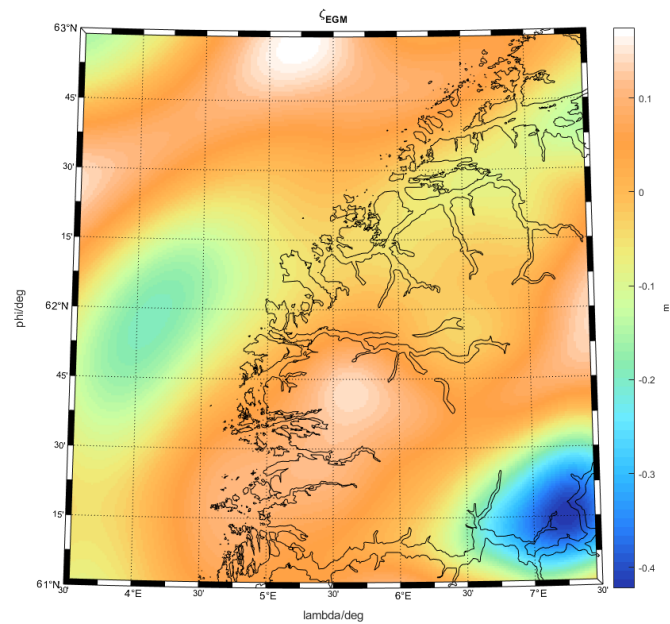
Tidsbruken ved de ulike stegene var jevnt over høyt, der oppsetting av designmatrisene for tyngdeanomalie og syntesen, samt terrengkorrekjonene var særlig tidkrevende. Matrisen under gir en oversikt over forventet tidsbruk:

4.5 Ressursbruk

For å kunne bruke et regulært grid, det være seg et lat-lon grid eller reuter, som eneste grid i en utjevning med RBF, måtte man hatt ca. 88000 splines. Dette betyr at designmatrisene

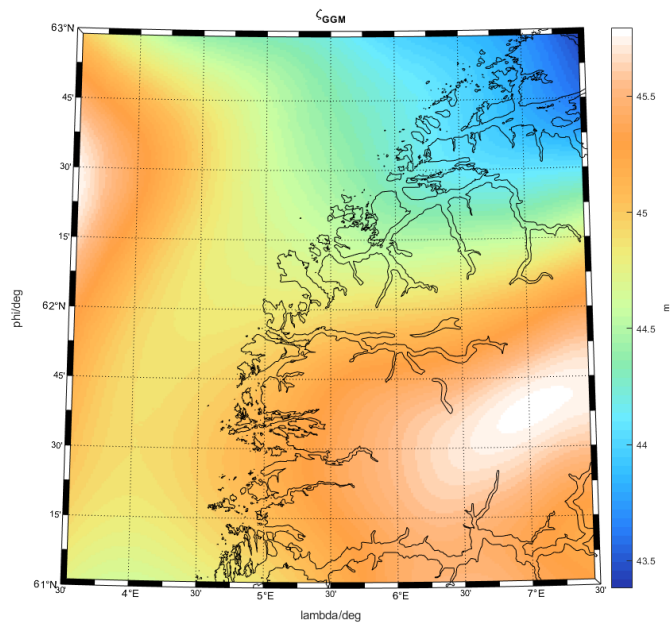


(a)

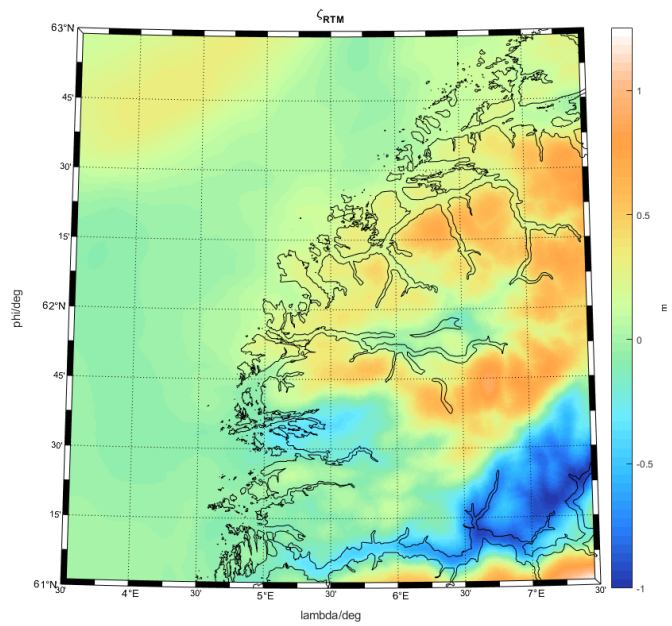


(b)

Figur 4.1: Figur (a) viser høydeanomalierne fra GOCO05s. Figur (b) viser viser høydeanomalierne fra EGM2008.

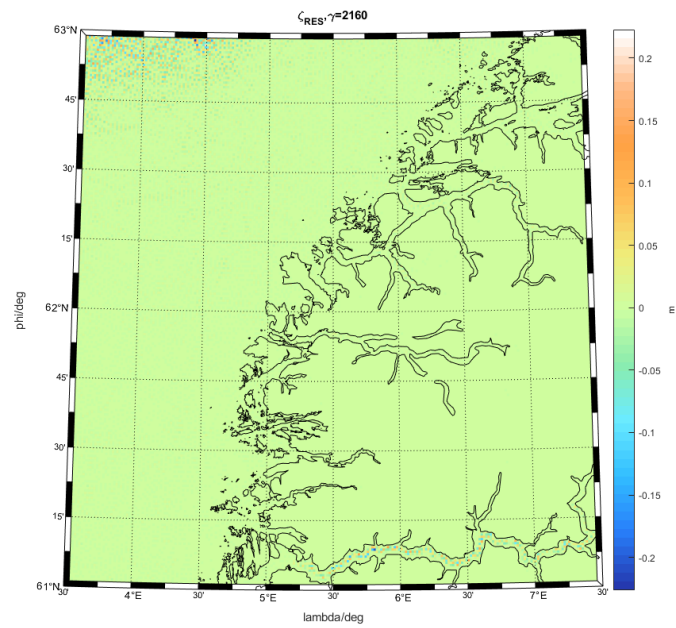


(a)

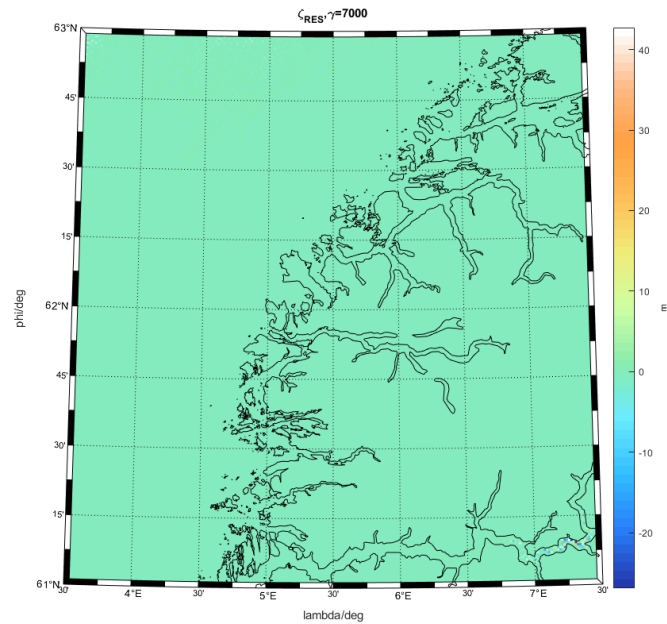


(b)

Figur 4.2: Figur (a) viser høydeanomaliene fra GGM. Figur (b) viser viser høydeanomaliene fra RTM.

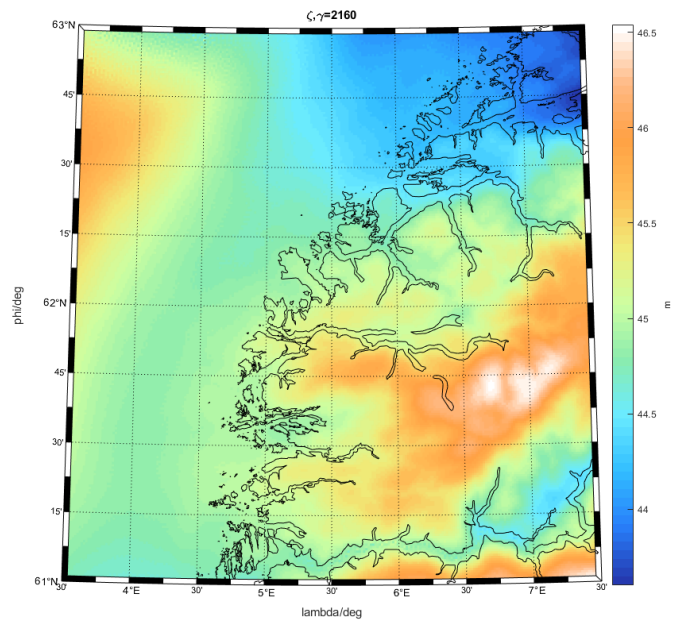


(a)

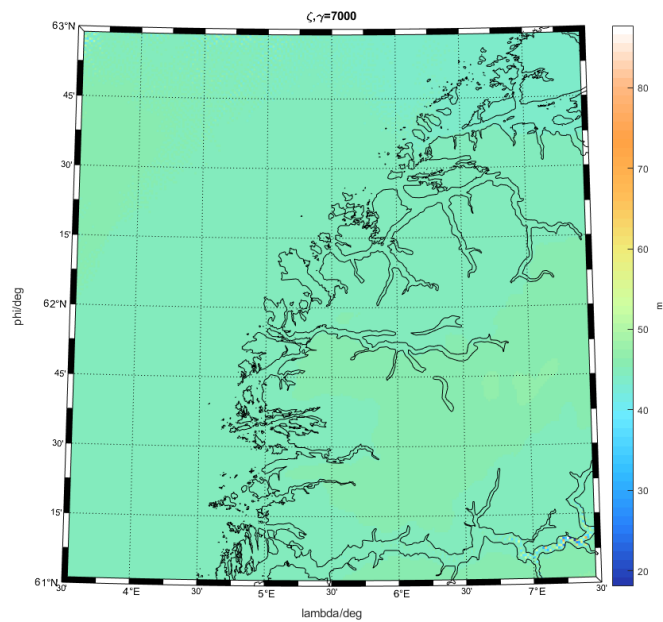


(b)

Figur 4.3: Figur (a) viser høydeanomaliene til residuallsignalet for $\gamma = 2160$. Figur (b) viser høydeanomaliene til residuallsignalet for $\gamma = 7000$.



(a)



(b)

Figur 4.4: Figur (a) Kvasigeodien for $\gamma = 2160$. Figur (b) Kvasigeodien for $\gamma = 7000$.

Tabell 4.1: Tabellen viser de statistiske egenskapene til ulike høydeanomalidatasett. Disse datasettene kommer fra de ulike remove-restore stegene.

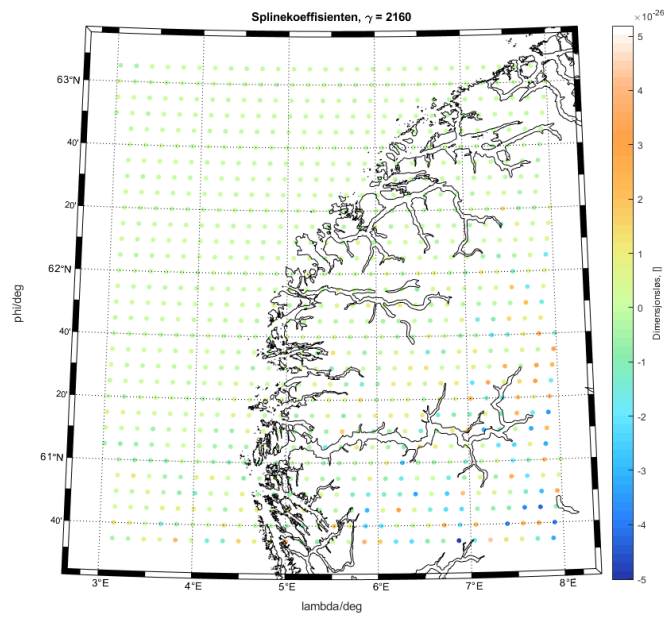
	$\zeta_{GOCO05s}$	$\zeta_{EGM2008}$	ζ_{GGM}	ζ_{RTM}
Enhet	m	m	m	m
min	43.3981	-0.4220	43.3818	-1.0
maks	45.8255	0.1749	45.7955	1.2520
gjenns.	44.9089	-0.0119	44.8971	0.0806
std	0.5175	0.1018	0.5051	0.2786
rms	44.9119	0.1025	44.8999	0.2900
	$\zeta_{RES,\gamma=2160}$	$\zeta_{RES,\gamma=7000,\alpha=0}$	$\zeta_{RES,\gamma=7000,\alpha_0}$	ζ_{HREF}
Enhet	m	m	m	m
min	-0.2263	-26.8667	-24.4832	44.2144
maks	0.2229	42.7178	42.6034	47.0402
gjenns.	-2.76e-06	9.58e-06	4.87e-05	44.2144
std	0.0100	0.5455	0.5277	0.7138
rms	0.0100	0.5455	0.5277	45.8277

Tabell 4.2: Tabellen viser de statistiske egenskapene til ulike høydeanomalidatasett. Datasettene gjelder for diskrete koordinater, som kommer fra det regulære lat-lon gridet knyttet til interesseområdet.

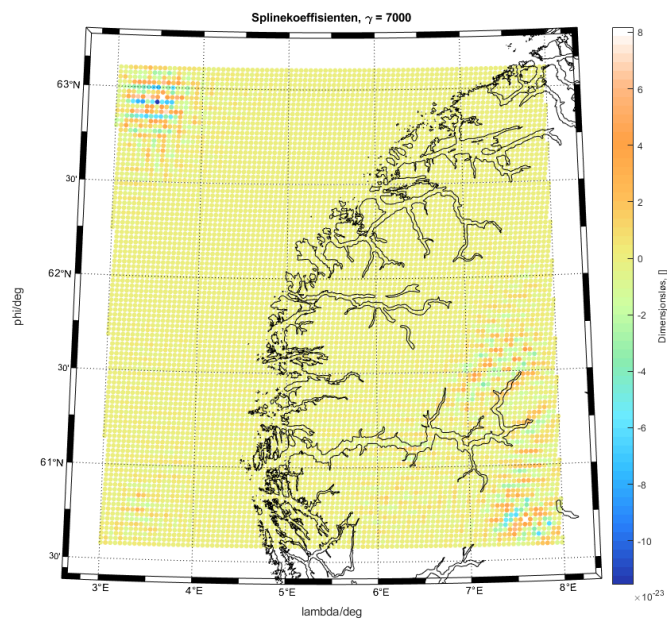
	ζ_{HREF-} $\zeta_{GOCO05s}$	ζ_{HREF-} ζ_{GGM}	ζ_{HREF-} $\zeta_{GGM,RTM}$	ζ_{HREF-} $\zeta_{\gamma=2160}$	ζ_{HREF-} $\zeta_{\gamma=7000}$
Enhet	m	m	m	m	m
min	0.0604	0.3636	-0.2101	-0.2101	-42.0085
maks	1.8310	1.6948	1.9594	1.9594	27.5566
gjenns.	0.7865	0.8055	0.6962	0.6962	0.6967
std	0.2826	0.2215	0.4284	0.4284	0.7546
rms	0.8357	0.8354	0.8174	0.8174	11.0270

Tabell 4.3: De statistiske egenskapene til utjevningsresidualene.

	$v_{RES,\gamma=2160,\alpha=0}$	$v_{RES,\gamma=7000,\alpha=0}$	$v_{RES,\gamma=7000,\alpha=\alpha_0}$
Enhet	$mGal$	$mGal$	$mGal$
min	-92.8082	-108.6813	-108.7781
maks	78.6148	91.6642	91.7412
gjenns.	-3.8214	-2.7919	-2.7923
std	20.3936	13.4972	13.4977
rms	20.7481	13.7827	13.7832



(a)



(b)

Figur 4.5: Figur (a) viser splinekoeffisienten for reutergridet med en gamma-parameter lik 2160. Figur (b) viser splinekoeffisienten for reutergridet med en gamma-parameter lik 7000.

Tabell 4.4: Statistikk knyttet til regulariseringen.

	$\gamma = 2160$	$\gamma = 7000$
Antall observasjoner	28370	28370
Antall splinekjerner (SK)	876	9057
α_0	$1.58 \cdot 10^{45}$	$8.58 \cdot 10^{45}$
α	$8.82 \cdot 10^{26}$	$6.86 \cdot 10^{24}$
$\text{cond}(\mathbf{N})$	$2.56 \cdot 10^3$	$1.53 \cdot 10^{12}$
$\text{cond}(\mathbf{N} + \alpha_0 \mathbf{I})$	$2.56 \cdot 10^3$	$6.91 \cdot 10^{11}$
$\text{cond}(\mathbf{N} + \alpha \mathbf{I})$	$2.56 \cdot 10^3$	$1.53 \cdot 10^{12}$

Tabell 4.5: Tidsbruk for ulike beregninger.

Beregning	Tidsbruk
	t
RTM	24
SHS, Δg	10
SHS, ζ	19
$A^{\Delta g}$	27
A^ζ	53

hadde blitt på langt over 32GB. Siden Matlab ikke vil initiere så store matriser, ei heller at maskinen min sitt minne har plass til så store matriser, gjør sammenligningen mellom regulære grid og datadrevne grid vanskelig.

4.6 Optimalisering av kode

For å kutte ned på tidsbruken ved designmatriseberegningene, optimaliserte jeg koden for denne beregningen noe. Optimaliseringen bestod av å unngå og kalkulere enkelte størrelser flere ganger (hver iterasjon), men heller lagre disse matrisene i minnet under hele beregningen. Disse verdiene var (formel 4.1, 4.2, 4.3):

$$\text{coeff} = \sqrt{c_n} \cdot \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2n+1}} \quad (4.1)$$

$$\text{rmatr} = \sum_{n=0}^{n_{max}} \frac{1}{r^2} \cdot \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \quad (4.2)$$

$$\text{tvec} = \sum_{n=2}^{n_{max}} GM(n-1) \quad (4.3)$$

4.7 Uønskede effekter

Problemet med at løsningen fra geoideregningen med RBF var ustabil og ga rare svar skyldes nok enten feil valg av n_{max} , eller at størrelsen på matriseelementene i designmatrisa var for store. Store matriseelementer kan føre til numerisk ustabilitet. En løsning på dette kan være å normalisere designmatrisene, men velge n_{max} ut i fra en GCV. Feilen skyldest ikke

Tabell 4.6: Tabellen viser de statistiske egenskapene til ulike høydeanomalidatasett. Datasettene gjelder for diskrete koordinater, som kommer fra datasettet HREF2025.

	ζ_{GGM}^{HREF-}	$\zeta_{GGM,RTM}^{HREF-}$	$\zeta_{GGM,RES,\gamma=2160}^{HREF-}$
Enhet	m	m	m
min	0.3652	0.0298	0.3640
maks	1.5831	1.8468	1.5831
gjenns.	0.7140	0.6793	0.7140
std	0.2267	0.4542	0.2266
rms	0.7490	0.8169	0.7490
	$\zeta_{GGM,RES,\gamma=7000}^{HREF-}$	$\zeta_{\gamma=2160}^{HREF-}$	$\zeta_{\gamma=7000}^{HREF-}$
Enhet	m	m	m
min	-0.2100	0.0288	0.0278
maks	6.1830	1.8464	6.3793
gjenns.	0.7368	0.6794	0.7022
std	0.4081	0.4543	0.5766
rms	0.8420	0.8170	0.9081

tyngdeanomaliene. Grunnen til dette er at mønsteret i resultatet var det samme uavhengig av inputsignal (tyngdeanomalier). I figur 4.6 er denne feilen tydelig.

4.8 Kvalitetsmål

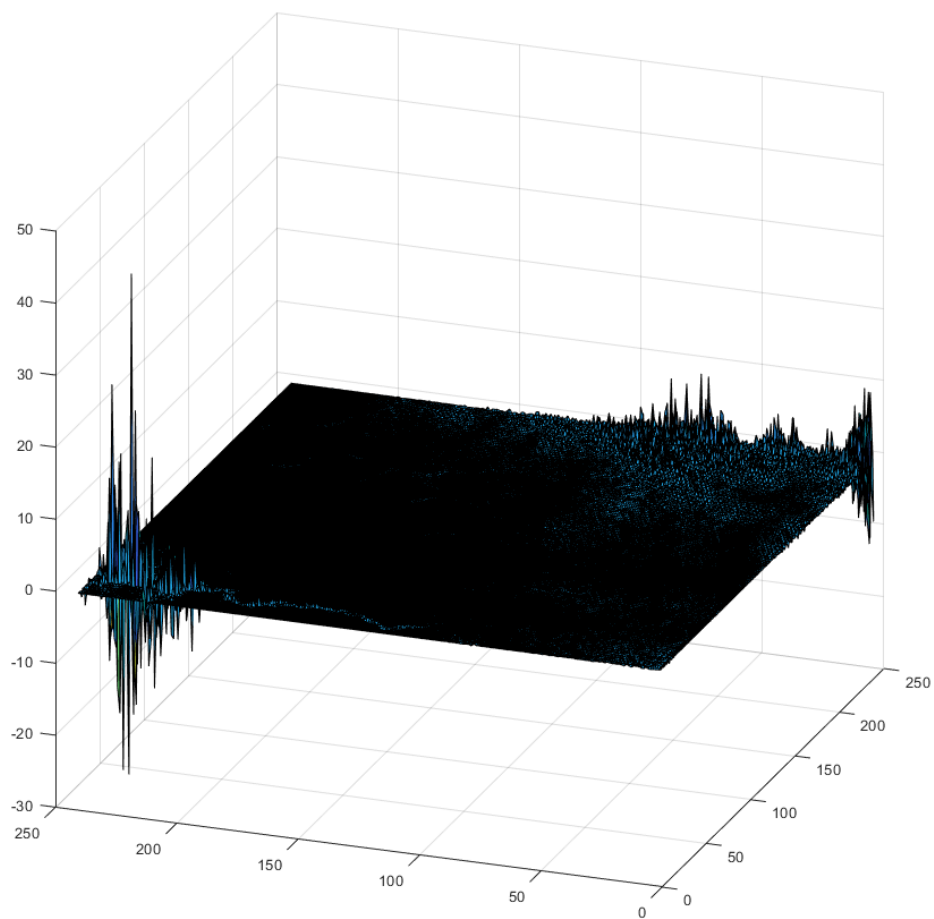
For å sikre at kvasigeoiden som er laget holder mål, ble det laget en differanse mellom GNSS/Nivellements punkter og beregnet kvasigeoide. Statistiske mål av denne differansen sier noe om hvor god resultatgeoiden er.

GNSS/Nivellements punktene er levert av Kartverket, og består av 405 punkter på land i Sunnmøre regionen. ζ , altså høydeanomaliene, har man funnet ved å måle ellipsoidisk høyde og normalhøyde. Henholdsvis ved hjelp av GNSS og nivellement. Bruker man den enkle sammenhengen 2.14 finner man ζ^{HREF} .

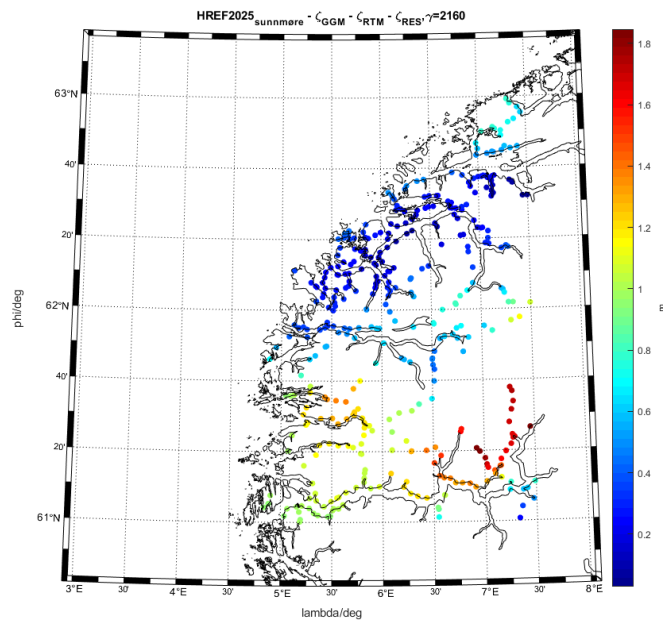
Den ferdige kvasigeoiden, er i motsetning til GNSS/Niv- punktene, på et regulært lat/lon grid (m.a.o. en flate). For å kunne sammenligne verdiene må man interpolere kvasigeoiden (kubisk) til koordinatene gitt i GNSS/Niv datasettet. Figur 4.7a og figur 4.7b viser et slikt differanseplot.

Ut i fra figur 4.7a og figur 4.7b ser vi at verken det grove reutergridet med $\gamma = 2160$ eller $\gamma = 7000$ er gode løsninger. Geoiden med $\gamma = 2160$ har en forskjell på et par meter, mens $\gamma = 7000$ har et par ekstremverdier på hele 6 m. At $\gamma = 2160$ blir en dårlig løsning er ventet, siden vi prøver å modellere geoidesignalet fra denne harmoniske graden ($\gamma = 2160$) og oppover. Antall SK blir for få, og de tilhørende spline- koeffisientene klarer ikke å fange opp det detaljerte/høyfrekvente signalet. I tabell 4.6 ser man at $\zeta_{RES,\gamma=2160}$ ikke påvirker løsningen nevneverdig (sammenlign de to kolonnene i midten).

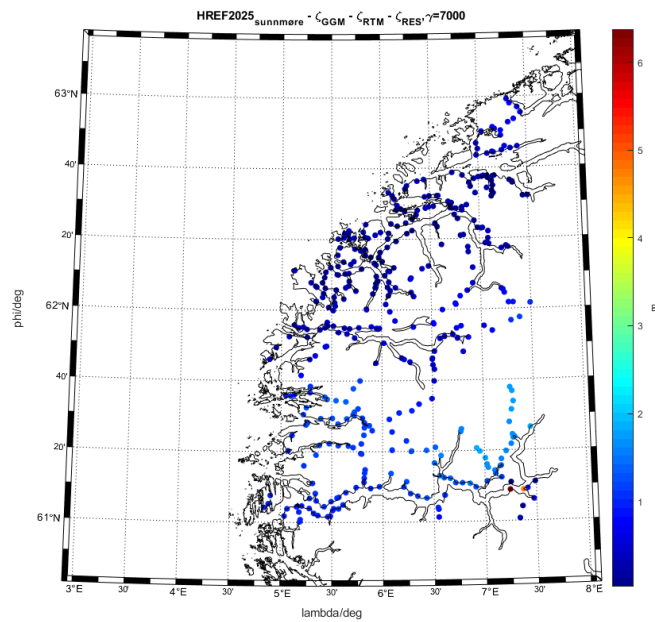
Ut i fra at $\gamma = 2160$ plasserer for få splines på det grove reutergridet, vil det være logisk om løsningen med $\gamma = 7000$ ga et bedre resultat. Dette er ikke tilfellet (se tabell 4.6 og sammenlign). Fjerner man de to store avvikene fra differansen, får man heller ikke et bedre



Figur 4.6: Uønskede effekter i residuallsignalet's høydeanomali.



(a)



(b)

Figur 4.7: Figur (a) viser forskjellen mellom høydeanomaliene fra GNSS/Nivellements punktene til Kartverket og høydeanomaliene beregnet med RBF. Gamma-parametere er satt til 2160 for dette datasettet. Figur (b) viser det samme som figur (a), men for en annen gamma-parameter. Denne er lik 7000.

resultat (lavere standardavvik og rms-verdi). At dette gridet gir større feil, sammenlignet med kontrollpunktene, enn om vi ikke tar med residual- høydeanomaliene i det hele tatt er rart. Dette må skyldes den nevnte ustabiliteten i løsningen, som øker med antall splinekjerner i det grove reutergridet. Normalisering av størrelser som inngår i designmatrisene for tyngdeanomalie og syntesen virker uunngåelig. Å sette $n_{max} = 21600$ for residual- høydeanomalie var kanskje et dårlig valg.

En av de andre bidragene til den endelige kvasigeoiden virker mer fornuftig. ζ_{GGM} bidrar til at løsningen kommer nærmere kontrollverdiene fra HREF. ζ_{RTM} gjør derimot ikke det (se tabell 4.6).

Kapittel 5

Konklusjon og fremtidsperspektiv

Løsningen til geoiden var helt klart ikke god. Dette skyldest at tiden ble for knapp til å få beregnet det fulle kvasi-geoidesignalet (med RBF på et datadrevet grid). I tillegg fikk jeg ikke undersøkt hvorfor høydeanomalisignalet fra den regionale beregningen inneholdt så mye støy/merkelige verdier.

Det positive med denne oppgaven har vært at det virker å være mulig å få beregnet høydeanomalier via en regional tyngdefeltsmodellering med radielle basisfunksjoner. Den globale andelen og residual terrengmodellen ser tilsynelatende korrekte ut, noe som virker lovende.

Skulle jeg gjort dette igjen ville jeg nok ha gjort noe annerledes. Hovedproblemet med å ikke få beregnet den fulle kvasigeoiden har nok vært mangelen på tid. Å effektivisere de delen av koden som kan effektiviseres, vil nok bidra noe. Et annet viktig område man kunne tenke seg å se nærmere på er parallellisering. Spesielt med tanke på oppbygging av designmatrisene. Kolonnene i disse matrisene kan beregnes parallellt, noe som vil bety innsparing av svært mye tid.

Et annet viktig moment man kunne ha brukt tid på å undersøke er om man kunne forbedret koordinatene til rådataene noe. Eller retttere sagt prøvd å få matchet terrengmodellen med disse koordinatene. Dette er viktig, siden små variasjoner i koordinater vil ha noe å si for terrengkorreksjonsverdien.

Bibliografi

- [1] Denker H (2013). *Regional gravity field modelling: Theory and practical results*, in G. Xu(ed.) *Sciences of Geodesy -II*. s. 185-292.
- [2] Wenzel H-G (1985) *Hochauflösende Kugelfunktionsmodelle für das Gravitationspotential der Erde*. *Wiss. Arb. d. Fachr. Verm.wesen d. Univ. Hannover* Nr. 137, Hannover.
- [3] Forsberg R, Tscherning CC (1997). *Topographic effects in gravity field modelling for BVP*. In: Sansò F, Rummel R (eds) *Geodetic boundary value problems in view of the one centimeter geoid, Lecture notes in earth sciences, vol 65*. Springer-Verlag s. 241–272 Berlin, Heidelberg.
- [4] Eicker, A. (2012). *Gravity Field Refinement by Radial Basis Functions from In-situ Satellite Data*. ISBN 978-3-7696-5088-4.
- [5] Klees, R., Tenzer, R., Prutkin, I., Wittwer, T. (2008). *A data-driven approach to local gravity field modelling using spherical radial basis functions. I. et al. J Geod (2008) 82: 457*. <https://doi.org/10.1007/s00190-007-0196-3>.
- [6] Pock, C., Mayer-Guerr, T., Kuehtreiber, N. (2015). *Consistent Combination of Satellite and Terrestrial Gravity Field Observations in Regional GeoidModeling: A Case Study for Austria*
- [7] Ophaug, V., Gerlach, C. (2017). *On the equivalence of spherical splines with least-squares collocation and Stokes's formula for regional geoid computation*. In *J Geod 91: 1367*. <https://doi.org/10.1007/s00190-017-1030-1>.
- [8] Naeimi, M. (2013). *Inversion of satellite gravity data using spherical radial base functions*. *PhD thesis, Deutsche Geodätische Kommission Reihe C, Nr. 711*.
- [9] Shen, Y., Xu, G. (2013). *Regularization and Adjustment*. in G. Xu(ed.) *Sciences of Geodesy -II*.
- [10] Bentel, K., Schmidt, M., Gerlach, C. (2013). *Different radial basis functions and their applicability for regional gravity field representation on the sphere*. *Int J Geomath 4:67–96*. [doi:10.1007/s13137-012-0046-1](https://doi.org/10.1007/s13137-012-0046-1).



Norges miljø- og biovitenskapelige universitet
Noregs miljø- og biovitenskapelige universitet
Norwegian University of Life Sciences

Postboks 5003
NO-1432 Ås
Norway