

Paul Gleinsvik og Oddmund Øverås

LANDMÅLING II

# MÅLELÆRE

NORGES LANDBRUKSHØGSKOLE

Institutt for landmåling

Norges landbrukshøgskole.

Institutt for landmåling.

1963.

Paul Gleinsvik og Oddmund Øverås

LANDMÅLING II.

M Å L E L Æ R E .

Forelesninger for hagebruks-, jord-  
bruks- og skogbruksstudentene ved  
Norges landbrukshøgskole.

	Side
Innledning.	1
Kap. I. De viktigste måleoperasjoner.	3
1. Måleenheter.	3
2. Stikking av rette linjer.	6
<sup>2.1.</sup> A. Stikking av rette linjer ved bruk av stikkstenger og lodd.	6
<sup>2.1.1.</sup> a. Ekstrapolasjon.	6
<sup>2.1.2.</sup> b. Interpolasjon.	7
<sup>2.1.2.1.</sup> b.1. Åpen siktelinje.	8
<sup>2.1.2.2.</sup> b.2. Lukket siktelinje.	8
<sup>2.2.</sup> B. Stikking av rette linjer ved bruk av teodolitt.	10
<sup>2.2.1.</sup> a. Ekstrapolasjon.	10
<sup>2.2.2.</sup> b. Interpolasjon.	10
3. Lengdemåling.	11
A. Direkte lengdemåling.	12
a. De viktigste korreksjoner ved lengdemåling og når en skal ta omsyn til dem.	12
b. Lengdemålingens utførelse.	16
b.1. Lengdemåling i horisontalt terreng.	16
b.2. Lengdemåling i hellende terreng.	16
b.3. Spesielle vansker ved lengdemåling av rette linjer.	18
c. De viktigste feil ved direkte lengdemåling.	19
B. Optisk avstandsmåling.	20
a. Optisk avstandsmåling med konstant avstandsmålende vinkel og variabel stanglengde.	20
a.1. Vanlig optisk avstandsmåling.	20
a.1.1. Vanlig optisk avstandsmåling ved horisontal siktelinje.	21
a.1.2. Vanlig optisk avstandsmåling ved hellende siktelinje.	22
a.1.3. Nøyaktigheten av den vanlige optiske avstandsmåling.	23
a.2. Optisk avstandsmåling ved bruk av selvreduserende teodolitt.	25
a.3. Optisk avstandsmåling ved hjelp av dobbeltbilder.	27
b. Optisk avstandsmåling med konstant stanglengde og variabel avstandsmålende vinkel.	28
C. Avstandsbestemmelse ved bruk av hjelpebasis.	30
4. Måling av horisontal- og vertikalvinkler.	32

	Side
A. Måling av horisontalvinkler.	32
a. Retnings- eller satsmåling.	33
b. Vinkelmåling ved repetisjon.	36
c. Horisontalvinkelmålingens nøyaktighet.	37
B. Måling av vertikalvinkler.	39
Kap II. Bestemmelse av trigonometriske punkter.	41
1. Koordinatberegning.	41
A. Aksesystemer og koordinater i landmålingen.	41
B. Beregning av retningsvinkler og avstander.	42
C. Overgang fra polarkoordinater til rettvinklede koordinater.	44
2. Triangulering.	45
A. Trigonometrisk punktbestemmelse ved triangulering.	47
a. Punktbestemmelse ved framskjæring.	47
a.1. Indirekte bestemmelse av koordinatene til nypunktet på grunnlag av sidelengder og retningsvinkler.	48
a.2. Direkte koordinatbestemmelse av nypunktet på grunnlag av retningsvinklene.	48
a.3. Observasjons- og beregningskontroll ved framskjæring.	49
a.4. Avvikende former for framskjæring.	50
a.5. Framskjæringens nøyaktighet.	51
b. Punktbestemmelse ved sideskjæring.	51
c. Punktbestemmelse ved fullmålt trekant.	52
d. Punktbestemmelse ved tilbakeskjæring.	52
d.1. Tilbakeskjæringsberegning ved innføring av hjelpestørrelser.	53
d.2. Tilbakeskjæringsberegning ved direkte utledning av nypunktets koordinater.	54
d.3. Observasjons- og beregningskontroll ved tilbakeskjæring.	55
d.4. Tilbakeskjæringens nøyaktighet.	56
e. Hansens problem.	57
B. Orientering av satsserier i grunnlagspunkter (fastpunkter).	59
C. Eksentrisk oppstilling og signal.	60
a. Eksentrisk oppstilling.	61
b. Eksentrisk signal.	62
c. "Nedføring" av trigonometriske punkter.	63
D. Planlegging og beregning av triangelnett.	64

	Side
a. Planlegging av triangelnett	64
a.1. Trianguleringen bygger direkte på eksisterende triangulering.	65
a.2. Frie, selvstendige trianguleringer.	65
a.3. Den nye triangulering knyttes til den eldre.	66
b. Beregning av triangelnett.	67
E. Den trigonometriske høydemåling.	68
a. Litt om den atmosfæriske refraksjon.	68
b. Den trigonometriske høydeformel.	69
b.1. Uten å ta hensyn til jordkrumning og refraksjon.	69
b.2. Når det tas hensyn til jordkrumning og refraksjon.	70
c. Gjensidige vertikalkvinkelmålinger.	72
d. Nøyaktigheten av den trigonometriske høydebestemmelse.	73
e. Beregning av høydenett.	74
3. Linjetriangulering (trilaterasjon).	74
4. Polygonmåling.	78
A. Lukket polygon.	79
B. Polygondrag.	81
C. Knutepunktberging.	83
D. Oppsøking av grove feil.	84
a. Feil på vinkelmålingen.	84
b. Feil på sidemålingen.	85
E. Høydeberegning av polygonale drag.	86
F. Planlegging og utføring av polygonmåling.	87
G. Spesielle problemer i forbindelse med polygonmåling.	88
5. Kompass- eller bussoldrag.	90
Kap. III. Bestemmelse av detaljpunkter.	93
1. Rettvinkel- eller perpendikulærmetoden.	94
2. Polarkoordinatmetoden. (Den tachymetriske metode).	96
Kap. IV. De viktigste oppmålings- (kartleggings-) metoder.	99
1. Kombinering av linjetriangulering og rettvinkelmetoden.	99
2. Kombinering av polygondrag og tachymetri.	100
3. Kombinering av triangulering, polygonering og tachymetri.	102

	Side
Kap. V. Nivellering og barometrisk høydemåling	103
1. Nivellering.	104
A. Fastmerkenivellement.	105
B. Linjenivellement.	106
C. Flatenivellement.	108
a. Den indirekte metode.	108
b. Den direkte metode.	109
D. Tverrprofilering.	110
E. De viktigste feilkilder ved nivellering.	111
a. Systematiske og ensidige virkende feil.	111
a.1. Feil i stangens deling	111
a.2. Siktelinjen er ikke parallell med libelle-aksen.	111
a.3. Jordkrumningen.	112
a.4. Den atmosfæriske refraksjon.	112
a.5. Stangen holdes feilaktig.	113
a.6. Feil som følge av at instrument og stang synker under nivelleringen.	113
b. Tilfeldige feil ved nivellering.	113
2. Barometrisk høydemåling.	114
Kap. VI. Utarbeidelse og bruk av kart m.v.	116
1. Utarbeidelse av kart.	116
A. Forberedende arbeider.	116
B. Konstruksjon av kart.	117
a. Konstruksjon av måleresultater ved rettvinkelmetoden.	117
b. Konstruksjon av tachymetermålinger.	117
c. Konstruksjon av høydekurver.	118
C. Karttegning. Kartets utstyr og innhold.	119
D. Reproduksjon (kopiering) av kart.	120
E. Målestokkendring (forminskning og forstørring) av kart.	120
2. Bruk (utnyttelse) av kart.	121
A. Arealberegning.	121
a. Kartkrympning.	122
b. Arealberegning på grunnlag av kart.	123
b.1. Arealberegning på grunnlag av mål tatt på kartet.	123
b.2. Arealberegning ved "skritting" og rute-telling.	123
b.3. Arealberegning ved bruk av planimeter.	124

	Side
c. Arealberegning ved den halvgrafiske metode.	124
d. Arealberegning på grunnlag av mål tatt i marka.	125
B. Grenseregulering, avsetting av arealer m.v.	126
a. Grenseregulering.	126
a.1. Ensartet grunnverdi.	126
a.2. Uensartet grunnverdi.	127
b. Avsetting av arealer.	127
C. Litt om utstikkingsarbeider.	128
a. Utstikking av enkle punkter.	128
b. Utstikking av rette linjer.	129
D. Annen anvendelse av karter.	129
3. Litt om norske karter	131
A. Kartet utgitt av Norges geografiske oppmåling.	131
B. Kartet som utgis av andre institusjoner.	132

## Innledning.

Landmålingens viktigste oppgave er oppmåling av større eller mindre deler av jordoverflaten.

En skiller ofte mellom høyere og lavere landmåling eller geodesi (geodesi er gresk og betyr egentlig jorddeling).

Den høyere geodesi omhandler oppmåling eller bestemmelse av så store deler av jordoverflaten at en må ta omsyn til jordkrumningen. Bestemmelsen av jordklodens form og størrelse hører også inn under den høyere geodesi.

Med den lavere geodesi forstår vi den del av landmålingen som befatter seg med oppmåling av så små områder av jordoverflaten at jordkrumningen kan neglisjeres ved punktenes bestemmelse i grunnriss. Målingene tenkes her utført i et horisontalt plan og ved beregning av måleresultatene kan en nytte formler fra den plane geometri og trigonometri. Denne geometri er, i motsetning til den geometri (ellipsoidegeometri) som nyttes ved den høyere landmåling, forholdsvis enkel.

Vi skal her innskrenke oss til behandling av den lavere geodesi. Den grafiske fremstilling av måleresultatene tenkes da utført ved projeksjoner på enten et horisontalt eller vertikalt plan. I første tilfelle får vi et kart, i annet tilfelle en profil.

Måleoperasjonene inndeler vi vanligvis i horisontalmålinger og vertikal- eller høydemålinger. De førstnevnte tar sikte på å fastlegge punktenes gjensidige beliggenhet på selve referensflaten (ved den lavere landmåling på et horisontalt plan). Vertikal- eller høydemålingen har til formål å bestemme punktenes gjensidige beliggenhet i vertikal retning, dvs. å bestemme punktenes høydeforskjeller.

Retter vi oppmerksomheten mot oppmålingens formål, er det hensiktsmessig med en inndeling i geodetiske, topografiske og økonomiske målinger.

De geodetiske målinger har til formål å bestemme jordens form og størrelse og dessuten å etablere et system av godt bestemte punkter (triangelpunkter og høydefastpunkter) som kan tjene som grunnlag for de etterfølgende detaljmålinger.

De topografiske målinger har til formål å skaffe til veie oversiktskarter, såkalte topografiske karter, dvs. karter M. 1:25000 og mindre.

Ved de økonomiske målinger tar en sikte på fremstilling av karter i større målestokker. Det kan være økonomiske oversiktskarter i M. 1:10000 eller M. 1:5000 eller økonomiske detaljkarter M. 1:2000, 1:1000, 1:500 og større.



De geodetiske og topografiske målinger utføres i vårt land av Norges geografiske oppmåling (N.G.O.). De økonomiske målinger utføres av f.eks. Jordskifteverket, Direktoratet for statens skoger, kommunale oppmålingsvesener, private firmaer osv.

Undervisningsmessig vil vi inndelegge faget landmåling i instrumentlære, målelære og fotogrammetri.

I den foreliggende målelære vil vi kun behandle de måleoperasjoner, oppmålings- og beregningsmetoder som nyttes ved økonomisk kartlegging, og det forutsettes hele tiden at det dreier seg om så små områder at jordkrumningen kan neglisjeres ved bestemmelsen av punktene i grunnrissplanet. Ved høydebestemmelsen må vi imidlertid ta jordkrumningen i betraktning.

Dette forelesningshefte tar sikte på, foruten å dekke det som foreleses for (H.J.S.) i 1. studieår, også å dekke det meste av det som gjennomgås for (J. og S.) annet studieår. (Den som foreleser faget vil gjøre studentene kjent med hva som vil bli gjennomgått 1. studieår).

Forelesningene for utskiftingsstudentene er betydelig mer detaljerte og fullstendige og behandler mange problemer som det foreliggende hefte ikke kommer inn på. Da en for oversiktens skyld og for å gjøre innføringen i stoffet så kortfattet som mulig, har sløffet fullstendige matematiske utledninger, vises interesserte til utskiftingsstudentenes forelesningshefter.

Dette forelesningsheftet må ses i nøye sammenheng med den utarbeidede "Rettledning for de praktiske øvelser". Denne inneholder rettledninger i teodolittøvelser, arealberegning med planimeter, kartkonstruksjon og karttegning, dessuten en del beregningseksempler med de nødvendige kommentarer.

## KAPITTEL I.

### DE VIKTIGSTE MÅLEOPERASJONER.

Ved oppmåling av et terreng område kan en nytte ulike målemetoder (f.eks. etablering av et linjenett kombinert med bruk av rettvinkelapparater og målebånd for innlegging av detaljpunktene, eller etablering av polygonale drag og innmåling av terrengdetaljer ved bruk av teodolitt osv.).

Hver enkelt målemetode er sammensatt av ulike måleoperasjoner. Vi skal nedenfor behandle de tre viktigste, nemlig stikking av rette linjer, lengdemåling og horisontal- og vertikalvinkelmåling, men først er det nødvendig med en kort gjennomgåelse av de måleenheter som nyttes i landmålingen.

#### 1. Måleenheter.

Å måle en størrelse vil si å undersøke hvor mange ganger størrelsen inneholder en i og for seg vilkårlig valgt enhet, måleenheten. De størrelser som det oftest blir spørsmål om å måle ved oppmålingsarbeider er avstander og vinkler.

Som grunnlag for lengdemålingen nyttes i de fleste land metersystemet, som ble innført i Frankrike under den franske revolusjon. Enheten er meteren. Det var fra begynnelsen av meningen at meteren skulle være et naturmål, idet en tok sikte på å gjøre den lik en timilliontedel av meridiankvadranten. For å få fastslått lengden av meridiankvadranten ble det satt i gang omfattende gradmålinger, og på grunnlag av disse ble det utarbeidet et normalmål, den såkalte arkivmeteren, som representerer det opprinnelige grunnlag for metersystemet. Senere ble det opprettet et internasjonalt vitenskapelig institutt ved Paris og dette instituttet fikk i oppdrag å utarbeide prototyper av arkivmeteren, som skulle fordeles på de land som etter hvert gikk over til metersystemet. En av disse prototypene, som ble fremstilt av platiniridium, ble valgt til verdensprototyp. Den oppbevares i Sèvres og representerer nå det egentlige grunnlaget for metersystemet.

Som allerede nevnt, var det opprinnelig forutsetningen at meteren skulle være et naturmål, nemlig lik en timilliontedel av meridiankvadranten. Imidlertid er det forbundet med store vanskeligheter å bestemme meridiankvadrantens lengde nøyaktig. Nyere målinger har vist at meteren ikke svarer helt til sin opprinnelige definisjon slik at en måtte oppgi denne definisjon

og knytte meterens definisjon til verdensprototypen.

På generalkonferansen for mål og vekt ble det i 1960 besluttet å gå over til ny definisjon av meteren, slik at den på nytt får karakteren av naturmål, riktignok ikke lenger knyttet til jordklodens dimensjoner. Den nye offisielle definisjon er som følger :

1 meter er en lengde som er lik 1650763,73 bølgelengder i det tomme rom av den stråling fra kryptonatomet 86 som tilsvarer overgangen mellom nivåene  $2 P_{10}$  og  $5 d_5$ .

Meteren ble innført ved lov i Norge i 1875. Som flatemål anvendes kvadratmeteren. Nedenfor er angitt de enheter for lengdemål og flatemål, som har offisiell gyldighet i Norge, og deres forkortelser i samsvar med lov om mål og vekt av 1946. Alle disse enheter er avledet av meteren.

<u>Lengdemål.</u>		<u>Flatemål.</u>	
kilometer	km = 1000 meter	kvadratkilometer	km <sup>2</sup> = 10 00 000 m <sup>2</sup>
meter	m	hektar	ha = 10 000 "
desimeter	dm = 0,1 "	dekar <i>deka</i>	da = 1000 "
centimeter	cm = 0,01 "	ar	a = 100 "
millimeter	mm = 0,001 "	kvadratmeter	m <sup>2</sup>
mikron	$\mu = 10^{-6}$ "	kvadratdesimeter	dm <sup>2</sup> = 0,01 "
		kvadratcentimeter	cm <sup>2</sup> = 0,0001 "
		kvadratmillimeter	mm <sup>2</sup> = 0,000001 "

Betegnelsen mål, som er meget alminnelig her til lands, betydde opprinnelig 2500 kvadratalen, som svarer til 984,3 m<sup>2</sup>. Nå til dags brukes betegnelsen mål i betydning av 1000 m<sup>2</sup>, men betegnelsen er altså ikke offisiell. Heller ikke er betegnelsen mil opptatt i loven. I daglig tale blir mil som regel brukt for 10 km. I vårt gamle målesystem betydde en mil, eller en norsk landmil som den også ble kalt for, 36 000 fot, som svarer til ca. 11,3 km. For øvrig er mil ingen entydig lengdeangivelse: 1 geografisk mil = 7 420 m, 1 sjømil (norsk) = 7 409 m, 1 engelsk mil = 1 609 m.

En vinkels størrelse kan enten uttrykkes i gradmål eller i absolutt vinkelmål. Av gradmål har vi to systemer, nemlig :

1. Den seksagesimale deling med enheten 1 grad (1°) som er lik 360-delen av en hel omdreining. Den deles i 60 minutter (') à 60 sekunder (").
2. Den centesimale eller nye deling. Enheten i dette systemet er 1 grad (1<sup>g</sup>) som er 400-delen av en hel omdreining. Den deles i 100 minutter (°) à 100 sekunder (°°).

Overgangen fra det ene system til det andre skjer ved hjelp av

relasjonene :

$$\begin{aligned} 1^\circ &= 1,1111,111^g & 1^g &= 0^\circ 54' 00'' \\ 1' &= 0,0185,185^g & 1^c &= 0^\circ 00' 32,4'' \\ 1'' &= 0,0003,086^g & 1^{cc} &= 0^\circ 00' 0,324'' \end{aligned}$$

I det absolutte vinkelmålsystemet blir størrelsen av vinklene uttrykt ved rene tall, nemlig som forholdet mellom buen og radien. Enheten er én radian, som er lik den vinkel hvis bue er lik radien.

Sammenhengen mellom gradmålsystemet og det absolutte systemet finnes med utgangspunkt i følgende proporsjon (se fig. 1) :

$$\frac{\alpha^g}{400} = \frac{b}{2\pi r}$$

idet jo hele omkretsen er lik  $2\pi r$ , dvs.

$$\frac{b}{r} = \alpha_{\text{abs.}} = \frac{\alpha^g}{400:2\pi} = \frac{\alpha^g}{\rho^g}$$

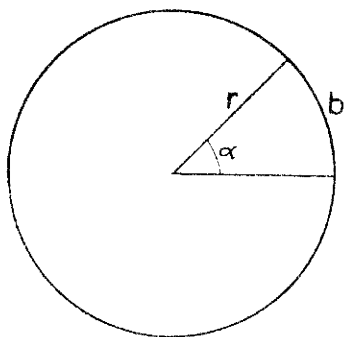


Fig. 1

idet vi innfører betegnelsen  $\rho$  for konstanten  $\frac{400}{2\pi}$ . Ved gammel deling fås på tilsvarende måte verdien  $\frac{360}{2\pi}$  for  $\rho$ .

Vi lar i det etterfølgende tegnet  $\hat{\alpha}$  symbolisere gradmål, mens en vinkel uten denne indekstilføyelse betyr at vinkelen opptrer i absolutt vinkelmål. De grunn-

leggende ligninger for overgangen fra det ene vinkelmålsystemet til det andre blir da

$$\alpha = \frac{\hat{\alpha}}{\rho} \quad \text{og} \quad \hat{\alpha} = \alpha \cdot \rho$$

hvor det er underforstått at  $\hat{\alpha}$  og  $\rho$  skal uttrykkes i samme enheter. En vinkel uttrykt i gradmål omregnes altså til radianer ved å dividere med  $\rho$ , og en vinkel i radianer overføres til gradmål ved å multiplisere med  $\rho$ . For omsettingstallet  $\rho$  gjelder følgende verdier :

$$\begin{aligned} \rho^0 &= 57,29578 & , & & \rho^g &= 63,6619,8 \\ \rho' &= 3437,747 & , & & \rho^c &= 6366,198 \\ \rho'' &= 206264,8 & , & & \rho^{cc} &= 636619,8 \end{aligned}$$

Størrelsen  $\rho$ , som er gitt ved  $\frac{400}{2\pi}$ , resp.  $\frac{360}{2\pi}$ , blir følgelig lik vinkelverdien av én radian, idet hele omkretsen jo vil utgjøre  $2\pi$  radianer.

Det er viktig å ha klart for seg at i de trigonometriske funksjoner opptrer vinklene egentlig i absolutt vinkelmål. Dette forhold er av betydning ved alle matematiske operasjoner som derivasjoner og integrasjoner, i forbindelse med trigonometriske funksjoner. Dersom vi f.eks. med utgangs-

punkt i funksjonen  $y = \sin x$ , danner  $dy = \cos x dx$ , opptrer  $dx$  her i absolutt vinkelmål.

## 2. Stikking av rette linjer.

I landmålingen defineres en rett linje som det vertikale plan som kan legges gjennom de to punkter som bestemmer linjen.

Til "materialisering" av en linje gjør vi oss bruk av landmålerstokker (stikkstenger). De kan være av tre, stål eller aluminium og er vanligvis sekskantede eller runde og malt avvekslende med hvite og sorte, eller hvite og røde halvmeterfelter. I den ene enden er stikkstengene forsynt med en solid spiss av jern, en såkalt doppsko.

Ved innsikting av stikkstenger i en linje må stikkstengene bringes i det vertikale plan som markerer linjen. Det er altså strengt tatt ikke nødvendig å loddrettstille stikkstengene, men av praktiske hensyn gjøres det vanligvis likevel. Innsikting av stenger i linjen foregår på den måten at vi loddrettstiller stikkstenger i de to punktene som fikserer linjen. Ved sikting bringes så nye stenger inn i det vertikale plan som de to første stengene markerer. Loddrettstillingen av stengene skjer ved hjelp av lodd, idet vi benytter oss av det faktum at en linje er loddrett når den befinner seg i to vertikale plan. Som slike vertikale kontrollplan bør velges linjeplanet og vertikalplanet vinkelrett på linjeretningen.

Linjestikkingen kan utføres på ulike måter. Vi vil her skille mellom linjestikking ved hjelp av stikkstenger og lodd og linjestikking ved bruk av teodolitt. Oppgaven kan dessuten foreligge på flere ulike måter. Vi vil behandle en del av de oppgaver som vi oftest vil støte på i praksis.

### A. Stikking av rette linjer ved bruk av stikkstenger og lodd.

#### a. Ekstrapolasjon.

Oppgaven foreligger i den form at vi har to gitte punkter A og B (se fig. 2), og linjen som disse to punktene fikserer, skal forlenges til siden for B. Stikkingen kan utføres av én person. Først anbringes stenger i A og B. Deretter følger innsikting av nypunktene i rekkefølge 1, 2, .....



Fig. 2

Avstanden mellom nypunktene bør være 50 - 100 m dersom terrengforholdene tillater det. Er det behov for tettere stangfølge, kan supplerende punkter innsiktes senere. For å få en tilstrekkelig sikker bedømmelse av stengenes plassering i linjen settes først stengene ned så nøyaktig som operatøren er i stand til. Deretter går noen skritt tilbake og innsiktingen kontrolleres. Dette begrunnes med at stangen ses under en temmelig stor synsvinkel når vi beholder den på bare én armlengdes avstand. Følgelig blir bedømmelsen av innsiktingen usikker. Det går fram av fig. 3, som anskueliggjør forholdet. Holdes øyet i ro, vil det for iaktakeren fortone seg som om alle punkter innenfor den angitte sektor befinner seg i linjen markert av de to stengene. Ellers er det å merke seg at nøyaktigheten av innsiktingen blir større ved sikting med sola enn ved sikting mot sola.

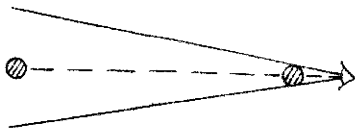


Fig. 3

gjør forholdet. Holdes øyet i ro, vil det for iaktakeren fortone seg som om alle punkter innenfor den angitte sektor befinner seg i linjen markert av de to stengene. Ellers er det å merke seg at nøyaktigheten av innsiktingen blir større ved sikting med

sola enn ved sikting mot sola.

Opptreer det materielle hindringer, som umuliggjør en direkte fortsettelse av linjen, f.eks. større trær, bygninger eller lignende, kan disse omgås ved å stikke ut en hjelpelinje parallell med hovedlinjen. I to punkter på hovedlinjen (pkt. 1 og 2 i fig. 4) oppreises perpendikulærer og

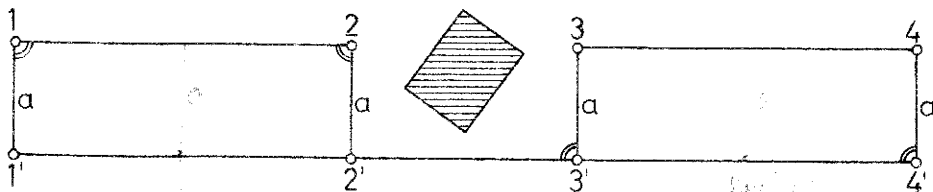


Fig. 4

det avsettes like lange stykker langs disse. Derved fås punktene 1' og 2' på hjelpelinjen. Linjen 1' og 2' forlenges så forbi hindringen, og vi kommer inn i hovedlinjen igjen ved i punktene 3' og 4' å gjenta samme prosess som i pkt. 1 og 2, og vi kommer fram til punktene 3 og 4 i hovedlinjen. For å oppnå en tilfredsstillende nøyaktighet må avstandene 1-2 og 3-4 være tilstrekkelig store. Det henger sammen med at feil på a-ene vil betinge en desto større endring av linjeretningen jo kortere avstanden mellom perpendikulærfotpunktene er. Videre må a-ene avsettes med størst mulig nøyaktighet, mens det kommer mindre an på nøyaktigheten i avsettingen av de rette vinkler. Kontroll på ovennevnte fremgangsmåte får vi ved å operere med 3 perpendikulærer på hver side av hindringen.

#### b. Interpolasjon.

Linjens endepunkter er gitt, og oppgaven går ut på å anbringe

stikkstenger i en del mellompunkter. Frengangsmåten vil avhenge av om det er mulig å sikte mellom endepunktene eller ikke, dvs. om siktelinjen er åpen eller lukket.

b.1. Åpen siktelinje.

Endepunktene A og B signaliseres med stikkstenger, om nødvendig forsynt med flagg dersom det dreier seg om så store avstander at det faller



Fig. 5

vanskelig å se en stikkstang fra det ene endepunkt til det andre. Stikkingen krever to personer. Måleren stiller seg bak det ene endepunktet (i fig. 5 er forutsatt pkt. A) og medhjelperen vinkes inn i linjen i rekkefølgen 1, 2, ..... Medhjelperen skal holde stengene med utstrakt arm og herunder plassere seg slik at kroppen befinner seg utenfor linjen. Oppgaven kan også løses av en enkelt person ved bruk av speil- eller prismekors.

b.2. Lukket siktelinje.

Dersom siktet mellom endepunktene er hindret av en mellomliggende høyderygg, løses oppgaven enklest etter metoden med suksessive til-

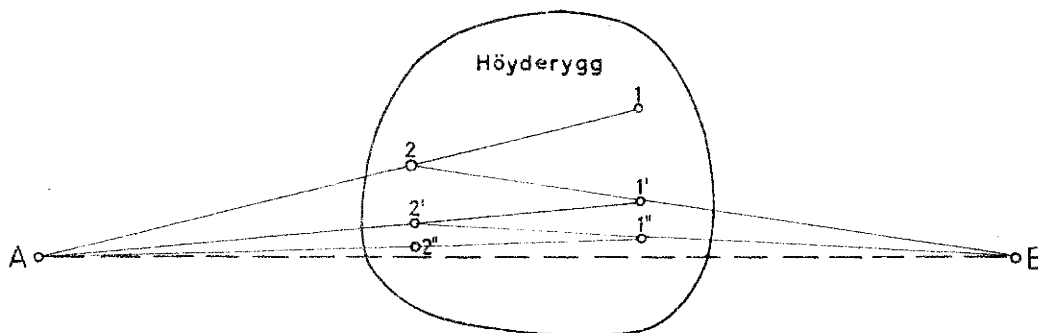


Fig. 6

nærnelser. Frengangsmåten i fig. 6 forutsetter to personer. Måleren og medhjelperen stiller seg i punktene 1 og 2 som velges således at det fra begge er mulig å sikte både til A og B. Så siktes f.eks. 2 inn i linjen 1-A, deretter 1' inn i linjen 2-B, og på denne måte fortsettes inntil begge er kommet i linjen mellom A og B. Avstanden mellom pkt. 1 og 2 bør ikke være for liten, ellers blir innsiktingen for unøyaktig. Jo nærmere pkt. 1 befinner seg linjen mellom A og B i utgangsstillingen, desto færre

forflyttinger må til for å komme inn i linjen. Ellers er det å merke seg at metodens "konvergens" forsøkes ved å gjøre de første sideforflyttingene noe større enn forutsatt i fig. 6. De første innsiktingene kan gjøres temmelig grove. Finsiktingen setter først inn når en kommer nær linjen, dvs. når sideforflyttingene blir små.

Er høyderyggen meget smal, slik at det er vanskelig å få tilstrekkelig avstand mellom pkt. 1 og 2, er det gunstigere å operere med tre stokker (se fig. 7).

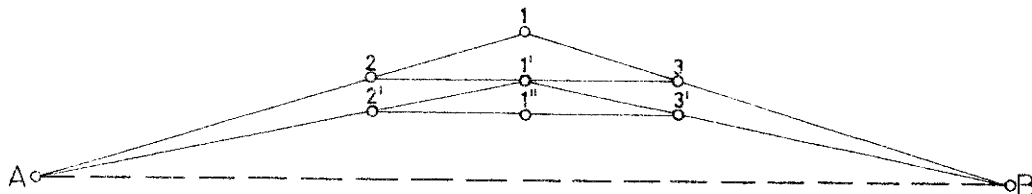


Fig. 7

Fra pkt. 1 må både A og B kunne ses. Først siktes 2 og 3 inn på linjen 1-A, resp. 1-B. Deretter 1' på linjen 2-3, og slik fortsettes til linjen mellom A og B nås.

Dersom hindringen ikke lar seg overvinne ved noen av de nettopp beskrevne metoder, kan en nytte følgende frengangsmåte som fører fram uansett karakteren av vedkommende hindring (se fig. 8). Først stikkes ut en

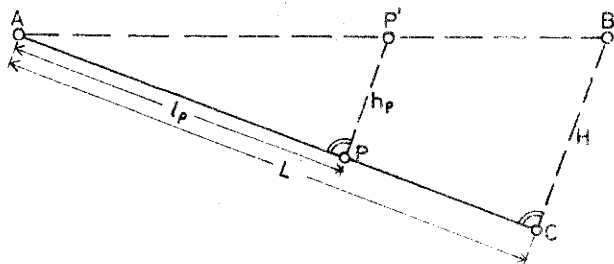


Fig. 8

hjelpelinje AC. Fra B nedfelles en perpendikular på hjelpelinjen. Punktet C er fotpunktet til denne perpendikulæren. Vi setter oss så til oppgave å avsette et punkt i linjen i nærheten av P. Det foregår ved å oppreise en perpendikular i P og avsette  $h_p$  langs denne, hvor  $h_p$  er gitt ved :

$$\frac{h_p}{l_p} = \frac{H}{L} \quad , \quad \text{dvs.} \quad h_p = \frac{H}{L} l_p$$

Vi må altså måle H , L og  $l_p$  . Ved å gå fram på denne måten kan vi få avsett så mange mellompunkter som ønskes i linjen AB.

Dersom avstanden AP' skal ha en gitt verdi S , oppnås det ved å bestemme l av proporsjonen :

$$\frac{S}{l_p} = \frac{\sqrt{L^2+H^2}}{L} \quad , \quad \text{dvs.} \quad l_p = \frac{S \cdot L}{\sqrt{L^2+H^2}} \quad \text{og} \quad h_p = \frac{S \cdot H}{\sqrt{L^2+H^2}}$$



Dersom forholdene ligger slik an at det ikke er hensiktsmessig å la hjelpelinjen ta til i et av endepunktene, går fram som vist i fig. 9.

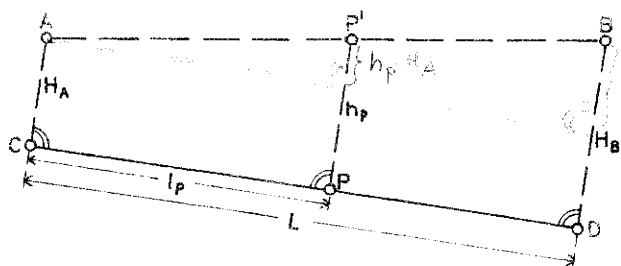


Fig. 9

Hjelpelinjen stikkes utenfor begge endepunktene og det nedfelles perpendikulærer på hjelpelinjen både fra A og B. Ifølge figuren har vi :

$$\frac{h_p - H_A}{l_p} = \frac{H_B - H_A}{L}$$

dvs. 
$$h_p = H_A + \frac{H_B - H_A}{L} l_p$$

I dette tilfelle nå vi altså måle  $H_A$  ,  $H_B$  ,  $L$  og  $l_p$  .

B. Stikking av rette linjer ved bruk av teodolitt.

a. Ekstrapolasjon.

Ved stikking av meget lange linjer, eller når det forlanges stor nøyaktighet, anvendes teodolitt. Vi betrakter først det tilfellet at A og B



Fig. 10

er gitt og at linjen skal forlenges forbi B. Dersom instrumentet ikke er justert for kollimasjonsfeil eller horisontalakseskjevhet, må metoden med dobbelt gjennomslag brukes (se instrumentlære side 56 ). Det foregår på den måten at teodolitten stilles opp i B og siktes inn mot A. Deretter slås kikkerten gjennom og stokken  $C_1$  vinkes inn. Så dreies teodolitten om vertikalaksen og rettes igjen mot A og slås på nytt gjennom, og en stokk  $C_2$  vinkes inn. Midtpunktet mellom  $C_1$  og  $C_2$  vil da ligge på forlengelsen av linjen mellom A og B. Teodolitten flyttes så til C , siktes inn mot B og et nytt punkt bestemmes på samme måte.

b. Interpolasjon.

Dersom oppgaven går ut på å sikte inn en stokk mellom to gitte punkter og en forutsetter at en kan sikte mellom disse punktene, går en fram på den måten at teodolitten stilles opp i det ene punkt (i fig. 11 er forutsett i pkt. A) og siktes inn mot B, hvorefter medhjelperen vinkes inn i linjen. Dersom vi ved sikt til B og C opererer med ulike høydevinkler, må en av hensyn til eventuell kollimasjonsfeil og horisontalakseskjevhet utføre transaksjonen i begge kikkertstillinger. Midlet av de to bestemmelsene be-



Fig. 11

nyttes som endelig beliggenhet for C.

Vi skal så behandle det tilfelle at det skal avsettes punkter med teodolitt mellom to gitte punkter som det ikke er mulig å sikte mellom.

Vi går da fram på følgende måte : Forst bestemmes et tilnærmet pkt. C',

f.eks. etter metoden

med suksessive til-

nærnelser. Teodolitten

stilles opp i C' og

vinkelen  $\gamma$  måles. Styk-

ket t som stokken må

flyttes til siden rett-

vinklet på AC' for å

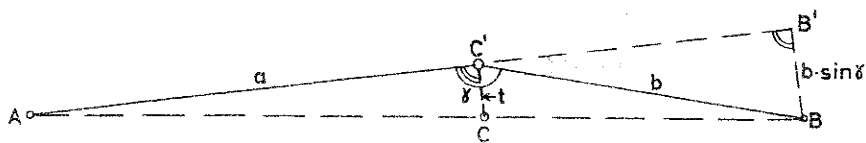


Fig. 12

komme i linjen, er da gitt ved :

$$\frac{t}{a} = \frac{b \sin \gamma}{AB'}$$

Vi innfører her den tilnærmedelse at vi setter  $\overline{AB'} = a + b$  og får :

$$t = \frac{a b}{a + b} \sin \gamma$$

Metoden forutsetter altså måling av avstandene a og b, men det er tilstrekkelig med et tilnærmet kjennskap til disse. Vinkelen  $\gamma$  derimot må måles med størst mulig nøyaktighet.

### 3. Lengdemåling.

Når det i landmålingen tales om lengdemåling, er det alltid den horisontale avstand mellom punkter vi er interessert i, nærmere bestemt avstanden mellom punktenes projeksjoner på den aktuelle referensflate.

Bestemmelsen av disse avstander kan utføres direkte ved anvendelse av målebånd, eller vi kan utføre avstandsbestemmelsen mer indirekte ved bruk av optiske eller elektroniske metoder. Den elektroniske avstandsbestemmelsen som bygger på måling av den tid som elektromagnetiske bølger trenger for å forplante seg fram og tilbake mellom en linjes endepunkter, vil ikke bli behandlet i dette forelesningshefte. Vi nøyer oss her med å påpeke at en på denne måten kan måle avstanden fra noen få meter og opptil fle-

re mil med en nøyaktighet som fullt ut står på høyde med det som kan oppnås ved de "klassiske" målemetoder.

#### A. Direkte lengdemåling.

Ved direkte lengdemåling nyttes i dag utelukkende målebånd og som regel stålband. Mens man tidligere i stor utstrekning nyttet brede, tunge og korte bånd (20 mm brede og 10-20 m lange), nyttes i dag smalere (4-12 mm) og lettere bånd med en lengde på 50-100 m. Rustfrie målebånd har mange fordeler, men de typer som hittil har vært i handelen, er meget sprø og har lett for å floke seg. De ikke-rustfrie bånd nyttes derfor fortsatt. Slike bånd bør alltid tørkes og gnis inn med olje eller vaselin etter bruk.

##### a. De viktigste korreksjoner ved lengdemåling og når en skal ta omsyn til dem.

Lengden av et stålband er avhengig av båndets temperatur og

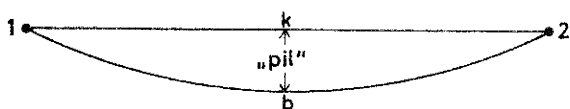


Fig. 13

strekk. Ellers må en ha klart for seg at når båndet nyttes fritthengende er det buelengden  $b$  som avleses på båndet, mens avstanden i virkeligheten er lik korden  $k$  (se fig. 13).

Lengdemålingen må vanligvis tilføyes en hel rekke korreksjoner for at vi skal komme fram til den søkte horisontale lengde. De korreksjoner det kan bli tale om er

1. Korreksjon for uoverensstemmelse mellom målebåndets nominelle og virkelige lengde.
2. Korreksjon for elastisk tøying.
3. Korreksjon for "pil" (dvs. differensen mellom bue og korde).
4. Korreksjon for temperatur.
5. Korreksjon for helning.
6. Korreksjon for nedføring til referensflaten (ellipsoiden).

Vi skal behandle hver av disse og forsøke å gjøre oss opp en mening om når vi må ta omsyn til dem.

Ad 1. Vi skaffer oss kjennskap til målebåndets lengde ved å sammenligne det med en kjent lengde, dvs. ved å utføre en komparering, (utføres f.eks. av Justervesenet). Dersom målebåndets lengde ved komparering bestemmes til  $l + dl$ , hvor  $l$  er båndets nominelle lengde, er den korreksjon som må tilføyes hver målebåndslengde, lik

$$k_1 = + dl$$

Er båndet f.eks. for langt, blir altså den målte avstand før kort.

Hva avviket mellom nominell og virkelig lengde angår når det dreier seg om justerte målebånd, så vil den såkalte brukstoleranse gi et visst bilde av størrelsen av den feil som vi her må regne med. Brukstoleransen, som er den feilgrense måleredskapet må holde seg innenfor for at det skal være lovlig i handel og vandel, er meget romslig i Norge. For et 10 m stålbånd er den 8 mm, og 12 mm for et 20 m stålbånd.

I loven om mål og vekt er det foreskrevet at måleredskaper som brukes i handel og vandel skal være justert her i landet. Imidlertid er det inntil videre gjort unntak fra denne bestemmelse for lengdemålingsredskaper som nyttes ved landmåling. Denne dispensasjon er gjort avhengig av at redskapenes riktighet blir kontrollert ved hjelp av justerte redskaper av vedkommende som utfører landmålingen.

Ad 2. Dersom vi under målingen i stedet for det angitte strekk  $s_0$  nytter et strekk  $s$ , fører dette til en endring av båndets lengde, slik at det må innføres en korreksjon gitt ved

$$k_2 = + \frac{1}{E \cdot T} (s - s_0)$$

hvor  $T$  = båndets tverrsnitt,  $E$  = elastisitetsmodulen som for stål er ca. 20000 kg/mm<sup>2</sup> og  $l$  = båndets lengde.

Ad 3. Når båndet henger fritt, er differensen mellom båndets bue og korde gitt ved uttrykket

$$b - k = \frac{bv^2}{24s^2}$$

hvor  $v$  er målebåndets vekt og  $s$  det strekk som nyttes.

Målebåndets lengde referer seg vanligvis til  $b$ , dvs. at når vi måler en avstand med fritthengende bånd, fås for stort resultat og korreksjonen må bli negativ, altså

$$k_3 = - \frac{bv^2}{24s^2}$$

Ad 4. Dersom målebåndets lengde referer seg til en temperatur  $t_0$ , mens målingen utføres ved temperaturen  $t$ , betinger dette en endring av målebåndets lengde, og vi må innføre en korreksjon gitt ved uttrykket

$$k_4 = + 1.11,5 \cdot 10^{-6} (t - t_0)$$

Måling under for høy temperatur betinger altså en positiv korreksjon.

Ad 5. Dersom vi måler skråavstanden  $L$  mellom to punkter 1 og 2 (se fig. 14), må vi innføre en viss korreksjon for å komme over til den søkte horisontalavstand  $l$ .

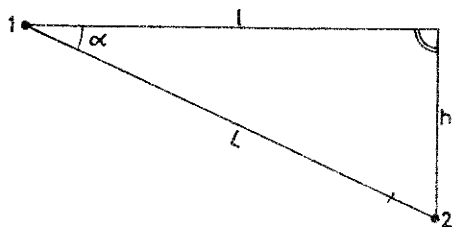


Fig. 14

Denne korreksjon kan enten utledes med utgangspunkt i høydeforskjellen eller høydevinkelen mellom punktene.

Kjenner vi høydeforskjellen h mellom punktene, har vi ifølge figuren

$$h^2 = L^2 - l^2 = (L - l)(L + l)$$

dvs.

$$L - l = \frac{h^2}{L + l} \approx \frac{h^2}{2L}$$

Korreksjonen som må tilføyes L for å komme over til l er gitt ved

$$L + k_5 = l$$

dvs.

$$k_5 = l - L \approx - \frac{h^2}{2L}$$

Et mer korrekt uttrykk for korreksjonen er

$$k_5 = - \frac{h^2}{2L} - \frac{h^4}{8L^3}$$

Dette korreksjonsuttrykk kan det bli aktuelt å bruke ved store høydeforskjeller.

Kjenner vi høydevinkelen  $\alpha$  (se fig. 14), har vi at

$$l = L \cos \alpha \text{ og vi får korreksjonen}$$

$$k_5' = l - L = L \cos \alpha - L = -L(1 - \cos \alpha) = -2L \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Ad 6.

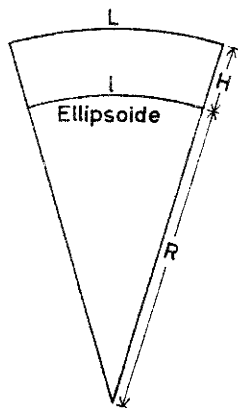


Fig. 15

Dersom vi har målt en horisontal lengde L hvis middelhøyde over referensflaten (ellipsoiden) er H, fås den tilsvarende lengde l på referensflaten ved ligningen (se fig.15)

$$\frac{l}{L} = \frac{R}{R+H} = 1 - \frac{H}{R+H}$$

$$\text{dvs. } l = \frac{LR}{R+H} = L(1 - \frac{H}{R+H}) \approx L(1 - \frac{H}{R})$$

Korreksjonen er da gitt ved

$$k_6 = -\frac{H}{R} L, \text{ eller } k_{6cm} = -15,6 \cdot L_{km} \cdot H_{km}$$

Er det nødvendig å operere med alle disse korreksjoner i praksis?

Før vi gir svar på dette spørsmål, vil vi rette oppmerksomheten på størrelsen av de feil som begås når vi neglisjerer en del av disse korreksjoner. Vi betrakter tre stålbånd. Det ene er 20 m langt (13,0 mm bredt, 0,2 mm tykt og vekt 0,4 kg). Det andre er et 50 m Lufkin-bånd (9,5 mm bredt, 0,2 mm tykt og vekt 0,750 kg). Det tredje er et 100 m Lundqvist-bånd (4,0 mm bredt, 0,3 mm tykt og vekt 0,925 kg). Som "arbeidsstrek" nyttes 10 kg for alle tre bånd. I den etterfølgende tabell er stilt sammen virkningen av pil-, strekk- og temperaturfeil.

	20 m målebånd		50 m målebånd		100 m målebånd	
	feil mm	relativ feil	feil mm	relativ feil	feil mm	relativ feil
Endring i elastisk tøying pr. kg. strekkendring	0,39	$\frac{1}{51300}$	1,32	$\frac{1}{37900}$	4,18	$\frac{1}{23900}$
Endring i b-k pr. kg. strekkendring	0,26	$\frac{1}{76900}$	2,34	$\frac{1}{21400}$	7,13	$\frac{1}{14000}$
Samlet lengdeendring pr. kg. strekkendring	0,65	$\frac{1}{30700}$	3,66	$\frac{1}{13700}$	11,31	$\frac{1}{8850}$
Lengdeendring pr. 1°C temperaturendring	0,23	$\frac{1}{87000}$	0,58	$\frac{1}{87000}$	1,15	$\frac{1}{87000}$
Korreksjon for pil	1,33	$\frac{1}{7500}$	11,72	$\frac{1}{4300}$	35,65	$\frac{1}{2800}$

Av tabellen konstaterer vi for det første at en neglisjering av de forskjellige korreksjoner (bortsett fra temperaturkorreksjonen) resulterer i desto større nøyaktighetstap jo lengere målebåndet er. Videre går det fram at de ulike korreksjoner er nokså forskjellige ned hensyn til størrelse. Korreksjonen for pil vil normalt dominere i forholdet til korreksjonene for strekk og temperatur.

Ellers kan vi dra den slutning av tabellens angivelser at dersom vi **krever** liten nøyaktighet i vår lengdemåling, en nøyaktighet mindre enn ca  $\frac{1}{2000}$  av linjens lengde, er det - bortsett fra korreksjoner for helning - ikke nødvendig å foreta korreksjoner. Selv uten bruk av fjærvekt kan en bedømme det påbudte strekk med 2 - 3 kg's sikkerhet.

Krever vi en nøyaktighet på mellom  $\frac{1}{2000}$  og  $\frac{1}{5000}$  av linjens lengde, må vi foruten korreksjon for helning også ta omsyn til korreksjon for pil og vanligvis også differensen mellom nomineieill og virkelig lengde av målebåndet.

Bare i de tilfeller vi krever større nøyaktighet enn ca  $\frac{1}{5000}$ , er det nødvendig å ta omsyn til de andre korreksjoner. Lengdemålingen må i

slike tilfeller utføres som presisjonsmåling, vi må nytte fjærvekt og temperaturen bør måles.

De som skal ha sin virksomhet innenfor landbruket, vil bare få bruk for den sistnevnte framgangsmåten ved målinger av grunnlinjer (basislinjer) som danner grunnlag for et lokalt triangelnett (se senere). Bare i slike tilfeller vil det bli aktuelt å foreta reduksjon av den målte lengden til referensflaten (korreksjon  $k_6$ ).

### b. Lengdemålingens utførelse.

Før lengdemålingen tar til, må linjen som skal måles avsettes i marka med f.eks. stikkstenger. Selve utførelsen av målingen avhenger av om terrenget er horisontalt eller ikke, og tildels av den nøyaktighet vi tar sikte på.

#### b.1. Lengdemåling i horisontalt terreng.

I horisontalt terreng foregår målingen ved at målebåndet strekkes ut langs bakken og endepunktene merkes av med spesielle målepinner. Nøyaktigheten av lengdemålingen vil i første rekke være avhengig av at båndets nullpunkt holdes nøyaktig an til målepinnen og at båndets endepunkt avmerkes presist. Videre bør båndet ligge tilstrekkelig nøyaktig i linjen og strekk og temperatur må ikke avvike for mye fra kompareringsverdien.

#### b.2. Lengdemåling i hellende terreng.

Lengdemåling i hellende terreng kan, dersom en ikke stiller for

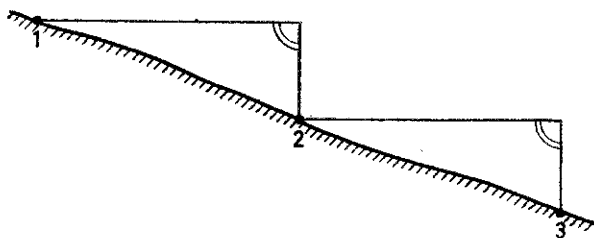


Fig. 16

store krav til nøyaktighet, utføres ved såkalt trappemåling (se fig. 16). Målebåndet holdes horisontalt og båndets frie endepunkt loddes ned på bakken. Målingen bør helst foregå nedover bakke slik at den som befinner seg bakerst

kan støtte hånden med målebåndets nullpunkt på bakken. Trappemåling nyttes bare der vi krever en mindre nøyaktighet enn ca.  $\frac{1}{1000}$ . De feil som dominerer vil vanligvis være unøyaktighet i nedlodding og målebåndets avvik fra den horisontale linje. Det er innlysende at vi under slike omstendigheter aldri behøver å ta omsyn til de tidligere nevnte korreksjoner ( $k_1, k_2, \dots, k_6$ ).

Krever vi større nøyaktighet, måler vi langs bakken. Selve målingen utføres da på samme måte som i horisontalt terreng. Vi må imidlertid bestemme høydeforskjellene eller helningsvinklene mellom intervallenes

endepunkter, og nytter så disse til beregning av de horisontale lengder. Høydeforskjellen bestemmes vanligvis ved nivellement, mens helningsvinklene bestemmes med teodolitt eller enklere instrumenter, såkalte stigningsmålere. Enkelte stigningsmålere angir helningen i gradmål eller i prosent, eller de kan være slik innrettet at for en viss målebåndslengde kan en lese direkte av den horisontale lengde.

Dersom båndet ikke kan legges direkte langs bakken, men henger fritt, må vi når høyaktigheten tilsier det, ta omsyn til differensen mellom bue og korde (b-k).

Utføres lengdemåling med bånd i forbindelse med bruk av teodolitt (er vanlig ved polygonmåling) måler vi bestandig med fritthengende bånd og båndets helningsvinkel måles med teodolitten. Fig. 17 viser eks. på måling

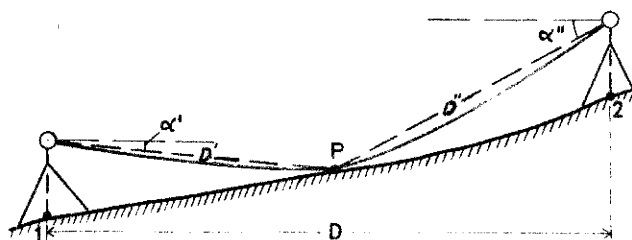


Fig. 17

av en polygonside for det tilfelle at målebåndets lengde ikke strekker til for måling av den søkte sidelengde D i en enkelt seksjon. Vi sjalter da inn et hjelpepunkt P på linjen mellom 1 og 2 og måler skråavstand og høydevinkel til P fra begge endepunkter.

fra begge endepunkter.

På grunnlag av de målte buelengder finnes de tilhørende korde-lengder  $D'$  og  $D''$  ved å ta hensyn til de aktuelle korreksjoner. Den søkte horisontale avstand er da gitt ved

$$D = D' \cos \alpha' + D'' \cos \alpha'' = D' \cos \alpha' + D'' \cos \alpha''$$

I forbindelse med måling langs bakken blir en ofte stilt overfor den oppgave å sette av punkter i linjen med en gitt horisontal avstand, som vanligvis faller sammen med hele målebåndslengder. Det vil f.eks. være tilfelle ved vegbygging hvor oppgaven går ut på å anbringe peler i vegens midtlinje med 10 eller 20 meters avstand. Vi kan også støte på problemet ved utstikking av forsøksfelter. Oppgaven løses på den måten at en avsetter langs bakken den gitte lengde og beregner det tillegg  $t$  (se fig. 18) som må tilføyes den skrå lengde for å få den søkte horisontale avstand. På tilsvarende måte som foran (s. 14) kan vi vise at

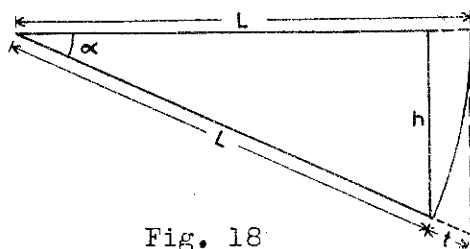


Fig. 18

$$t = \frac{h^2}{2L}$$

(Dersom høydeforskjellene er meget store, kan det bli nødvendig å regne etter følgende formel :

$$t = \frac{h^2}{2L} + \frac{3}{8} \frac{h^4}{L^3}$$



b.3. Spesielle vansker ved lengdemåling  
av rette linjer.

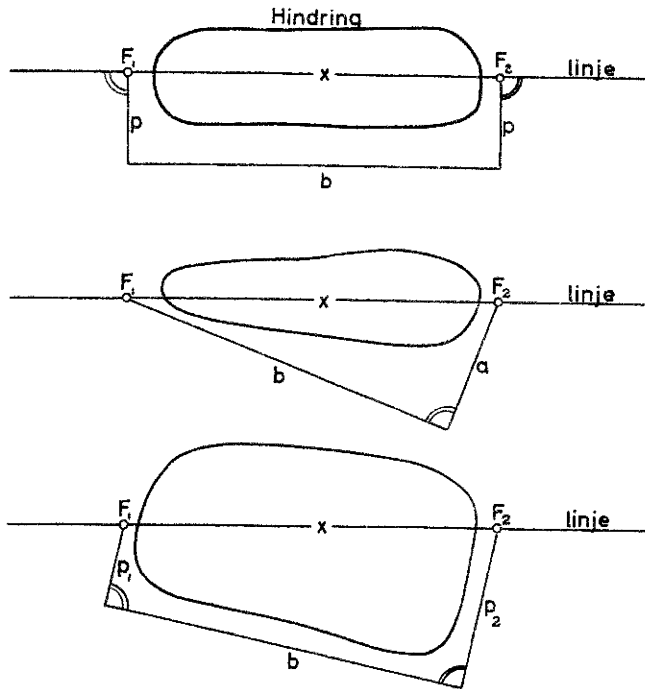


Fig. 19

Dersom vi under målingen støter på materielle hindringer i linjen, som umuliggjør en direkte lengdemåling av en viss del av linjen, blir vi nødt til å slå inn på en indirekte bestemmelse av vedkommende seksjon. I alminnelighet vil en av de fremgangsmåtene som er antydnet i fig. 19 føre fram, som ikke skulle trenge noen nærmere forklaring. Av instrumentelt utstyr fordres kun et rett-vinkelapparat. I det første tilfelle har vi :

$$x = b$$

I det andre tilfelle er x gitt ved :

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

I det siste tilfelle er :

$$x = \sqrt{b^2 + (P_2 - P_1)^2}$$

Dersom et av linjens endepunkter ( $F_2$ ) er utilgjengelig, angir

fig. 20 en brukbar løsning. AB,  $BF_1$  og AC måles og vi får

$$x = \frac{AC \cdot BF_1}{AB}$$

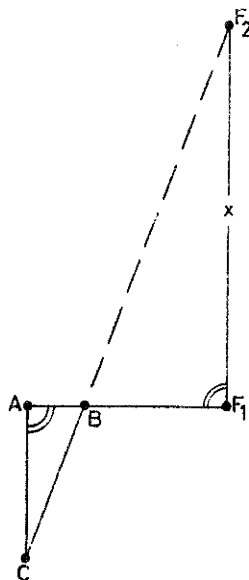


Fig. 20

c. De viktigste feil ved direkte lengdemåling.

Vi har tidligere vært inne på hvilke feil vi må regne med når lengdemålingen utføres under andre forhold enn de som målebåndets kompareringsdata refererer seg til. Feil som skyldes at måleredskapets angitte lengde ikke er lik den virkelige, vokser proporsjonalt med den målte lengde. Er målebåndet for langt, fås for liten verdi, er det for kort, fås for stor verdi.

Avviket en under målingen fra linjens retning, får en alltid for stort resultat. Kaller vi avviket  $t$  (summen av avviket til høyre og venstre) og målebåndslengden  $L$ , blir feilen (se fig. 21) lik  $f = \frac{t^2}{2L}$ , (jfr. utledningen av uttrykket for  $k_5$  på side 14).

Settes  $L = 50$  og

$t = 0,4$  m, blir  $f$  lik 1,6 mm.

Vi ser herav at små avvik fra linjereitningen ikke får noen større innvirkning på måleresultatet.

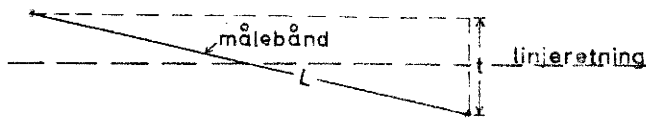


Fig. 21

Feil i bestemmelsen av

høydeforskjellen mellom intervallenes endepunkter resulterer på lignende måte også i for stort måleresultat.

Ellers kan en få feil p.g.a. avlesningsfeil, at nullstreken ikke holdes nøyaktig inn til det nedsatte merke eller p.g.a. at endestreken avmerkes unøyaktig.

Endelig bør nevnes de såkalte grove feil, dvs. feil som skyldes forsømmelse eller mistak fra målerens side. Det kan være en feilavlesning på en hel desimeter, meter eller lo meter, men det kan også være uteglemmelse av hele målebåndslengder. Erfaringer viser at grovere feil opptrer forholdsvis ofte ved lengdemåling. For mest mulig å gardere seg mot grovere feil bør alle avlesninger kontrolleres omhyggelig eller utføres dobbelt. En meget effektiv måte å sikre seg mot grove feil ved lengdemåling er å utføre målingene dobbelt med bytte av nullpunkt.

Eksempel :	<u>1.måling</u>	<u>2.måling</u>
	83,632	86,218
	<u>0,000</u>	<u>2,584</u>
	<u>83,632</u>	<u>83,634</u>

## B. Optisk avstandsmåling.

Den optiske avstandsmåling spiller en betydelig rolle i landmålingen. Avstandsbestemmelsen av en linje foregår da i prinsippet på den måten at en avstandsmålende kikkert stilles opp i linjens ene endepunkt og en stang, vanligvis med cm-inndeling (distanse- eller nivellerstang), stilles opp i det andre endepunkt. Ved hjelp av kikkerten er det så mulig å lese av på stangen enten den horisontale avstand direkte, eller størrelser som kan omregnes til horisontal avstand.

Den optiske avstandsbestemmelse kan utføres etter to hovedprinsipper, nemlig :

1. Med konstant avstandsmålende vinkel og variabel stanglengde.
2. Med konstant stanglengde og variabel avstandsmålende vinkel.

I begge tilfeller foregår avstandsbestemmelsen ved hjelp av en avstandsmålende vinkel og et stangavsnitt. I fig. 22 er  $\epsilon$  den avstands-

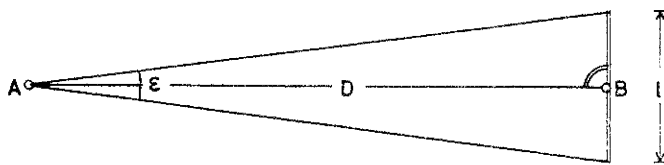


Fig. 22

målende vinkel og  $l$  er stangavsnittet. Dersom stangen står vinkelrett på vinkelens halveringslinje, blir trekanten som stangavsnittet og den avstandsmålende vinkel dan-

ner, likebenet, og vi har :

$$\operatorname{tg} \frac{\epsilon}{2} = \frac{l}{2D}$$

dvs.:

$$D = \frac{l}{2 \operatorname{tg} \frac{\epsilon}{2}} = \frac{l}{2} \operatorname{ctg} \frac{\epsilon}{2}$$

### a. Optisk avstandsmåling med konstant avstandsmålende vinkel og variabel stanglengde.

Vi vil, når det gjelder optisk avstandsmåling med konstant avstandsmålende vinkel og variabel stanglengde, skille mellom vanlig optisk avstandsmåling, optisk avstandsmåling ved hjelp av selvreduserende teodolitt (hvor den avstandsmålende vinkel strengt tatt ikke er konstant) og optisk avstandsmåling ved hjelp av dobbeltbilder.

#### a.1. Vanlig optisk avstandsmåling.

Med vanlig optisk avstandsmåling mener vi her bruk av teodolitt som har konstant avstand mellom trådkorsplatens to horisontale distanse-

streker (se fig. 23 hvor  $\sigma$  og  $n$  er øvre og nedre distansestrek,  $m$  er den horisontale trådkors-strek) i forbindelse med loddrettstilt distansestang.

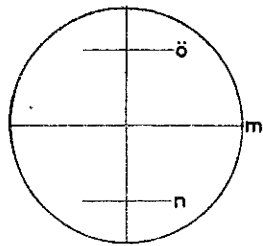


Fig. 23

Ved hjelp av distansestrekene fås de to siktelinjer som tilsammen danner den avstandsmålende vinkel.

Vi skal her innskrenke oss til å behandle dette prinsipp for den astronomiske kikkert, først for horisontal- og deretter for hellende siktelinje (med siktelinje nenes da siktelinjen gjennom trådkorsstrekens skjæringspunkt).

a.1.1. Vanlig optisk avstandsmåling ved horisontal siktelinje.

Ved horisontal siktelinje og loddrettstilt distansestang, danner siktelinje og stang en rett vinkel med hverandre. I fig. 24 betrakter vi to stråler parallelle med objektivets optiske akse, som går gjennom trådkorsplåntens to distansestreker. Den distansemålende vinkel  $\epsilon$  som disse to strålene danner med hverandre, har sitt toppunkt i A, det såkalte analaktiske punkt, som faller sammen med objektivets forreste brennpunkt.

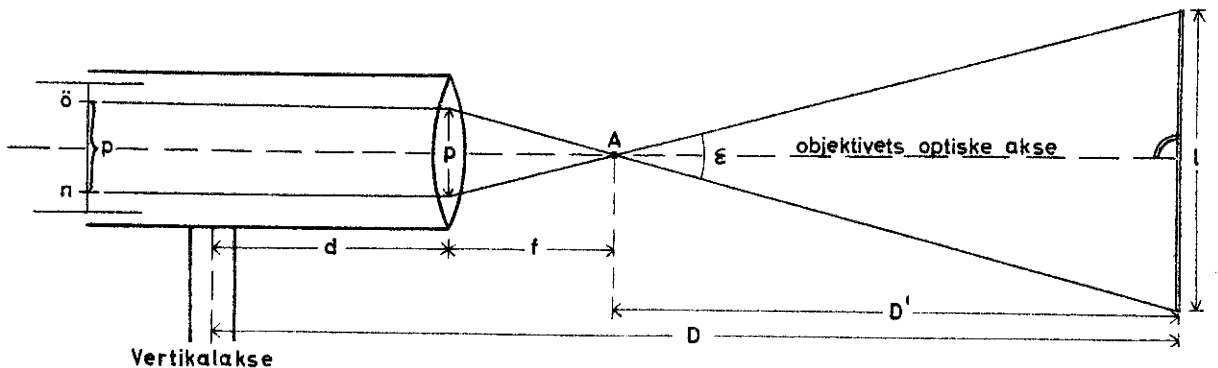


Fig. 24

Av figuren ser vi at :

$$\frac{D'}{l} = \frac{f}{p}, \text{ dvs. } D' = \frac{f}{p} l = k \cdot l$$

Avstanden fra instrumentets vertikalakse til stangen blir :

$$D = d + f + D' = (d+f) + \frac{f}{p} l = \underline{c + k \cdot l}$$

hvor  $d$  er avstanden mellom objektivets optiske midtpunkt og vertikalaksen. Her betegnes  $c$ , som er avstanden fra det analaktiske punkt til vertikalaksen, som addisjonskonstant, mens  $k$  betegnes som multiplikasjonskonstant. Den siste gjøres vanligvis lik 100, slik at vi ved avlesning av et stangavsnitt på f.eks. 50 cm har en avstand  $D' = 50$  m.

På eldre instrumenter er addisjonskonstanten vanligvis 20 - 30 cm. På nyere instrumenter (både astronomiske kikkerter og kikkerter av Wilds konstruksjon) er det lyktes å gjøre addisjonskonstanten  $c \approx 0$ .

a.1.2. Vanlig optisk avstandsmåling ved hellende siktelinje.

Ved vanlig optisk avstandsmåling ved hellende siktelinje danner siktelinjen en vinkel med distansestangen som avviker fra  $100^\circ$ .

I fig. 25 er den horisontale avstand D den søkte størrelse. Mellom distansestrekene leser vi av på den vertikalstilte stang et stang-

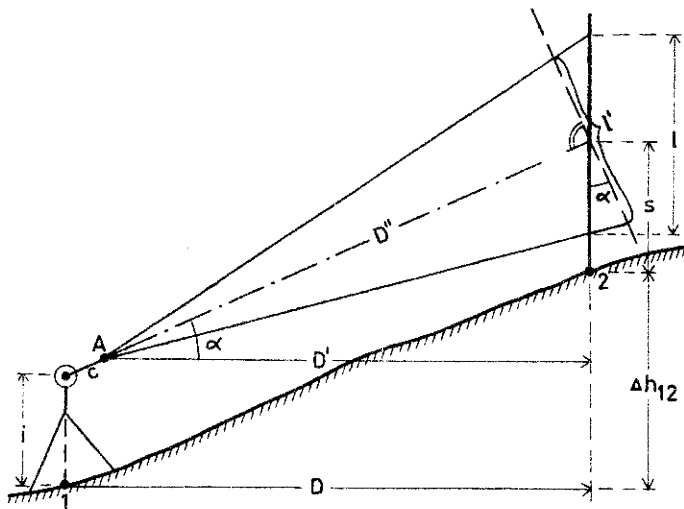


Fig. 25

snitt l. På en stang (merket med stiplet linje på figuren), loddrett på siktelinjen, leser vi av et stang-avsnitt  $l'$ .

Av fig. har vi da

$$D'' = kl'$$

$$l' \approx l \cdot \cos \alpha$$

dvs.  $D'' = + kl \cdot \cos \alpha$

Den horisontale avstand mellom det analaktiske punkt A og distansestangen er følgelig

$$D' = D'' \cos \alpha = k \cdot l \cdot \cos^2 \alpha$$

Den søkte avstand D er da gitt ved

$$D = c \cdot \cos \alpha + kl \cos^2 \alpha$$

For høydeforskjellen mellom punktene 1 og 2 finner vi :

$$\Delta h_{12} = D \cdot \operatorname{tg} \alpha + i - s = c \cdot \sin \alpha + kl \cdot \cos \alpha \sin \alpha + i - s$$

hvor i er instrumenthøyde og s siktehøyde.

Disse formlene er tungvinte å regne med. Da c er en meget liten størrelse (ofte lik null) og høydevinklene som regel antar moderate verdier, kan en med tilstrekkelig tilnærmede sette :

$$D = (c + kl) \cos^2 \alpha$$

og  $\Delta h_{12} = D \operatorname{tg} \alpha + i - s = (c + kl) \sin \alpha \cos \alpha + i - s = \Delta h'_{12} + i - s$

Det er disse formler som nyttes i praksis. Utregningen av D og  $\Delta h$  skjer mest hensiktsmessig med regnestav. Da formelen  $D = (c + kl) \cos^2 \alpha$  ofte betinger 4-sifret regning (når  $D > 100$  m), mens regnestaven som regel

bare tillater 3-sifret regning, er det hensiktsmessig å omforme formelen på følgende måte :

$$\begin{aligned} D &= (c + kl) \cos^2\alpha = (c + kl)(1 - \sin^2\alpha) \\ &= \underline{(c + kl) - (c + kl)\sin^2\alpha} \end{aligned}$$

Her er da  $(c + kl)$  den avstand vi leser av på stangen, mens  $(c + kl)\sin^2\alpha$  er den korreksjon (reduksjon) vi må gi den avleste lengde for å komme over til den horisontale avstand. Korreksjonen blir bestandig forholdsvis liten (i praksis aldri over to siffer når vi nøyer oss med desimeters nøyaktighet) og kan derfor regnes ut med stor sikkerhet på regnestaven.

Regnestaven må altså være forsynt med sin<sup>2</sup>-deling for beregning av reduksjonen og en tg- eller helst sin cos-delning for beregning av høydeforskjellen. En del vanlige regnestaver har disse inndelinger, men det finnes også spesielle regnestaver til dette bruk, såkalte tachymeterregnestaver. Mest nyttet i vårt land er ingeniør Lindheims tachymeterstav.

#### a.1.3. Nøyaktigheten av den vanlige optiske avstandsmåling.

Av feilkilder som kan virke inn på den optiske avstandsmåling kan vi nevne feil som skyldes teodolitten og den benyttede distansestang, feil som skyldes selve observatoren og dessuten ytre forhold som luftsitring, nedbør osv.

Med feil som skyldes teodolitten tenker vi på feil ved instrumentets addisjons- og multiplikasjonskonstant. På moderne instrumenter vil disse feil vanligvis være betydningsløse.

Om konstantene har den korrekte verdi bør undersøkes av og til. Vi skal først omtale hvordan multiplikasjonskonstanten kan kontrolleres for instrumenter med addisjonskonstant lik null. På noenlunde flat mark måles en avstand D med målebånd, og dessuten foretas optisk avstandsbestemmelse av samme, hvorved stangavsnittet l avleses. Vi har da

$$D = k \cdot l, \quad \text{dvs. } k = \frac{D}{l}$$

Av hensyn til nøyaktigheten av denne bestemmelse må avstanden D være temmelig stor, helst 100 - 120 m, og en bør nytte 2 - 3 slike kontrollstrekninger og bestemme k ved middeltallsdannelse. Dersom det konstateres et avvik fra normalverdien 100 som er av betydning, er det mest praktisk å operere med normalverdien og utarbeide et korreksjonsdiagram som gir korreksjonene som funksjon av avstanden.

For instrumenter med addisjonskonstant forskjellig fra null kan begge konstantene kontrolleres ved å nytte to kontrollstrekninger  $D_1$  og  $D_2$ .

$$D_1 = k \cdot l_1 + c$$

$$D_2 = k \cdot l_2 + c$$

som resulterer i

$$k = \frac{D_2 - D_1}{l_2 - l_1} \quad \text{og} \quad c = \frac{D_1 l_2 - D_2 l_1}{l_2 - l_1}$$

Av hensyn til nøyaktigheten av denne bestemmelse er det viktig at de to avstandene er meget forskjellige. Den ene bør være kort (ca. 10 - 20 m) og den andre meget lang (ca. 100 - 120 m).

Dersom stangen holdes skjevt (bikkes til eller fra observatøren eller til siden), vil dette bevirke en feil i avstandsbestemmelsen. En nærmere undersøkelse viser at det er den feil som skyldes at stangen bikkes til eller fra observatøren som i praksis spiller den største rolle. Denne feil tiltar med økende høydevinkel. Dersom f.eks. stangen avviker 2° fra loddretningen, vil ved 100 m's avstand og en høydevinkel på 20°, denne feil utgjøre 1,07 m. For å redusere denne feilen mest mulig er det på distansestangen festet en dåselibelle.

En nedsettelse av nøyaktigheten kan vi også få p.g.a. feil ved selve stangen. Det kan være feil i selve delingen eller stangen kan være bøyd.

En viktig feilkilde er selve observasjonsusikkerheten. Under avlesning på stangen stilles vanligvis først den ene (nederste) distansestrek på et helt tall på stangen (m- eller dm- strek) og deretter leser vi av hvor den andre distansestrek treffer stangen. Avlesningsfeilen består følgelig av en innstillings- og en avlesningsfeil, og erfaringen viser at disse tilsammen resulterer i en usikkerhet i avstandsbestemmelsen på mellom  $\frac{1}{1000}$  og  $\frac{1}{1400}$  av avstanden.

Avlesningsnøyaktigheten vil imidlertid variere meget alt etter de forhold målingen blir utført under. Siktes mot sola må vi regne med betydelig dårligere resultat enn ved sikte den motsatte veg. Luftsitringen kan på enkelte solskinnsdager bli meget sjenerende og nedsetter nøyaktigheten betydelig. På tilsvarende måte vil også nedbør førringe resultatet.

Det er mange andre faktorer som også virker inn på målingens nøyaktighet. En kan nevne kikkertforstørrelsen, optikkens kvalitet, distansestrekens tykkelse og utforming, multiplikasjonskonstantens størrelse osv.

Ved bruk av moderne utstyr-- og under ikke alt for ugunstige forhold - regner vi med at avstander opptil 120 - 130 m kan bestemmes med en relativ feil på ca. 1°/100. *2: Adria ...*

Ved større avstander tiltar feilen meget raskt, og ved en lengde på 3 - 400 m må en regne med feil på opptil 1m.

a.2. Optisk avstandsmåling ved bruk av selvreduserende teodolitt.

Vi har tidligere utledet uttrykkene for den horisontale avstand og høydeforskjellen mellom to punkter ved vanlig optisk avstandsmåling. Forutsettes at addisjonskonstanten  $c$  er null, har vi vist at

$$D = k \cdot l \cos^2 \alpha = \frac{f}{p} l \cdot \cos^2 \alpha$$

og

$$\Delta h = k l \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{f}{p} \cdot l \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

Her er  $p$  avstanden mellom trådkorsets distansestreker,  $f$  er objektivets brennvidde,  $l$  er stangavsnittet og  $\alpha$  er høydevinkelen.

Dersom vi direkte skal kunne lese av den horisontale avstand  $D$ , må vi ha

$$D = k_1 \cdot l$$

dvs.

$$k_1 = \frac{D}{l} = \frac{f}{p} \cos^2 \alpha$$

Avstanden mellom distansestrekene blir da

$$p = \frac{f}{k_1} \cdot \cos^2 \alpha$$

Som regel nyttes for  $k$  verdien 100

dvs.

$$p = \frac{f}{100} \cos^2 \alpha$$

*p er mindre enn f*

$p$  blir altså en funksjon av høydevinkelen.

Når instrumentet er slik innrettet at avstanden  $p$  mellom distansestrekene er i samsvar med ovenstående uttrykk, er instrumentet selvreduserende, dvs. den horisontale avstand er lik

$$D = k_1 \cdot l \text{ som for } k_1 = 100 \text{ går over til}$$

$$D = 100 \cdot l$$

Distansestrekene blir på slike instrumenter erstattet med kurver eller diagrammer, og avstanden mellom dem varierer med høydevinkelen  $\alpha$ , idet den settes proporsjonal med  $\cos^2 \alpha$ .

Dersom vi direkte skal kunne lese av høydeforskjellen  $\Delta h$ , må vi på tilsvarende måte ha

$$\Delta h = k_2 \cdot l$$

dvs.

$$k_2 = \frac{\Delta h}{l} = \frac{f}{p} \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$



Avstanden mellom distansestreke blir her

$$p = \frac{f}{k_2} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

Her velges ofte verdien for k lik 20

dvs. 
$$p = \frac{f}{20} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

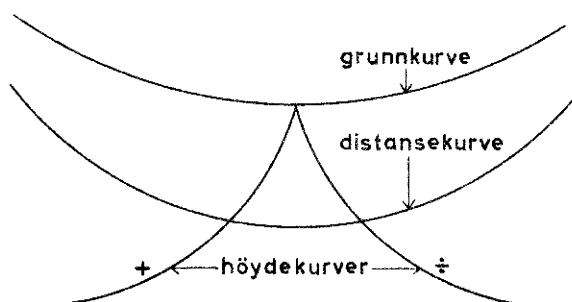


Fig. 26

Neste figur (fig. 27) viser et eksempel på avlesning. NN er

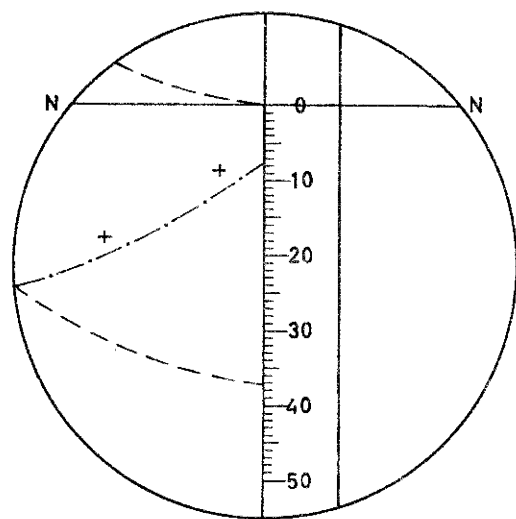


Fig. 27

For både å kunne bestemme den horisontale avstand og høydeforskjellen direkte må vi altså ha to kurver, hvis avstand fra en tredje kurve (grunn- eller o- kurven) er i samsvar med uttrykkene for p (se fig. 26).

Den øverste av disse er grunnkurven, og den tangenter horisontaltråden i den vertikale skillelinje som samtidig fungerer som vertikaltråd. Den nederste stiplete kurve bestemmer sammen med horisontaltråden et stangavsnitt som multiplisert med 100, gir den horisontale avstand. Den

strek-prikkede kurven, høydekurven, bestemmer sammen med horisontaltråden et stangavsnitt som multiplisert med 20, gir høydeforskjellen mellom instrumentets horisontalakse og stangens nullpunkt. Avlesningene blir :

$$D = 37,3 \text{ m} \quad \text{og} \quad \Delta h = + 1,54 \text{ m}$$

idet tegnet + på høydekurven angir positiv høydeforskjell.

a.3. Optisk avstandsmåling ved hjelp av dobbeltbilder.

Hos de instrumenter som er innrettet for avstandsmåling etter dette prinsippet, dannes den avstandsmålende vinkel ved hjelp av glassprismer som skytes inn i strålegangen.

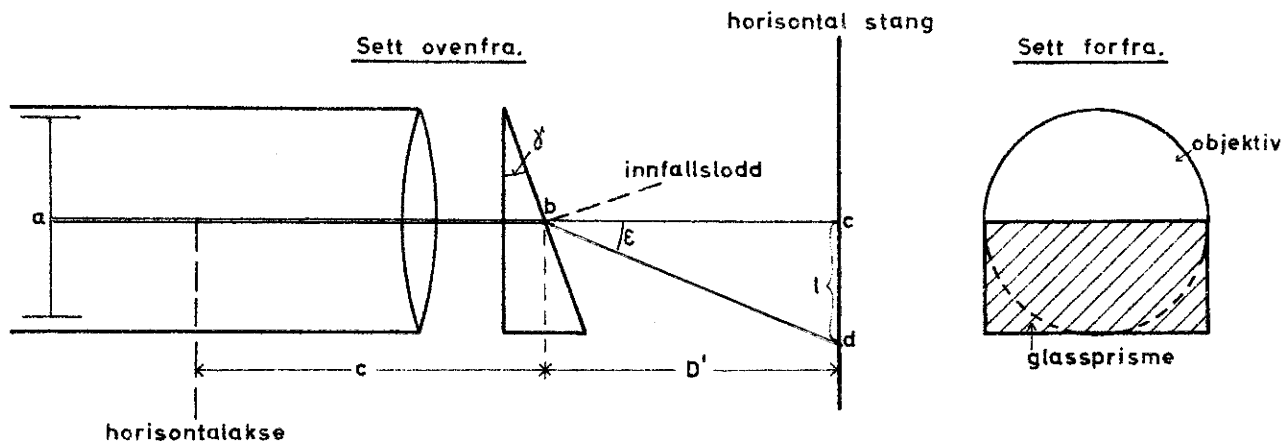


Fig. 28

Fig. 28 tar sikte på å anskueliggjøre prinsippet. Glassprismet, dekker bare den ene halvdel av objektet. Strålen a-b-c passerer gjennom objektivets udekte halvdel og får ingen bøyning. Den røde stråle derimot treffer glassprismet hvor den får en avbøyning lik vinkelen  $\epsilon$ . I punkt a i trådkorsplanet får vi folgelig avbildning både av pkt. c og d på stangen. Vinkelen  $\epsilon$  blir konstant og kun avhengig av prismets brytende vinkel  $\gamma$ . Av fig. 28 ser vi at :

$$D' = l \operatorname{ctg} \epsilon = k \cdot l$$

n.a.o. lik stangavsnittet multiplisert med en konstant. Ved passende valg av prismets brytningsvinkel  $\gamma$  sørges for at  $\epsilon$  får en verdi gitt ved  $\operatorname{ctg} \epsilon = 100$ , som altså betinger verdien 100 for multiplikasjonskonstanten.

Siktes så mot en horisontal stang med inndeling som f.eks. fig. 29 viser, vil strålene som refererer seg til øverste halvdel av stan-

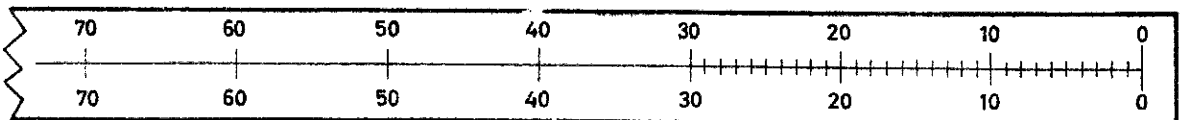


Fig. 29

gen nå fram til kikkertens objektiv uten brytning mens de stråler som går ut i fra nederste halvdel av stangen passerer prismet og får en bøyning lik vinkelen  $\epsilon$ . I kikkertens synsfelt får vi da fram et stangbilde, hvor den nederste skala er forskjøvet i forhold til øverste. (se fig. 30).

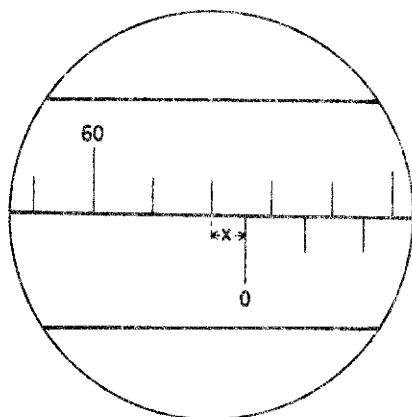


Fig. 30

Som vi tidligere har vist, er forskyvelsens størrelse da et mål på distansestangens avstand fra teodolitten. Under forutsetning av cm- deling på stangen, er denne forskyvelse i figuren lik 62 cm + et lite stykke kalt x. Med  $k = 100$  vil den tilsvarende avstand bli  $62 \text{ m} + 100 \cdot x$ .

Bestemmelsen av x kan utføres på ulike måter, mest alminnelig er ved bruk av optisk

mikrometer (se instrumentlæren) eller ved at den skala som forskyves, utformes som nonie.

Nøyaktighet av distansemålingen vil i stor utstrekning avhenge av etter hvilket prinsipp det ovenfor nevnte stykke x bestemmes. Nyttets optisk mikrometer, regner en med at avstander kan bestemmes med en nøyaktighet på ca.  $0,2 \text{ ‰}$ , dvs. med 2 cm's nøyaktighet for en 100 m's avstand.

Ved bruk av dobbeltbilder er det skråavstanden som bestemmes. Ved observasjon av høydevinkel kan den horisontale avstand beregnes. Prinsippet kan inidlertid også utformes slik at en kan avlese direkte horisontale avstanden.

Optisk avstandsbestemmelse ved bruk av dobbeltbilder, er hurtig i bruk og nyttes ved måling av polygonsider og ved nøyaktig detaljering med teodolitt, såkalt presisjonstachymetrering.

b. Optisk avstandsmåling med konstant stanglengde og variabel avstandsmålende vinkel.

Vi innskrenker oss til å behandle det tilfelle at distansestangen, som i dette tilfelle benevnes basisstang (basislatte), er horisontal. Metoden går under navn av basisstangmetoden.

Den avstandsmålende vinkel  $\epsilon$  bestemmes her ved hjelp av en teo-

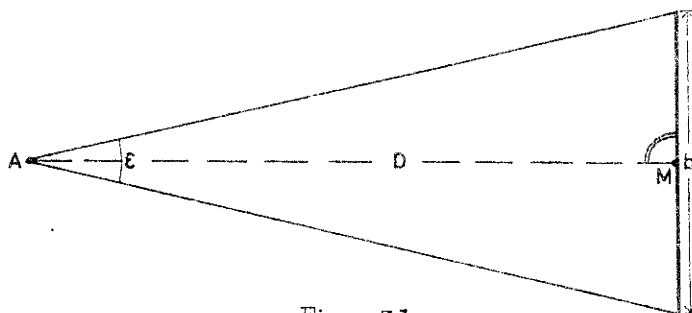


Fig. 31

dolitt som stilles opp i linjens ene endepunkt. I det andre endepunkt av linjen stilles opp en horisontal stang hvis midtpunkt M faller i linjen, og som står vinkelrett på linjeretningen.

Stangens lengde  $b$  er konstant, som regel lik 2 m. Avstanden  $D$  er da gitt ved :

$$D = \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2}$$

De geometriske forhold i fig. 31 som forestiller projeksjonen i horisontalplanet, influeres ikke av at stangen heves eller senkes i sitt eget vertikalkplan dvs. metoden resulterer i horisontale avstander. Høydeforskjellen mellom instrument- og stangoppstillingspunktet, som finnes ved å måle høydevinkelen  $\alpha$ , er gitt ved :

$$\Delta h = D \operatorname{tg} \alpha + i - s$$

Nøyaktigheten av avstandsbestemmelsen etter denne metode vil være avhengig av :

1. Nøyaktigheten av vinkelmålingen.
2. " " stangens lengde.
3. " " den rette vinkel ved M.
4. " " stangens horisontalstilling.
5. " " instrumentets og stangens sentrering.

Instrumentfirmaene angir stangens lengde med  $\pm 0,1$  mm's nøyaktighet. Ved hjelp av en diopteranordning kan stangen stilles ganske nøyaktig vinkelrett på siktelinjen og ved en libelle kan den horisontalstilles. Sentreringen kan utføres enten ved bruk av lodd eller enda bedre kan det gjøres optisk.

Når det gjelder vinkelmålingen, så vil denne bestandig være beheftet med en viss feil, og denne feil vil normalt være dominerende i forhold til de andre feil som opptrer ved basisstangmetoden. Vi skal i det etterfølgende undersøke hvilken innvirkning feil i vinkelmålingen har på avstandsbestemmelsens nøyaktighet.

Vi tar vårt utgangspunkt i uttrykket

$$D = \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2}$$

En feil i vinkelen  $\varepsilon$  lik  $d\varepsilon$  resulterer i en feil på avstandsbestemmelsen  $D$  lik  $dD$ . Ved å differensiere uttrykket ovenfor med hensyn på  $\varepsilon$  får vi

$$dD = - \frac{b}{4} \frac{1}{\sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} d\varepsilon$$

Med tilstrekkelig tilnærming kan vi her innføre at (se fig. 31):

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{b}{2D} \quad \text{og} \quad \frac{1}{\sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} = \frac{4D^2}{b^2}$$

dvs.

$$dD = - \frac{D^2}{b} d\varepsilon$$

Vi har dermed vist at noyaktigheten avtar proporsjonalt med kvadratet av avstanden.

For  $\delta\epsilon = 3^{\circ}$  og  $b = 2$  m kan vi stille opp følgende oversikt :

$D_i$ m	20	40	60	80	100	150	200	300	400	500	1000
$dD_i$ mm	0,9	3,8	8,5	15,1	23,6	53,0	94,3	212,1	377,0	589,4	2360
$dD : D$	1:22200	1:10500	1:7060	1:5300	1:4240	1:2830	1:2120	1:1410	1:1060	1:850	1:420

Basisstangmetoden stiller så store krav til noyaktigheten av vinkelmålingen at det her bare kan bli spørsmål om sekundsteodolitter, eller eventuelt teodolitter med unøyaktigere avlesning som er innrettet for repetisjonsmåling (se senere). Selv ved bruk av sekundsteodolitter kan vi i praksis vanligvis ikke regne med større noyaktighet enn  $3^{\circ}$  i vinkelbestemmelsen.

For å unngå for lange avstander, kan vi dele linjen opp i seksjoner slik som fig. 32 viser et eksempel på.

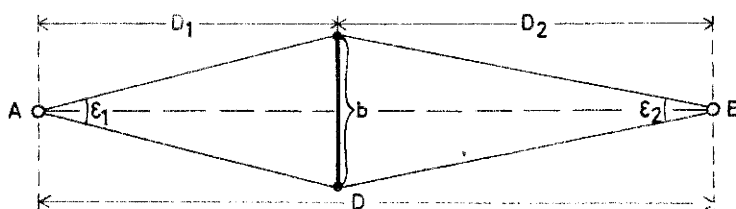


Fig. 32

$$\text{Her er da } D = D_1 + D_2 = \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\epsilon_1}{2} + \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\epsilon_2}{2} = \frac{b}{2} (\operatorname{ctg} \frac{\epsilon_1}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\epsilon_2}{2})$$

Optisk avstandsmåling med konstant stanglengde og variabel avstandsmålende vinkel nyttes i meget stor utstrekning, spesielt for bestemmelse av polygonsider.

### C. Avstandsbestemmelse ved bruk av hjelpebasis.

Med avstandsbestemmelse ved bruk av hjelpebasis, mener vi her en indirekte bestemmelse av den aktuelle avstand på grunnlag av en såkalt hjelpebasis.

La oss tenke oss at avstanden AB i fig. 33 ikke (eller vanskelig) kan måles direkte p.g.a. hindringer.

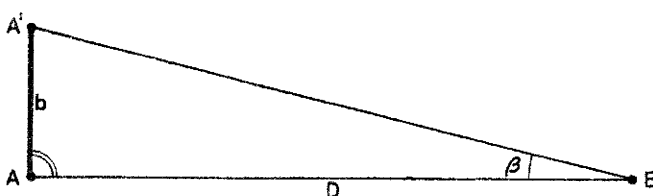


Fig. 33

Vi setter da ut en hjelpebasis AA' = b vinkelrett på AB. Ved å måle vinkelen  $\beta$  i B ved hjelp av en teodolitt får vi avstanden AB lik

$$D = b \cdot \text{ctg } \beta$$

Den rette vinkels nøyaktighet trenger ikke være stor, slik at normalen kan oppreises ved bruk av speil- eller prismeinstrument. Vinkelen  $\beta$  og hjelpebasisen b derimot må bestemmes med størst mulig nøyaktighet.

Avstanden b kan bestemmes direkte ved hjelp av målebånd eller ved bruk av basisstang som fig. 34 viser, eller ved andre metoder.

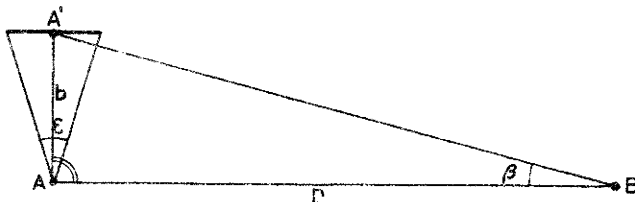


Fig. 34

§ Bruk av hjelpebasis nyttes mye i praksis ved måling av polygon-sider, spesielt når terrengforholdene umuliggjør eller vanskeliggjør en direkte lengdemåling. Der en krever en nøyaktighet som er større enn vanlig optisk avstandsmåling, men ikke har bruk for den nøyaktighet som direkte avstandsbestemmelse med bånd gir, er bruk av hjelpebasis en utmerket løsning.

Der det p.g.a. forholdene ikke er mulig å nytte en rettvinklet trekant består muligheten å anlegge en ikke-rettvinklet basistrekant (se fig. 35) og beregne D ved hjelp av sinus-proporsjonen

$$\frac{D}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta},$$

dvs. 
$$D = \frac{b}{\sin \beta} \cdot \sin \gamma$$



Fig. 35

Det gunstigste er å måle alle tre vinklene,

hvorved en får observasjonskontroll og mulighet for vinkelsumsutjevning. Det foregår ved å fordele avviket fra  $200^\circ$  med like verdier på hver av de målte vinklene. Måles bare to av trekantvinklene, bør det være  $\beta$  og  $\gamma$ .

Metodens nøyaktighet er først og fremst avhengig av nøyaktig-  
heten av b og  $\beta$ .

#### 4. MÅLING AV HORIZONTAL- OG VERTIKALVINKLER.

##### A. Måling av horisontalvinkler.

Med horisontalvinkelen mellom to punkter forstår vi i landmålingen vinkelen mellom de to plan som kan legges gjennom stasjonspunktets loddretning og de to punkter. I fig. 36 er A et stasjonspunkt og B og C to terrengpunkter. Vinkelrett på loddretningen i A er lagt et plan, 1, 2, 3, 4, som betegnes som pkt. A's horisontalplan, og som følgelig blir tangeringsplanet til nivåflaten gjennom A. Punktene B' og C' er projeksjonene av B og C på dette horisontalplan. På grunn av den atmosfæriske refraksjon vil ikke lysstrålen mellom A og B, resp. A og C få et rettlinje forløp, men følge de strek-prikkede kurver i fig. 36. Som regel kan vi

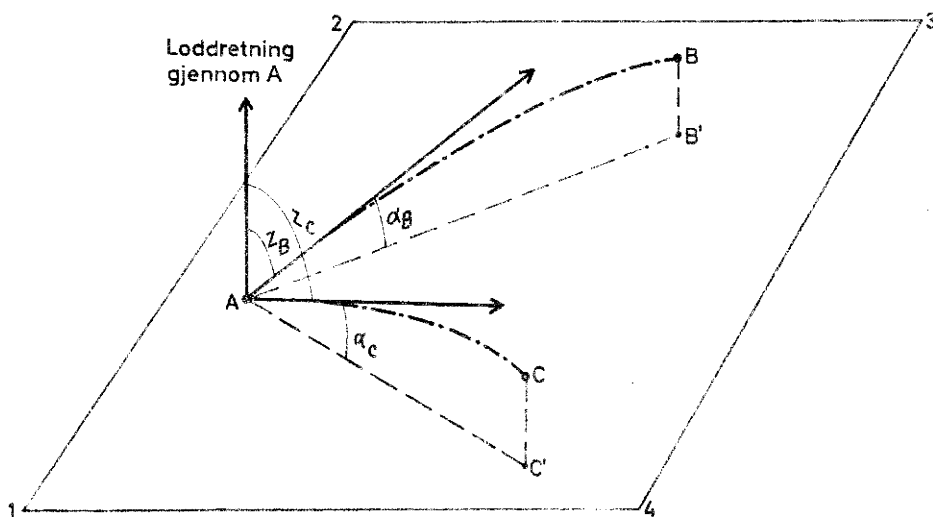


Fig. 36

regne med at lysstråler mellom to punkter vil forplante seg i de to punkters vertikalplan. I punktet A er tangentene til disse lyskurvene trukket. Siktelinjen til en teodolitt som oppstilles i A og innsiktes mot B og C, vil falle sammen med disse tangentene. Av definisjonen på horisontalvinkler følger at horisontalvinkelen i A mellom B og C blir lik vinkelen B' A C'. Horisontalvinkelen i et punkt mellom to andre punkter kan følgelig også defineres som vinkelen mellom projeksjonen av punktene på stasjonspunktets horisontalplan.

Ved vertikalvinkelmålinger er det enten vinkelen mellom loddretningen og tangenten til lyskurven ( $z_B$  og  $z_C$ ) eller vinkelen mellom tangenten og horisontalplanet ( $\alpha_B$  og  $\alpha_C$ ) som bestemmes. De første betegnes som zenitdistanser og de siste som høydevinkler.

\*

Vi skiller mellom retnings- eller satsmåling på den ene siden og vinkelmåling på den andre siden. Med retningen til et punkt forstår vi

vertikalplanet gjennom det punkt teodolitten stilles opp i og det tilsiktede punkt. På tilsvarende måte forstår vi med retningsavlesning den avlesning på teodolittens horisontalsirkel som vi har når siktelinjen er innsiktet i dette vertikallplan. Av denne definisjon følger at en horisontalvinkel finnes som forskjellen mellom to retningsavlesninger.

Med retnings- eller satsmåling forstår vi den observasjonsmetode hvor et større antall retninger ( $n > 2$ ) blir observert kollektivt.

Vinkelmåling er det spesialtilfelle av satsmåling som inntrer når  $n = 2$ . Ved denne metode måles altså de enkelte vinkler hver for seg og uavhengig av hverandre.

a. Retnings- eller satsmåling.

Vi tenker oss at det i et stasjonspunkt S skal fastlegges 4 retninger til objektene 1, 2, 3 og 4. Etter oppstilling av teodolitten i S innstilles først mot objekt 1 med avlesning på begge avlesningsmidler. Deretter innstilles mot objekt 2 ved dreining av alidaden og ny avlesning foretas. Så følger innstilling og avlesning mot objektene 3 og 4. Det som dermed er utført, går under navn av en halvsats. Nå slås kikkerten

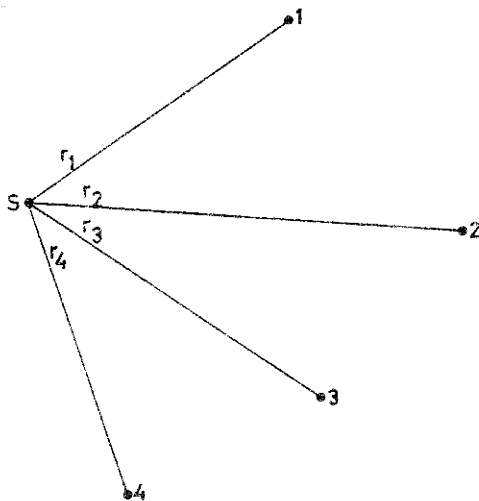


Fig. 37

gjennom og det samme gjentas i II. kikkertstilling, bare med den forskjell at objektene innstilles i omvendt rekkefølge, med andre ord i rekkefølgen 4, 3, 2, 1.

Til sammen utgjør disse to målinger en helsats. Det at punktene tilsiktes i omvendt rekkefølge i den andre halvsats, tar sikte på eliminering av feil som følge av en eventuell dreining av instrumentet mens målingene pågår. Antar vi nemlig at dreiningen er proporsjonal med tiden og videre at innsiktingen tar like lang tid for hver enkelt ret-

ning, lar det seg vise at vi ved denne fremgangsmåte oppnår at middeltallene av avlesningene i I. og II. kikkertstilling alle får samme feil, noe som ikke influerer på nøyaktigheten av satsen som sådan.

Observeres i flere satser, må sirkelens stilling endres mellom hver sats. Denne forholdsregel tar sikte på å eliminere virkningen av sirkeldelingsfeilene, og dessuten på å gardere seg mot grove avlesningsfeil. Ved n satser endres sirkelen ca.  $200^\circ : n$  mellom hver sats. Dersom det observeres bare i én sats (altså i to halvsatser), skulle en etter denne regel dreie sirkelen ca.  $100^\circ$  mellom hver halvsats. Er imidlertid teo-



dolitten slik konstruert at en leser av bare ett sted på horisontalsirkelen, vil dette føre til at virkningen av instrumentfeilen "sirkelens eksentrisitet" ikke blir eliminert. Da erfaringen viser at sistnevnte feil som regel påvirker måleresultatet mer enn sirkeldelingsfeilene, bør en i dette tilfelle innrette seg med sikte på eliminasjon av eksentrisitetsfeilens virkning, og det oppnås i dette tilfelle ved å måle vinkelen i begge kikkertstillinger uten sirkelforflytning. Som sikring mot grove feil, foretas likevel en liten sirkelforflytning mellom de to halvsatser, som ikke bør være større enn  $2 - 3^9$ .

Da sirkeldelingsfeilene spiller så liten rolle på moderne instrumenter, lar vi sistnevnte regel gjelde generelt ved måling i to halvsatser.

Måling av vinkler i to halvsatser kommer særlig til anvendelse ved polygonmåling.

Hvilken retning som velges til utgangs- eller nullretning, er i og for seg likegyldig dersom det er mulig å få med samtlige retninger som skal observeres i vedkommende stasjon, i en enkelt satsserie.

I praksis må vi regne med at instrumentet også foretar uregelmessige egenbevegelser mens målingene pågår, dvs. dreininger som veksler både med hensyn til omdreiningshastighet og omdreiningetsretning. Da vi må regne med at slike egenbevegelser har en tendens til å gjøre mer av seg jo lenger tid målearbeidet tar, er det av betydning at hver enkelt sats observeres på kortest mulig tid. Da tidsforbruket vil være avhengig av antall retninger i satsen, må vi sørge for å holde dette antall tilstrekkelig lavt. Under vanlige forhold bør ikke antall retninger overstige 6 - 7. Er det totale antall større, må vi gå til en oppdeling av retningene i to eller flere satsserier. Seriene må i det minste ha en retning felles, og det er fordelaktig å anvende denne fellesretning til nullretning for samtlige satsserier. Ved valg av fellesretning må det tas hensyn til at denne kan innstilles skarpt. En bør derfor til fellesretning velge retningen til en av de fjernere objekter som ligger slik til at vi kan regne med at det kan tilsiktes nøyaktig hele tiden mens målingene i vedkommende stasjon pågår.

Nedenfor følger et eksempel på føring ved observering av halvsatser.

Stasjon	Sikte til	I. k.st.		II. k.st.		Middel	Redusert sats
		A	B	B	A		
I	1	35,4685	,4625	35,4612	,4652	35,4644	0,0000
	2	80,9024	,8984	80,8976	,9012	80,8999	45,4355
	3	131,1073	,1052	131,1045	,1068	131,1060	.95,6416
	4	228,5360	,5340	228,5300	,5330	228,5332	193,0688

Som allerede nevnt, endres ikke satsen ved å forøke eller forminske samtlige retningsverdier med en konstant. En gjør seg nytte av dette forhold ved danningen av den såkalte reduerte sats som dannes av middel-tallene i nest siste kolonne ved å subtrahere retningsavlesningen for nullretningen fra samtlige retningsavlesninger, slik at den valgte nullretning får verdien null. I talleksemplet er satsen redusert med hensyn på første retning, men det er selvsagt ikke noe i vegen for å redusere satsen på en slik måte at en hvilken som helst av de retninger som inngår i satsen, blir nullretning.

Observeres i flere satser, dras de enkelte satser til slutt sammen til en middelsats. I denne middelsats fremkommer hver enkelt retningsverdi som middeltallet av retningsverdiene til de reduserte satser, idet vi forutsetter at nullretningen er den samme for alle enkeltsatsene.

Nedenfor følger et eksempel på skjemaføring ved måling i to halvsatser med et instrument med bare ett avlesningsmiddel. "Hodene" i det vanlige skjema er tilpasset denne metode.

Stasjon	Sikte til	I. k.st.		II. k.st.		1.halvsats redusert	2.halvsats redusert	Middel
		A	B	B	A			
I	1	8,1230		210,8170		0,-	0,-	0,-
	2	102,7780		305,4800		94,6550	94,6630	94,6590
	3	220,4630		23,1650		212,3400	212,3480	212,3440

Når det måles i to halvsatser, regnes hver halvsats ut særskilt. De forskjellige instrumentfeil som kollimasjonsfeil og horisontalakseskjevhet vil bevirke at resultatene av de to halvsatsene kan avvike mer fra hverandre enn observasjonsnøyaktigheten skulle tilsi. Mens avvikene mellom de reduserte satser ved måling av helsatser utelukkende vil avhenge av observasjonsnøyaktigheten (idet virkningen av nevnte instrumentfeil elimineres av middeltallet av målingene i I. og II. k.st.), vil de tilsvarende avvik ved måling av halvsatser også inkludere virkningen av kollimasjonsfeil og horisontalakseskjevhet. Vi må derfor regne med atskillig større avvik mellom reduserte halvsatser enn mellom helsatser.

Gangen i observasjonsarbeidet ved satsmåling blir følgende :

1. Med tilnærmet nullavlesning på sirkelen for første objekts vedkommende innstilles objektene fortløpende fra venstre mot høyre i I. k.st. (Omhyggelig horisontalstilling av teodolitten forutsettes utført på forhånd.)

2. Kikkerten slås over til II. k.st., og objektene innstilles i omvendt rekkefølge.

3. Kikkerten slås over til I. k.st., instrumentets horisontalstilling justeres og sirkelen dreies omtrentlig  $200^{\circ} : n$ . Så følger gjentakelse av operasjonene under pkt. 1, og slik fortsettes til samtlige satser

er ferdigmålt.

Satsmåling er uten sammenligning den mest anvendte metode ved horisontalvinkelmåling, og særlig da ved triangulering av 2., 3. og 4. orden.

b. Vinkelmåling ved repetisjon.

Ved vinkelmåling måles de enkelte vinkler hver for seg, uavhengig av hverandre.

De vanligste metoder for måling av enkeltvinkler er satsmåling (satsmåling går nemlig over til vinkelmåling når antall retningsobjekter reduseres til to) og repetisjonsmåling. Førstnevnte metode nyttes mest i praksis.

Repetisjonsmålingen forutsetter en dobbeltakset teodolitt. Metoden går ut på at vinkelen avsettes fortløpende langs sirkelen så mange ganger som den skal måles. Målingen foregår på følgende måte :

Først innstilles på venstre siktepunkt og det avleses på horisontalsirkelen. Deretter innstilles på høyre siktepunkt ved dreining om alidaden. Derved har vi fått avsatt vinkelen én gang langs sirkelen. Vi dreier så tilbake om limbeaksen og innstiller på venstre siktepunkt. Deretter dreies om alidadeaksen til høyre siktepunkt, hvorved vinkelen fås avsatt på nytt langs sirkelen. På samme måte fortsettes så mange ganger som vinkelen skal måles i I. k.st. (i alt n ganger dersom vinkelen skal måles med en observasjonsstyrke svarende til n helsatser). Deretter slås kikkerten gjennom og målingen fortsetter på nøyaktig samme måte i II. k.st. med fortløpende avsetting av vinkelen langs sirkelen, like mange ganger i hver k.st. Når høyre siktepunkt er innstilt for siste gang, foretas avlesning på nytt. Dersom første avlesning er  $a_0$  og siste  $a_{2n}$ , blir den søkte verdi for vinkelen lik

$$\alpha = \frac{a_{2n} - a_0}{2n}$$

Har vi ved avsettingen av vinkelen passert o-streken en eller flere ganger, må det til  $a_{2n}$  adderes like mange ganger  $400^g$  som o-streken er passert.

En bør gjøre seg til regel å lese av  $a_1$  slik at en får tilnærmet kjennskap til vinkelens størrelse ( $\alpha = a_1 - a_0$ ), bl.a. for å sikre seg mot grove feil.

Som huskeregel for utførelsen av repetisjonsmåling kan brukes at dreining med solen alltid foregår om alidadeaksen (ved hjelp av alidadens klem- og finskrue). Dreiningen mot solen derimot skjer om limbeaksen (ved hjelp av limbens klem- og finskrue).

Vi skal så anstille noen betraktninger om repetisjonsmetodens nøyaktighet. Vi tenker oss at avlesningen  $a_0$  har avlesningsfeilen  $u_a$  og delingsfeilen  $u_d$ . De tilsvarende størrelser for sluttavlesningen  $a_{2n}$  er  $u'_a$  og  $u'_d$ . Vi har da når  $\bar{a}_0$  og  $\bar{a}_{2n}$  betegner de feilfrie verdier:

$$\alpha = \frac{1}{2n}(\bar{a}_{2n} + u'_a + u'_d - \bar{a}_0 - u_a - u_d) = \frac{1}{2n}(\bar{a}_{2n} - \bar{a}_0) + \frac{1}{2n}(u'_a - u_a) + \frac{1}{2n}(u'_d - u_d)$$

hvor det første ledd angir vinkelens korrekte verdi, mens de to siste ledd representerer virkningen av avlesnings-, resp. sirkeldelingsfeilene. Det går fram av uttrykket ovenfor at metoden er særlig fordelaktig for instrumenter med grove avlesningsmidler og mindre nøyaktig sirkeldeling.

Repetisjonsmåling bygger på den forutsetning at sirkelen står i ro når alidaden dreies separat, og dessuten at linbe og alidade ikke beveger seg i forhold til hverandre ved dreining om linbeaksen. Erfaringen viser at det er vanskelig å få disse fordringer eksakt oppfylt. Sirkelen har nemlig en tendens til å bli slept med ved dreining om alidadeaksen. Til en viss grad kan denne feilen motvirkes ved å skrue klemskruen godt til før dreiningen om alidadeaksen.

Nedenfor følger eksempler på føring ved observering etter repetisjonsmetoden. Føringen forutsettes basert på en vanlig observasjonsbok for satsmåling med visse tillempninger.

Eksempel på føring ved vanlig repetisjon.

(observasjonsstyrke svarende til 2 fullsatser)

Sta- sjon	Sikte til	I.k.st.		II.k.st.		Middell	Red.middell
		A	B	B	A		
	antall rep.			Middell		Multiplum av vinkel	Vinkel
	1 0	0,31	,33	0,3200		0,0000	
	(2) 1	(66,72)				(66,41)	
	2 4	265,98	,99	265,9850		265,6650	66,4163

c. Horisontalvinkelmålingens nøyaktighet.

I Instrumentlæren har vi allerede behandlet de forskjellige instrumentfeils virkning på horisontalvinkelmålingen. Vi viste da at ved å observere i begge kikkertstillinger fås eliminert virkningen av samtlige instrumentfeil, bortsett fra sirkelens delingsfeil og den feil som skyldes at instrumentets vertikallakse ikke er nøyaktig loddrettstilt under målingen. Foruten disse instrumentfeil opptrer ved horisontalvinkelmålingen en rekke andre feil, dels av tilfeldig og dels av systematisk natur.

Dersom observatøren ikke innstiller trådkorset nøyaktig på siktepunktet, har vi en siktefeil eller innstillingsfeil. Størrelsen av denne feilen er i stor utstrekning avhengig av ytre forhold. Luftsitring nedsetter siktenøyaktigheten og ensidig belysning av siktepunktet (signalet) kan bevirke systematiske feil i vinkelmålingen. De beste observasjonsforhold har en i overskyet vær med liten eller helst ingen vind. På solskinnsdager kan sitringen bli så sjenerende at når det gjelder vinkelmåling som krever stor nøyaktighet er det ikke tilrådelig å utføre denne midt på dagen. Da luften er "roligere" om natten enn om dagen, observeres ofte om natten ved såkalte 1.ordens trianguleringer. En nytter da elektriske lykter som signaler.

Ser vi bort ifra de ytre forhold, vil innsiktingsnøyaktigheten være avhengig av målerens øvelse og synsevne, kikkertens forstørrelse og trådkorsets og signalets utforming. Tykke trådkorsstreker er uheldig for så vidt som de ses under en stor synsvinkel, slik at nøyaktigheten av innsiktingen blir nedsatt. Dobbeltstreker regnes for å være nøyaktigere enn enkeltstreker, særlig for signaler med en viss lateral utstrekning. Forsøk har vist at under gode ytre forhold kan vi regne med en siktefeil i betydning av middelfeil på ca.  $\frac{10^{\circ}}{\sqrt{\text{kikkertforst.}}}$ .

Den viktigste feil ved siden av siktefeilen er avlesningsfeilen. Den er i første rekke avhengig av avlesningsmidlets utforming, og i mindre grad av observatøren. For nonier kan vi regne med en avlesningsnøyaktighet i betydning av middelfeil på ca.  $\frac{1}{3}$  av noniens angivelse. Med skruemikroskoper og optiske mikrometer kan middelfeilen på en avlesning bringes ned til ca.  $3^{\circ}$ .

Dersom instrument eller signal er feilaktig sentrert, taler vi om sentreringsfeil og disse bevirker feil i horisontalvinkelmålingen.

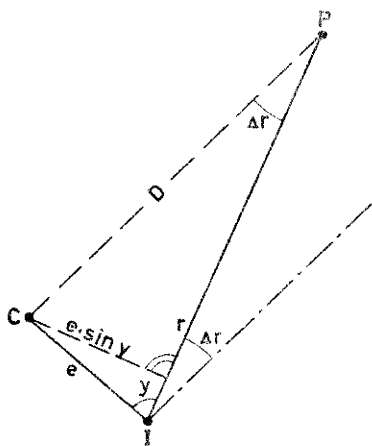


Fig. 38

Vi skal først undersøke virkningen av at instrumentet har en sentreringsfeil. I fig. 38 betegner C det trigonometriske punkts sentrum og I er instrumentets oppstillingspunkt. Sentreringsfeilen er altså lik  $e$ . Retningsavlesningen mot et punkt P er  $r$ . Den riktige retningsverdi som vi ville ha hatt i pkt. C ved sentrisk oppstilling, er lik  $r + \Delta r$  (den strek-prikkede linje fra I er parallell med linjen C-P). Av figuren ser vi at  $\Delta r$  er gitt ved :

$$\sin \Delta r = \frac{e \sin y}{D}$$

som kan forenkles til

$$\Delta\hat{r} = \frac{e \sin y}{D} \rho$$

idet vi tar hensyn til at  $\Delta r$  vanligvis blir en meget liten vinkel. Maksimumsverdien for  $\Delta r$  blir :  $\Delta\hat{r}_{\text{maks.}} = \frac{e}{D} \rho$ .

Dersom signalet i det tilsiktede punkt er eksentrisk, fås en tilsvarende feil. Fig. 39 viser situasjonen i det tilsiktede punkt. I stasjonspunktet P observeres retningen  $r$  mot signalet S, mens den riktige retningsverdi mot det tilsiktede punkts sentrum C er  $r + \Delta r$ . Vi får samme uttrykk som forrige gang

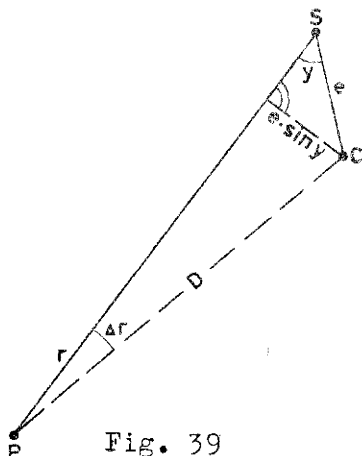


Fig. 39

$$\Delta\hat{r} = \frac{e \sin y}{D} \rho$$

Av de to uttrykkene for sentreringsfeilenes innvirkning på retningsmålingene går det fram at disse feil betyr mest ved korte sikteavstander. Ved polygonmåling spiller sentreringsfeilene

en stor rolle nettopp på grunn av at sidelengdene her er så korte.

#### B. Måling av vertikalvinkler.

Vertikalvinkelmålingens prinsipp er behandlet i instrumentlæren i forbindelse med de av teodolittens instrumentfeil som virker inn på vertikalvinkelmålingen. Vi behandlet da spesielt den såkalte indeksfeil og indeksfeilprøven. Den siste gir generelt uttrykk for at summen eller differensen av vertikalobservasjonene i de to kikkertstillinger skal ha en gitt verdi.

Vi skal i det etterfølgende behandle vertikalvinkelmålingens praktiske utførelse. Fremgangsmåten vil avhenge av om vertikallibellen er tilkopleet egen mikrometerskrue eller ikke. Når vertikallibellen er tilkopleet egen mikrometerskrue blir fremgangsmåten :

1. Skarp innsikting av objektet.
2. Vertikallibellen bringes til innspilling ved hjelp av libellens mikrometerskrue.
3. Avlesning på vertikalsirkelen.

Uten mikrometerskrue for innspilling av vertikallibellen, slik som tilfellet er for de fleste norske instrument-konstruksjoners vedkommende,

blir fremgangsmåten :

1. Grovinsikting av objektet.
2. Vertikallibellen bringes til innspilling ved hjelp av fot-skruene.
3. Skarp innsikting av objektet ved hjelp av høydefinskruen.
4. Avlesning på vertikalsirkelen.

Resultatet av målingene i en kikkertstilling betegnes som en halvsats. Observeres i begge k.st., betegnes resultatet som en helsats. Halvsatser kan bare nyttes dersom nøyaktighetskravene er små, f.eks. ved tachymetrering.

Skal det observeres vertikalvinkler i helsatser mot en rekke objekter, går en fram på den måten at en objektvis observerer ferdig de enkelte helsatser. Nyttles flere helsatser, er det viktig at satsene mot ett og samme punkt får en viss tidsspredning. Denne foranstaltning er diktert av hensynet til refraksjonens svingninger. Når målingene fordeles over et lengere tidsrom, er det større sannsynlighet for å få sjaltet ut unormale refraksjonsforhold enn når målingene utføres over et kortere tidsrom.

Det er viktig å ha klart for seg at ved enhver vertikalvinkelmåling skal en bestemt libelle (vertikallibellen) bringes til å spille inn. Dette har riktignok ikke gyldighet for de instrumentkonstruksjoner med automatisk innstilling av vertikalsirkelens indeks, som er brakt på markedet i de senere år. Betingelsen for at denne automatiske regulering av indeksen skal tre i funksjon, er at vertikalaksen er tilnærmet loddrettstilt. Denne type instrumenter er raskere i bruk fordi den manuelle betydning av vertikallibellen faller bort. Dessuten innebærer de utsjaltning av den farlige feilkilde som en forglemmelse av denne innspilling representerer.

Vi skal ved et eksempel vise føring og utregning av vertikalvinkler (senitdistanser) :

I. k.st.	II. k.st.	Indeksfeilprøve	2i	Middeltall
93,0631 <sup>g</sup>	306,9160 <sup>g</sup>	399,9791 <sup>g</sup>	209 <sup>cc</sup>	93,0736 <sup>g</sup>
92,2588	307,7210	399,9798	202	92,2689
97,8457	302,1335	399,9792	208	97,8561
98,1972	301,7836	399,9808	192	98,2078

Indeksfeilen skal holde seg konstant under målingene i samme stasjon. Indeksfeilprøven gir derfor et godt bilde av målingens nøyaktighet. Dessuten er indeksfeilprøven nødvendig av hensyn til sikring mot grove feil. Særlig ved måling av vertikalvinkler i bare én sats, er det

viktig at indeksfeilprøven blir foretatt. Måles i flere satser, fås kontroll ved sammenligning av middeltallene. Indeksfeilprøven letter også middeltallsberegningen av resultatene av målingene i I. og II. k.st., idet disse middelverdier er lik målte verdi i I. k.st. med tillegg av i.

## KAPITTEL II.

### BESTEMMELSE AV TRIGONOMETRISKE PUNKTER.

Med oppmåling av et terrengområde forstår vi bestemmelsen av et større eller mindre antall terrengpunkters gjensidige beliggenhet, eller mer presist uttrykt, bestemmelsen av terrengpunktene koordinater i et rettvinklet  $x, y, z$ -system.

Oppmåling utføres vanligvis i to hovedavsnitt. Først etableres et fikspunktsystem og deretter fastlegges detaljpunktene. Fikspunktene tjener som en ramme for den etterfølgende detaljering. Fikspunktene koordinater bestemmes beregningsmessig, og det vanligste er at bestemmelsen i  $x, y$ -planet (horisontalplanet) og bestemmelsen av  $z$ -koordinatene (høydene) skjer uavhengig av hverandre, både måle- og beregningsmessig. Vi vil i det etterfølgende inndele stoffet i overensstemmelse med dette.

#### 1. Koordinatberegning.

##### A. Aksesystemer og koordinater i landmålingen.

I planet opererer vi med  $x$  og  $y$  koordinater. I rommet kommer en tredje koordinat  $z$  til, som i landmålingen betegnes som punktets høyde. Vi skal her bare holde oss til de plane koordinater.

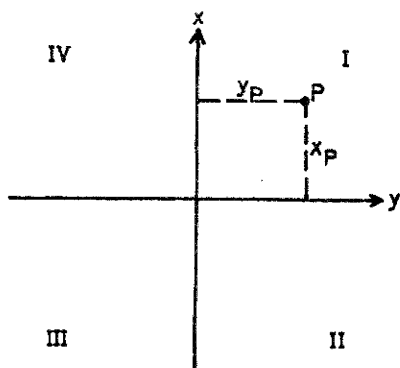


Fig. 40

Fig. 40 viser aksesystemet som nyttes i landmålingen. Som vi ser, avviker dette fra det som brukes i matematikken derved at  $x$ - og  $y$ -aksen har byttet plass. I landmålingen pleier vi nemlig å la  $x$ -aksen falle sammen med meridianen gjennom origo, og regner den positiv mot nord, mens  $y$ -aksen som er vinkelrett på  $x$ -aksen, regnes positiv mot øst.



Den positive omløpsretning er med viseren på et ur, og blir følgelig motsatt av den omløpsretning som brukes i matematikken.

Planet blir av aksesystemet delt i 4 kvadranter, som i sansvar med den valgte positive omløpsretning blir nummert som angitt i fig. 40.

Med et punkts koordinater forstår vi punktets avstand fra aksene. Kjenner vi punktenes rettvinklede koordinater, kan punktene avsettes uavhengig av hverandre. Derved unngår vi at feilene ved avsetningen hopes opp. Ved nøyaktigere målinger blir derfor punktene alltid koordinatberegnet og avsatt ved hjelp av koordinatene.

B. Beregning av retningsvinkler og avstander.

Med en sides retningsvinkel (vanligvis kalt  $\varphi$ ) forstår vi den vinkel som vi må dreie x-aksen i positiv omløpsretning for å få den til å falle sammen med, eller bli parallell med vedkommende side (se fig. 41).

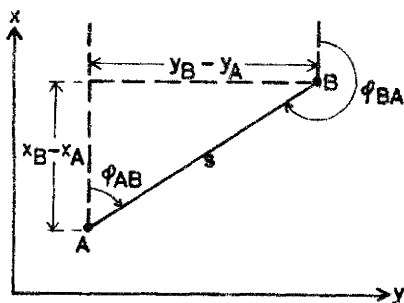


Fig. 41

Retningsvinkelen regnes alltid positiv og kan ha verdier fra  $0^\circ$  til  $400^\circ$ . Av fig. 41 går det fram at retningsvinkelen for siden AB ( $\varphi_{AB}$ ) og retningsvinkelen for BA ( $\varphi_{BA}$ ) er  $200^\circ$  forskjellig, dvs.

$$\varphi_{BA} = \varphi_{AB} \pm 200$$

Når koordinatene til en sides endepunkter er gitt, kan sidens retningsvinkel utledes av :

$$\operatorname{tg} \varphi_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y_{AB}}{\Delta x_{AB}}$$

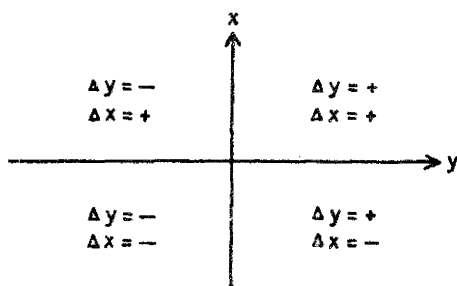


Fig. 42

Hvilken kvadrant  $\varphi$  ligger i når vi regner etter denne formel, går fram av kvadrantskjemaet i fig. 42, som viser koordinattilveksternes fortegn for de forskjellige kvadranter. Det er kombinasjonen av tellerens og nevnerens fortegn som er avgjørende, og som figuren viser ligger  $\varphi$  i kvadrant I, II, III eller IV når en har fortegnene  $\frac{+}{+}$ ,  $\frac{+}{-}$ ,  $\frac{-}{-}$  eller  $\frac{-}{+}$ .

Den sikreste måte å beregne retningsvinkler på består i at en i første omgang ser bort fra fortegnet, dvs. regner som om den søkte vinkel

befinner seg i første kvadrant. Ved bruk av trigonometriske tabeller kommer vi da alltid fram til den minste vinkel mellom x-aksen og vedkommende retning.

Eksempel :  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{+500,00}{-866,00} = -0,577$ . Her befinner altså  $\varphi$  seg i 2. kvadrant. Av en trigonometrisk tabell finner vi at til  $\operatorname{tg} = 0,577$ , svarer vinkelen  $\varphi' = 33,33^\circ$ . Etter det som ble sagt foran, er  $\varphi'$  den minste vinkelen mellom x-aksen og den søkte retning. Strålen må derfor ligge som antydnet i fig. 43, dvs.

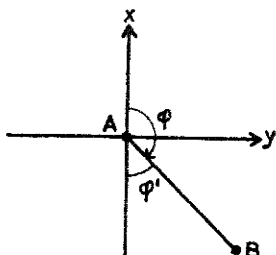


Fig. 43

$$\varphi = 200 - \varphi' = 166,67^\circ$$

På tilsvarende måte blir det når vi skal gå den omvendte veg, nemlig ved bruk av trigonometriske tabeller å finne trigonometriske funksjoner til gitte vinkler. Da skal vi også alltid gå inn i ta-

bellen og nytte som argument den-minste vinkel mellom x-aksen og den gitte stråle.

Eksempel :  $\varphi = 382^\circ$ , dvs. strålen befinner seg i 4. kvadrant. Den minste vinkel mellom x-aksen og strålen blir folgelig lik  $18^\circ$ , og det er denne verdi som skal nyttes som argument ved oppsøking av trigonometriske funksjoner til den gitte  $\varphi$ .

\*

Når retningsvinkelen er gitt, kan avstanden S beregnes på to måter, nemlig :

$$S = \frac{y_B - y_A}{\sin \varphi_{AB}} = \frac{x_B - x_A}{\cos \varphi_{AB}}$$

I disse to uttrykkene for S avhenger teller og nevner av hverandre på en slik måte at de alltid får samme fortegn, dvs. S blir alltid positiv.

Hva beregningen av S angår, er den formelen nøyaktigst som inneholder den største nevner. Det skyldes at en liten feil i nevneren (de trigonometriske funksjoner er jo avrundede tall, slik at de kan ha en feil som maksimalt utgjør en halv enhet i siste desimal) bevirker minst mulig feil i S når nevneren er stor. Det går fram av følgende betraktning :

Den korrekte verdi av S er

$$S = \frac{T}{N}$$

Dersom N har en feil  $\Delta N$  får S en feilaktig verdi S' gitt ved

$$S' = \frac{T}{N + \Delta N} = \frac{\frac{T}{N}}{1 + \frac{\Delta N}{N}} = \frac{S}{1 + \frac{\Delta N}{N}} \approx S(1 - \frac{\Delta N}{N}) = S - S \frac{\Delta N}{N}$$

Feilen på S som følge av feil i N er da

$$\Delta S = S - S' = S \frac{\Delta N}{N}$$

Herav ser vi uten videre at for gitte verdier S og N, vil feilen på S bli minst når N er størst mulig.

Dersom det er stor forskjell mellom tallverdiene til sin φ og cos φ, skal vi derfor beholde den verdi for S som er utledet med den største N, mens den andre verdi for S regnes ut bare for kontrollens skyld. Dersom teller og nevner er om lag like store, tas middeltallet.

C. Overgang fra polarkoordinater til rettvinklede koordinater.

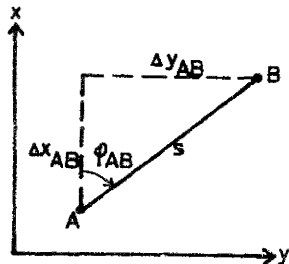


Fig. 44

I fig. 44 representerer  $\varphi_{AB}$  og S polarkoordinatene til pkt. B i forhold til pkt. A. De tilsvarende rettvinklede koordinater er gitt ved:

$$\Delta y_{AB} = S \sin \varphi_{AB}$$

$$\text{og } \Delta x_{AB} = S \cos \varphi_{AB}$$

Videre har vi at :

$$y_B = y_A + \Delta y_{AB} \text{ , og } x_B = x_A + \Delta x_{AB}$$

Disse formlene er almengyldige når sin φ og cos φ regnes med fortegn. Sidelengden S regnes alltid positiv, slik at Δy får samme fortegn som sin φ, og Δx samme fortegn som cos φ.

Dersom vi kjenner retningsvinkelen til en side og måler vinkelen

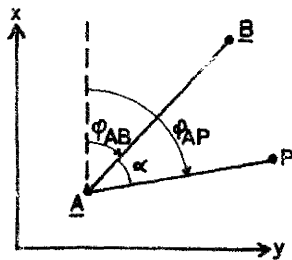


Fig. 45

mellom denne side og en annen, kan vi utlede retningsvinkelen for den siste. I fig. 45 tenker vi oss  $\varphi_{AB}$  gitt og α målt. Vi har da :

$$\varphi_{AP} = \varphi_{AB} + \alpha$$

På den annen side kan vi utlede den mellomliggende vinkel dersom retningsvinklene til de to sidene er gitt

$$\alpha = \varphi_{AP} - \varphi_{AB}$$

MS

## 2. Triangulering.

Ved all kartlegging tar en til med å bestemme beliggenheten av et system av fikspunkter som tilsammen skal danne en avstivende ramme for den etterfølgende innlegging av detaljpunktene. Slike fikspunkter betegnes som trigonometriske punkter.

De viktigste metoder i landmålingen for etablering av fikspunktsystemer er triangulering, trilaterasjon og polygonering. Ved oppmåling av større områder - fra noen få hundre dekar og oppover - nyttes en kombinasjon av disse metoder. Den kombinasjon som spiller den største rolle i praksis, er kombinasjonen av triangulering og polygonering, hvor polygoneringen, som bygger på det fikspunktsystem som er etablert ved trianguleringen, tar sikte på en supplerings (fortetning) av sistnevnte.

Prinsippet ved triangulering og trilaterasjon består i at det aktuelle område dekkes med et nett av trekanter. Ved trilaterasjon bestemmes trekantpunktene ved måling av trekantenes sidelengder. I forbindelse med utviklingen av elektronisk avstandsmåling har denne metode i de senere år fått stor praktisk betydning. Ved triangulering derimot bygger bestemmelsen av trekantpunktene på måling av trekantvinkler. Dessuten forutsetter trianguleringsmetoden at i det minste én trekantside må være kjent, nemlig den såkalte grunnlinje eller basis. De andre sidene kan så bestemmes på grunnlag av denne basislinje og de målte trekantvinkler, f.eks. ved bruk av sinusproporsjonen. ~~Vi skal i det etterfølgende gå nærmere inn på enkelte sider ved trianguleringsmetoden.~~

Ved større trianguleringer er det vanlig å dele den opp i "ordener". Ved en landstriangulering f.eks. etableres først et nett av 1.orden med trekantsider på ca. 30 - 50 km, deretter blir dette nettet fortettet med punkter av 2.orden, så følger nett av høyere orden (vanligvis 3. og 4.) helt til en kommer ned i en punkttetthet <sup>svarende</sup> som svarer til sidelengder på 1 - 3 km. Hvilken tetthet fikspunktsystemet skal ha, avhenger av målestokk og nøyaktighet til det kartverket som oppmålingen tar sikte på. Generelt gjelder at stor målestokk og stor nøyaktighet betinger stor punkttetthet. Gjelder det målestokker større enn 1 : 5000, forlanges som regel så stor tetthet av fikspunktsystemet at det ikke vil være rasjonelt å bygge det fullt ut ved triangulering. Det foretas da en supplerings av trianguleringen ved polygonering (se senere), idet det legges polygonale drag mellom triangelpunktene.

Ved kartlegging av små områder (noen få hundre dekar og mindre) kan all triangulering sløyfes og hele fikspunktsystemet bygges ut ved polygonering.

Den praktiske anvendelse av trianguleringsmetoden vil arte seg

noe forskjellig, avhengig av om det dreier seg om selvstendig triangulering eller om det gjelder supplering (fortetning) av allerede eksisterende trianguleringer.

1). Selvstendig triangulering. I fig. 46 forutsetter vi at lengden av basislinjen MN er kjent og dess-

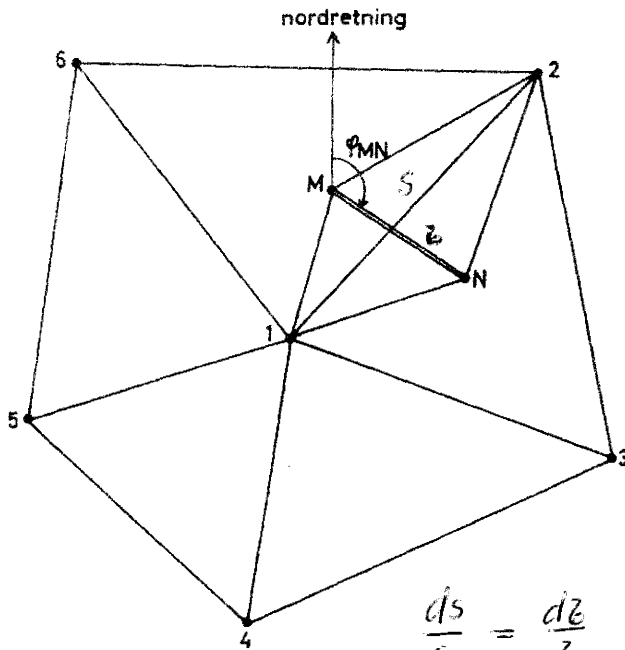


Fig. 46  $ds = \frac{s}{b} db$

uten at vi kjenner minst to vinkler i hver trekant (av hensyn til kontroll og nøyaktighetsforøkelse måles som regel alle tre vinkler i trekantene). Disse data er fullt tilstrekkelig til bestemmelse av samtlige trekantpunkters gjensidige (relative) beliggenhet.

For å få nettet plassert i et rettvinklet aksesystem må vi dessuten ha kjennskap til koordinatene til i det minste ett av nettets punkter i vedkommende aksesystem og dessuten retningsvinkelen for én av trekantsidene.

Ved selvstendig triangulering, som fig. 46 viser et eksempel på, må det altså foretas måling av en basislinje. Denne basismåling må utføres med stor nøyaktighet. Det henger sammen med at en feil på basislinjen vil forstørres ved overføringen til trekantsidene i forholdet trekantside : basislinje, og da basislinjen som regel er kort i forhold til sidene i trianguleringen, vil vi få en ugunstig feiloverføring.

Det at basislinjen gjøres atskillig kortere enn sidene i trianguleringen skyldes praktiske hensyn. Overføringen av basislinjen til en av trekantsidene skjer ved hjelp av ett eget nett, det såkalte basisnett. (I fig. 46 representerer delfiguren LM2N basisnettet).

Ved selvstendige trianguleringer står vi som regel fritt i valg av aksesystem. Det vanlige er at systemets x-akse legges parallelt med nordretningen. Til denne orientering av aksesystemet foretas bestemmelse av retningsvinkelen til en av trekantsidene (i fig. 46 er forutsatt  $\varphi_{MN}$ ) ved hjelp av kompass (under hensyntagen til misvisningen) eller ved observasjoner mot sol eller stjerner. Koordinatene til ett av systemets punkter, f.eks. M, velges fritt. Disse utgangsdata er tilstrekkelig for koordinatberegning av samtlige nettpunkter.

En landstriangulering bygger på flere målte basiser, og for bestemmelse av nettets absolute beliggenhet på referensflaten foretas bestemmelse av geografisk bredde og lengde for flere triangelpunkter, likeså bestemmelse av asimut for flere trekantsider.

2). Fortetning av eksisterende triangulering. I dette tilfelle bygges direkte på det eksisterende nett både med hensyn til lineære dimensjoner og aksesystemer, slik at såvel måling av basislinje som måling av data for nettets orientering, faller bort, idet koordinatverdiene for to av de eksisterende triangelpunkter gir oss både utgangsside og retningsvinkel.

\*

Nøyaktigheten av en triangulering er avhengig av basislinjens og vinkelmålingens nøyaktighet og dessuten av nettets konfigurasjon. Når det dreier seg om sammenhengende nett oppbygd av enkle trekanter, er den likesidede trekantform den gunstigste. Topografien tvinger oss imidlertid ofte til å avvike fra denne idealform.

*24. Triangulering*

A. Trigonometrisk punktbestemmelse ved triangulering.

Ved behandling av trigonometrisk punktbestemmelse ved triangulering skal vi legge hovedvekten på enkeltpunktbestemmelse, dvs. at trianguleringen omfatter bare et enkelt nypunkt. Har vi flere nypunkter kan beregningen spaltes opp slik at vi til enhver tid bare opererer med ett enkelt nypunkt. Vi skal i det etterfølgende behandle de tre viktigste former for trigonometrisk enkeltpunktbestemmelse, nemlig fram-, side- og tilbakeskjæring. Dessuten skal punktbestemmelse ved fullmålt trekant behandles.

a. Punktbestemmelse ved framskjæring.

*Målelære II  
side 13*

Dersom nypunktet blir bestemt utelukkende ved observasjoner i de gitte punkter, sier vi at punktet blir bestemt ved framskjæring eller oversnitt. I sin enkleste form foreligger oppgaven som antydnet i fig. 47.

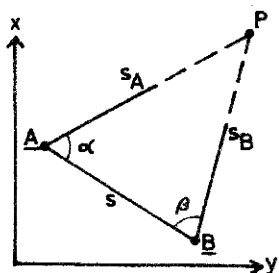


Fig. 47

Her er A og B de gitte punktene og P nypunktet. De målte størrelsene er vinklene  $\alpha$  og  $\beta$ .

Det gis en rekke metoder for beregning av nypunktets koordinater ved framskjæring. Vi nøyer oss med å gjennomgå to av de mest brukte løsninger :

a.1. Indirekte bestemmelse av koordinatene til nypunktet på grunnlag av sidelengder og retningsvinkler.

Vi forutsetter at oppgaven foreligger som antydnet i fig. 47. Først beregnes  $S_A$  og  $S_B$  av sinusproporsjonen :

$$S_A = \frac{S \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{og} \quad S_B = \frac{S \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Dernest utledes retningsvinklene fra de gitte punkter til nypunktet

$$\varphi_{AP} = \varphi_{AB} - \alpha ; \quad \text{og} \quad \varphi_{BP} = \varphi_{BA} + \beta$$

Dersom bare koordinatene til fastpunktene er oppgitt, må  $S$  og  $\varphi$  først beregnes på grunnlag av koordinatene.

Vi regner så ut koordinattilvekstene

$$\Delta y_{AP} = S_A \sin \varphi_{AP}$$

og

$$\Delta x_{AP} = S_A \cos \varphi_{AP}$$

Videre har vi

$$y_P = y_A + \Delta y_{AP}$$

og

$$x_P = x_A + \Delta x_{AP}$$

Kontroll på beregningen får vi ved også å beregne koordinattilvekstene i forhold til B.

$$\Delta y_{BP} = S_B \sin \varphi_{BP}$$

$$\Delta x_{BP} = S_B \cos \varphi_{BP}$$

Vi skal i begge tilfeller få de samme verdier for koordinatene til nypunktet.

Det er denne metoden som Jordskifteverkets skjemaer for framskjæring bygger på. Metoden er spesielt myntet på logaritmeregning.

a.2. Direkte koordinatbestemmelse av nypunktet på grunnlag av retningsvinklene.

Utlødningen av de formler som kommer til anvendelse ved denne metode, skjer med utgangspunktet i følgende uttrykk for retningsvinklene til nypunktet (se fig. 48).

$$\varphi_A = \varphi_{AB} - \alpha, \quad \text{og} \quad \varphi_B = \varphi_{BA} + \beta$$

Vi stiller så opp uttrykkene for tangens til disse retningsvinklene

$$\text{tg } \varphi_A = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A}$$

$$\text{tg } \varphi_B = \frac{y_P - y_B}{x_P - x_B}$$

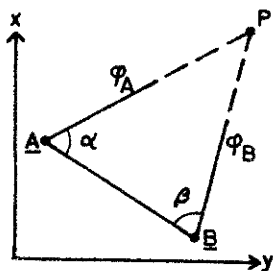


Fig. 48

Disse to ligningene inneholder bare to ukjente, nemlig  $x_p$  og  $y_p$ . Ved å løse hver av ligningene med hensyn til  $y_p$  og sette de to uttrykkene for  $y_p$  lik hverandre, fås for  $x_p$

$$x_p = \frac{-(y_B - y_A) + (x_B \operatorname{tg} \varphi_B - x_A \operatorname{tg} \varphi_A)}{\operatorname{tg} \varphi_B - \operatorname{tg} \varphi_A}$$

For den praktiske beregning er det mest hensiktsmessig å operere med koordinattilvekstene  $\Delta x$  og  $\Delta y$ , som jo vanligvis blir mindre tall enn koordinatene selv. Vi får :

$$\Delta x_{AP} = x_p - x_A = \frac{-(y_B - y_A) + (x_B - x_A) \operatorname{tg} \varphi_B}{\operatorname{tg} \varphi_B - \operatorname{tg} \varphi_A}$$

og 
$$\Delta x_{BP} = x_p - x_B = \frac{-(y_B - y_A) + (x_B - x_A) \operatorname{tg} \varphi_A}{\operatorname{tg} \varphi_B - \operatorname{tg} \varphi_A} \quad \text{Beregningskontroll}$$

Deretter regnes ordinattilvekstene ut av :

$$\Delta y_{AP} = \Delta x_{AP} \cdot \operatorname{tg} \varphi_A$$

$$\Delta y_{BP} = \Delta x_{BP} \cdot \operatorname{tg} \varphi_B \quad \text{Beregningskontroll}$$

Dersom vi har bruk for sidelengdene, finnes disse av :

$$S_A = \frac{\Delta y_{AP}}{\sin \varphi_A} = \frac{\Delta x_{AP}}{\cos \varphi_A}, \quad \text{og} \quad S_B = \frac{\Delta y_{BP}}{\sin \varphi_B} = \frac{\Delta x_{BP}}{\cos \varphi_B}$$

Denne metode egner seg godt for maskinregning.

### a.3. Observasjons- og beregningskontroll ved framskjæring.

Slik som vi hittil har beskrevet et punkts bestemmelse ved framskjæring, har vi ingen effektiv kontroll hverken på beregningen eller de utførte målinger. Det fås først dersom nypunktet blir tilsiktet fra tre gitte punkter. I slike tilfeller innretter vi oss som regel på den måten at vi bestemmer nypunktet på grunnlag av de to retninger som gir den gunstigste bestemmelse (se senere), mens det tredje siktet nyttes til kontroll.

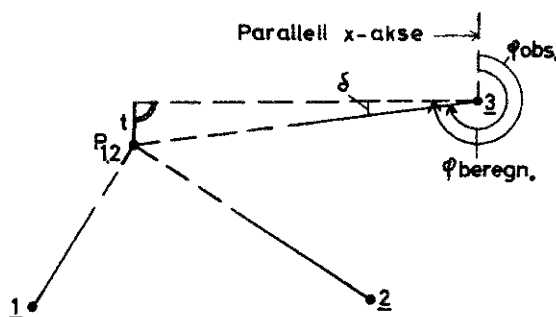


Fig. 49

Vi skal se nærmere på hvordan denne kontroll foregår. I fig. 49 forutsetter vi at nypunktet bestemmes på grunnlag av siktene fra punktene 1 og 2. Denne posisjon av nypunktet betegnes med  $P_{12}$ . Deretter beregnes retningsvinkelen mellom  $P_{12}$  og



punkt 3 og vi får det vi her vil kalle  $\varphi_{\text{beregn}}$ . Dersom systemet var feilfritt, skal vi ha

$$\varphi_{\text{beregn}} = \varphi_{\text{obs}} \text{ (se fig. 49)}$$

Får vi et avvik

$$\delta = \varphi_{\text{beregn}} - \varphi_{\text{obs}}$$

kan vi bestemme tverravviket

$$t = \frac{\delta}{\rho} S_{p3}$$

som da gir oss et bilde av punktbestemmelsens nøyaktighet.

Kontrollen består altså i at vi skaffer oss en observert og beregnet verdi for samme retningsvinkel og sammenligner disse. Dette gjelder generelt når vi skal kontrollere bestemmelsen av trigonometriske punkter på grunnlag av overskytende sikter.

#### a.4. Avvikende former for framskjæring.

I det foregående er forutsatt at de målte vinkler  $\alpha$  og  $\beta$  refererer seg til den trekanten som de to gitte punkter og nypunktet er hjørnepunkter i, dvs. retningen mellom de to gitte punkter er nyttet som "fastpunktretning". Ser vi geometrisk på framskjæringsproblemet, er det klart at det for bestemmelsen av P kommer ut på ett hvilke fastpunktretninger som de målte vinkler refererer seg til. Saken er nemlig den at hver fastpunktretning sammen med den tilhørende vinkel gir et geometrisk sted for nypunktet i form av en rett linje.

I fig. 50 hvor A, B, M og N er gitte punkter, forutsettes at vi istedenfor vinklene  $\alpha$  og  $\beta$  har målt  $\angle A$  og  $\angle B$ . Grunnen kan f. eks. være den at det ikke er mulig å sikte mellom A og B. Vi har da

$$\varphi_{AP} = \varphi_{AM} + \angle A$$

og 
$$\varphi_{BP} = \varphi_{BN} + \angle B$$

Etter metode a.2. kan vi nå uten videre koordinatberegne P. Anvendes metode a.1., må vi først utlede  $\alpha$  og  $\beta$ , som er gitt ved

$$\alpha = \varphi_{AB} - \varphi_{AP} \text{ og } \beta = \varphi_{BP} - \varphi_{BA}$$

hvor  $\varphi_{AB}$  må regnes ut på grunnlag av de gitte koordinater.

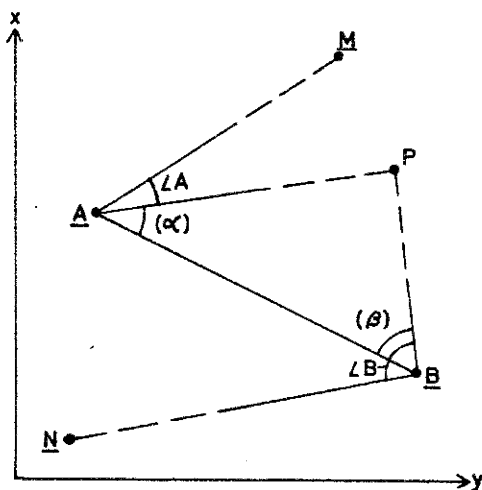


Fig. 50

Vi har hittil forutsatt at det i grunnlagspunktene bare er observert til et enkelt fastpunkt. Ved å observere til flere enn ett fastpunkt oppnår vi for det første å få kontroll på de utførte målinger og dessuten å øke nøyaktigheten av punktbestemmelsen. Der hvor det er høve til det, må en derfor sørge for å ta med to (eller flere) fastpunktretninger. Hvordan utledningen av retningsvinkelen mellom de gitte stasjonspunkter og nypunktet foregår i slike tilfelle, vil bli behandlet under "Orientering av satsserier i grunnlagspunkter" (se side 59).

#### a.5. Franskjæringens nøyaktighet.

Når det gjelder nøyaktigheten av en punktbestemmelse ved franskjæringens punktene. Alt i alt vil altså franskjæringens nøyaktighet være avhengig av følgende fire faktorer:

1. Nøyaktigheten av de fastpunkter som franskjæringsbestemmelsen bygger på.
2. Observasjonsnøyaktigheten.
3. Skjæringsvinkelen i nypunktet.
4. Sidelengdene mellom nypunktet og de to fastpunktene som bestemmelsen skjer ut fra.

Hva de geometriske forhold angår, som kommer til uttrykk ved de to siste faktorene, er det altså skjæringsvinkelens størrelse og sidelengdene

Det gunstigste er at skjæringsvinkelen er tilnærmet lik  $100^\circ$ , og denne verdi bør tilstrebes, men ofte tvinger forholdene til atskillig avvik fra "idealverdien". I praksis stilles opp den fordring at skjæringsvinkelen ikke under noen omstendigheter må underskride verdien  $40^\circ$ . Det er viktig her å ha klart for seg at verdien  $\gamma$  og  $200^\circ - \gamma$  er likeverdige. Den oppstilte fordring betyr altså at det "lovlige" område for skjæringsvinkelen er gitt ved:  $40^\circ < \gamma < 160^\circ$ .

For en gitt verdi av skjæringsvinkelen er det gunstig med kortest

avstand mellom de to stasjonspunktene og nypunktet.

#### b. Punktbestemmelse ved sideskjæring.

Dersom nypunktet blir bestemt ved måling i ett av de gitte punk-

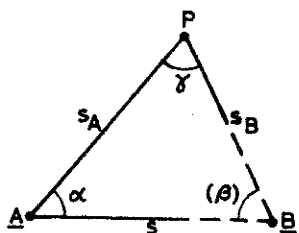


Fig. 51

tene og dessuten i nypunktet, sier vi at punktet blir bestemt ved sideskjæring. Fig. 51 viser et eksempel på sideskjæring. Her er vinklene  $\alpha$  og  $\gamma$  målt.

Beregningen av P kan utføres på samme måte ved sideskjæring som ved franskjæring, idet vi på grunnlag av de målte

vinklene  $\alpha$  og  $\gamma$  kan utlede vinkelen  $\beta = 200^g - \alpha - \gamma$ , hvorved oppgaven er tilbakeført til framskjæring.

Nøyaktigheten av en punktbestemmelse ved sideskjæring vil avhenge av de samme faktorer som omtalt under framskjæring.

c. Punktbestemmelse ved fullmålt trekant.

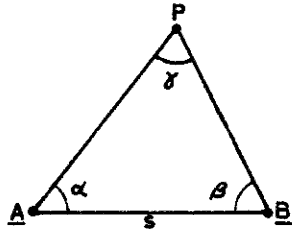


Fig. 52

Punktbestemmelse ved fullmålt trekant kan betraktes som et spesialtilfelle av framskjæring. Her er alle tre vinkler i trekanten målt (se fig. 52). Beregningen innledes her med en vinkelutjevning, idet  $\alpha + \beta + \gamma$  skal være lik  $200^g$ . Et eventuelt avvik fra  $200$  fordeles med en tredjedel på hver vinkel. (Avviket må holde seg innenfor visse tillatte grenser).

Når fordelingen er utført, nyttes de korrigerede vinkler ved den videre beregning. Denne kan da utføres ved en av de metoder som er behandlet under framskjæring.

Det som er anført tidligere om nøyaktigheten av framskjæring, vil i store trekk også ha gyldighet for punktbestemmelse ved fullmålt trekant.

d. Punktbestemmelse ved tilbakeskjæring.

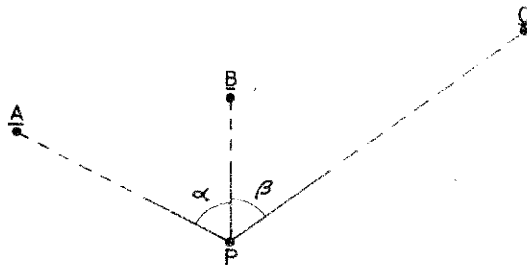


Fig. 53 a

Dersom nypunktet blir bestemt utelukkende ved observasjoner i punktet selv, sier vi at det blir bestemt ved tilbakeskjæring. Denne bestemmelsesmåte forutsetter at vi i nypunktet sikter til minst tre gitte punkter (se fig. 53 a, hvor A, B og C er gitte punkter, mens P er nypunktet).

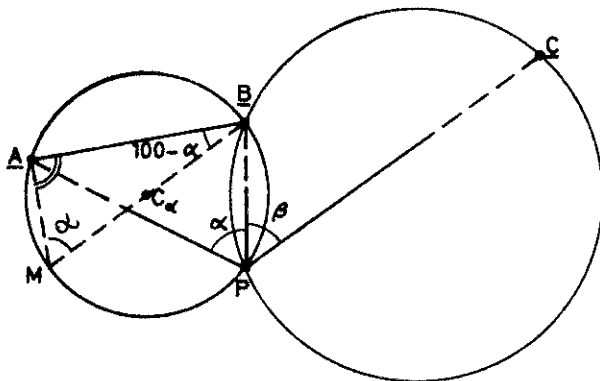


Fig. 53 b

At oppgaven da er geometrisk bestemt, framgår av fig. 53 b. Det geometriske sted for alle punkter hvorfra A og B ses under vinkelen  $\alpha$ , er nemlig en sirkel gjennom A og B. På samme måte bestemmer  $\beta$  en sirkel gjennom B og C. Det søkte punkt er identisk med skjæringspunktet mellom disse to sirklene. Av denne geometriske betraktning

følger at tilbakeskjæringen blir ubestemt dersom disse to sirklene faller sammen, dvs. dersom P befinner seg på sirkelen gjennom de tre gitte punktene. Denne sirkel har et spesielt navn, nemlig den farlige sirkel.

Fig. 53 b viser også den geometriske konstruksjon av den sirkel som  $\alpha$  bestemmer. Det skjer ved i A å avsette en rett vinkel og i B å avsette  $100^\circ - \alpha$ . Derved fås BM som blir en diameter i sirkelen. Denne diameters halveringspunkt C, er sentrum til sirkelen gjennom A og B og P. På tilsvarende måte konstrueres " $\beta$ -sirkelen".

Det fins mange ulike metoder for beregning av tilbakeskjæring, vi skal her behandle to metoder.

4.1. Tilbakeskjæringsberegning ved innføring av hjelpestørrelser.

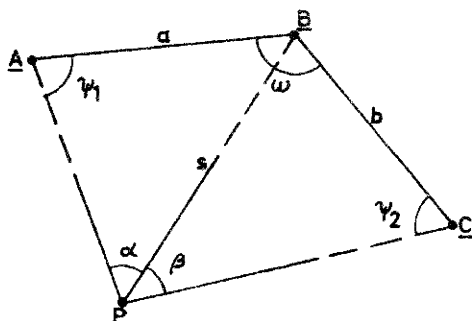


Fig. 54

I fig. 54 opptre som gitte størrelser :  $a$ ,  $b$  og  $\omega$  (om nødvendig beregnes disse av koordinatene til A, B og C).

Observerte størrelser :  $\alpha$  og  $\beta$ .

Hjelpestørrelser :  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  og  $S$ .

Først utleder vi summen av

$\phi_1$  og  $\phi_2$  :

$$\phi_1 + \phi_2 = 400 - (\alpha + \beta + \omega) = \varepsilon \quad (1)$$

Vi uttrykker så  $S$  på følgende to måter :

$$S = \frac{a}{\sin \alpha} \sin \phi_1 \quad \text{og} \quad S = \frac{b}{\sin \beta} \sin \phi_2$$

Ved å sette disse uttrykk for  $S$  like fås

$$\frac{\sin \phi_1}{\sin \phi_2} = \frac{b \cdot \sin \beta}{a \cdot \sin \alpha} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta} = k \quad (2)$$

I siste ligning substitueres  $\phi_1$  ved hjelp av (1)

$$\phi_1 = \varepsilon - \phi_2$$

hvorved fås

d.2. Tilbakeskjæringsberegning ved direkte utledning av nypunktets koordinater.

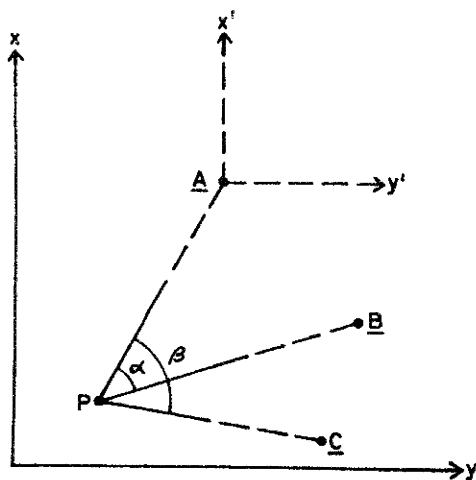


Fig. 55

De beregningsformler som her kommer til anvendelse, utledes enkelt ved innføring av et hjelpeakse-system  $x', y'$  med akser parallelle og ensrettede med aksene i det opprinnelige systemet, og med origo som faller sammen med det av de gitte punktene som nullretningen i nypunktet refererer seg til. I hjelpeaksesystemet har vi (se fig. 55):

$$x'_A = y'_A = 0, \quad x'_B = x_B - x_A, \quad y'_B = y_B - y_A \text{ osv.}$$

$x'_P$  og  $y'_P$  vil følgelig få betydningen av  $\Delta x_{AP}$  og  $\Delta y_{AP}$  i hovedaksesystemet.

Alle retningsvinkler får samme verdi i begge akssystemer. Av fig. 55 framgår at :

$$\alpha = \varphi_{PB} - \varphi_{PA}, \text{ dvs. } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \varphi_{PB} - \operatorname{tg} \varphi_{PA}}{1 + \operatorname{tg} \varphi_{PB} \operatorname{tg} \varphi_{PA}} \quad (3)$$

$$\beta = \varphi_{PC} - \varphi_{PA}, \text{ dvs. } \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \varphi_{PC} - \operatorname{tg} \varphi_{PA}}{1 + \operatorname{tg} \varphi_{PC} \operatorname{tg} \varphi_{PA}}$$

I disse ligningene innfører vi de verdiene for  $\operatorname{tg} \varphi$  som gjelder i hjelpeaksesystemet, nemlig

$$\operatorname{tg} \varphi_{PA} = \frac{y'_A - y'_P}{x'_A - x'_P} = \frac{y'_P}{x'_P}, \quad \operatorname{tg} \varphi_{PB} = \frac{y'_B - y'_P}{x'_B - x'_P} \text{ og } \operatorname{tg} \varphi_{PC} = \frac{y'_C - y'_P}{x'_C - x'_P}$$

og får derved et system av to ligninger som bare inneholder  $x'_P$  og  $y'_P$  som ukjente. Etter noen forenklinger antar disse to ligningene formen :

$$\begin{aligned} x_P'^2 + (y'_B \operatorname{ctg} \alpha - x'_B)x'_P + y_P'^2 - (x'_B \operatorname{ctg} \alpha + y'_B)y'_P &= 0 \\ x_P'^2 + (y'_C \operatorname{ctg} \beta - x'_C)x'_P + y_P'^2 - (x'_C \operatorname{ctg} \beta + y'_C)y'_P &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Vi innfører her de forkortede betegnelser :

$$\begin{aligned} a_1 &= y'_B \operatorname{ctg} \alpha - x'_B \\ b_1 &= -x'_B \operatorname{ctg} \alpha - y'_B \\ a_2 &= y'_C \operatorname{ctg} \beta - x'_C \\ b_2 &= -x'_C \operatorname{ctg} \beta - y'_C \end{aligned}$$

hvorved (4) antar formen :

$$x_p'^2 + a_1 x_p' + y_p'^2 + b_1 y_p' = 0$$

$$x_p'^2 + a_2 x_p' + y_p'^2 + b_2 y_p' = 0$$

Dette ligningssystemet har løsningen :

$$x_p' = \Delta x_{Ap} = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} (b_1 - b_2) = k(b_1 - b_2) \tag{5}$$

$$y_p' = \Delta y_{Ap} = - \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} (a_1 - a_2) = -k(a_1 - a_2)$$

Formlene er almengyldige forutsatt at  $\text{ctg}\alpha$  og  $\text{ctg}\beta$  regnes med fortegn.

Denne metode har sin største fordel deri at den overflødiggjør enhver utregning av hjelpestørrelser som retningsvinkler og sidelengder, idet (5) gir oss nypunktets koordinater direkte som funksjoner av de gitte punkters koordinater (som under alle omstendigheter vil være kjent) og de målte vinkler. En annen fordel består deri at antallet av trigonometriske funksjoner som må slås opp, er begrenset til to. Den andre metoden forutsetter i det minste det dobbelte antall.

Kontroll på beregningen får vi ved å regne ut retningsvinklene fra nypunktet til de gitte punktene. Vi skal da finne igjen vinklene  $\alpha$  og  $\beta$  som differenser mellom disse retningsvinklene.

d.3. Observasjons- og beregningskontroll ved tilbakeskjæring.

Kontroll på målingene og beregningen oppnår vi ved å sikte til flere enn tre gitte punkter. En baserer da beregningen på de tre gitte punkter som gir den gunstigste bestemmelse (se under: Tilbakeskjæringens nøyaktighet) og nytter de(t) overskytende sikt til kontroll. I fig. 56

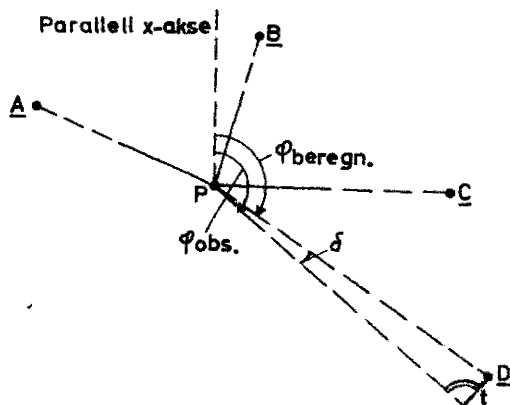


Fig. 56

forutsettes at beregningen av nypunktet P skjer på grunnlag av fastpunktene A, B og C, mens den observerte retning mot D skal nyttes til kontroll. Kontrollen foregår på tilsvarende måte som ved framskjæring ved å skaffe oss en beregnet og en observert verdi for retningsvinkelen til kontrollpunktet : den beregnede verdi på grunnlag av P's og D's koordinater og den

observerte verdi på grunnlag av retningsvinkelen til nullretningen + kontrollpunktets retningsverdi. Dersom vi forutsetter at retningen mellom P og A er nullretningen, har vi altså :

$$\varphi_{\text{obs}} = \varphi_{\text{PA}} + \tau_D$$

På grunnlag av vinkelfeilen  $\delta = \varphi_{\text{beregn}} - \varphi_{\text{obs}}$  beregnes så det tilhørende tverravvik  $t$  som er gitt ved

$$t = \frac{\delta}{\rho} \text{SPD}$$

#### d.4. Tilbakeskjæringens nøyaktighet.

Nøyaktigheten av nypunktets bestemmelse ved tilbakeskjæring er avhengig av følgende fem faktorer :

1. Nøyaktigheten av de fastpunkter som tilbakeskjæringen bygger på.
2. Observasjonsnøyaktigheten.
3. Avstanden fra den farlige sirkel.
4. Avstandene mellom nypunktet og fastpunktene.
5. Størrelsen av den sektor som de punktbestemmende retninger befinner seg i.

Vi skal se litt nærmere på de faktorer som angår de geometriske forhold, nemlig faktorene 3, 4 og 5.

Ad. 3. Som allerede nevnt, svikter punktbestemmelsen dersom nypunktet befinner seg på den farlige sirkel. Imidlertid er nøyaktigheten så liten i nærheten av den farlige sirkel at vi i praksis må sørge for at nypunktet befinner seg i en betryggende avstand.

Ad. 4. Det er gunstig med kortest mulig avstander mellom nypunktet og fastpunktene.

Ad. 5. Størrelsen av denne sektor må ikke være for liten, helst ikke mindre enn  $50^\circ$ . Det gunstigste er at retningene er noenlunde jevnt fordelt rundt horisonten.

Den gunstigste bestemmelse oppnås når P befinner seg inne i "fastpunkttriangleret" (se fig. 57). Det følger av at denne konfigurasjonsanordning tilfredsstiller alle tre oppstilte fordringer.

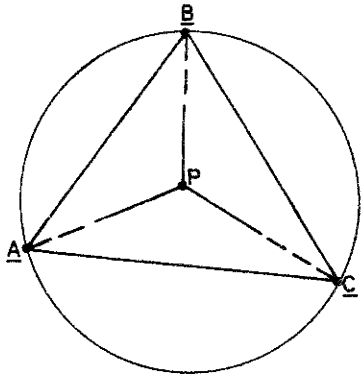


Fig. 57

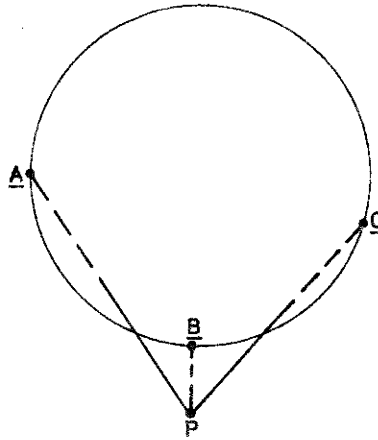


Fig. 58

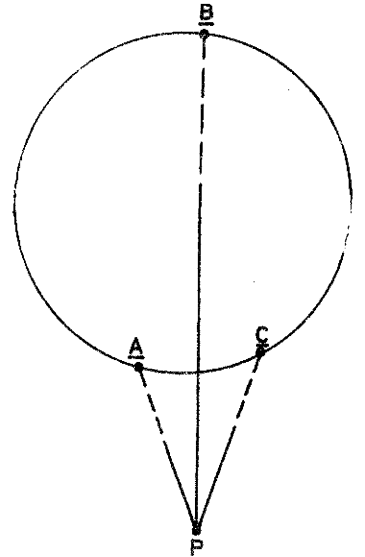


Fig. 59

Fig. 58 er også et eksempel på en forholdsvis gunstig bestemmelse. Konfigurasjonen i fig. 59 derimot er ugunstig. Nypunktet befinner seg riktignok langt unna den farlige sirkel, men sektoren som de bestemmende retninger befinner seg i, er liten.

*33½ side 33*

e. Hansens problem.

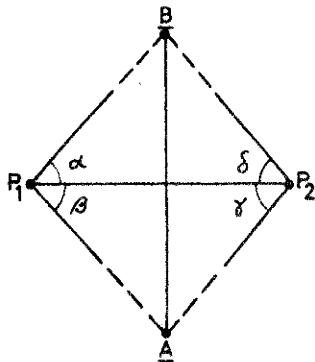


Fig. 60

Ved denne metode bestemmes to nypunkter samtidig på grunnlag av målinger i nypunktene mot to gitte punkter. I fig. 60 er A og B de gitte punktene,  $P_1$  og  $P_2$  er nypunkter, mens  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  og  $\delta$  er de målte størrelser.

Det finnes en rekke metoder for beregning av Hansens problem. Den kanskje enkleste metode består i at en først beregner en likedannet figur i et hjelpeaksessystem  $x'$ ,  $y'$  (se fig. 61).

Denne beregning faller enklest dersom vi

lar en av aksene i hjelpeaksessystemet falle sammen med  $Sp_1P_2$ , og legger origo i ett av nypunktene. For den ukjente siden  $Sp_1P_2$  velges en vilkårlig verdi hvoretter A og B koordinatberegnes i hjelpeaksessystemet. Den figur som der ved fås, blir selvsagt likedannet med originalfiguren. Vi er dermed i stand til å utlede vinklene i de gitte punktene, idet disse finnes som differenser

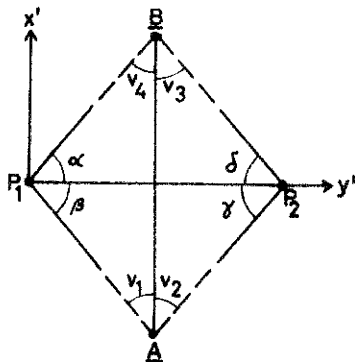


Fig. 61



mellom sidenes retningsvinkler i hjelpeaksesystemet. Dermed er beregningen av  $P_1$  og  $P_2$  i det opprinnelige aksesystemet ført tilbake til framskjæring.

Punktbestemmelse ved Hansens problem har mest for seg når de to fastpunktene ligger utenfor måleområdet, eller er vanskelig tilgjengelig, eller dersom det ikke er mulig å sikte mellom fastpunktene.

Av hensyn til nøyaktigheten bør firkanten som  $P_1$ ,  $P_2$ , A og B danner hjørnepunktene i, ha en noenlunde regelmessig form, enten slik at  $S_{P_1P_2}$  er omtrent parallell med eller vinkelrett på  $S_{AB}$ . Heller ikke bør  $S_{P_1P_2}$  være meget stor eller meget liten i forhold til  $S_{AB}$ . Dersom  $P_1$ ,  $P_2$  og et av de gitte punktene befinner seg på en rett linje, blir oppgaven ubestemt.

\*

*Se side 35*

Vi skal så behandle en metode som er nær beslektet med Hansens problem for så vidt som at bestemmelsen baserer seg på to fastpunkter og all vinkelmåling foregår i nypunktene. Forskjellen stikker i at ved den metode som her skal behandles, og som vi vil betegne som utvidelse av Hansens problem, er det ingen begrensning med hensyn til antall nypunkter.

I fig. 62 er A og B to gitte punkter som befinner seg i forholdsvis stor avstand fra hverandre. Mellom disse punktene sjaltes inn en triangelrekke med forholdsvis korte sidelengder. I hver av trekantene forutsettes målt i det minste to vinkler. Om trekantvinklene i A og B er målt eller ikke, er uten betydning for løsningen av oppgaven. Det avgjørende er at det verken i A eller B er observert mot noe fastpunkt. Grunnen kan f.eks. være den at det ikke er mulig å sikte mellom A og B, og heller ikke mulig verken i A eller B å sikte til andre fastpunkter. Slike tilfelle kan forekomme i skogterreng, f.eks. på den

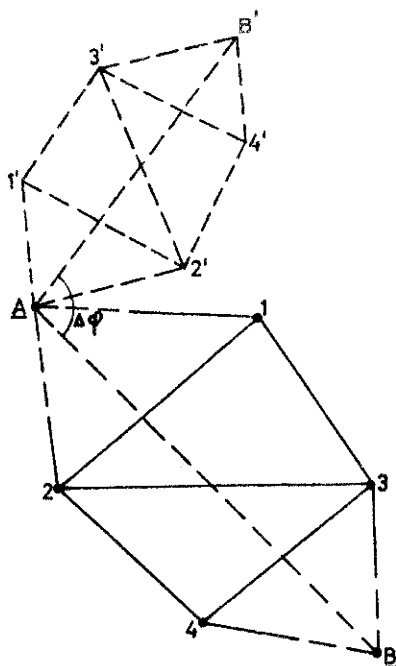


Fig. 62

måten at punktene A og B ble signalisert med tårn ved den opprinnelige triangulering. Disse tårn er nå falt ned, slik at det fra bakken ikke er mulig å få sikteforbindelse med noen av de gamle triangelpunkter.

Oppgaven går nå ut på å koordinatberegne nypunktene 1, 2, 3 og 4.

Oppgaven kan løses på følgende måte :

1. Først foretas en provisorisk koordinatberegning av nypunktene, idet vi for en av sidene, f.eks.  $S_{A1}$ , velger vilkårlig lengde og retningsvinkel. Ved denne beregning tenker vi oss at vi har fått figuren  $A1'2'3'4'B'$ , som etter forutsetningen er likedannet med originalfiguren.

2. Det neste blir så å bestemme likedannethetsforholdet og dreiningsvinkelen  $\Delta\varphi$ , slik at vi kan få gitt hjelpefiguren den riktige størrelse og få dreid den på plass. Vi finner begge deler ved å utlede retningsvinkel og avstand både for  $S_{AB}$  og  $S_{AB'}$ . Vi har da :

$$\text{Dreiningvinkel} \quad : \quad \Delta\varphi = \varphi_{AB} - \varphi_{AB'}$$

$$\text{Likedannethetsforholdet} \quad : \quad c = S_{AB} : S_{AB'}$$

Relasjonene mellom vilkårlige sider og retningsvinkler i hoved- og hjelpeaksessystemet er da gitt ved :

$$S_i = c S'_i \quad \text{og} \quad \varphi_i = \varphi'_i + \Delta\varphi$$

hvor  $S_i$  og  $\varphi_i$  refererer seg til hovedaksessystemet, mens  $S'_i$  og  $\varphi'_i$  refererer seg til den merkede figur i hjelpeaksessystemet.

3. Med de riktige sider og retningsvinkler utføres så den endelige koordinatberegning av nypunktene. Kontroll på beregningen fås derved at vi ved beregning av figuren fra et av fastpunktene skal komme fram til de kjente koordinater for det andre fastpunktet.

B. Orientering av satsserier i grunnlags-  
punkter (fastpunkter).

*Måle løse II*  
*side 12*

I forbindelse med den trigonometriske punktbestemmelse ved trianguering støter vi ofte på det tilfelle at vi i et grunnlagspunkt har observert til flere enn ett fastpunkt og på grunnlag av disse målinger skal utlede den observerte verdi for retningsvinkelen til ett eller flere nypunkter. Det er særlig i forbindelse med framskjøring at vi støter på dette problem.

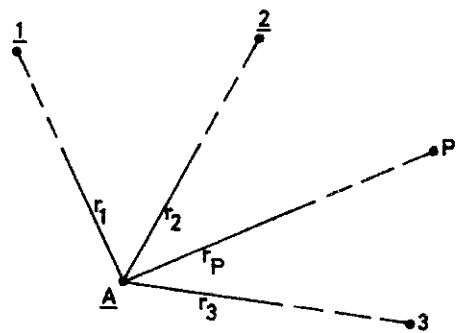


Fig. 63

Fig. 63 forestiller et slikt tilfelle. I grunnlagspunktet A har vi foretatt retningsobservasjoner mot fastpunktene 1, 2 og 3, og dessuten mot nypunktet P. Observasjonsmaterialet gir grunnlag til å utlede retningsvinkelen fra A til P på like så mange måter som retningsserien i A inneholder fastpunkter. I foreliggende tilfelle

med tre fastpunkter kan vi altså utlede retningsvinkelen til P på i alt tre måter, nemlig :

$$1. \quad \varphi_{Ap} = \varphi_1 + (r_p - r_1) = \varphi_1 - r_1 + r_p$$

$$2. \quad \varphi_{Ap} = \varphi_2 + (r_p - r_2) = \varphi_2 - r_2 + r_p$$

$$3. \quad \varphi_{Ap} = \varphi_3 - (r_3 - r_p) = \varphi_3 + (r_p - r_3) = \varphi_3 - r_3 + r_p$$

Som endelig verdi for  $\varphi_{Ap}$  adopterer vi middeltallet av disse tre bestemmelsene, som blir

$$\varphi_{Ap} = \frac{(\varphi_1 - r_1) + (\varphi_2 - r_2) + (\varphi_3 - r_3)}{3} + r_p = \underline{\underline{0}} + r_p$$

Størrelsen  $o$  har et spesielt navn, nemlig orienteringsvinkelen for stasjonen A. Orienteringsvinkelens geometriske interpretasjon består i at den er lik retningsvinkelen til satsseriens nullretning. Retningsvinkelen til et hvilket som helst nypunkt fås ved til orienteringsvinkelen å addere vedkommende nypunkts retningsverdi. Vi skal belyse dette med et eksempel. Beregningen foregår i et såkalt orienteringsregister.

Tilsiktede punkter	Gitte retningsvinkler $\varphi$	Observerte retninger $r$	$\varphi - r$	Orienterede nypunktretn. $o + r_p$
<u>1</u>	51,6437 <sup>9</sup>	0,0000 <sup>9</sup>	51,6437 <sup>9</sup>	105,8615
<u>2</u>	84,2467	32,6025	51,6442	
P <sub>1</sub>		54,2173		
<u>3</u>	176,8159	125,1712	51,6447	305,6622
P <sub>2</sub>		254,0180		

$$o = 51,6442$$

Satsserien inneholder altså 3 fastpunktretninger, nemlig retningene til 1, 2 og 3, og to nypunktretninger til P<sub>1</sub> og P<sub>2</sub>.

### C. Eksentrisk oppstilling og signal.

Vi har hittil forutsatt at de målte vinkler eller retninger refererer seg til det trigonometriske punkts sentrum. I den praktiske landmåling blir vi imidlertid ofte nødt til å foreta eksentrisk oppstilling, f.eks. av den grunn at signalet er av en slik beskaffenhet at det overhodet ikke er mulig å stille opp sentrisk, eller at det faller for besværlig å rive det ned og bygge det opp igjen. Grunnen kan også være at det er flere observatører i virksomhet samtidig. I praksis kan det også forekomme at det ikke er mulig fra det trigonometriske punkts sentrum å se ett eller flere av de signaler som skal tilsiktes fra vedkommende stasjon,

slik at en av den grunn blir nødt til å stille opp utenfor sentrum. Hva signalene angår, forekommer det ofte i praksis at de ikke faller nøyaktig sammen med de trigonometriske punkters sentrum selv om dette er tilstrebet av signalbyggerne. Dette er særlig tilfelle ved høye signaler.

I begge tilfeller - enten det dreier seg om eksentrisk oppstilling eller eksentrisk signal - må de observerte verdier korrigeres slik at vi kommer fram til de verdier vi ville ha fått dersom instrument og signal hadde vært sentrisk.

a. Eksentrisk oppstilling.

I fig. 64 betyr C det trigonometriske punkts sentrum, mens I er instrumentets oppstillingspunkt. Vi betrakter en observert retning r mot punktet P. Dersom målingene hadde vært utført i C ville vi (med samme orientering av sirkelen) istedenfor retningsverdien r ha hatt avlesningen r+δ representert ved den stiplede linje som er parallell med linjen C-P. Bestemmelsen av δ, som går under navn av sentreringskorreksjonen, forut-

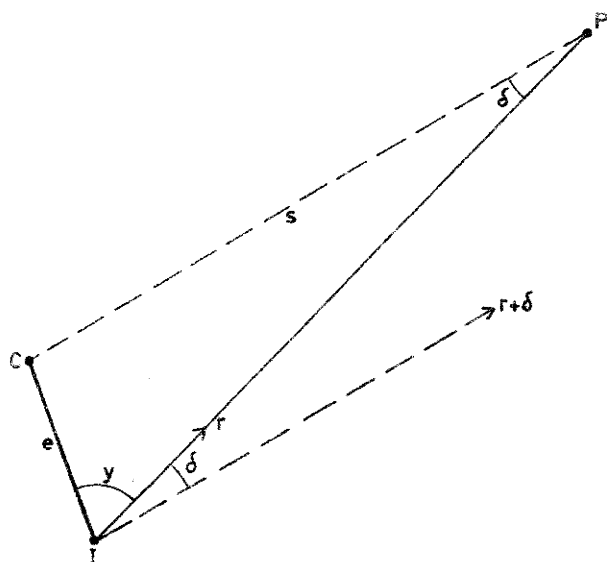


Fig. 64

setter kjennskap til de såkalte sentreringselementer som er : 1. avstanden mellom det trigonometriske punkts sentrum og instrumentets oppstillingspunkt, altså størrelsen e i fig.64 og 2. vinkelen i oppstillingspunktet mellom det trigonometriske punkts sentrum og vedkommende retning som skal sentreres, altså vinkelen y i fig. 64. Vi har da :

$$\sin \delta = \frac{e \sin y}{s}$$

Som regel er sentreringskorreksjonene så små at det er tillatt å sette :

$$\sin \delta = \delta \quad \text{når } \delta = 1,34^{\circ} \text{ blir feilen } 1''$$

Derved antar uttrykket for sentreringskorreksjonene formen :

$$\delta = \frac{e \sin y}{s} \rho$$

De sentrerte retninger fås ved å addere δ-ene, som må regnes med fortegn, til de eksentrisk observerte verdier. Vi har følgelig :

$$r_{\text{sentrisk}} = r_{\text{eksentrisk}} + \delta$$

Den eksentriske avstand  $e$  må måles med stor nøyaktighet, og desto større nøyaktighet jo kortere sidelengdene er. Vinkelen  $y$  og sidelengdene  $S$  trenger ikke bestemmes med stor nøyaktighet. For  $y$  er det vanligvis tilstrekkelig med minutts nøyaktighet. Der det er tale om små eksentrisiteter ( $< 0,5$  m), kan en bestemme  $y$  med en vanlig transportør og ta sidelengdene ut av et eksisterende kart. For større verdier av  $e$  kan det bli nødvendig med en provisorisk sideberegning på grunnlag av de observerte eksentriske vinkler og nytte disse provisoriske sideverdier ved sentreringsberegningen.

b. Eksentrisk signal.

Dersom signalet er eksentrisk, må det utføres en tilsvarende sentreringsberegning som ved eksentrisk oppstilling. Denne beregning forutsetter kjennskap til avstanden mellom det trigonometriske punkts sentrum og signalets sentrum, og dessuten vinkelen i signalets sentrum mellom det trigonometriske punkts sentrum og de retninger som er observert mot vedkommende signal. I fig. 65 blir signalet som befinner seg eksentrisk i forhold til

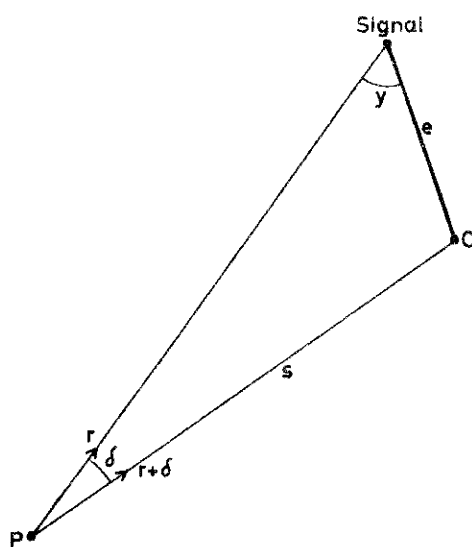


Fig. 65

mellom det trigonometriske punkts sentrum og signalet må bestemmes med størst mulig nøyaktighet. Derimot stilles det ikke store fordringer til nøyaktigheten av  $S$  og  $y$ .

C, tilsiktet fra P. Med sentrisk signal ville vi i P ha hatt avlesningen

$$r + \delta$$

hvor  $\delta$  er gitt ved :

$$\delta = \frac{e \sin y}{S} \rho$$

Denne formel gir korrekt verdi for  $\delta$  både med hensyn til størrelse og fortegn, forutsatt at sentrerings-elementene regnes slik som vist i fig. 65.

I likhet med den eksentriske oppstilling har vi her at avstanden

\*

Vi skal så se litt nærmere på utledningen av de eksentriske vinkler. Den enkleste regning fås ved å la sentreringselementet  $y$  referere seg til nullretningen i vedkommende stasjon. Vi betegner denne verdi for sentreringselementet  $y_0$ . Sentreringsvinkelen  $y_p$  til et hvilket som helst annet objekt P fås da ved til  $y_0$  å addere vedkommende objekts retningsverdi, som

vi betegner med  $r_p$ . Vi har folgelig

$$y_p = y_0 + r_p$$

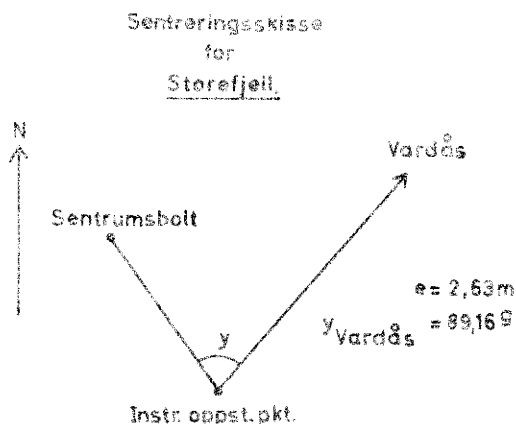


Fig. 66 viser et eksempel på føring av sentrerings-skisse ved eksentrisk oppstilling. Det forutsettes at Vardås er stasjons nullretning.

Vi skal så belyse beregningen av sentreringsstillegg ved et eksempel, som referer seg til fig. 66.

Fig. 66

Tilsiktede punkter	Observerte retninger	Sentreringsvinkel	Sidelengder	Sentr.-tillegg	Sentrerte retninger	Redusert sats
Storefjell (eksentrisk oppstilling)						
$y_{Vardås} = 89,16^{\circ}$ , $e = 2,63$ m						
Vardås	0,0000 <sup>g</sup>	89,16 <sup>g</sup>	3684,2 m	+ 448 <sup>c</sup>	0,0448 <sup>g</sup>	0,0000 <sup>g</sup>
Høgevarde	52,5420	141,70	2146,9 "	+ 618	52,6038	52,5590
Stortind	122,3680	211,53	5877,6 "	- 51	122,3629	122,3181
Skarfjell	345,1860	34,35	4232,7 "	+ 203	345,2063	345,1615

Generelt kan det sies at sentreringsberegninger er "farlige" for så vidt som en ikke får noen kontroll på selve beregningen. Slike beregninger må derfor utføres særlig omhyggelig og samvittighetsfullt. Det samme gjelder målingen av sentrerings-elementene.

Hva sentrerings-elementet  $y_0$  angår, kan en bruke som huskeregel at det både ved eksentrisk oppstilling og signal har sitt tøppunkt i det eksentriske punkt, og er lik den positive vinkel mellom det trigonometriske punkts sentrum og vedkommende stasjons nullretning. Fastlegges  $y$  i forhold til en annen retning, lønner det seg å regne seg om til  $y_0$  ved hjelp av  $o$ -retningen.

c. "Nedføring" av trigonometriske punkter.

Da vi behandlet eksentrisk vinkelmåling, gikk vi fram på den måten at vi overførte de eksentriske målinger til det trigonometriske punkts sentrum. Imidlertid består det også en annen mulighet, nemlig å overføre det trigonometriske punkts koordinater til det eksentriske punkt, og la dette overta hovedpunktets "funksjoner". Sistnevnte metode kommer hovedsakelig til anvendelse når hovedpunktet er utilgjengelig.

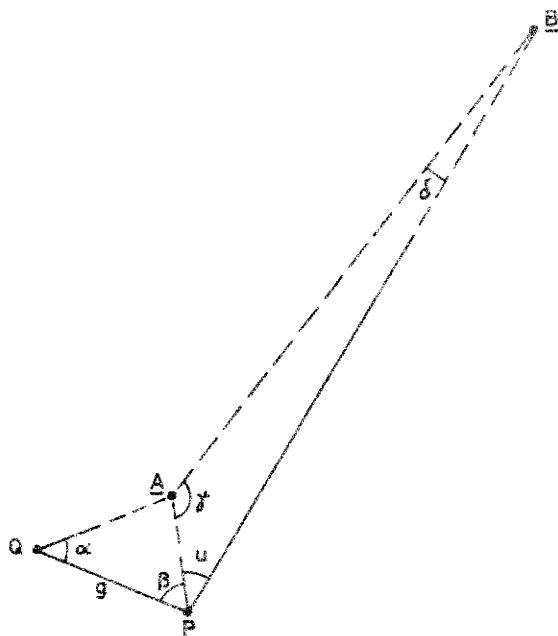


Fig. 67

I fig. 67 er A og B to gitte triangelpunkter, mens pkt. P som befinner seg i nærheten av A, skal etableres som hjelpepunkt. Vi forutsetter at hovedpunktet A er utilgjengelig, slik at det ikke er mulig å måle avstanden AP (e) direkte, men må foreta en indirekte bestemmelse av denne ved hjelpetrianglet APQ. I dette hjelpetrianglet måles grunnlinjen g og vinklene  $\alpha$  og  $\beta$ . Dermed kan e utregnes ved hjelp av sinusproporsjonen. Videre må vinkelen u måles. I triangellet ABP kjenner vi følgelig to sider og én vinkel og kan beregne vinkelen  $\delta$  ved bruk av

sinusproporsjonen. Dermed er også  $\gamma$  gitt, og vi har grunnlag for utregning av  $\varphi_{AP}$ , idet :

$$\varphi_{AP} = \varphi_{AB} + \gamma$$

Vi kjenner dermed polarkoordinatene til pkt. P i forhold til A og kan følgelig beregne de rettvinklede koordinater. Kontroll på beregningen fås ved til slutt å beregne  $\varphi_{PB}$ , og vi skal da ha :

$$\varphi_{PB} - \varphi_{PA} = u$$

Metoden med å etablere hjelpepunkt i nærheten av det trigonometriske punkt kommer først og fremst til anvendelse ved polygonmåling når det trigonometriske punkt som polygondraget begynner eller avslutter i, er utilgjengelig. Vi bestemmer da et hjelpepunkt i nærheten av det utilgjengelige punkt og lar polygondraget begynne eller avslutte i hjelpepunktet.

For nøyaktigheten av "nedføringen" er nøyaktigheten av avstanden e utslagsgivende. Grunnlinjen g må følgelig måles med stor nøyaktighet og trekanten APQ gis en gunstig form slik at overføringen av g til e skjer uten nøyaktighetstap av betydning.  *$\beta$  så liten som mulig*  
 *$\alpha \approx 100^\circ$*

#### D. Planlegging og beregning av triangelnett.

##### a. Planlegging av triangelnett.

Før selve målingen tar til, må nettet planlegges og signalbyggingen være utført. Planleggingen omfatter det forberedende kontorarbeid og den etterfølgende rekognosering i marka.

a.1. Trianguleringen bygger direkte på eksisterende triangulering.

Først må alle tilgjengelige opplysninger om eventuelle tidligere trianguleringer innen eller i nærheten av det aktuelle måleområde innsamles. Det som i denne forbindelse er av særlig betydning er om den eksisterende triangulering er så nøyaktig at den nye triangulering kan bygge direkte på denne. I så fall forenkles problemet vesentlig, idet såvel den nye triangulerings lineære dimensjoner som plassering og orientering i aksesystemet kan "overføres" fra den eldre triangulering, slik at egen basismåling og be-

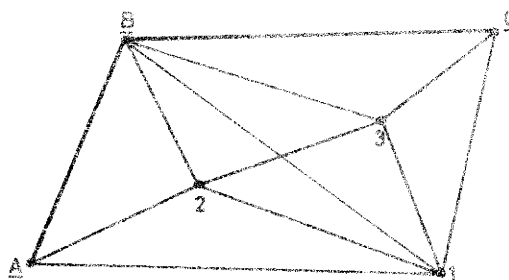


Fig. 68

stemmelse av orientering og plassering av det nye nettet faller bort. Fig. 68 viser et eksempel på en slik utbygging av en eksisterende triangulering. Her er A, B og C gitte punkter mens 1, 2 og 3 er nypunkter. Som eksempel på trianguleringer som er nøyaktig nok som grunnlag for direkte "videreføring", kan nevnes NGO's såkalte økonomiske

trianguleringer.

a.2. Frie, selvstendige trianguleringen.

Dersom det ikke finnes noen egnet eldre triangulering i rimelig nærhet av målenettet, må nytrianguleringen etableres som selvstendig triangulering. Det må da foretas en egen basismåling. Ved litt større trianguleringer vil sidene i nettet være så lange at det faller for tungvint å måle lengden av en hel triangelside. I stedet måles en kortere basislinje

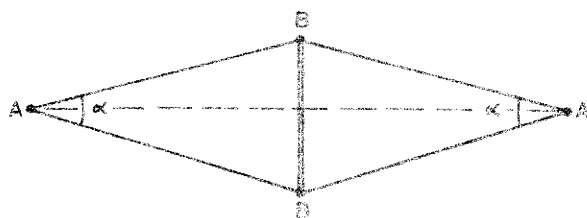


Fig. 69

eller grunnlinje, og denne blir så overført til en av sidene i triangelnettet ved et spesielt basisnett. Den ideelle form på basisnettet er et rombesystem, slik som fig. 69 er et eksempel på. Her er BB selve basislinjen, mens AA er

basissiden (beregningbasis) som etter forutsetningen er en side i triangelnettet. Vinklene  $\alpha$  bør ikke være mindre enn  $30^\circ$ . Fig. 70 viser et eksempel

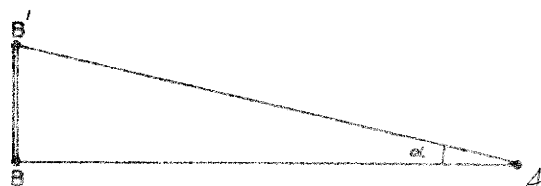


Fig. 70

på en enklere utforming av basisnettet. Med hensyn til nøyaktigheten av basisoverføringen vil denne først og fremst være avhengig av nøyaktigheten av de spisse vinkler (altså av vinklene  $\alpha$  i fig. 69 og 70). Det må derfor legges

særlig vekt på observasjonsarbeidet for disse vinklers vedkommende.



Hva selve målingen av basislinjen angår, må denne utføres som en presisjonslengdemåling ved bruk av komparerte stålbånd og hensyntagen til alle aktuelle korreksjoner, idet så vel strekk som temperatur må bestemmes for hver enkelt målebåndsseksjon og høydeforskjellene bestemmes ved nivellement.

Ved basismålinger som tar sikte på den høyeste grad av presisjon (f.eks. ved landsoppmålinger) nyttes et spesielt lengdemålingsutstyr, nemlig invarstrenger. Denne form for lengdemåling vil ikke bli gjennomgått her. *nøyaktighet opp til 500000 og enda bedre*

Ved litt større trianguleringer må det sørges for at basissiden får en sentral beliggenhet i nettet. Derved oppnås at nøyaktighetstapet ved overføringen av basissiden til nettets enkelte sider blir minst mulig for hele nettet sett under ett. Selve basislinjen må legges til forholdsvis flatt lende. Særlig enkel faller basismålingen dersom basislinjen kan legges langs en veg. Ved mindre trianguleringer vil det ofte være mulig å nytte en av triangelsidene til basislinje slik at eget basisnett blir overflødig.

Når det gjelder innvirkningen av basislinjens nøyaktighet på trianguleringens nøyaktighet, har vi følgende forhold: En feil på basislinjen overføres til triangelnettet på en slik måte at samtlige triangelsider får samme relative feil som basislinjen. Eller sagt på en annen måte: Samtlige sider i nettet får samme relative nøyaktighet som basislinjen.

Som tidligere nevnt, tar en sikte på at x-aksen til det rettvinklede aksesystem som nyttes ved beregninger i landmåling, skal falle sammen med stedets sanne nordretning. Orienteringen av nettet i forhold til aksesystemet skjer som regel ved måling av magnetisk retningsvinkel (magnetisk asimut) for en av triangelsidene. Denne måling sammen med misvisningen som forutsettes kjent, er tilstrekkelig for orientering av nettet. Hva plasseringen i aksesystemet angår, innretter en seg på den måten at en for ett av punktene, helst det som den magnetiske retningsvinkel er målt i, velger et sett koordinatverdier (runde verdier) som bør være så store at negative verdier for noen av nettets punkter unngås.

### a.3. Den nye triangulering knyttes til den eldre.

Vi har foran behandlet de to tilfellene: 1. at den nye triangulering bygger direkte på den eldre og 2. den nye triangulering er helt selvstendig. En tredje mulighet blir aktuell dersom det forekommer en eldre triangulering som ikke tilfredsstillende den nye triangulerings nøyaktighetskrav. Det vil da ikke være forsvarlig å bygge opp den nye triangulering på den eldre med hensyn til de lineære dimensjoner. Derimot

kan det være av verdi å få det nye nettet tilknyttet det eldre, slik at det nye netts orientering og plassering blir bestemt på grunnlag av den eksisterende triangulering. Det foregår på den måten at i det minste ett av nypunktene bestemmes i forhold til den eldre triangulering. Som eksempel på trianguleringer som ikke er nøyaktig nok som grunnlag for økonomiske målinger, kan nevnes NGO's topografiske trianguleringer.

\*

Foruten de rent konfigurasjonsmessige hensyn ved oppbyggingen av nettet må en også ta hensyn til følgende : Triangelpunktene må ligge gunstig til for avmerking, lite utsatt for å bli forskjøvet, tillate en sikker og stø oppstilling av teodolitten, ligge gunstig til for tilknytting av polygonale drag og heller ikke betinge for store utgifter til bygging av signaler.

#### b. Beregning av triangelnett.

Hva beregningen av nettet angår, vil vi her nøye oss med å behandle det enkleste tilfelle at den foretas som enkeltpunktsberegning uten utjevning. Det viktigste spørsmål her er rekkefølgen som punktene skal

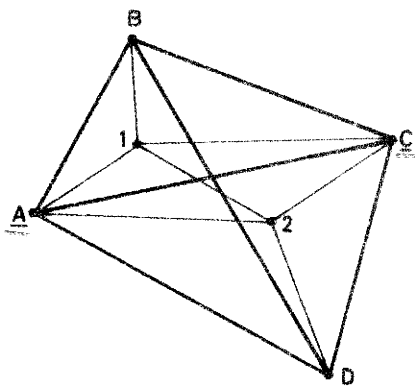


Fig. 71.

beregnes i. Det grunnleggende prinsipp er : Fra det større til det mindre. Vi skal anskueliggjøre anvendelsen av dette prinsipp ved et eksempel. I fig. 71, som forestiller et nett med A og C som grunnlagspunkter, begynner en f.eks. beregningen med punktet B. Deretter beregnes punkt D ut fra A og C med retningsvinkelkontroll til punkt B. Så følger beregningen av punktene 1 og 2. Først beregnes f.eks. 1 ut fra A og B med retnings-

vinkelkontroll til C, og deretter beregnes 2 ut fra C og D med retningsvinkelkontroll til A og 1. Den eneste form for utjevning som foretas ved beregningen, er at vinkelsummene i trekanten avstemmes på  $200^{\circ}$ .

Dersom vi har mulighet for å beregne et nypunkt ved flere snittkombinasjoner, velges for beregningen den kombinasjon som gir den nøyaktigste bestemmelse av punktet (se pkt. a.5, side 51).

*Korte sider til bestemmelse  
Lange sider til kontroll } [v] blir liten.*

E. Den trigonometriske høydemåling.

Ved siden av nivellering er den trigonometriske høydemåling den mest anvendte metode til bestemmelse av punkters høyder. Metoden kommer hovedsakelig til anvendelse i forbindelse med tachymetrering, polygønering og triangulering. I de to første tilfellene er avstandene så små at vi uten videre kan se bort fra virkningen av jordkrumningen og den atmosfæriske refraksjon. Ved triangulering derimot opereres med så store sidelengder at en ved beregningen må ta hensyn til jordkrumningens og refraksjonens innvirkning.

a. Litt om den atmosfæriske refraksjon.

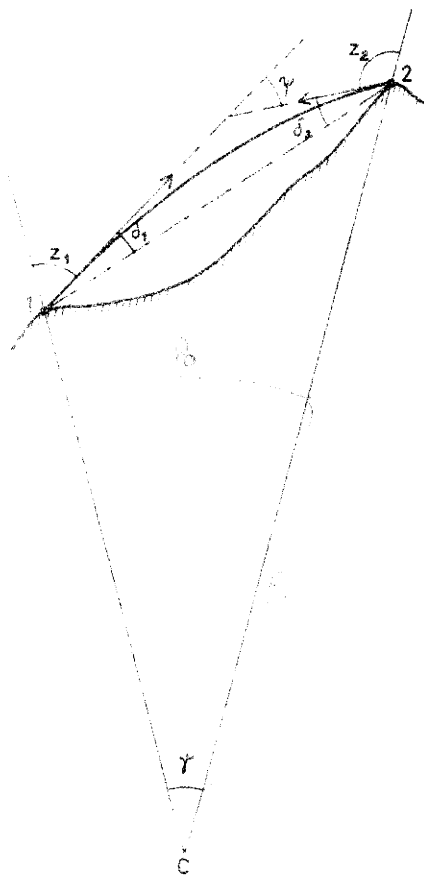


Fig. 72

I fig. 72 betrakter vi forløpet av lyskurven mellom to punkter 1 og 2. På grunn av den atmosfæriske refraksjon vil ikke lysstrålen mellom de to punkter få et rettlinjett forløp, men følge den helt opptrukne kurve i figuren. Linjene 1-C og 2-C er loddretningene i punktene 1 og 2, som skjærer hverandre i C. (I virkeligheten vil ikke disse befinne seg i ett og samme plan, men det er så lite som mangler på det at vi ser bort fra denne "irregularitet".) Ved senitdistansemålinger i punktene 1 og 2 er det vinklene mellom loddretningen og lyskurvens tangent som måles, altså  $z_1$  og  $z_2$ . Vinklene mellom lyskurvens tangent og den rette forbindelseslinje mellom endepunktene ( $\delta_1$  og  $\delta_2$  i fig. 72) betegnes som refraksjonsvinkler. Vinkelen  $\phi$  som er

summen av  $\delta_1$  og  $\delta_2$  representerer altså lysstrålens totale refraksjonsbøyning.

Såvel teoretiske undersøkelser som den praktiske erfaring har godtgjort at lyskurven med stor tilnærmelse vil utgjøre en sirkelbue, slik at  $\delta_1$  og  $\delta_2$  kan settes like. Videre at den totale refraksjonsavbøyning er proporsjonal med vinkelen  $\gamma$ , dvs.

$$\phi = k \cdot \gamma$$

$$\delta = k \cdot \frac{D}{R}$$

hvor  $k$  er den såkalte refraksjonskoeffisient. Da  $\gamma$  er proporsjonal med

punktene horisontale avstand (se fig. 75 hvor  $D_0$  er den horisontale avstand), betyr dette at refraksjonsavbøyningen er proporsjonal med endepunktene horisontale avstand. Atmosfærens optiske forhold er avhengig av meteorologiske forhold som temperatur og temperaturgradient (temperaturens endring med høyden), luftens innhold av fuktighet og lufttrykk. Det har tilfølge at refraksjonen og følgelig også refraksjonskoeffisienten vil være underkastet til dels store variasjoner. Som gjennomsnittsverdi for  $k$  er funnet verdien 0,13 med variasjoner i betydning av middelfeil som under vanlige forhold holder seg innenfor  $\frac{1}{4} k$ .

Foruten geografiske og årstidsbetingede variasjoner ( $k$  vokser med voksende geografisk bredde og avtar med høyden over havet, er større om vinteren enn om sommeren, større over vann enn over land) viser det seg at  $k$  også er undergitt daglige variasjoner.

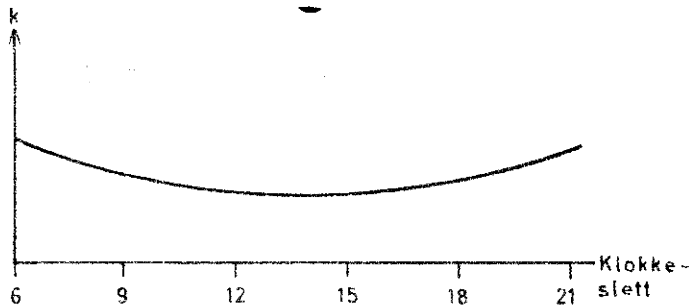


Fig. 73

Fig. 73 illustrerer den normale daglige syklus. Som vi ser, er  $k$  størst morgen og aften og når sin minimumsverdi tidlig på ettermiddagen.

I praksis har vi ikke midler til å få fastslått den eksakte verdi av den atmosfæriske refraksjon, men må altså nøye oss med følgende tilnærmelser

$$\psi = k \cdot \gamma$$

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{2} k \cdot \gamma$$

#### b. Den trigonometriske høydeformel.

##### b.1. Uten å ta hensyn til jordkrumning og refraksjon.

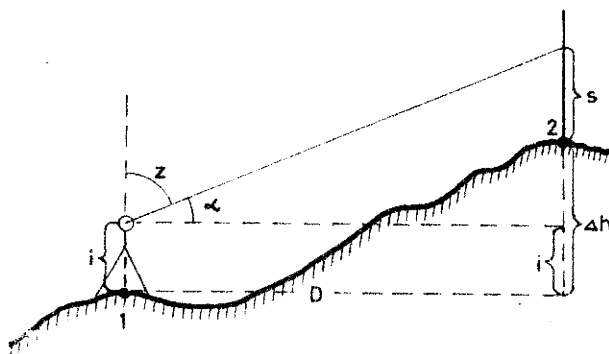


Fig. 74

For ganske korte avstander kan vi se bort fra jordkrumning og refraksjon og får da følgende enkle formel for den trigonometriske høydeforskjell (se fig. 74).

$$\Delta h_{12} = D \operatorname{ctg} z + i - s$$

$$= D \operatorname{tg} \alpha + i - s$$

Vi skal senere vise (se side 72) at virkningen av jordkrumning og refraksjon er gitt ved uttrykket :  $\Delta = \frac{D^2}{2R} (1 - k)$

hvor R er jordradien, som for den aktuelle verdi for R og for  $k = 0,13$  går over til

$$\Delta_{cm} = 6,807 D_{km}^2$$

Dersom vi forlanger at den feil som begås ved neglisjering av jordkrumning og refraksjon ikke skal overstige 1 cm, betyr det at

$$6,807 D_{km}^2 \leq 1$$

som resulterer :

$$D \leq 380 \text{ m}$$

Før avstander mindre enn 380 m kan vi altså helt se bort fra jordkrumning og refraksjon uten at feilen overstiger 1 cm.

b.2. Når det tas hensyn til jordkrumning og refraksjon.

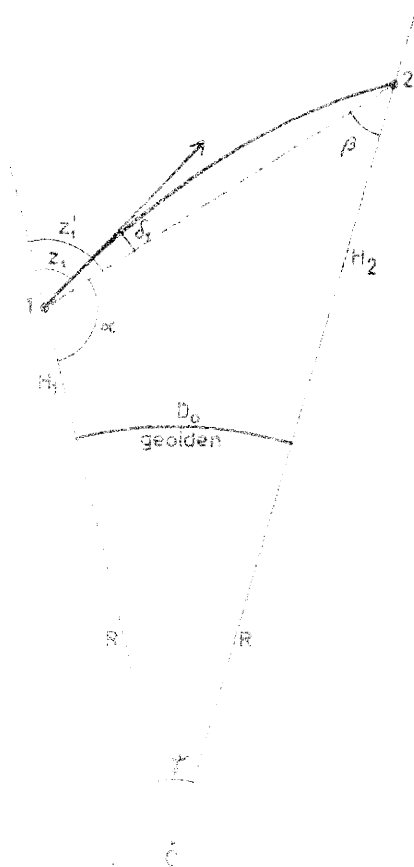


Fig. 75

I fig. 75 skal høydeforskjellen mellom punktene 1 og 2 bestemmes ved trigonometrisk høydemåling i punkt 1, altså på grunnlag av den målte senittdistanse  $z_1$ . Fig. 75 gjengir de samme størrelser som fig. 72. Dessuten er innlagt den såkalte geoid (den tenkte forlengelse av verdenshavens middelhøyde) som er den flaten som høydebegrepet i landmålingen refererer seg til, dvs. høydene måles ut fra geoiden. Som bekjent faller geoiden med stor tilnærmedelse sammen med en rotasjonsellipsoide. For tilstrekkelig små områder av geoiden kan den erstattes med en kuleflate med vedkommende områdes middelkrumningsradius til radius slik som antydnet i fig. 75. Videre er i figuren innført den så-

kalte refraksjonsfrie senittdistanse  $z_1'$ .

Vi nytter tangensproporsjonen på trekanten 1, 2, C og får :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{(R + H_2) - (R + H_1)}{(R + H_2) + (R + H_1)} = \frac{H_2 - H_1}{2R + H_1 + H_2} = \frac{\Delta h_{12}}{2R + H_1 + H_2}$$

dvs. 
$$\Delta h_{12} = (2R + H_1 + H_2) \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

Av fig. 75 ser vi at

$$\alpha = 200^g - z_1'$$

og 
$$z_1' = \gamma + \beta, \text{ dvs. } \beta = z_1' - \gamma$$

som betinger 
$$\frac{\alpha - \beta}{2} = 100^g - (z_1' - \frac{\gamma}{2}) = 100^g - (z_1 + \delta_1 - \frac{\gamma}{2})$$

og 
$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 100^g - \frac{\gamma}{2}$$

hvorved uttrykket for  $\Delta h$  går over til

$$\Delta h_{12} = (2R + H_1 + H_2) \text{ctg} (z_1 + \delta_1 - \frac{\gamma}{2}) \text{tg} \frac{\gamma}{2}$$

Vi erstatter her  $\gamma$  med  $\frac{D_0}{R}$  og innfører tilnærmelsen (se side 69)

$$\delta_1 = \frac{1}{2} k \cdot \gamma = \frac{1}{2} k \frac{D_0}{R}$$

slik at  $(z_1 + \delta_1 - \frac{\gamma}{2})$  går over til

$$\begin{aligned} (z_1 + \delta_1 - \frac{\gamma}{2}) &= z_1 - \frac{D_0}{2R} + \frac{k \cdot D_0}{2R} = z_1 - \left(\frac{1-k}{2}\right) \frac{D_0}{R} \\ &= z_1 - k' \cdot D_0 \end{aligned}$$

hvor  $k'$  betegnes som jordkrummings- og refraksjonskoeffisienten. Vinkelen  $\gamma$  vil alltid være en liten vinkel. Vi innfører derfor den tilnærmelse at vi erstatter  $\text{tg} \frac{\gamma}{2}$  med vinkelen selv, dvs.

$$\text{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2} = \frac{D_0}{2R} \quad \text{og får}$$

$$\Delta h_{12} = (2R + H_1 + H_2) \text{ctg} (z_1 - k' \cdot D_0) \frac{D_0}{2R} = \left(1 + \frac{H_1 + H_2}{2R}\right) D_0 \text{ctg} (z_1 - k' \cdot D_0)$$

Faktoren  $\left(1 + \frac{H_1 + H_2}{2R}\right)$  vil avvike så lite fra 1 at det bare er for store verdier av  $H_1$  og  $H_2$  og meget nøyaktige beregninger at det blir aktuelt å ta hensyn til denne faktors avvik fra 1. Tar vi dessuten hensyn til instrumenthøyden og sikte høyden, fås sluttformelen

$$\underline{\Delta h_{12} = D_0 \text{ctg} (z_1 - k' \cdot D_0) + i - s}$$

dvs. formelen får samme form som formelen som gjelder ved neglisjering av jordkrumning og refraksjon, bare med den forskjell at i dette tilfelle må den observerte senittdistanse  $z_1$  korrigeres før selve høydeberegningen. Den normale verdi for  $k'$  fås ved innføring av normalverdien 0,13 for  $k$  og  $R = 6390 \text{ km}$  som er den verdi som er mest representativ for norske forhold.

Derved fås

$$k' = 43,3^{cc}$$

slik at vi får sluttformelen

$$\Delta h_{12} = D_0 \text{ctg} (z_1 - 43,3^{cc} \cdot D_{\text{km}}) + i - s$$

*Her finnes  
denne formelen*

Eksempel :  $z = 104,6240^g$  og  $D = 5,3$  km. I dette tilfelle blir den "refraksjons- og jordkrumningsfrie" senitdistanse lik

$$104,6240^g - 43,3^{cc} \cdot 5,3 = 104,6011^g$$

(Føretas en rekkeutvikling etter Taylors formel av uttrykket  $D_0 \text{ctg} (z_1 - k' \cdot D_0) + i - s$  med neglisjering av alle ledd av 2. og høyere orden antar høydeformelen følgende form

$$\Delta h_{12} = D_0 \text{ctg} z_1 + \frac{1 - k}{2R} \frac{D_0^2}{\sin^2 z_1} + i - s$$

I refraksjons- og jordkrumningsleddet er det her vanlig å innføre tilnærmelsen  $\sin^2 z = 1$ , slik at en får

$$\Delta h_{12} = D_0 \text{ctg} z_1 + \frac{1 - k}{2R} D_0^2 + i - s$$

*Her finnes  
denne formelen*

Denne formel nyttes også i stor utstrekning ved trigonometrisk høydebe-  
regning.) *Fordskifteverket har tabell over  $\frac{1-k}{2R} D_0^2$  med  $D_0$  som argument*

c. Gjensidige vertikalvinkelmålinger.

Under forutsetning av at refraksjonskoeffisienten har samme verdi i begge endepunkter faller virkningen av jordkrumning og refraksjon bort når en nytter middeltallet av de to bestemmelser, slik at det ikke betyr noe hvilken verdi for  $k$  som nyttes.

Ved beregningen av gjensidige observasjoner kan vi altså regne ut høydeforskjellen etter de "plane" formlene

$$\Delta h_{12} = D \text{ctg} z_1 + i_1 - s_1$$

$$\Delta h_{21} = D \text{ctg} z_2 + i_2 - s_2$$

uten å ta hensyn til verken jordkrumning eller refraksjon. Middeltallet av disse beregninger gir oss likevel den korrekte verdi for den søkte høydeforskjell.

I praksis blir ikke denne framgangsmåten mye brukt, fordi en ved å regne slik ikke får noen kontroll på hvor godt målingene stemmer overens innbyrdes.

d. Nøyaktigheten av den trigonometriske høydebestemmelse.

Alle størrelser som inngår i den trigonometriske høydeformel ( $z$ ,  $k$ ,  $D$ ,  $i$  og  $s$ ), kan være beheftet med feil og virke inn på nøyaktigheten av  $\Delta h$ . En nærmere undersøkelse viser imidlertid at det normalt er feilen som knytter seg til den observerte senittdistanse og til refraksjonskoeffisienten som er avgjørende for nøyaktigheten, og virkningen av disse feil vil være avhengig av avstanden.

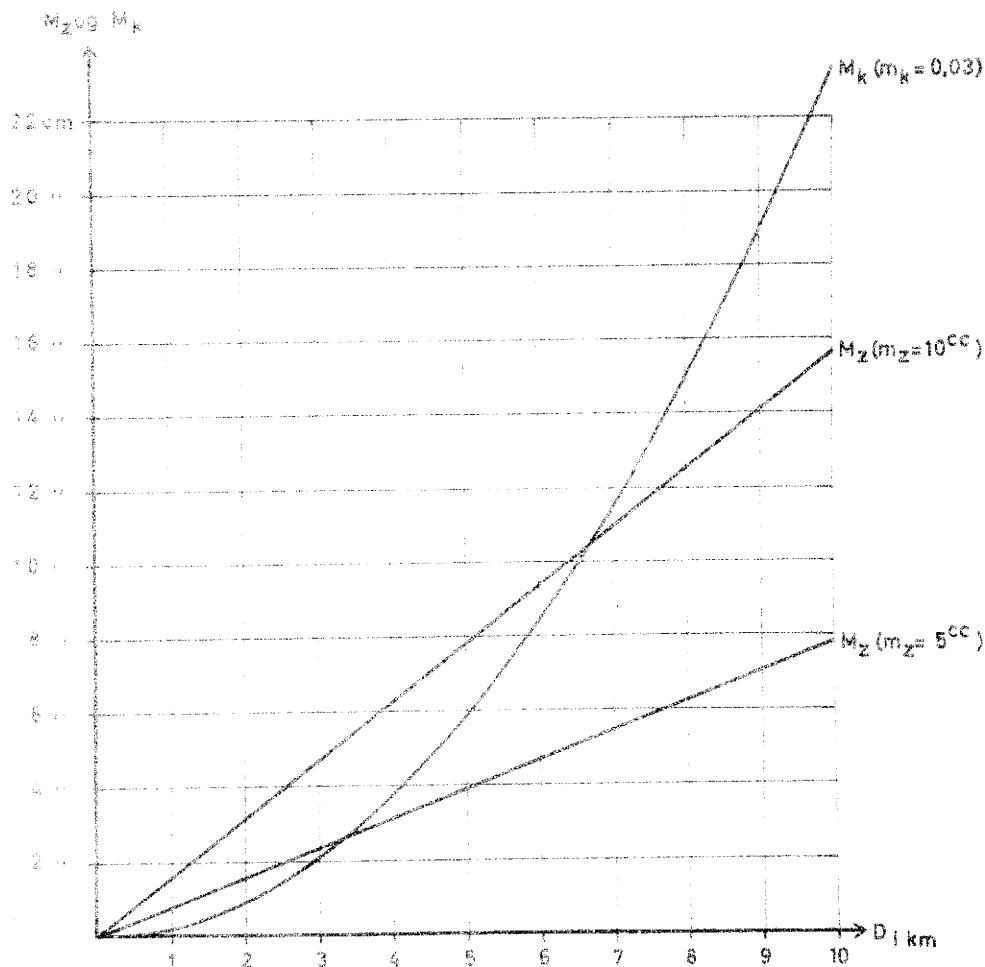


Fig. 76

Fig. 76 tar sikte på å anskueliggjøre forholdet. Her betyr  $m_z$  og  $m_k$  feilene på senittdistansen, resp. refraksjonskoeffisienten, mens  $M_z$  og  $M_k$  er de tilsvarende virkninger av disse feil på  $\Delta h$ , hvor alle  $m$  og  $M$  er angitt som middelfeil (middelavvik).

Av den grafiske fremstilling ser vi at på korte avstander vil virkningen av feilen som knytter seg til den målte senittdistanse dominere i forhold til refraksjonsfeilen. På større avstander derimot vil virkningen av refraksjonsfeilen være dominerende.

Ellers går det fram av fig. 76 at det mest effektive middel



til å redusere usikkerheten ved den trigonometriske høydebestemmelse består i å operere med korte avstander. Metoden bør helst ikke anvendes for avstander større enn 5 km.

e. Beregning av høydenett.

For beregning av punktenes absolutte høyder på grunnlag av de beregnede trigonometriske høydeforskjeller er det nødvendig med kjennskap til høyden til i det minste ett av høydenettets punkter. I praksis forlanges to kjente høyder, og disse bestemmes som regel ved såkalte signalnivellementer. Det skjer ved at en fra punkter med kjent høyde (vanligvis nivellementsfastmerker) fører vanlige tekniske nivellementer til to punkter i høydenettet.

Selve beregningen av høydenettet utføres så som enkeltpunkt-beregning ved middeltallsdannelse etter vekt, altså i samsvar med formelen

$$H_p = \frac{p_1 h_1 + p_2 h_2 + \dots + p_n h_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

hvor  $H_p$  er den utjevnete verdi, mens  $h$ -ene er de enkelte høydeverdier og  $p$ -ene er vekten. For fastsettelsen av vektene gjelder følgende regler :

1. De skal settes omvendt proporsjonale med kvadratet av avstanden. (Det vanlige er å fastsette dem på følgende måte :  
 $p = \frac{10}{D_{km}^2}$  .)
2. Gjensidige høydeforskjeller skal ha dobbelt så stor vekt som ensidige.

Når høyden til et punkt er beregnet, betraktes vedkommende punkts høyde som gitt og kan nyttes som utgangshøyde for den videre høydeberegning.

3. Linjetriangulering (trilaterasjon).

Vi har foran behandlet den såkalte trigonometriske triangulering som baserer seg på vinkelmåling. Ved linjetriangulering derimot bestemmes punktene ved måling av sidelengder. Tidligere ble metoden hovedsakelig nyttet ved oppmåling av mindre felter. En kunne da greie seg med enkle måleredskaper, men stilte samtidig spesielle krav til terrenget, nemlig at forholdene måtte ligge godt til rette for lengdemåling. I og med innføringen av den elektroniske avstandsmåling, vil linjetrianguleringen spille en betydelig større rolle i framtiden enn tilfelle har vært hittil. Det henger sammen med at den elektroniske avstandsbestemmelse faller både raskere og nøyaktigere enn de metoder som hittil har stått til disposisjon. Dessuten muliggjør den elektroniske avstandsmåling

en direkte bestemmelse av langt større avstander enn andre metoder.

Vi skal her innskrenke oss til å behandle bruk av linjetriangulering på små felter, dvs. at triangelsidene tenkes målt med vanlig målebånd eller ved enkelt optisk utstyr.

Med hensyn til oppbyggingen av linjenettet, må vi også her holde oss til prinsippet : Fra det større til det mindre. Først må det etableres et grovmasket trekantnett som så suppleres med korte målelinjer. Under den etterfølgende innlegging av detaljpunkter, som vanligvis foregår etter perpendikulærmetoden (se senere), er det fordelaktig å kunne benytte trekantsidene til målelinjer. Ved etableringen av linjenettet bør en derfor ta hensyn til :

1. At alle målelinjene må kunne utstikkes og måles nøyaktig.
2. At vinklene i det punkt som skal konstrueres som skjæringspunkt mellom de to bestemte linjer, ikke avviker for meget fra  $100^{\circ}$ .
3. At trekantene i hovednettet blir størst mulig uten å gå mer enn nødvendig utenfor den ytre begrensning av feltet.
4. At linjene ligger gunstig til for innmåling av detaljpunktene.

Kontroll på nøyaktigheten av linjenettet skaffer vi oss på vanlig måte ved overskytende målinger i form av såkalte kontrollinjer. Kontrolllinjene kan f.eks. bestå i "overflødige" diagonalforbindelser eller i linjer som skjærer trekanten uten å gå gjennom noen av trekantpunktene. Det er fordelaktig dersom også kontrolllinjene kan benyttes som målelinjer. Ved prosjekteringen av kontrolllinjene må en derfor også ta hensyn til at de ligger gunstig til for innmåling av detaljpunkter.

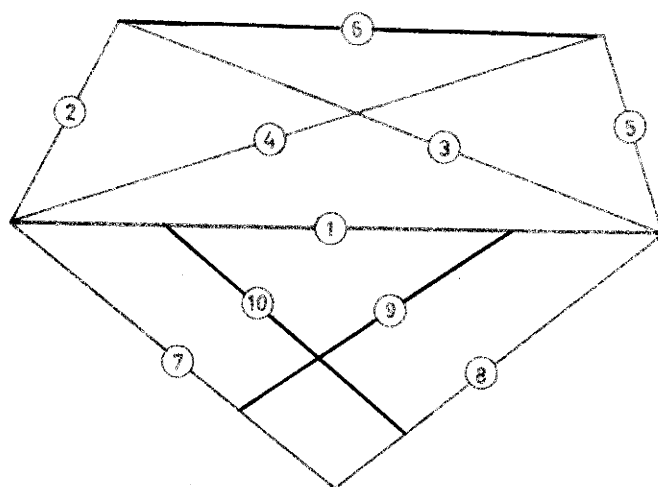


Fig. 77

(1). Linjene (6), (9) og (10) er kontrollinjer.

Vi skal så vise et par eksempler på oppbygging av linjenett, når avstandene måles etter de "klassiske" metoder (ved elektronisk avstandsmåling gis linjenettet en utforming mer beslektet med de vanlige trigonometriske trekantnett). I fig. 77 er det forutsetningen at nettets konstruksjon skal baseres på linje

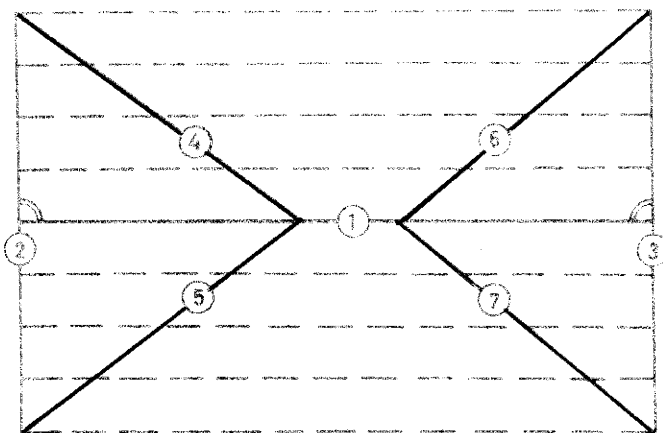


Fig. 78

Dersom terrenget er meget regelmessig og det er ønskelig med en sterkt detaljert oppmåling av mindre områder, kan det være fordelaktig å gi nettet en regelmessig utforming, slik som fig. 78 viser et eksempel på. På hovedlinjen (1) oppreises to perpendikulærer (2) og (3), som kontrolleres ved kontrolllinjene (4), (5), (6) og (7). Langs disse perpen-

dikulærene avsettes så punkter med konstant avstand. Disse punktene danner endepunktene for et system av parallelle målelinjer.

Dersom terrenget er mer uregelmessig, kan det bli spørsmål om å modifisere metoden i fig. 78 med å variere avstanden langs perpendikulærene, slik at målelinjene ikke lenger blir parallelle.

\*

Dreier det seg om linjetriangulering av mindre omfang, blir linjenettet vanligvis framstilt ved geometrisk konstruksjon. Benyttes metoden ved oppmåling av større områder, vil det av hensyn til nøyaktigheten være fordelaktig med en beregningsmessig utledning av trekantpunktens koordinater, i hvert fall for hovednettets vedkommende.

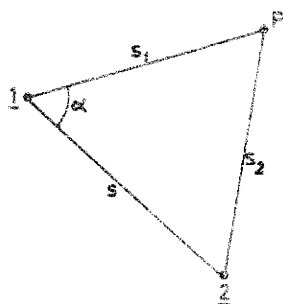


Fig. 79

Koordinatberegning av et nypunkt som er bestemt ut fra to fikspunkter på grunnlag av avstandene mellom fikspunktene og nypunktene (se fig. 79) kan gjøres på ulike måter, men den enkleste beregning består vanligvis i å utlede en av trekantvinklene ved cosinussetningen. Vinkelen  $\alpha$  f.eks. er gitt ved :

$$s_2^2 = s^2 + s_1^2 - 2ss_1 \cos \alpha \quad ,$$

$$\text{dvs. } \cos \alpha = \frac{s^2 + s_1^2 - s_2^2}{2ss_1}$$

Videre har vi :

$$\varphi_{1p} = \varphi_{12} - \alpha$$

$$\Delta x_{1p} = s_1 \cos \varphi_{1p}$$

$$\Delta y_{1p} = s_1 \sin \varphi_{1p}$$

Kontroll på beregningen fås ved å regne ut avstandene mellom P og 2 på grunnlag av koordinatene. Vi skal da komme fram til den kjente verdi for  $S_2$ .

Når det gjelder rekkefølgen som punktene skal beregnes i, må vi også her følge prinsippet : Fra det større til det mindre.

\*

Vi har foran behandlet linjetrianguleringen som selvstendig metode for etablering av trigonometriske fikspunkter. Imidlertid kan det også bli spørsmål om å anvende metoden til supplering av allerede eksisterende fikspunktsystemer. Det vil særlig være tilfelle når innleggingen av detaljpunktene skjer etter perpendikulærmotoden. Målelinjene kan f.

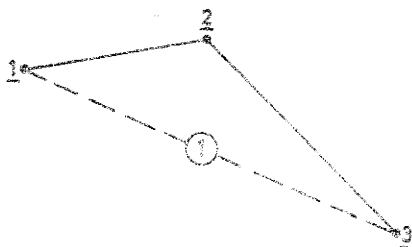


Fig. 80

eks. legges direkte mellom to fikspunkter (se fig. 80). Her er 1, 2 og 3 tidligere etablerte fikspunkter (polygonpunkter), mens (1) er en supplerende målelinje. Kontroll på lengden av (1) fås ved at den målte verdi skal stemme overens med den verdi som fås på grunnlag av koordinatene. I

den praktiske landmåling blir det oftere spørsmål om å føre målelinjen fra et vilkårlig punkt på en polygonside til et vilkårlig punkt på en annen polygonside (se fig. 81). For å sikre den riktige innmåling av  $P_1$  og  $P_2$  må santlige avstander 1- $P_1$  og  $P_1$ -2, resp. 3- $P_2$  og  $P_2$ -4 måles og det må kontrolleres at summen av de to avstandene er lik 1-2, resp. 3-4.

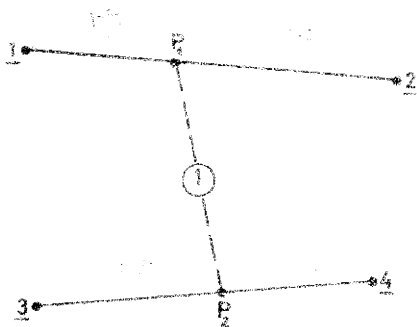


Fig. 81

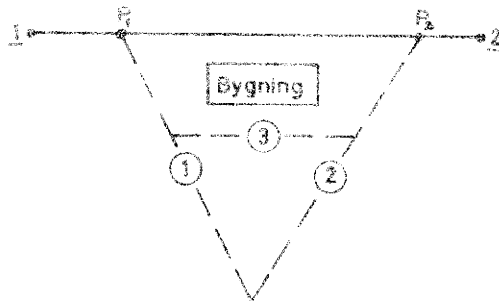


Fig. 82

I andre tilfeller kan det være mest praktisk å la målelinjene danne en trekant som bygges opp på en polygonside (se fig. 82). Her tjener linjen (3) til kontroll av trekanten.

\*

Vanligvis nøyer en seg med en geometrisk konstruksjon av de supplerende målelinjer, men det kan også bli spørsmål om å fastlegge dem beregningsmessig ved å beregne koordinatene til målelinjens endepunkter. I det etterfølgende skal vi vise hvordan koordinatberegning av slike linjnett-punkter foregår, I fig. 83 er A og B gitte punkter, mens P er ende-

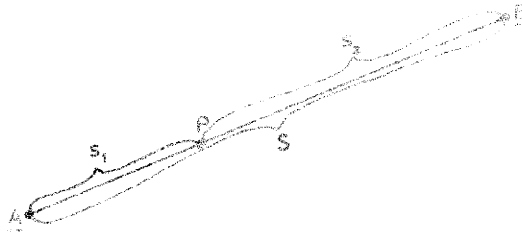


Fig. 83

punktet til en målelinje, hvis koordinater skal bestemmes. Avstandene s<sub>1</sub> og s<sub>2</sub> er målt. Summen av dem [s], skal være lik S. Differensen ΔS = S - [s], som forutsettes å ligge innenfor feilgrensen, skal fordeles på de enkelte avsnitt proporsjonalt med

avstandene. De rettede avstander blir altså :

$$\bar{s}_1 = s_1 + \frac{\Delta S}{[s]} s_1 \quad , \quad \text{og} \quad \bar{s}_2 = s_2 + \frac{\Delta S}{[s]} s_2$$

Vi har da :

$$\begin{aligned} \Delta y_{AP} &= \bar{s}_1 \sin \varphi_{AB} & \text{og} & \quad \Delta x_{AP} = \bar{s}_1 \cos \varphi_{AB} \\ &= \bar{s}_1 \frac{y_B - y_A}{S} & & \quad = \bar{s}_1 \frac{x_B - x_A}{S} \end{aligned}$$

Regnekontroll skaffer vi oss ved beregning av  $\Delta y_{PB}$  og  $\Delta x_{PB}$ . Vi skal da ha :  $[\Delta y] = y_B - y_A$  og  $[\Delta x] = x_B - x_A$ . På tilsvarende måte utføres beregningen dersom det befinner seg flere linjnett-punkter på samme linje.

#### 4. Polygonmåling.

Polygonmålingen representerer ved siden av triangulering den viktigste metode for etablering av trigonometriske fikspunkter i landmålingen. Etter at trianguleringen er fort hensiktsmessig langt ned, vanligvis til sidelengder på ca. 2 km, skjer den videre fortetning av fikspunktsystemet ved polygonmåling, og disse fikspunkter går under navn av polygonpunkter. Polygonmålingens langt største anvendelse består i supplering - i form av polygonale drag - av allerede eksisterende fikspunktsystemer, men den blir også atskillig nyttet som selvstendig metode for etablering av fikspunktsystemer i form av lukkede polygoner.

Ved polygonmåling skjer fastleggningen av polygonpunktene ved suksessiv anvendelse av polarkoordinatprinsippet. I polygondraget i fig. 84, som består av 5 polygonpunkter, er de 4 polygonsidene og de 3 brytningsvinklene målt. Det er klart at disse målinger er tilstrekkelig til



Fig. 84

som altså ikke inneholder noen gitte (koordinatbestemte) punkter, betegnes som et fritt drag i motsetning til de ensidige og dobbeltsidige tilknytningsdrag som blir omtalt nedenfor.

Lar vi draget gå ut fra et kjent punkt og fastlegger dragets retning ved i tilknytningspunktet å måle vinkelen mellom en kjent retning (AB) og polygondragets første side (se fig. 85, hvor A er det gitte punkt), blir draget tilknyttet det overordnede nett, men systemet vil fremdeles ikke være overbestemt. Et slikt polygondrag

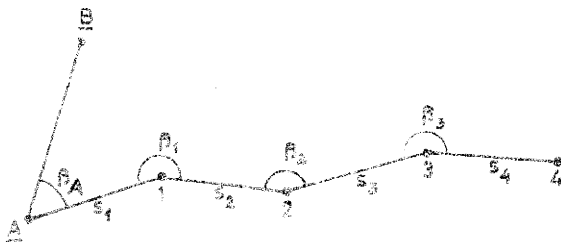


Fig. 85

går under navn av et ensidig tilknytningsdrag (også kalt blind-drag). Kontroll på målingene fås først når draget tar til og ender i kjente punkter. Vi bruker da betegnelsen dobbeltsidig tilknytningsdrag (se

fig. 88, side 81).

En annen måte å skaffe seg kontroll på består i å la dragets begynnelses- og endepunkt falle sammen. Vi får da en lukket polygon, og det er nettopp denne anvendelse av polygondrag som har gitt opphavet til betegnelsen polygonmåling. Tidligere spilte nemlig denne anvendelse den største rolle, mens det i nyere tid er anvendelsen til supplering av triangelnett i form av polygondrag som betyr mest.

#### A. Lukket polygon.

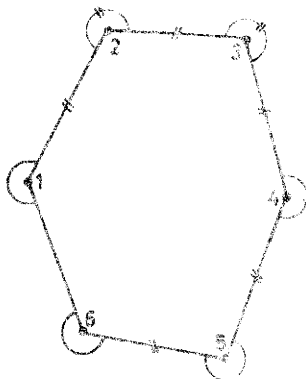


Fig. 86

I fig. 86 er forutsatt at samtlige sider og vinkler blir målt. Legg merke til at polygonvinklene alltid regnes fra foregående punkt i positiv omløpsretning til det påfølgende. Hva polygonpunktene gjensidige beliggenhet angår, vil det være mulig ved å gå ut fra punkt 1 å få samtlige punkter avsatt ved hjelp av de størrelsene som er merket med ". Det blir da, som vi ser, 3 størrelser til overs, nemlig 1 sidelengde og 2 vink-

ler, som følgelig representerer overskytende målinger. Vi kan derfor stille

opp 3 betingelsesligninger som de målte størrelsene må tilfredsstillte. Den ene av disse ligninger angår vinkelsummen i polygonen. Som bekjent er summen av de innvendige vinkler i en n-kant lik  $(n-2) 200^g$ , mens summen av de utvendige vinkler er lik  $(n+2) 200^g$ . De to andre ligninger angår summen av koordinattilvekstene. I en lukket polygon må vi nemlig alltid ha :

$$\underline{[\Delta y] = [S \sin \varphi] = 0} \quad , \quad \text{og} \quad \underline{[\Delta x] = [S \cos \varphi] = 0}$$

(Tegnet [ ] nyttes i landmålingen som summasjønstegn.)

På grunn av målefeilene vil disse betingelsesligninger ikke være oppfylt ved de målte verdier for vinkler og sider. For de forskjellige slags målinger er det fastsatt visse grenser som motsigelsene i betingelsesligningene ikke må overstige. For Jordskifteverkets målinger f.eks. gjelder feilgrensene :

Vinkelsumsfeilen. En polygon eller et polygondrags vinkelsumsfeil må ikke overstige :

<u>Innmarksmålinger</u>	<u>Utmarksmålinger</u>
Hoveddrag : $200^{\circ} \sqrt{n}$	$300^{\circ} \sqrt{n}$
Bidrag : $300^{\circ} \sqrt{n}$	$500^{\circ} \sqrt{n}$

hvor n betegner antall målte vinkler. Med hoveddrag forstås her drag som forbinder triangelpunkter, mens bidrag er drag som forbinder allerede bestente polygonpunkter eller et triangelpunkt med et polygonpunkt. Når det gjelder lukkede polygoner, blir den lukkede polygon å oppfatte som hoveddrag, mens eventuelle drag innenfor eller utenfor polygonen som støtter seg til denne, blir å oppfatte som bidrag.

Feilen på koordinattilvekstene, som vi betegner med  $f_x$  og  $f_y$ , har til følge at polygonen eller draget ikke lukker seg. Ved beregningen kommer vi til at draget ender i B' i stedet for i tilknytningspunktet B

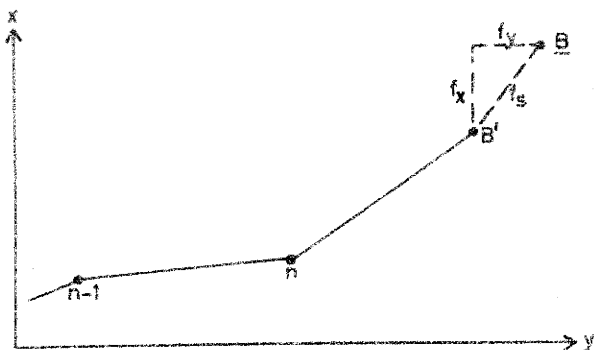


Fig. 87

(se fig. 87). Avstanden mellom B' og B betegnes som polygonens eller polygondragets gap. Etter at vinkelsumsfeilen er fordelt likt på de målte vinkler, må gapet, som er gitt ved

$$f_s = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$

etter Jordskifteverkets reglement ikke overstige :

<u>Innmarksmålinger</u>	<u>Utmarksmålinger</u>
Hoveddrag : $0,02\sqrt{S} + 0,10$	$0,05\sqrt{S} + 0,10$
Bidrag : $0,03\sqrt{S} + 0,20$	$0,08\sqrt{S} + 0,20$

hvor S er lik summen av sidelengdene. Størrelsene 0,10 og 0,20 er tillegg for usikkerheten i tilknytningspunktene koordinater, og faller derfor bort ved beregning av lukkede polygoner. I særskilt bratt og ugunstig terreng forhøyes disse feilgrensene med 50 %.

Når det gjelder beregningen av polygoner eller polygondrag, nyttes i praksis en tilnærmet utjevningemetode som består i å bringe de tre betingelsesligningene til oppfyllelse hver for seg. Det foregår på følgende måte :

1. Først utregnes vinkelsumsfeilen, som fordeles likt på de målte vinkler.
2. Med de utjevnedde vinkler følger så utregning av polygonsidene retningsvinkler og koordinatdifferensene for samtlige sidelengder. Deretter dannes  $[\Delta x]$  og  $[\Delta y]$  som begge skal være lik null (gjelder for lukket polygon).

Feilen på summen av koordinattilvekstene :

$$f_x = - [\Delta x] \quad \text{og} \quad f_y = - [\Delta y]$$

fordeles på de enkelte koordinattilvekster proporsjonalt med polygonsidene lengder.

3. Med de korrigerede koordinattilvekster utregnes så de endelige koordinater til polygonpunktene.

Når det gjelder aksesystemets orientering og origos plassering, nyttes som kjent i landmålingen nord-sydretningen til x-akse. Står vi fritt med hensyn til origos plassering, er det fordelaktig å velge runde verdier for koordinatene til et av polygonpunktene. Disse utgangskoordinatene bør velges så store at vi unngår negative koordinatverdier for noen av polygonpunktene.

### B. Polygondrag.

Vi tenker oss et polygondrag som går ut fra et kjent punkt A og ender i et annet kjent punkt B (se fig. 88).

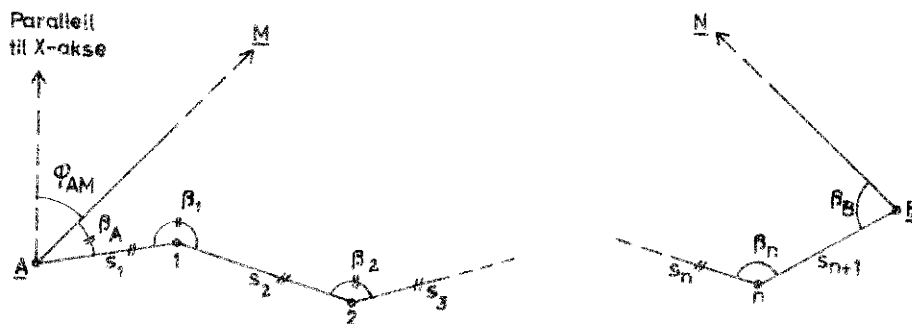


Fig. 88



I draget som inneholder  $n$  nypunkter, er samtlige  $(n + 1)$  sider og  $n$  polygonvinkler målt. Dessuten er i utgangs- og endepunktet vinklene mellom en kjent retning og den tilstøtende polygonside målt. Det er altså i alt målt  $(n + 2)$  vinkler. Til sammen blir det  $2n + 3$  målte størrelser. Til bestemmelse av de  $n$  polygonpunkter i forhold til de kjente punkter kreves 2 størrelser for hvert nypunkt, altså i alt  $2n$  størrelser. Det foreligger følgelig 3 overbestemmelser (se fig. 88, hvor vi kan tenke oss samtlige polygonpunkter avsatt ved hjelp av de med " anførte størrelser), som resulterer i 3 betingelsesligninger, nemlig én vinkelsumsligning og to projeksjonsligninger. De siste fremkommer ved å projisere polygondraget på de to koordinataksene. Disse projeksjoner skal stemme overens med koordinatforskjellene mellom de gitte punkter A og B, dvs. vi skal ha

$$[\Delta y] = y_B - y_A \quad \text{og} \quad [\Delta x] = x_B - x_A$$

Vinkelsumsligningen utledes ved å gå ut fra utgangssidens retningsvinkel og regne seg suksessivt gjennom polygondraget til avslutnings- sidens retningsvinkel. Vi skal da komme fram til den sistes gitte verdi. Vi kaller den riktige verdi for  $\bar{\varphi}_{BN}$  og verdien for samme på grunnlag av utgangssidenes gitte retningsvinkel og de målte polygonvinkler for  $\varphi_{BN}$ . Vinkelsumsfeilen er da gitt ved :

$$f_{\beta} = \varphi_{BN} - \bar{\varphi}_{BN}$$

Eller vi kan danne følgende betingelsesligning, som egentlig ikke uttrykker noe annet enn den foregående (se fig. 88) :

$$\begin{aligned} \varphi_{A1} &= \varphi_{AM} + \beta_A \\ \varphi_{12} &= \varphi_{A1} + \beta_1 \pm 200^g \\ \varphi_{23} &= \varphi_{12} + \beta_2 \pm 200^g \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_{BN} &= \varphi_{nB} + \beta_B \pm 200^g \end{aligned}$$

$$\text{Sum: } \varphi_{BN} = \varphi_{AM} + [\beta] \pm i 200^g$$

hvor  $\pm i 200^g$  er et ubestemt multiplum av  $200^g$ , som ikke har noen interesse i denne sammenheng. Ser vi bort fra  $\pm i 200^g$  antar betingelsesligningen formen :

$$[\beta] = \varphi_{BN} - \varphi_{AM}$$

På grunn av målefeil vil denne vinkelsumsligning som regel ikke stemme. Vi får en vinkelsumsfeil  $f_{\beta}$ , hvor  $[\beta] + f_{\beta}$  skal være lik  $\varphi_{BN} - \varphi_{AM}$ , dvs.

$$\underline{f_{\beta} = \varphi_{BN} - \varphi_{AM} - [\beta]}$$

Først undersøkes om  $f_\beta$  holder seg innenfor feilgrensen. For Jordskifteverkets målinger gjelder de tidligere angitte feilgrenser. Vinkelsumsfeilen fordeles likt på de målte vinkler, altså med  $\frac{f_\beta}{n+2}$  på hver vinkel. Med de rettede vinkler utregnes så retningsvinklene til samtlige sider. Med disse verdiene for retningsvinklene beregnes så koordinattilvekstene, og disse må tilfredsstillende følgende to betingelsesligninger :

$$[\Delta y] = y_B - y_A \quad \text{og} \quad [\Delta x] = x_B - x_A$$

På grunn av målefeil vil de to ligningene som regel ikke være oppfylt. Vi betegner som tidligere koordinatfeilene med  $f_x$  og  $f_y$  og har :

$$\underline{f_y = (y_B - y_A) - [\Delta y]} \quad \text{og} \quad \underline{f_x = (x_B - x_A) - [\Delta x]}$$

Dersom ikke gapet  $f_s = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$  overstiger den tillatte verdi, fordeles  $f_y$  på de enkelte ordinattilvekster og  $f_x$  på de enkelte abscissetilvekster proporsjonalt med sidelengdene. Beregningens gang blir altså følgende :

1. Utregning av vinkelsumsfeilen, fordeling av denne og beregning av sidenes retningsvinkler.
2. Beregning av koordinattilvekstene og deres sum  $[\Delta y]$  og  $[\Delta x]$ , videre av  $f_y$  og  $f_x$  og fordeling av disse.
3. Beregning av punktenes endelige koordinater.

Polygonberegningen utføres i bestemte skjema, f.eks. Jordskifteverkets skjema B. nr. 8.

### C. Knutepunktberegning.

Dersom flere polygondrag løper sammen i ett punkt, betegnes

fellespunktet som knutepunkt.

I fig. 89 er altså pkt. 3 knutepunkt. Den metode som nyttes i praksis for beregning av knutepunkter, bygger på at samtligedrag skal få innflytelse på knutepunktets beliggenhet. Polygonsystemet fremstilt i fig. 89 beregnes på følgende måte :

1. For en av de sammenstøtende sider i knutepunktet, helst den lengste, utledes retningsvinkelen på de tre mulige måter (på grunnlag av de gitte ret-

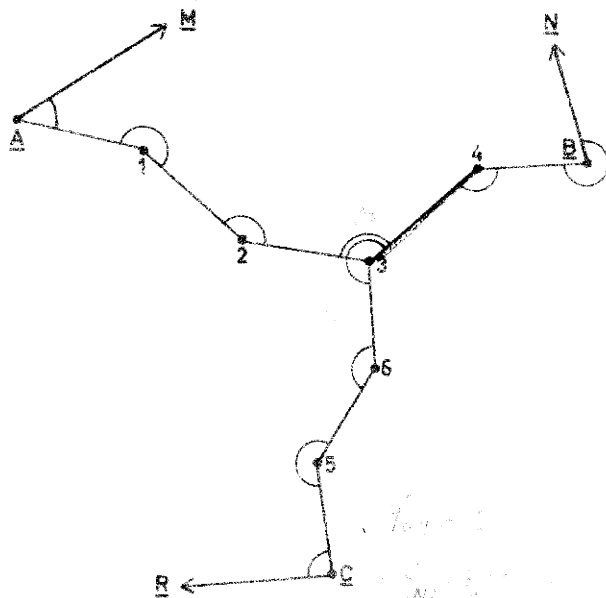


Fig. 89

ningsvinkler  $\varphi_{AM}$ ,  $\varphi_{BN}$  og  $\varphi_{CR}$  og de mellomliggende polygonvinkler). Av disse tre litt forskjellige verdier beregnes middeltallet med vektet som settes omvendt proporsjonale med antallet av benyttede vinkler. I foreliggende tilfelle blir vektene  $1/4$ ,  $1/2$  og  $1/4$ , idet vi velger siden  $S_{3-4}$  til "middeltallsside". Differensene mellom middeltallet og de enkelte verdier blir da vinkelsumsfeilen i de respektive drag. Feilene fordeles likt på de enkelte vinkler i hvert drag, hvorefter retningsvinklene beregnes.

2. Deretter beregnes koordinattilvekstene for de forskjellige drag. På grunnlag av utgangspunktens koordinater og koordinattilvekstene i de forskjellige drag beregnes så tre sett verdier for knutepunktets koordinater :

$$y_3' = y_A + [\Delta y]'$$

$$y_3'' = y_B + [\Delta y]''$$

$$y_3''' = y_C + [\Delta y]'''$$

Av disse beregnes middeltallet  $\bar{y}_3$  med vektet som settes omvendt proporsjonale med summen av vedkommende drags sider

$$\bar{y}_3 = \frac{p' y_3' + p'' y_3'' + p''' y_3'''}{p' + p'' + p'''}$$

På tilsvarende måte utledes  $\bar{x}_3$ . Differensene mellom middeltallene og enkeltverdiene gir oss  $f_y$  og  $f_x$ , som blir å fordele på vanlig måte innen sine respektive drag (altså proporsjonalt med sidelengdene) hvorefter samtlige koordinater utregnes.

#### D. Oppsøking av grove feil.

##### a. Feil på vinkelmålingen.

Overstiger vinkelsumsfeilen feilgrensen betydelig, tyder det på at det er begått en eller flere grove feil ved vinkelmålingen. Under forutsetning av at den grove feil er knyttet til en enkelt vinkel og at sidene ikke har grove feil, er det mulig ved beregning eller konstruksjon å lokalisere det punkt som feilen er begått i. Av fig. 90, hvor vi forutsetter at det er begått en grov vinkelmålingsfeil  $\delta$  i pkt. 2. går det fram at ved

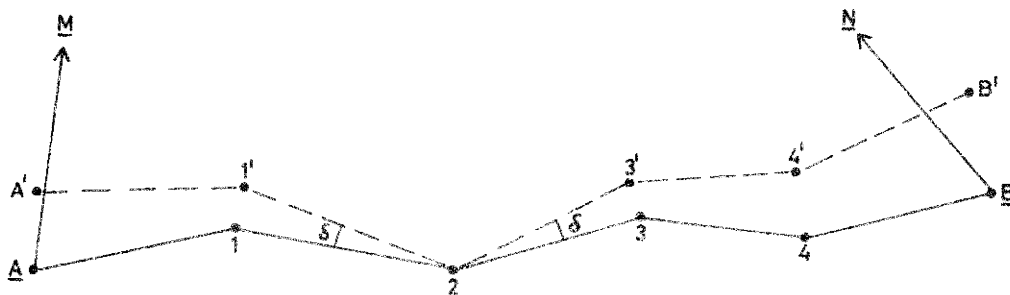


Fig. 90

å konstruere eller beregne draget dobbelt (den ene gang fra A og den annen gang fra B) vil bare det punkt som feilen er begått i bli felles ved de to konstruksjoner eller beregninger. I fig. 90 fås draget A-1-2-3'-4'-B' når en går ut fra A, og draget B-4-3-2-1'-A' ved å gå fra B. På grunn av uunngåelige småfeil som hefter seg til de andre vinkler og til sidelengdene i draget, kan vi ikke regne med at de to koordinatsettene for "feilpunktet" vil stemme helt overens, men de vil ihvertfall stemme bedre overens enn koordinatsettene for noen av de andre punkter. Er feilen  $\delta$  liten, vil det være nødvendig å utføre konstruksjonen i forholdsvis stor målestokk. Ved ettermåling i marken skaffer en seg sikkerhet for at resultatet av feiloppsøkingen er riktig.

b. Feil på sidemålingen.

Stemmer vinkelsummen innenfor feilgrensen, mens gapet likevel blir større enn tillatt, tyder det på tilstedeværelse av en grov feil på en eller flere av sidene. Vi skal i det etterfølgende vise hvordan vi kan lokalisere grove lengdemålingsfeil under forutsetning av at vinklene er feilfrie, og at det bare er én polygonside som er feilmålt. I fig. 91 forutsetter vi at siden  $S_3$  har målefeilen  $\Delta S$ . Som figuren viser blir alle

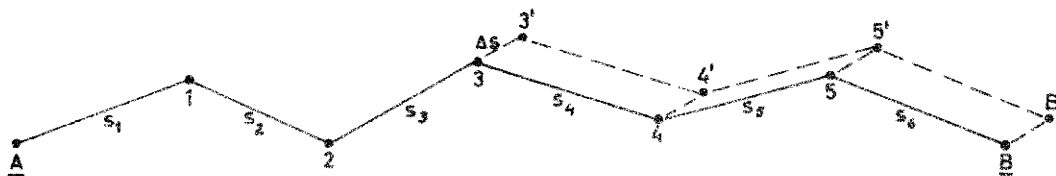


Fig. 91

etterfølgende punkter forskjøvet stykket  $\Delta S$  i en retning parallell med den feilmålte siden. Dersom  $\Delta S$  er den eneste forekommende feil i systemet, vil følgelig  $BB'$  være lik  $\Delta S$ , og  $\varphi_{BB'}$  være lik  $\varphi_{S_3}$ , følgelig har vi at :

$$\operatorname{tg} \varphi_{BB'} = \frac{y_{B'} - y_B}{x_{B'} - x_B} = \frac{f_y}{f_x} = \operatorname{tg} \varphi_{S_3}$$

Ved hjelp av denne ligning er det altså mulig å utlede retningsvinkelen til den feilaktige siden. Forutsatt at det ikke opptrer flere sider som er omtrent parallelle med den feilmålte siden, har vi dermed grunnlag for lokalisering av feilen. På grunn av at de andre sider og likeså vinklene er beheftet med uunngåelige småfeil vil ligningen ovenfor bare være tilnærmet oppfylt.

\*

Som en vil forstå er det ikke bestandig mulig å oppspore de gro-

ve feil. Hovedregelen under målingen bør derfor være at denne utføres slik at grove feil praktisk talt utelukkes. I praksis vil det si det samme som at både vinkler og sidelengder bør måles to ganger.

E. Høydeberegning av polygonale drag.

Samtidig med måling av polygonvinkler og sider måles vanligvis også polygonsidene vertikalkvinkler (alltid i begge kikkertstillinger).

Høydeforskjellen mellom to polygonpunkter er da gitt ved (se side 22) :

$$\Delta h = D \cdot \text{ctg } z + i - s$$

hvor D er sidelengden, z er senitdistansen, i instrumenthøyden og s sikte- høyden.

I en lukket polygon skal vi ha

$$[\Delta h] = 0$$

og i et polygondrag skal vi ha at

$$[\Delta h] = H_B - H_A$$

når  $H_A$  og  $H_B$  er de to tilknytningspunktens høyder.

På grunn av målefeil vil disse betingelser aldri helt ut bli tilfredsstillt. Dersom feilen holder seg innenfor de oppsatte feilgrenser, fordeles denne på de enkelte høydeforskjellene proporsjonalt med polygonsidene lengder. Deretter regnes polygonpunktene høyder ut.

Dersom høydeforskjellene er bestemt ved vinkelmåling både fram og tilbake, nyttes middeltallet av de to beregnede høydeforskjeller.

Beregningen kan utføres i f.eks. Jordskifteverkets skjema B nr.11.

Når det gjelder nøyaktigheten, er det for Jordskifteverkets målinger fastsatt at summen av høydeforskjellene i et polygonalt drag ved innmarksmåling ikke må avvike fra tilknytningspunktene høydeforskjeller mer enn

$$\left\{ 0,35 + 0,1\sqrt{n} + \frac{1}{500} \sum |\Delta h| \right\} \text{ meter}$$

når tilknytningspunktene høyder er bestemt trigonometrisk. Er disse punkter bestemt ved nivellering, er grensen satt til

$$\left\{ 0,1\sqrt{n} + \frac{1}{500} \sum |\Delta h| \right\} \text{ meter}$$

n er her antall høydeforskjeller (polygonsider),  $\sum |\Delta h|$  er summen av høydeforskjellene uten hensyn til fortegn.

Dette siste nøyaktighetskrav gjelder også for lukket polygon.

← Ved skogmålinger forhøyes feilgrensen med 50% .

## F. Planlegging og utføring av polygonmåling.

Ved rekognoseringen av polygonnettets må en ta hensyn til :

1. At polygonpunktene kan avmerkes hensiktsmessig.
2. At det er mulighet for stø oppstilling av instrumentet.
3. At punktene ligger gunstig til for innmåling av detaljpunktene.
4. At polygonsidene blir noenlunde like lange.
5. At dragene blir mest mulig rettlinjet, særlig dersom det dreier seg om hoveddrag.
6. At punktene ligger slik til at det blir mulig å sikte til foten av signalene i nabopunktene.

Av andre hensyn som teller, kan nevnes hensynet til lengdemålingen av polygonsidene. Her vil det være av betydning om sidene måles direkte eller indirekte. Ved direkte lengdemåling er det om å gjøre at terrenget mellom polygonpunktene ikke er for kupert. Best er det om dragene kan følge gater, veger eller stier. Skal sidene måles optisk, står vi fritt med hensyn til terrengets beskaffenhet når det bare blir tilstrekkelig synbart mellom punktene. Sidelengdene bør som regel ikke være under 50 m, og en søker å unngå at en lang og en kort polygonside støter sammen. Denne forholdsregel er diktert av hensyn til virkningen av sentreringsfeil, som gjør mest av seg når sidene er korte. Videre er det av betydning at punktene velges slik at målingene blir lite forstyrret av trafikk på veger, gater o.l. Lengden av et polygondrag bør vanligvis ikke overstige 2 km.

Avmerkingen av polygonpunktene må avpasses etter behovet for deres bevaring. I fjell og jordfaste steiner brukes bolter av jern eller bare 2 - 3 cm dype borhull. I annen mark kan en slå ned rør. På dyrket mark er det viktig at toppflatene til rørene ligger under plogdybden, ellers risikerer vi at rørene kan forrykkes ved bearbeiding av jorda. Midlertidig avmerking skjer ved nedslåing av treplugger.

Polygonpunktens beliggenhet bør av hensyn til senere bruk tegnes inn på en oversiktlig skisse. Avstandene til minst to godt markerte punkter bør måles og noteres på skissen.

Det arbeid som nedlegges i målingen, må rette seg etter de nøyaktighetskrav som stilles. I et bebygget område med høy grunnverdi må målingene utføres omhyggeligere enn i f.eks. mer avsidesliggende områder.

Sidene i hoveddragene måles to ganger med stålbånd eller ved høyverdig indirekte avstandsmåling (herunder også metoden med hjelpebasis). Ved utmarksmålinger i sterkt kupert terreng kan sidene bestemmes bare ved alminnelig optisk avstandsmåling. Når det gjelder lengdemåling av bidrag, er det vanlig å operere med noe mindre nøyaktighet enn i hoveddragene, f. eks. kan en måle sidene en gang med bånd og en gang med optisk avstands-

måling (til kontroll), eller bare med alminnelig optisk avstandsmåling begge veier. For Jordskifteverkets målinger gjelder at ved to gangers måling av polygonesider med stålbånd, må de to verdier ikke avvike mer enn  $0,01\sqrt{D}$ . Ved dobbelt optisk avstandsmåling må de to verdier ikke avvike mer enn  $0,03\sqrt{D}$ . I særlig steilt og ugunstig terreng forhøyes disse feilgrenser med 50%.

Ved kommunale oppmålingsarbeider stilles betydelig strengere krav til sidenmålingens nøyaktighet og likeså til vinkelsumsfeil og gap. De nøyaktighetskrav - sammen med regler og bestemmelser forøvrig - som her kommer til anvendelse, finnes sammenstilt i "Normalbestemmelser for kommunale oppmålingsarbeider".

Vanligvis er det tilstrekkelig å måle polygonvinklene i to halv-satser. Vertikalvinklene måles i en sats med indeksfeilprøve.

6.  
G. Spesielle problemer i forbindelse med polygonmåling.

De spesielle vanskeligheter som det her siktes til, er at det ene eller begge av de fastpunktene som draget begynner og slutter i, enten er utilgjengelige (f.eks. kirkespir) eller at det ikke kan stasjoneres i punktet eller at en fra selve punktet (bolten) ikke kan se til noe annet trigonometrisk punkt. Det siste vil ofte inntreffe i skogsterreng hvor trianguleringen har vært utført ved hjelp av en omfattende tårnbygging. Tårnene er inidlertid falt ned og bare boltene som markerer de trigonometriske punkters sentrer, står igjen, og fra disse vil det ikke være mulig å se til andre kjente punkter.

I slike tilfeller kommer tre fremgangsmåter på tale.

1. Begge endepunkter lar seg "nedføre". I dette tilfelle foretas "nedføring" (se side 62 - 64) av endepunktene, dvs. det etableres hjelpepunkter i nærheten av de gitte punktene, og disse hjelpepunkter overtar de opprinnelige punkters funksjoner under polygonmålingen. I fig. 92

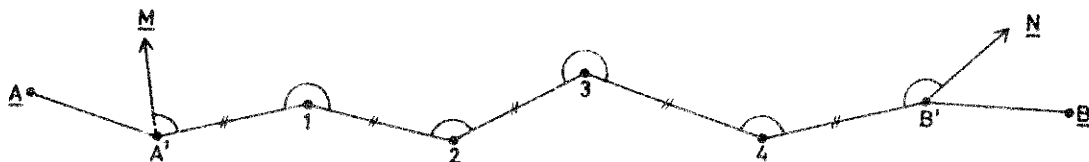


Fig. 92

er A og B de opprinnelige endepunkter, mens A' og B' er de "nedførte" punk-

ter som trer istedenfor A og B ved polygonmålingen. Fig. 92 viser hva som må måles når vi ser bort fra selve "nedføringmålene" (bue for målte vinkler og " for målte sider). Beregningen blir her å utføre på vanlig måte (altså med A' og B' som endepunkter for draget). Metoden forutsetter at det fra punkter i nærheten av de gitte punkter kan siktes til i det minste ett kjent punkt.

2. Ett av endepunktene lar seg ikke "nedføre". I fig. 93 er A det regulære endepunkt (om A er det opprinnelige punkt eller et "nedført" punkt spiller ingen rolle), mens B er det irregulære punkt.

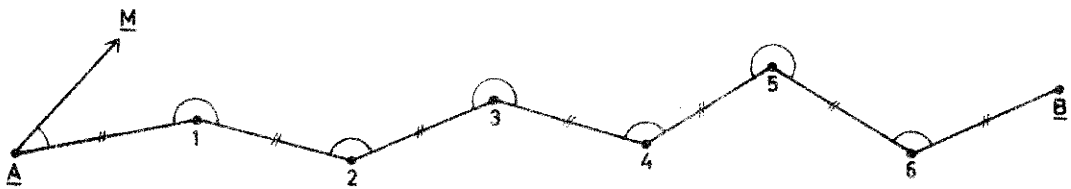


Fig. 93

Beregningen utføres på vanlig måte (ut fra A), bare med den forskjell at vinkelsumsligningen faller bort.

3. Ingen av endepunktene lar seg "nedføre". I dette tilfelle er det ikke mulig å måle tilknytningsvinklene i noen av endepunktene (se fig. 94, hvor det helt opptrukne drag forestiller et slikt tilfelle).

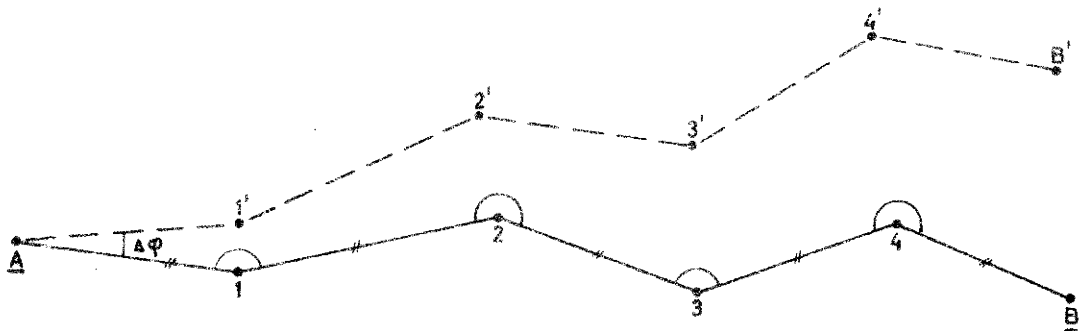


Fig. 94

Beregningsmessig kan problemet løses på følgende måte: (Se også side 58)

a. For siden A1 velges en vilkårlig retningsvinkel og en foreløpig koordinatberegning utføres. Vi forutsetter at disse koordinatbestente punkter er 1', 2', 3', ----, B' (se fig. 94). Den således beregnede figur vil være likeddannet med den målte figur.

b. Dreiningvinkel og målestokkforhold mellom de to figurer er



gitt ved

$$\Delta\varphi = \varphi_{AB} - \varphi_{AB'}$$

$$c = \frac{S_{AB}}{S_{AB'}}$$

og de målte sidelengder korrigeres

$$S = c \cdot S'$$

(S = korrigerede verdi, S' = målt verdi.)

c. Med de korrigerede sidelengder og riktige retningsvinkler ( $\varphi_{A1} = \varphi_{A1'} + \Delta\varphi$ , osv.) beregnes draget på nytt og en får kontroll derved at vi skal komme fram til de gitte verdier for B's koordinater.

5. Kompass- eller bussoldrag.

*Alle kompassdrag  
i 7'20'*

Ved polygondrag utledes sidenes retningsvinkler på grunnlag av kjent retningsvinkel og de målte brytningsvinkler. Ved kompassdrag derimot måles sidenes magnetiske retningsvinkler direkte. Ved vanlige geodetiske målinger nyttes tyngdekraften (gravitasjonsfeltet) til orientering av målingene. Ved kompassdrag nytter vi oss av kraftlinjene i jordens magnetiske felt. Dette feltet er ikke så stabilt og heller ikke så kraftig som gravitasjonsfeltet, noe som virker inn på målingenes nøyaktighet.

En magnetnål som kan bevege seg fritt, vil stille seg inn i det vertikale plan som tangerer den magnetiske kraftlinje i vedkommende punkt. Dette plans skjæringslinje med horisontalplanet representerer den magnetiske meridians retning i punktet. Denne retning faller ikke sammen med stedets geografiske meridian (den sanne nordretning), men danner en vinkel som kalles misvisning eller deklinasjon. Vi kan ha østlig eller vestlig misvisning alt ettersom magnetnålen peker øst- eller vestenfor den sanne nordlinje.

Det magnetiske kraftfelt, og dermed også misvisningen, er utsett for visse variasjoner. Det kan være sekulære, årlige og daglige endringer. I praksis har en som regel bare kjennskap til de første. Vi er nå inne i en periode hvor misvisningen avtar ca. 10' pr. år. Misvisningen kan tas ut av spesielle kart som i vårt land utgis av Norges geografiske oppmåling. Misvisningen fremstilles her ved såkalte isogoner, dvs. linjer gjennom punkter med samme misvisning.

Ved kompassdrag kan vi nytte :

1. Vanlig teodolitt med påfestet kompass. Man greier seg med et såkalt orienteringskompass hvor diameteren  $0^{\circ} - 200^{\circ}$  er parallell med kikkertens siktelinje (se fig. 95), og stiller da teodolittens avlesningsmiddel på  $0^{\circ}$ , løsner limbeskruen (forutsatt dobbeltakset teodolitt)

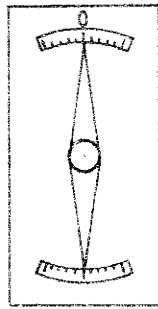


Fig. 95

og dreier til nålen viser  $0^g$ . Da er instrumentet orientert til magnetisk nord, alidadeskruen kan løsnes og ved tilsikting av et punkt kan den magnetiske retningsvinkel leses av på teodolittens horisontalsirkel.

2. Vi kan nytte bussolteodolitt hvor horisontalsirkelen er fast forbundet med magnetnålen, slik at denne faller sammen med sirkelens diameter gjennom  $0^g$  og  $200^g$ . Magnetnålen sammen med sirkelens  $0^g$ - $200^g$  diameter innstiller seg i den magnetiske meridian. Instrumentet er ellers utformet som en vanlig teodolitt med avstandsmålende kikkert.

3. Diopterkompasset har en sikteanordning (diopter) som er fast forbundet med graderingen. Her har vi da ingen kikkert og ikke mulighet for optisk avstandsmåling. En sides magnetiske retningsvinkel leses her av som magnetnåleens stilling i forhold til graderingen.

Ved kompassdrag blir draget lagt slik at punktene ligger heldig til for detaljeringen. I motsetning til polygonale drag bør en her nytte forholdsvis korte sider ( $< 80 - 100$  m), og oppstilling av instrumentet (sentreringen) kan gjøres forholdsvis grov og dermed hurtig.

Vi kan operere både med frie drag, ensidige og dobbeltsidige tilknytningsdrag. De to første bør en vanligvis ikke nytte, og vi vil derfor i det etterfølgende bare behandle dobbeltsidige tilknytningsdrag, dvs. drag som går ut fra og ender i kjente punkter.

Målingene kan utføres på følgende to måter :

1. Oppstilling i hvert punkt med måling av de magnetiske retningsvinkler fram og tilbake (se fig. 96, hvor A, B, M og N er gitte punkter).

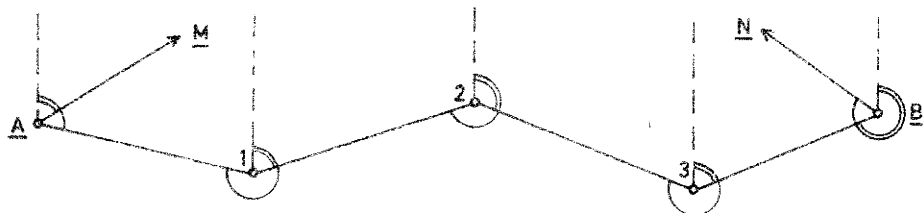


Fig. 96

2. Oppstilling i annethvert punkt, såkalt sprangvis oppstilling (se fig. 97).

Ved den førstnevnte fremgangsmåte får en kontroll på bestemmelsen av de magnetiske retningsvinkler, og dessuten fås en viss elimina-

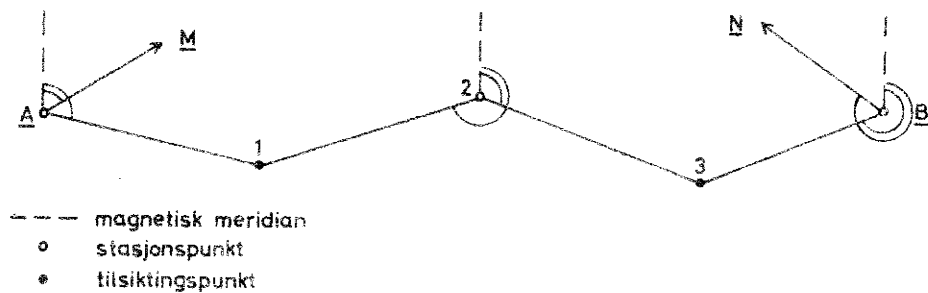


Fig. 97

sjon av feil som skyldes at de magnetiske kraftlinjer ikke er parallelle. Nyttets optisk avstandsmåling kan en her måle avstandene fram og tilbake. Sistnevnte fremgangsmåte er betydelig raskere, men en får ikke de samme kontroller som ved førstnevnte metode.

Ved koordinatberegning av kompassdrag har vi bruk for sidenes retningsvinkler i aksesystemet. Utledningen av disse retningsvinkler foregår på den måten at vi først bestemmer vinkelen  $\Delta$  mellom de magnetiske meridianer og aksesystemets x-akse. I dobbeltsidige tilknytningsdrag kan vi bestemme denne vinkel på to måter (se fig. 96 - 98) :

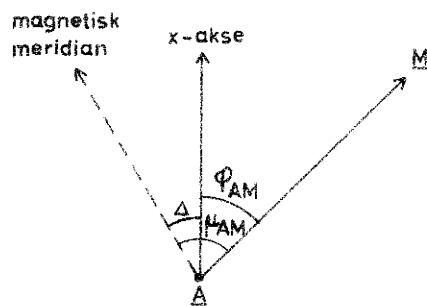


Fig. 98

$$\Delta_1 = \mu_{AM} - \varphi_{AM}$$

og 
$$\Delta_2 = \mu_{BN} - \varphi_{BN}$$

med middeltallet

$$\Delta = \frac{1}{2} (\Delta_1 + \Delta_2)$$

Retningsvinkelen til en hvilken som helst annen side i kompassdraget er da gitt ved:

$$\varphi = \mu - \Delta$$

Den videre koordinatberegning foregår på samme måte som ved vanlige polygondrag. Beregningen kan ofte utføres med regnestav. Fordelingen av  $f_x$  og  $f_y$  skal her skje proporsjonalt med koordinattilvekstene.

For Jordskifteverkets målinger gjelder følgende feilgrense for gapet :

<u>Innmarksmålinger</u>	<u>Utmarksmålinger</u>
$f_s = \sqrt{f_y^2 + f_x^2} = 0,1\sqrt{S} + 0,20$	$0,15\sqrt{S} + 0,20$

hvor S er dragets hele lengde i meter.

Høydeberegningen utføres på samme måte som ved vanlige polygonale drag.

Ved kartlegging av et felt vil en som regel nytte polygonale drag for bestemmelse av viktige detaljer som eiendomsgrenser, hovedveger, bebyggelse osv. For bestemmelse av detaljer som f.eks. driftsveger, stier og bonitetsgrenser kan en ofte med fordel nytte kompassdrag. Et kompassdrag måles nemlig betydelig hurtigere enn et tilsvarende polygondrag, og den nøyaktighet en oppnår er som regel i god overensstemmelse med den nøyaktighet en krever ved bestemmelsen av de sistnevnte detaljer.

Kompasslinjer som nyttes bl.a. i skogbruket i forbindelse med skogtaksasjon kan betraktes som et kompassdrag hvor alle sider har samme retningsvinkel. Dersom feltets yttergrenser er bestemt ved hjelp av polygonale drag, kan kompasslinjene fastlegges i forhold til disse og beregningen kan utføres på tilsvarende måte som for kompassdragene.

Ved all kompassmåling må en ta tilbørlig hensyn til ytre påvirkninger. En må f.eks. ikke legge draget i nærheten av kraftlinjer og en må forsøke å fjerne løsgjenstander som kan ha skadelig innvirkning på måleresultatet.

### KAPITTEL III.

#### BESTEMMELSE AV DETALJPUNKTER.

Detaljmålingen tar sikte på bestemmelse av de terrengpunkter som i særlig grad er med på å markere terrengets "kartografiske ansikt". Bestemmelsen av terrengpunktene foregår som regel på den måte at hvert enkelt punkt fastlegges separat i forhold til det allerede etablerte system av trigonometriske fikspunkter eller målelinjer. En feil ved bestemmelsen av et detaljpunkt forplanter seg således ikke videre til andre punkter slik som tilfelle er når det er tale om etablering av det trigonometriske rammesystem. Det vil derfor være forsvarlig å slå av noe på de strenge nøyaktighetsfordringer som gjelder for bestemmelsen av fikspunktsystemet. Denne hovedregel gjelder generelt for fastleggingen av detaljpunktene, men det blir også spørsmål om å operere med forskjellige grader av nøyaktighet ved detaljmålingen, avhengig av de enkelte detaljpunktets betydning og mer eller mindre nøyaktige definisjon. Eiendomsgrenser f.eks. bør således fastlegges med stor nøyaktighet mens en bonitetsgrense hvis beliggenhet i marka ofte er usikker, kan måles inn med åtskillig mindre nøyaktighet.

Ellers bør nøyaktigheten av detaljpunktens fastlegging rette seg etter kartets målestokk. Det henger sammen med at tegne- eller konstruksjonsnøyaktigheten er begrenset. Ved de vanlige metoder som nyttes i praksis for avsetting av detaljpunkter, kan vi ikke regne med større kon-

struksjonsnøyaktighet enn (angitt som middelfeil) ca.  $\pm 0,15$  mm. Denne midlere grunnrissfeil i kartet tilsvarer en midlere grunnrissfeil i markalik :

$\pm 1,5$ dm	i kartmålestokken	1 : 1000
$\pm 3,0$	" " - " -	1 : 2000
$\pm 7,5$	" " - " -	1 : 5000

Det har ingen hensikt å operere med større målenøyaktighet enn ca. tredjeparten av den midlere grunnrissfeil som skriver seg fra usikkerheten ved punktenes avsetting på kartet.

Ved fastleggingen av detaljpunktene gir vi som regel avkall på overskytende målinger, noe som vi aldri tillater oss ved bestemmelse av det trigonometriske fikspunktsystem. Vi får derfor ingen effektiv sikring mot grove feil. Som følge herav stiller detaljmålingene spesielt store krav til målerens påpasselighet og omhyggelighet.

De klassiske metoder for kartering av terrengpunkter er i de siste årtier i stor utstrekning blitt fortrent av luftfotogrammetrien, men de vil fremdeles ha sin berettigelse, særlig i følgende tilfeller :

1. Dersom det området som skal kartlegges er så lite at den fotogrammetriske metode faller for kostbar.

2. Dersom vegetasjonen er så tett at terrenget ikke kommer tilstrekkelig fram på bildene.

3. Dersom nøyaktighetskravene er særlig store, f.eks. ved bymålinger.

4. Dersom det ved fotogrammetrisk kartlegging blir nødvendig med supplerende målinger på grunn av ufullstendig fotografisk dekning.

5. Ved ajourføring av karter.

Det finnes to "klassiske" metoder for innlegging av detaljpunkter, nemlig rettvinkelmetoden og polarkoordinatmetoden.

#### 1. Rettvinkel- eller perpendikulærmetoden.

Etter denne metode blir punktene fastlagt ved rettvinklede koordinater i forhold til rette linjer, de såkalte målelinjer. Det skjen ved å nedfelle perpendikulærer på målelinjen fra de punktene som skal innlegges, og måle perpendikulærens lengder og likeså bestemme deres fotpunkter på målelinjene (se fig. 99). Som målelinjer kan det bli spørsmål om å benytte polygonsider, sider i linjetrianguleringsnett, supplerende måle-

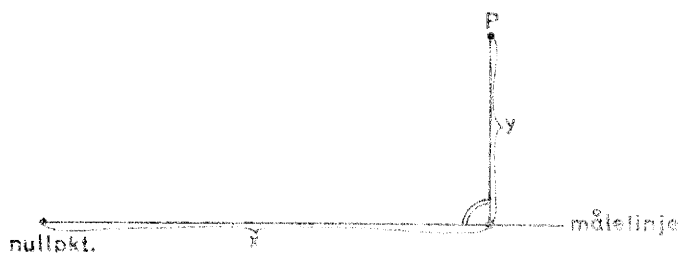


Fig. 99

dikulærer ved hjelp av rettinkelapparater.

3. Lengdemåling. Det er mest praktisk først å foreta en gjennomgående måling av målelinjen med avmerking for hver 10 eller 20 m. Bestemmelsen av perpendikulærenes fotpunkter skjer så ved måling ut fra disse 10 eller 20 m's punktene. En bør helst disponere to målebånd, et til måling i linjen og et til måling av perpendikulærene.

4. Skisseføring med notering av måletallene. Dette er ofte den vanskeligste del av arbeidet. Skissene må være så oversiktlige og fullstendige at enhver som behersker målemetoden er i stand til å utføre den videre bearbeidelse av målematerialet. Det er tilstrekkelig å utføre selve skissen som frihåndstegning da den bare skal tjene til vegledning under kartkonstruksjonen. Det viktigste er at tallene skrives tydelig og på en slik måte at det går klart fram hvilke størrelser de enkelte tall refererer seg til. For å oppnå entydighet på dette området har en fastsatt følgende regler for tallenes plassering (se fig. 100) : Abscisseavstandene noteres på motsatt side av perpendikulærene og skrives vinkelrett på målelinjens retning. Det siste gjelder forøvrig for alle lengdeangivelser i selve målelinjen. Lengdene av perpendikulærene skrives på tvers av perpendikulærretningen ved selve punktet. Lengder av skrålinjer skal skrives langs sine respektive linjer.

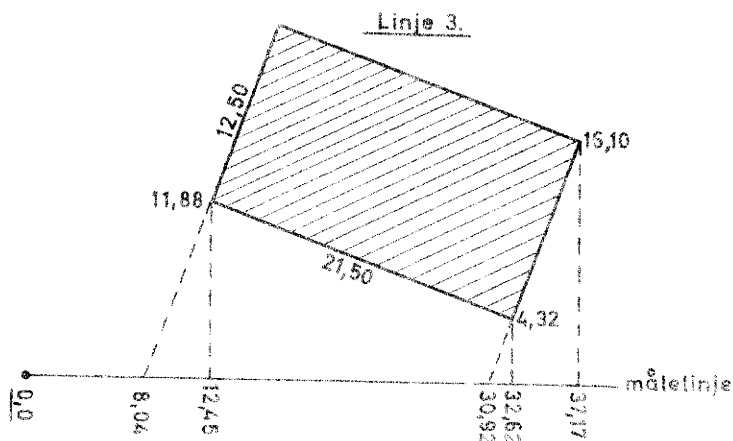


Fig. 100

linjer i polygonnett, eller selvstendige målelinjer når det er spørsmål om kartlegging av mindre områder.

De viktigste arbeider ved rettinkelmetoden er :

1. Utstikking av målelinjene, som regel med landmålerstokker.
2. Nedfelling av perpen-

Av hensyn til nøyaktigheten må ikke perpendikulærene være for lange, helst ikke over 50 meter.

I praksis inn-treffer det undertiden at rettinkelmetoden svikter for enkelte terrengpunktets ved-

kommende. Det kan f.eks. forekomme at det ikke er mulig å nedfelle per-

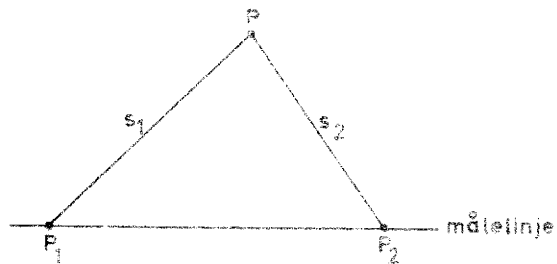


Fig. 101

kjente punkter  $P_1$  og  $P_2$  i målelinjen).

Det kan også bli spørsmål om å bestemme punkter ved "franskjæ-

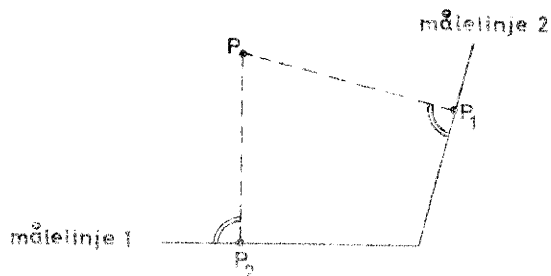


Fig. 102

vanskeligheter.

Tidligere ble nevnt at en ved detaljmåling tar sikte på å fastlegge de enkelte detaljpunkter direkte i forhold til det gitte system av trigonometriske punkter eller målelinjer. Unntakelsesvis kan det likevel bli spørsmål om å bestemme et terrengpunkt i forhold til allerede bestemte terrengpunkter, men de siste må da være skarpt markerte og godt bestemte. Denne fremgangsmåte nyttes hovedsakelig ved innmåling av bygninger.

Som tidligere nevnt, gir en avkall på overskytende målinger ved innmåling av vanlige detaljpunkter. Unntakelse fra denne regel gjøres for viktigere punkters vedkommende, i første rekke grensepunkter. Kontroll tas da ved direkte måling av avstanden mellom to og to punkter.

## 2. Polarkoordinatmetoden.

(Den tachymetriske metode).

Etter denne metode blir detaljpunktene fastlagt i forhold til et kjent oppstillingspunkt ved bestemmelse av retning og avstand. I fig. 103 er  $A$  og  $B$  de kjente punkter ( $A$  er oppstillingspunktet), mens  $P$  er det

pendikulær fra punktet på grunn av mellomliggende hindringer, eller perpendikulærlengden ikke lar seg måle på grunn av spesielle terrengvansker. I slike tilfeller kan det bli spørsmål om å bestemme punktet ved linjetriangulering (se fig. 101, hvor punkt  $P$  blir bestemt ved måling av avstandene  $s_1$  og  $s_2$  fra to

bestemt som skjæringspunkt mellom to perpendikulerer fra hver sin målelinje. Ved denne metode faller altså måling av perpendikulærlengdene bort. Denne måte å fastlegge punktet på har derfor mye for seg i de tilfeller hvor den direkte måling av perpendikulærlengdene byr på

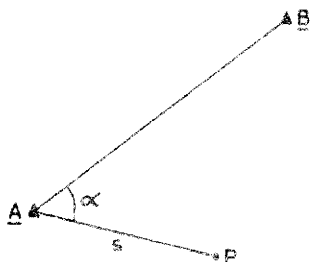


Fig. 103

punkt som skal innmåles. Dette skjer ved hjelp av vinkelen  $\alpha$  og avstanden  $s$ . Vanligvis blir  $s$  bestemt ved optisk avstandsmåling, og høydeforskjellen utledes på grunnlag av høydevinkel og avstand. Polarkoordinatmetoden betegnes da som tachymetri, som oversatt betyr hurtigmåling.

Dersom det i et stasjonspunkt skal fastlegges flere detaljpunkter, skjer bestemmelsen av horisontalvinklene i forhold til den kjente retning ved retningsmåling, idet samtlige retningen knyttes sammen til en satsserie.

Når det gjelder den tachymetriske bestemmelse av avstand og høyde, kan denne utføres på følgende måter :

1. En stiller den ene distansestreken på 1,00 m (ved sikthindringer på andre meterverdier), leser av avstanden og noterer siktehøyden  $s$ . Med den samme innstilling av siktelinjen foretas så høydevinkelmålingen.

2. En innstiller den ene distansestreken på 1,00 m for avstandsavlesningen og deretter forskyves siktelinjen slik at siktehøyden blir lik instrumenthøyden ved høydevinkelmålingen.

Forste metode er noe mer arbeidskrevende enn sistnevnte, men innebærer den store fordel at en får kontroll på avstandsbestemmelsen ved at

$$D' = (s - 1,00) 200$$

hvor  $D'$  er den optisk avleste avstand.

Ved den annen metode fås ingen slik kontroll. Det bør derfor i dette tilfelle være en fast regel at observatøren kontrollerer avstandsbestemmelsen ved to gangers avlesning (før og etter notering).

Gangen i arbeidet blir : Etter å ha stilt teodolitten opp (sentrert) nøyaktig over et kjent punkt og orientert den til et annet kjent punkt, dvs. ved sikt til dette punkt leses av 0,09 på horisontalsirkelen, sikter en til det aktuelle detaljpunkt og nedre distansestrek innstilles på 1,00 m med avlesning og notering av  $D'$ . Så avleses og noteres siktehøyden (ved metode 2 etter at en har gjort siktehøyde lik instrumenthøyde). Stangbæreren gis tegn om å gå til neste punkt, hvorefter avlesning og notering av horisontal- og vertikalvinkel foretas.

Bestemmes det mange detaljpunkter fra en stasjon, er det viktig at observatøren av og til innstiller på den gitte utgangsretning for å sikre seg at instrumentet ikke har dreid seg under målingen. Før en forlater



stasjonen bør en alltid kontrollere orienteringsretningen.

Tachymetri anvendes fortrinnsvis i forbindelse med polygonmåling. Polygonmålingen og detaljmålingen kan foregå med samme instrumentoppstilling. Først foretas da de målingene som angår polygondraget, og disse føres i en egen observasjonsbok. Så følger detaljmålingen som føres i tachymeterboken.

Ett av de viktigste ledd i tachymeterarbeidet er føring av skisser, som særlig viser situasjonen i horisontalplanet. Av skissen skal beskaffenheten av de innmålte punkter gå tydelig fram. Til støtte for opp-tegningingen av høydekurvene skisseres høydeforholdene ved skjønnsmessige høydekurver. Så vel målinger som skisser skal føres på en slik måte at enhver som behersker tachymetermetoden når som helst skal kunne overta arbeidet.

Det bør være samsvar mellom nøyaktigheten i vinkel- og avstandsmåling. For de metoder for optisk avstandsmåling som anvendes ved vanlig tachymetri, kan vi regne med en nøyaktighet på 1 : 1000. Forlanges den samme nøyaktighet i sideretningen, betyr det at vi må operere med en vinkel-nøyaktighet gitt ved :

$$\frac{1}{1000} \rho \approx 6^{\circ}$$

Det vil derfor være tilstrekkelig å lese av graden på horisontalsirkelen med én desimal. Denne avlesningsnøyaktighet vil også være tilstrekkelig for vertikalvinklene. Virkningen av eventuell kollimasjonsfeil og indeksfeil vil under vanlige forhold holde seg langt under  $5^{\circ}$ , slik at detalj-målingen kan begrenses til en kikkertstilling. Forutsetningen er at begge disse instrumentfeil holdes tilstrekkelig små, og det må kontrolleres fra tid til annen.

Dersom den nøyaktighet som oppnås ved vanlig tachymetri er utilstrekkelig, må vi enten ty til rettvingkelmetoden eller til såkalt presisjonstachymetri. Den siste atskiller seg fra vanlig tachymetri ved nøyaktigere avstands- horisontal- og vertikalvinkelbestemmelse. Avstandsbestemmelsen foretas da ved bruk av presisjonsavstandsmålere (som regel selvreduserende dobbeltbildeavstandsmålere), som tillater bestemmelse av 100 meters avstander med ca. 2 cm's nøyaktighet. Horisontal- og vertikalvinklene må måles med en nøyaktighet på  $1^{\circ}$ . Når presisjonstachymetri anvendes, skjer selve kartkonstruksjonen ved hjelp av spesielle polarkoordinatografer. Presisjonstachymetri er om lag like nøyaktig som rettvingkelmetoden, men er den siste overlegen med hensyn til arbeidsforbruk, særlig i hellende terreng.

Under tachymetreringen er det viktig å gå systematisk til verks.

En kan f.eks. starte med å måle inn alle grensemerker, deretter bygningen (om mulig tre hjørner av hus og notering av lengde og bredde på skissen), så veger, gjerder, lys- og telefonstolper, vassdrag, åker- og skogbegrensning, bonitetsgrenser osv. Til slutt bestemmes det nødvendig antall punkter som senere skal nyttes for konstruksjon av høydekurvene. Herunder kan en nytte vanlige detaljpunkter, men som regel må disse suppleres med punkter som kun skal nyttes til høydebestemmelsen. Høydepunktene antall er avhengig av terrenget og den målestokk og ekvidistanse (vertikal avstand mellom høydekurvene) som kartet skal konstrueres i. En må måle inn bakkekanter, rygger og slukter i terrenget med så mange punkter at en ved konstruksjonen av høydekurvene (se senere) kan foreta lineære interpolasjoner.

I småkupert og forholdsvis flatt terreng og der en vil ha bestemt høydekurvene med stor nøyaktighet, bestemmes disse fordelaktigst direkte i marka ved den såkalte direkte metode. En kan her nytte teodolitt eller avstandsmålende nivellerinstrument. Denne metode vil bli behandlet senere i forbindelse med flatenivellement.

Ved all kartlegging må en ha klart for seg hva kartet skal nyttes til og hvilken målestokk det skal konstrueres i. Disse ting er nemlig avgjørende for hvilke detaljer som skal tas med og med hvilken nøyaktighet vi skal måle.

#### KAPITTEL IV.

##### DE VIKTIGSTE OPPMÅLINGS- (KARTLEGGINGS-) METODER.

Vi har i de foregående kapitler behandlet de forskjellige metoder for bestemmelse av fikspunkter og detaljpunkter. Alt etter hvordan de ulike metoder for bestemmelse av fikspunktene kombineres innbyrdes og sammen med de forskjellige metoder for bestemmelse av detaljpunktene, fås en hel rekke oppmålingsmetoder. Vi skal i det etterfølgende behandle de kombinasjonsmuligheter som betyr mest ved praktiske oppmålingsarbeider. Vi forutsetter at karteringen av detaljpunktene skal foretas etter de "klassiske" metoder.

##### 1. Kombinering av linjetriangulering og rettvinkelmetoden.

Vi tar først for oss det enkleste tilfelle at feltet er av forholdsvis lite omfang og har en langstrakt form (se fig. 104). Linjetrianguleringen kan da innskrenkes til en enkelt rett målelinje som legges



Fig. 104

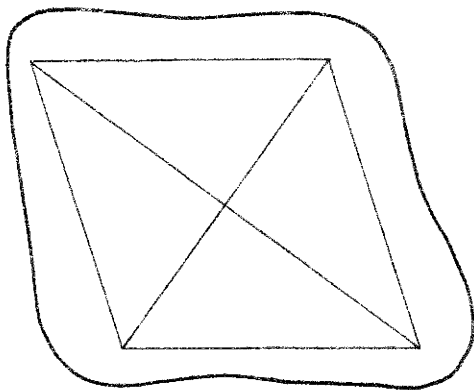


Fig. 105

omtrentlig midt gjennom feltet i dets lengderetning. Detaljpunktene fastlegges så i forhold til målelinjen ved rettvinkelmetoden.

Er feltet av større omfang, må det bygges ut et linjenett, slik som fig. 105 viser et enkelt eksempel på. Nettet må anlegges slik at målelinjene ligger heldig til for innlegging av feltets yttergrenser og detaljpunkter forøvrig. Det vil bare sjelden være tilstrekkelig med et så enkelt linjenett som vist i fig. 105. Som oftest blir det av hensyn til innmålingen av detaljpunktene nødvendig å forsyne hovedfiguren med supplerende målelinjer.

De to foregående eksempler refererer seg til oppmåling av små felter. For større områder vil linjenettet måtte gis en mer komplisert form. Det kan

også bli spørsmål om å gi linjenettet en regelmessig utforming som kvadrattett, eller rektangelnett. Slike regelmessige utforminger av linjenettet nyttes mest når høydeforholdene skal bestemmes ved flatenivellement (se senere).

Denne oppmålingsmetode (kombinering av linjetriangulering og rettvinkelmetoden) benyttes fremdeles atskillig ved mindre arbeider, f.eks. totemålinger. Metodens største fordel ligger i at den stiller beskjedne krav til instrumentstyr.

## 2. Kombinering av polygondrag og tachymetri.

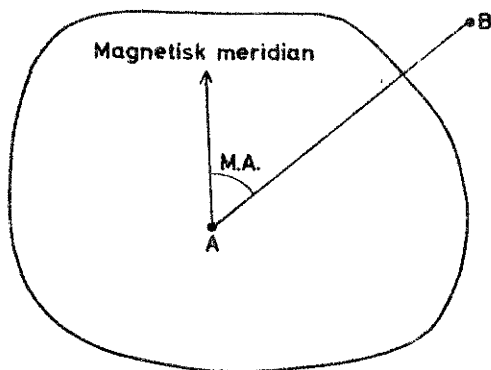


Fig. 106

Vi tar først for oss det enkleste tilfelle at polygonsystemet består av bare ett eneste punkt, dvs. feltet må være av så lite omfang at dets begrensning og detaljpunkter forøvrig nås fra en enkelt instrumentoppstilling. I fig. 106 er A det punkt hvor teodolitten stilles opp, og som samtidig representerer fikspunktsystemet. B er et vilkårlig valgt punkt, hvis eneste oppgave er

- sammen med A - å tjene som fingert kjent retning ved den tachymetriske innlegging av detaljpunktene. Instrumentet innsiktes altså mot B med nullavlesning på sirkelen, hvoretter detaljpunktene innmåles på vanlig måte ved tachymetri. Vanligvis ønskes kartopptaket orientert i forhold til nordretningen. Det forutsetter bestemmelse av magnetisk asimut (MA) for utgangsretningen A-B.

Det nest enkleste tilfelle består i å basere oppmålingen på et fritt polygondrag bestående av to punkter, dvs. feltet som skal måles, må ha så liten utstrekning at alle punkter som interesserer, kan nås fra to sta-

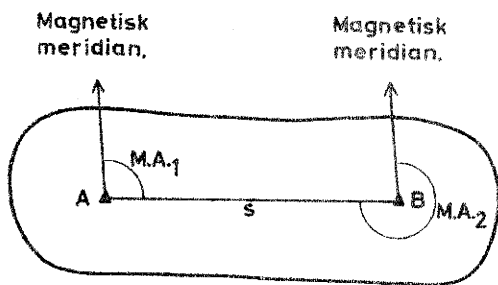


Fig. 107

sjonspunkter. I fig. 107 er A og B de to stasjonspunktene, som må velges ut under hensyntaken til den etterfølgende innmåling av detaljpunktene. Det må være mulig å sikte mellom A og B. Avstanden mellom A og B bør bestemmes ved kontroll. Instrumentet stilles opp først i det ene stasjonspunkt, og med nullavlesning på sirkelen innsiktes det andre, hvoretter detaljpunktene som nås fra vedkommende stasjonspunkt innmåles på vanlig måte ved tachymetri. Av hensyn til høydebestemmelsen må det også foretas høydevinkelmålinger mellom A og B. Til orientering av opptaket i forhold til nordretningen foretas bestemmelse av de magnetiske asimuter MA<sub>1</sub> og MA<sub>2</sub>, og som endelig verdi benyttes middeltallet av disse to bestemmelser.

Det kan også bli spørsmål om å basere oppmålingen på et fikspunktsystem i form av et fritt polygondrag bestående av flere enn to punkter. Fremgangsmåten med fritt polygondrag har den store mangel at vi ikke får noen overskytende målinger ved polygondragets bestemmelse og følgelig heller ingen kontroll på måling og beregning.

Dersom feltet har større utstrekning, kan det bli spørsmål om å

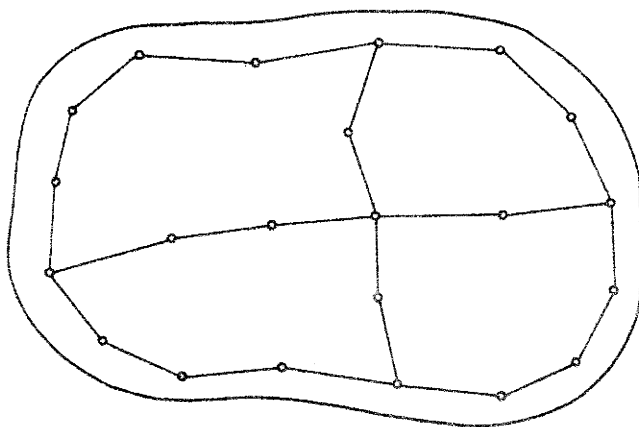


Fig. 108

basere oppmålingen på en lukket polygon. Ifølge Jordskifteverkets reglement kan oppmåling av felter mindre enn 1000 dekar baseres utelukkende på polygonmåling. Det samme gjelder også for større felter som omfatter flate skogstrekninger, hvor en triangulering ikke kan utføres uten uforholdsmessig store omkostninger. Fig. 108 viser et eksempel på et polygonnett. Først har vi

en hovedpolygon som er lagt i nærheten av feltets yttergrenser. Denne polygon er supplert med to "indre" polygondrag som krysser hverandre i et knutepunkt. Det vil her falle naturlig å beregne den ytre polygon separat, og deretter de indre drag ved knutepunktberegning. Til orientering av polygonnettets i forhold til nordretningen må den magnetiske asinut til én eller flere sider bestemmes.

### 3. Kombinering av triangulering, polygonering og tachymetri.

Dreier det seg om felter større enn ca. 1000 dekar, bør triangulering vanligvis nyttes. Fig. 109 viser et eksempel på anlegg av trigonometrisk fikspunktsystem

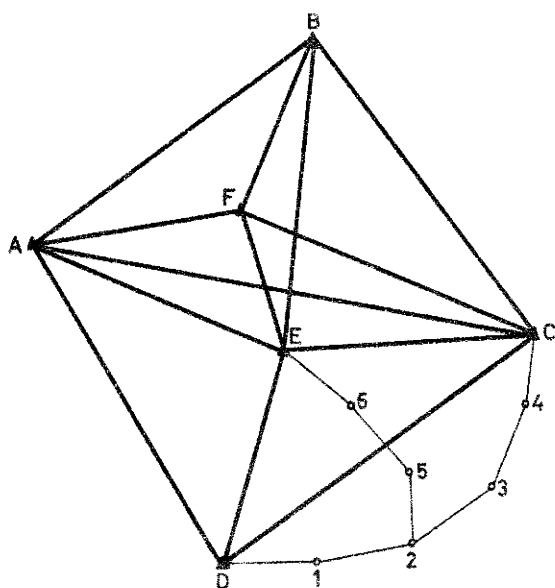


Fig. 109

som omfatter triangulering og polygonering. Punktene A, B, ....., F i triangelnettets er forbundet med polygonale drag, hvis tilhørende punkter er betegnet med arabiske tall. For enkelthets skyld har vi nøyd oss med en partiell utbygging av polygonnettets.

I fig. 109 tenker vi oss at triangelnettets er fritt, dvs. uten tilknytning til allerede fastlagte punkter. Nettets lineære dimensjoner (målestokk) baserer seg på siden FE som målt basis (grunnlinje). I fig. 109 representerer altså figuren AFCE selve basisnettets.

Koordinatberegningen av nettets skjer enklest ut fra pkt. E og F, idet  $\varphi_{EF}$  bestemmes på grunnlag av målt magnetisk asinut for denne side. Deretter beregnes pkt. A og C, og til slutt B og D.

Innmålingen av detaljpunktene foretas altså tachymetrisk ut fra polygonpunktene. Langs polygondragene detaljeres soner til begge sider. Sonebredsde er avhengig av hvor oversiktlig terrenget er og den nøyaktighet som kreves. Ofte vil det være hensiktsmessig å utvide sonebreddene ved en "fiskebensutbygging" av polygondragene. Det skjer ved ut fra punktene i hoveddraget å bestemme hjelp punkter på begge sider. Fig. 110 viser et eksempel på hvordan dette foregår. Her er 1, 2 og 3 punkter i hoveddraget,

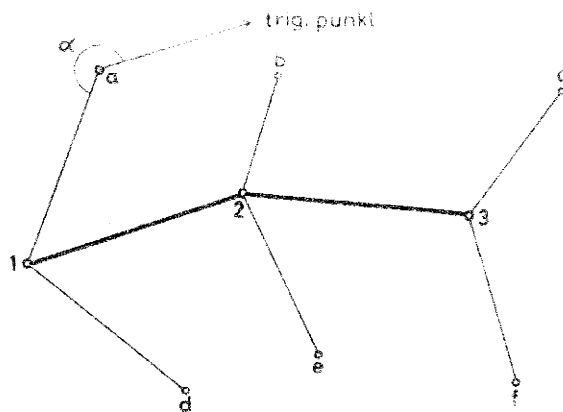


Fig. 110

mens a, b, . . . ., f er hjelpepunkter som bestemmes ved polarkoordinater (vinkel og avstand). Kontroll på bestemmelsen av hjelpepunktene fås f.eks. ved i hjelpepunktene å måle vinkelen mellom utgangspunktet i hoveddraget og et annet koordinatbestemt punkt (triangel- eller polygonpunkt). Derved fås en retningsvinkelkontroll. Disse hjelpepunktene er av mer sekundær betydning for oppmåling.

Det vil derfor som regel være tilstrekkelig med en provisorisk avmerking av dem.

Av andre oppmålingsmetoder som kan komme på tale, kan vi nevne en kombinasjon av både triangulering, polygonering, tachymetri, supplerende målelinjer og bruk av rettvinkelmetoden. En slik fremgangsmåte nyttes ofte ved bymålinger.

## KAPITTEL V.

### NIVELLERING OG BAROMETRISK HØYDEMÅLING .

Vi har hittil beskjeftiget oss i hovedsaken med bestemmelse av punktenes relative beliggenhet på selve referensflaten, eller rettere sagt den relative beliggenhet av punktenes projeksjoner på flaten. Til punktenes éntydige fastlegging i forhold til referensflaten hører også lengden av projeksjonslinjene. Det er den matematiske jordoverflate eller geoiden som nyttes i landmålingen som referensflate ved høydemålingen, og et punkts høyde blir definert som lengden av loddlinjen mellom vedkommende punkt og geoiden. Som bekjent faller geoiden sammen med verdenshavens middelhøyde eller middelvannstand, som kan bestemmes ved vannstandsobservasjoner over lengere tidsrom. I Norge foregår slike målinger ved hjelp av et større antall selvregistrerende vannstandsmålere.

Ved de fleste former for høydemåling er det høydeforskjeller som bestemmes. For på grunnlag av de målte høydeforskjeller å komme over til absolutte høyder, dvs. høyder i forhold til geoiden, må målingene knyttes til den midlere vannstand, eller til punkter som er høydebestemt i forhold til denne.

Ved de fleste tekniske prosjekteringer er det punktenes relative høyder som i første rekke interesserer.

I landmålingen brukes hovedsakelig tre metoder til bestemmelse av punkters høydeforskjeller, nemlig :

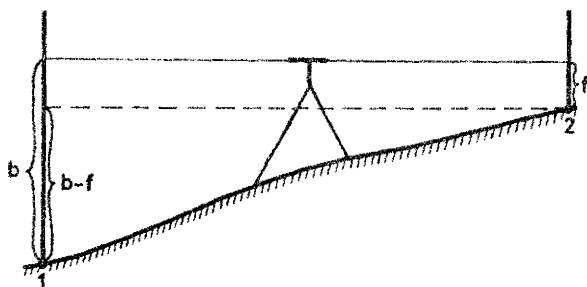
1. Nivellering , (også kalt geometrisk nivellement) .
2. Trigonometrisk høydemåling , ( " " trigonometrisk nivellement) .
3. Barometrisk høydemåling .

Av disse er nivellering den uten sammenligning nøyaktigste metode. Deretter følger den trigonometriske høydemåling, og til slutt den barometriske høydebestemmelse. Den trigonometriske høydemåling har vi behandlet tidligere, nå skal vi se på nivellering og barometrisk høydemåling.

### 1. Nivellering.

Ved nivellering bestemmes punkters høydeforskjell ved hjelp av et instrument (nivellerinstrument) som gir oss en horisontal siktelinje (horisontalt plan).

Når nivellerinstrumentet er oppstilt slik at man kan sikte til en nivellerstang oppstilt i punktene 1 og 2 (se fig. 111), og instrumentets horisontale sikteplan treffer stangen i høydene  $b$  og  $f$ , er høydeforskjellen lik



$$\Delta h_{12} = b - f$$

Fig. 111

(I fig. 111 har vi sett bort fra jordkrumningen. Virkningen av denne vil først utgjøre 1 mm for en sikteavstand på 113 m.)

Det er ikke nødvendig at instrumentet stilles opp i den rette linje mellom 1 og 2, og avstanden fra instrument til 1 og 2 behøver heller ikke være like lange. Avstanden må ikke være større enn at man kan få en tilstrekkelig nøyaktig avlesning på nivellerstangen. Høydeforskjellen som bestemmes ved en enkelt oppstilling av instrumentet må ikke være større enn nivellerstangens lengde, ellers vil siktet enten "gå i bakken" (for det høyeste punkt) eller over stangen (for det laveste punkt).

Vi skal så omtale de forskjellige former for nivellement.

A. Fastmerkenivellement.

Dette nivellement tar sikte på å bestemme høydeforskjellen mellom to punkter. I det generelle tilfelle vil det ikke være mulig å løse oppgaven ved en enkelt instrumentoppstilling, men det blir nødvendig å sjalte inn såkalte byttepunkter.

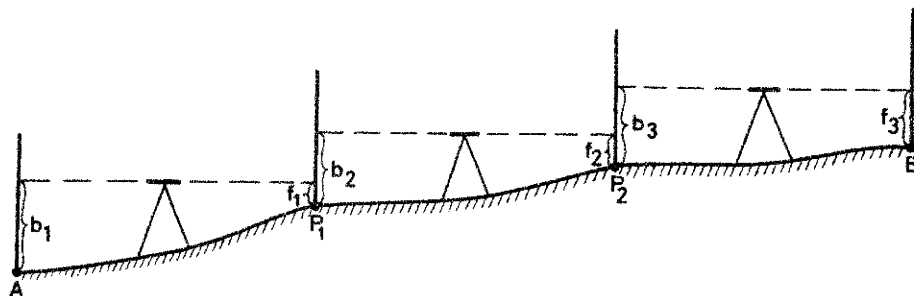


Fig. 112

I fig. 112 skal høydeforskjellen  $\Delta H_{AB}$  mellom punktene A og B bestemmes.  $P_1$  og  $P_2$  er byttepunkter. De partielle høydeforskjeller ( $\Delta h$ ) som  $\Delta H_{AB}$  er sammensatt av, er gitt ved (idet vi forutsetter i alt n instrumentoppstillinger) :

$$\begin{aligned} \Delta h_1 &= b_1 - f_1 \\ \Delta h_2 &= b_2 - f_2 \\ \Delta h_3 &= b_3 - f_3 \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta h_n &= b_n - f_n \end{aligned}$$

dvs.

$$\Delta H_{AB} = \Sigma b - \Sigma f$$

Avlesningene  $b_1, b_2, \dots, b_n$  kalles baksikter og  $f_1, f_2, \dots, f_n$  framsikter. Baksiktene defineres som sikter til punkter hvis høyder kan betraktes som allerede bestemt, mens framsiktene er sikter til punkter hvis høyder skal bestemmes.

Nedenfor følger et eksempel på skjemaføring ved fastmerkenivellement.

Stasjon	Sikte til	Sikteavstand		Stangavlesningen			Høydeforskjell		Høyde av		Avstand i linjen
		S <sub>b</sub>	S <sub>f</sub>	b	m	f	+	-	sikteplan	punkt	
1	b = A	36,5	49,8	2,441		1,263	1,178			142,275	
2		60,1	52,3	1,012		2,961		1,949			
3		41,9	16,7	0,978		0,316	0,662				
4	f = B	29,6	48,1	2,117		1,136	0,981			143,151	
		168,1	166,9	6,548		5,676	2,821	1,949			
							+0,872	+0,872		+0,872	



(Ved fastmerkenivellement ville det være mulig å operere med et enklere skjema enn dette. Imidlertid er det fordelaktig å kunne bruke samme skjema for alle nivellementstyper, og det er grunnen til at skjemaet på foregående side inneholder en del "overflødige" kolonner.)

Kontroll på utregningen fås ved kontrolligningene

$$\Delta H_{AB} = \Sigma b - \Sigma f = \Sigma \Delta h = H_B - H_A$$

Disponeres regnemaskin, kan utregningen av høydeforskjellene  $\Delta h$  sløyfes, idet bestemmelsen av  $\Delta H_{AB}$  utelukkende baseres på differensen mellom  $\Sigma b$  og  $\Sigma f$ . Det forutsetter at utregningen av  $\Sigma b$  og  $\Sigma f$  foretas dobbelt.

Byttepunktens høyder har ikke varig interesse, og utregningen av dem er derfor sløyfet. Av hensyn til eliminering av feil som følge av at siktelinje og libelleakse ikke er parallelle, bør summen av sikteavstandene for baksiktene og framsiktene gjøres om lag like store. Sikteavstandene bestemmes enten ved skritting eller ved hjelp av trådkorsets distansestreker. Ved vanlige tekniske nivellementer sløyfes som regel bestemmelsen av sikteavstandene (og dermed oppfyllelsen av betingelsen  $\Sigma S_b = \Sigma S_f$ ), idet måleren ved verifisering av instrumentet sørger for at libelleakse og siktelinje blir så nær parallelle at feil som skrives seg herfra blir uten betydning i relasjon til den moderate nøyaktighet som det her er spørsmål om.

### B. Linjenivellement.

I dette tilfelle går oppgaven ut på å bestemme høyden til en rekke punkter i en linje, slik at en får grunnlag for en grafisk fremstilling av linjen i form av et profil. Ved denne type nivellement opptrer foruten stasjons- og byttepunkter, også en tredje gruppe punkter, nemlig de såkalte mellompunkter, og vi betegner siktene til sistnevnte med  $m$ .

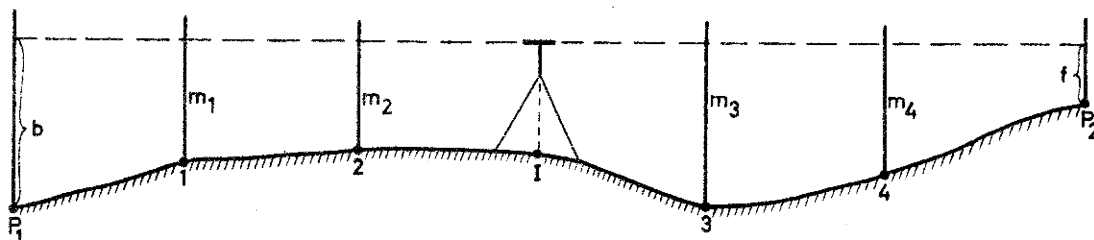


Fig. 113

Fig. 113 viser et eksempel på observasjonsanordningen ved linjenivellement. I er et stasjonspunkt,  $P_1$  og  $P_2$  er byttepunkter, mens 1, 2, 3

og 4 er mellompunkter. Framgangsmåten ved linjenivellement blir altså den samme som ved fastmerkenivellement, bare med den forskjell at det mellom bak- og framsiktene skytes inn et større eller mindre antall mellomsikter. Som regel foretas avlesningen for mellompunktene med mindre nøyaktighet enn for byttepunktene. Det skyldes at små unøyaktigheter ved mellompunktene avlesninger resulterer i lokale feil som ikke forplanter seg videre. Som generell regel for plasseringen av nivellements punktene (bytte- og mellompunktene) gjelder at de skal legges til linjens høydeknepunkt.

Nedenfor følger et eksempel på skjemaføring ved linjenivellement.

Stasjon	Sikte til	Sikteavstand		Stangavlesninger			Høydeforskjell		Høyde av		Avstand i linjen
		S <sub>b</sub>	S <sub>f</sub>	b	m	f	+	-	sikteplan	punkt	
I	1			2,126					146,405	144,279	0,0
	2				1,240					145,17	35,2
	3				2,160					144,25	48,6
	4				2,840					143,57	69,8
	5						1,396			145,009	94,3
II	5			1,912					146,921	145,009	94,3
	6				1,360					145,56	121,6
	7				0,050					146,87	144,3
	8					2,966				143,955	166,7
				4,038		4,362					
											-0,324

Kontroll :  $H_8 - H_1 = 143,955 - 144,279 = \Sigma b - \Sigma f = = - 0,324$

Hva utregningen av linjenivellement angår, kan det bli spørsmål om to framgangsmåter, nemlig enten ved hjelp av høydeforskjellene i 8. og 9. kolonne, eller ved hjelp av den såkalte sikteplanshøyde i kolonne 10. En stasjons sikteplanshøyde er definert som det horisontale sikteplans høyde i vedkommende stasjonspunkt. Sikteplanshøyden fås ved til et kjent punkts høyde å addere baksiktet i det kjente punkt. Når metoden med sikteplanshøyde anvendes, utledes høyden til et vilkårlig punkt ved å subtrahere stangavlesningen i vedkommende punkt fra sikteplanshøyden. Ved bruk av sikteplanshøyde fås kontroll på beregningen ved kontrolligningen

$$\Sigma b - \Sigma f = H_e - H_b$$

hvor e står for endepunkt og b står for begynnelsespunkt.

Denne kontrolligning består så vel for den enkelte stasjon som for hele nivellementslinjen under ett. Ellers er det å merke seg at lig-

ningen bare kontrollerer utregningen av byttepunktene høyder, derimot ikke utregningen av høydene til mellompunktene. En må derfor være særlig omhyggelig med utregningen av sistnevnte.

(Brukes framgangsmåten med utregning av høydeforskjeller, fås et vilkårlig punkts høyde ved til det foregående punkts høyde å addere høydeforskjellen mellom dem. Den tidligere oppstilte kontrolligning

$$\Sigma b - \Sigma f = \Sigma \Delta h$$

består fremdeles, og den omfatter også utregningen av mellompunktene høyder.)

Framgangsmåten med sikteplanshøyde er meget enkel og rask, og er å anbefale for utregning av linjenivellementer og enda mer for flatenivellementer. Metoden har, som vi har sett, den mangel at den ikke innebærer kontroll på utregningen av høydene til mellompunktene, men det spiller ikke så stor rolle fordi at en i praksis ikke vil nøye seg med en enkelt utførelse av nivellementet. Av hensyn til kontroll av målingene må alle linjenivellementer utføres dobbelt, og derved fås også kontroll på utregningen av mellompunktene høyder.

### C. Flatenivellement.

Et flatenivellement tar sikte på å bestemme høyden til så mange punkter på flaten at dens høydeforhold kan fremstilles med tilstrekkelig nøyaktighet. Det vanligste er å fremstille høydeforholdene ved høydekurver, som er kurver gjennom punkter som alle befinner seg i samme høyde. Høydekurvene blir med andre ord snittkurver mellom terrenget og horisontale plan i gitte høyder. Høydeforskjellen mellom høydekurvene gjøres konstant og kalles ekvidistanse.

Flatenivellementer kan utføres enten etter den indirekte eller den direkte metoden.

#### a. Den indirekte metode.

Ved denne metode bestemmes høydene til et større eller mindre antall terrengpunkter, passende fordelt over området, slik at punkttettheten er større der hvor høydeforholdene varierer sterkt enn der hvor hellingsforholdene er mer ensartede. Punktene kan velges på rette linjer, som fastlegges ved hjelp av det fikspunktsystemet som danner grunnlaget for oppmålingen. Linjene bør legges i retning av det sterkeste fall, langs rygger og slukter i terrenget.

Selve flatenivellementet vil da anta karakteren av en rekke linje-nivellementer. Det kreves ikke stor nøyaktighet i høydebestemmelsen for mellompunktene vedkommende. Avlesningen i byttepunktene derimot må utføres med større nøyaktighet.

Finnes det ikke noe fikspunktsystem som nivellementslinjene kan fastlegges i forhold til, må det etableres et system av linjer og måles tilstrekkelig data slik at de kan avsettes grafisk. Det enkleste er å stikke ut en rett linje omtrent midt gjennom området i dets lengste utstrekning. På denne grunnlinjen oppreises perpendikulærer til begge sider, som føres ut til feltets yttergrenser, eller så langt som nødvendig. Perpendikulærenes fotpunkter på grunnlinjen bestemmes ved lengdemåling.

Målelinjesystemet kan også utformes som rektangelnett, eller kvadratnett (se fig. 114, som viser et eksempel på et kvadratnett).

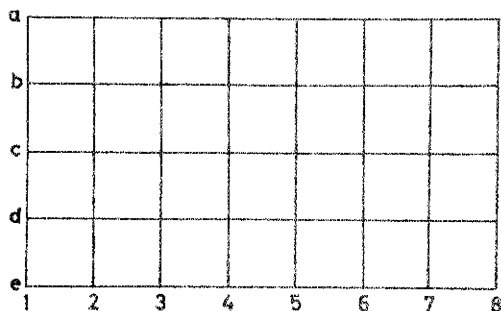


Fig. 114

mentet bestemmes høydene til skjæringspunktene i nettet. (Ved skjemaføring brukes betegnelsen b3, d6 osv. på hjørnene.)

Kvadrat- og rektangelnettmotoden egner seg best for terreng med ensartede høydeforhold.

Metoden med grunnlinje og variabel avstand mellom perpendikulærene regnes for å være den gunstigste, fordi den er mer "elastisk" for så vidt som den innebærer muligheten for å legge målelinjene på en slik måte at vi får bedre "tak" på terrengets høydeforhold. Ellers består selvsagt også den mulighet å ta med karakteristiske høydepunkter, selv om de faller utenfor målelinjene. Slike punkter tas med under nivelleringen, og deres beliggenhet i horisontalplanet bestemmes ved rettvinkelmetoden i forhold til målelinjene.

Hva konstruksjonen av selve høydekurvene etter denne metode angår, vises til kap. VI, pkt. B.c. : Konstruksjon av høydekurver.

#### b. Den direkte metode.

Etter denne metode oppsøkes høydekurvene i marka, og det nødvendige antall punkter i disse måles inn. Oppgaven går altså ut på å oppsøke og bestemme punkter med en gitt høyde. Det foregår på den måten at vi sikter mot et punkt med kjent høyde  $H_p$ . Stangavlesningen er  $a_p$ . Sikteplanshøyden blir følgelig lik (se fig. 115):

$$s = H_p + a_p$$

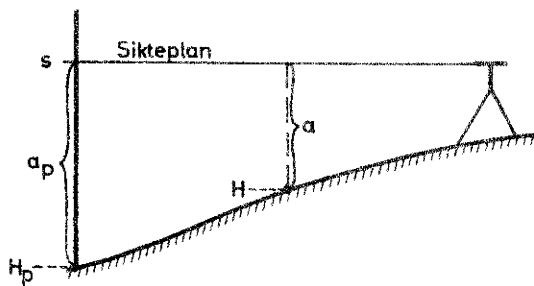


Fig. 115

Skal vi oppsøke et vilkårlig punkt med høyden  $H$ , må vi ved horisontal siktelinje ha en stangavlesning :

$$a = s - H = H_p + a_p - H$$

Stangbæreren må altså oppsøke punkter i terrenget med stangavlesning lik  $a$ . Punktene må enten straks innmåles, eller avmerkes for senere innmåling. Passer det fra en stasjon å legge inn flere høyde-

kurver, er det mest hensiktsmessig å beskjefte seg med en kurve om gangen.

Den direkte metode regnes for å være den nøyaktigste, særlig i ujevnt og kupert terreng. Men den er mer arbeidskrevende enn den indirekte metode. Den passer best når instrumentet er forsynt med inndelt horisontalsirkel og kikkert for optisk avstandsbestemmelse, slik at de funne kurvepunkter kan fastlegges umiddelbart ved polarkoordinater. Direkte bestemmelse av høydekurver kan som tidligere nevnt også utføres med teodolitt i forbindelse med tachymetrering.

#### D. Tverrprofilering.

Ved mange tekniske prosjekteringer, f.eks. ved planlegging av vegger eller kanaler, er det nødvendig også å kjenne høydeforholdene et stykke ut til sidene for midtlinjen. Dette oppnås ved linjenivellementer perpendikulært på midtlinjen. Perpendikulærene stikkes ut på begge siden av linjen så langt som nødvendig av hensyn til prosjekteringen. I disse tverrprofilene bestemmes høydene til så mange punkter at deres høydeforhold kan fremstilles grafisk med tilstrekkelig nøyaktighet. Tverrprofilene kan enten tas samtidig med nivelleringen av midtlinjen, eller de kan nivelleres særskilt. På grunn av at nøyaktighetskravene ved tverrprofilering er mindre enn ved selve linjenivellementet, utføres tverrprofileringen ofte med

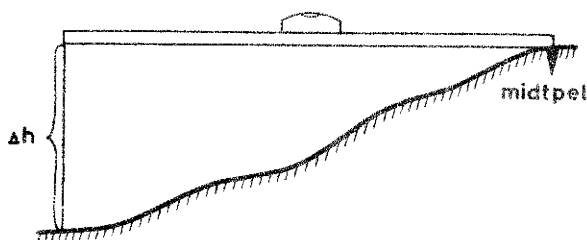


Fig. 116

et simplere instrument. Ved mindre arbeider er det tilstrekkelig å utføre tverrprofileringen ved hjelp av en lekte som det er festet en libelle til (se fig. 116). Lekten må være forsynt med deling for avlesning av avstander fra midtpelen.

Ved tverrprofilering er det som regel bare høydene i forhold til midtpelen som interesserer.

Nedenfor følger et eksempel på skjemaføring ved tverrprofilering :

Venstre side av midtpel				Høyre side av midtpel			
Avstand fra midtpel	Stangavlesning	Høyde i forhold til midtpel	Merknad	Avstand fra midtpel	Stangavlesning	Høyde i forhold til midtpel	Merknad
0 m	0,81	0	<u>Pel nr.12</u>	0 m	0,81	0	
2 "	1,12	-0,31		2,4 "	0,60	+0,21	
4 "	0,45	+0,36	fjell i dagen	3,5 "	0,95	-0,14	
6,5 "	1,50	-0,69	"	5,5 "	1,40	-0,59	
8 "	1,96	-1,15	"	7,5 "	1,84	-1,03	

#### E. De viktigste feilkilder ved nivellering.

De feil som opptrer ved nivellering, er dels av systematisk og dels av tilfeldig karakter. Dessuten forekommer også ensidig virkende feil.

##### a. Systematiske og ensidige virkende feil.

##### a.1. Feil i stangens deling.

Nivellerstangen er ikke noe annet enn et lengdemålingsredskap som brukes til måling av vertikale avstander. Den endelige høydeforskjell fås følgelig uttrykt i de samme enheter som stangen er inndelt i. Avviker stangenheten p o/o fra normalmeteren, vil også den verdi som vi kommer fram til for høydeforskjellen, avvike p o/o fra den korrekte verdi uttrykt i internasjonale meter.

Ved presisjonsnivellelementer er det vanlig å nytte stenger hvor inndelingen befinner seg på et invarbånd som er utspent på stangen ved hjelp av en fjær som besørger konstant strekk. Som bekjent er invarrets varmeutvidelseskoeffisient meget liten, og legeringen reagerer heller ikke på fuktighetsendringer, noe som stenger av tre er utsatt for.

##### a.2. Siktelinjen er ikke parallell med libelleaksen.

Som tidligere vist, influerer ikke denne instrumentfeil på nivellelementsresultatet når det "nivelleres fra midten". Heller ikke får feilen

noen virkning dersom  $\Sigma S_b$  gjøres lik  $\Sigma S_f$ , dvs. dersom summen av siktelen-  
dene for bak- og framsiktene gjøres like stor, uten hensyn til om det ni-  
velleres fra midten eller ikke. For moderate verdier av denne instrument-  
feil er det tilstrekkelig at betingelsen er tilnærmet oppfylt.

Talleksempel :  $\Sigma S_b - \Sigma S_f = 100$  m. Videre forutsettes at vinkelen mellom  
libelleakse og siktelinjer er lik  $100^c$ . Den herav resulterende feil på  
nivelleringsresultatet er gitt ved :

$$\Delta = \frac{100 \ 000 \cdot 100}{636620} = 16 \text{ mm}$$

Jo større vinkelen mellom libelleakse og siktelinje er, desto  
nøyaktigere må ligningen  $\Sigma S_b = \Sigma S_f$  være oppfylt. Ved vanlige tekniske  
nivellementer hvor nøyaktighetskravene er forholdsvis moderate, er det til-  
strekkelig å justere instrumentet og neglisjere ligningen  $\Sigma S_b = \Sigma S_f$ . For-  
dres større nøyaktighet, må det - selv om instrumentet er justert - sørges  
for at  $\Sigma S_b \approx \Sigma S_f$ . Det vil være tilstrekkelig å bestemme  $S_b$  og  $S_f$  ved skrit-  
ting, eller enda bedre ved optisk avstandsmåling. Ved presisjonsnivelle-  
ment nivelleres alltid fra midten.

#### a.3. Jordkrumningen.

Det lar seg vise at virkningen av jordkrumningen er gitt ved :

$$\Delta = \frac{S_b^2 - S_f^2}{2R}$$

hvor  $S_b$  og  $S_f$  er siktelen-  
gden for henholdsvis bak- og framsiktet, mens  $R$   
er jordradien. Dette er feilen ved enkelt instrumentoppstilling. Av for-  
melen ser vi at jordkrumningen ikke får noen innvirkning ved nivellment  
fra midten.

Talleksempel : For  $S_b = 100$  m og  $S_f = 10$  m blir feilen  $\Delta$  lik 0,8 mm.

#### a.4. Den atmosfæriske refraksjon.

Det lar seg vise at virkningen av lysstrålens refraksjonsav-  
bøyning er gitt ved :

$$\Delta = \frac{k}{2R} (S_b^2 - S_f^2)$$

hvor  $k$  er den såkalte refraksjonskoeffisient, hvis middelve-  
rdi dreier seg om 0,13.

Virkningen av den atmosfæriske refraksjon er følgelig bare ca.  
åttendeparten av virkningen av jordkrumningen, dvs. temmelig betydnings-  
løs. Dette gjelder hva vi kan kalle den "normale" refraksjon. Imidlertid  
må vi ved nivellering også regne med anormale stråleavbøyninger fordi sikte-

linjene stryker så tett over terrenget, og erfaringen viser at virkningen av denne anormale refraksjon er langt farligere enn virkningen av førstnevnte.

a.5. Stangen holdes feilaktig.

Det at stangen ikke holdes loddrett, resulterer i en ensidig virkende feil, idet avlesningene alltid vil bli for store. Virkningen av denne feil er gitt ved :

$$\Delta = \frac{a}{2} \delta^2$$

hvor a er stangavlesningen og  $\delta$  stangens avvik fra loddrettstillingen. Skjer loddrettstillingen av stangen på øyemål må vi regne med en usikkerhet på ca.  $2^g$ .

Talleksempel : For a = 2 m og  $\delta = 2^g$

$$\Delta = \frac{2000}{2} \left( \frac{2}{63,66} \right)^2 = 1 \text{ mm}$$

Dersom den nivellerte høydeforskjell er 100 m, vil feilen følgelig utgjøre 5 cm under forutsetning av at  $\delta$  har samme verdi ( $2^g$ ) hele tiden. Dette eksempel viser nødvendigheten av at nivellerstengene utstyres med libeller til loddrettstillingen.

a.6. Feil som følge av at instrument og stang synker under nivelleringen.

Disse feil spiller en betydelig rolle ved nivellering på ustabil grunn. I slike tilfeller må en legge særlig vekt på oppstilling av stang og instrument. Det at stangen synker, kan motvirkes ved bruk av fotplate. Nyttes ikke fotplate, må som stangoppstillingspunkter velges stabile steiner med markert høydebegrensning. (Plane flater bør unngås som stangoppstillingspunkter.)

b. Tilfeldige feil ved nivellering.

De tilfeldige feil ved nivellering er avlesningsfeilen og den feil som skyldes usøyaktig innspilling av libellen.

Avlesningsfeilen avhenger av egenskaper ved kikkerten som forstørrelse og lysstyrke, av ytre forhold som sikteavstanden, stangdelingen, luftens tilstand, belysningen osv. Dessuten viser erfaringen at avlesningsfeilen også avhenger av strekens stilling i stangintervallet. Sikrest bedømmes strekens stilling på midten og i enden av intervallet og usikrest ved fjerdedelspunktene.



Da det er mulig å bringe to streker til koinsidens med langt større nøyaktighet enn det er mulig å bedømme en streks stilling i et intervall, er en på presisjonsinstrumenter gått over til koinsidensprinsippet. Siktelinjen parallellforskyves her til den faller sammen med nærmeste stangstrek, og forskyvelsen leses på det optiske mikrometeret.

Når det gjelder innspillingen av libeller, kan vi regne med en nøyaktighet på ca.  $\frac{1}{10}$  libelledeler for vanlige libeller hvor innspillingen skjer ved å bedømme libelleendenes stilling i forhold til en inndeling, og dobbelt så stor nøyaktighet når innspillingen skjer ved koinsidensbedømmelse. Ved den førstnevnte anordning vil innspillingsfeilen resultere i en feil i siktelinjens horisontalstilling gitt ved :

$$\Delta = 0,1 \cdot A$$

hvor A er libellens vinkelverdi.

\*

Hva nøyaktighetskravene til vanlige tekniske nivellementer angår, må disse avpasses etter formålet. For Jordskifteverkets målinger er fastsatt at differensen mellom fram- og tilbakenivellement ikke må overstige  $d_i \text{ mm} = k\sqrt{L}$ , hvor L er den nivellerte streknings lengde i km og k er en konstant. For de såkalte signalnivellementer, dvs. nivellementer som forbinder et nivellementsfastmerke med et triangelpunkt, gjelder verdien  $k = 15$ , som også er den verdi som nyttes ved NGO for nivellement av 2. orden.

Brukes nivellering til bestemmelse av polygonpunkters eller andre fastmerkens høyde i forbindelse med målinger av områder som allerede er, eller forutsettes å bli underlagt bygningsloven, gjelder verdien  $k = 20$  under gunstige forhold, og  $k = 40$  under ugunstige forhold med kupert terreng og store høydeforskjeller. De sistnevnte feilgrenser gjelder også for kommunale oppmålingsarbeider.

## 2. Barometrisk høydemåling.

Barometrisk høydemåling bygger på det forhold at lufttrykket avtar med voksende høyde over havet.

Er barometerstanden i to punkter 1 og 2 lik  $B_1$  og  $B_2$  og temperaturen lik  $t_1$  og  $t_2$ , kan det vises at høydeforskjellen mellom punktene tilnærmet er lik :

$$\Delta h_{12} = 18400 \cdot \log \frac{B_1}{B_2} (1 + \alpha t) \quad \text{Jsk side 68}$$

$$\text{hvor } \alpha = \frac{1}{273} \text{ og } t = \frac{1}{2} (t_1 + t_2)$$

$$B_1 \text{ og } B_2 = \text{mer barometriske høyder}$$

$$t = \dots$$

$$\Delta h_{12} \approx - \frac{8000}{B} (1 + \alpha t) \Delta B$$

$$\Delta B = B_2 - B_1$$

Til bestemmelse av barometerstanden nyttet en tidligere kvikk-sølvbarometer mens en i dag i det vesentlige nytter aneroidbarometer som ofte er spesielt utformet for høydemåling.

Barometerne tillater vanligvis en registrering av høydeforskjeller på 1 m. Under de aller fleste omstendigheter endres imidlertid lufttrykket både raskt og ujevnt, noe som ofte forårsaker en usikkerhet i høydebestemmelsen på mange ganger 1 meter.

Dersom lufttrykket leses kontinuerlig av på et "standbarometer" i utgangspunktet og en noterer klokkeslett ved hver måling i de aktuelle punkter, kan avlesningene korrigeres.

Lokale endringer i barometerstanden som også ofte forekommer, får en imidlertid ikke korrigert for.

Dersom en ikke har "standbarometer", leser en av barometerstanden i utgangspunktet ved avgang og tilbakekomst. Fås her forskjellige avlesninger, tyder det på at lufttrykket har endret seg mens observasjonsarbeidet har pågått. Differensen i avlesningene fordeles på de enkelte observasjoner proporsjonalt med tiden, og høydeforskjellene regnes ut på grunnlag av de korrigerede barometeravlesninger.

Den sikreste metode for barometrisk høydemåling er den såkalte interpolasjonsmetode. Her utføres barometermålinger i et antall punkter hvor utgangs- og endepunktet har kjente høyder. På grunnlag av den kjente høydeforskjell og differensen mellom barometeravlesningene i utgangs- og endepunktet (punkt 1 og 2) utledes det såkalte barometriske høydegrinn :

$$\Delta h = \frac{H_2 - H_1}{B_2 - B_1} = \frac{\Delta H_{12}}{\Delta B_{12}}$$

For et vilkårlig punkt P med barometeravlesning  $B_p$  er høydeforskjellen i forhold til punkt 1 lik :

$$\Delta h = \frac{\Delta H_{1P}}{\Delta B_{1P}}$$

$$\Delta H_{1P} = \Delta h (B_p - B_1)$$

Her foretas altså en lineær interpolasjon uten hensyn til tid og temperaturendring. Denne fremgangsmåte er kun anvendelig der en opererer med små høydeforskjeller. En tar nedenfor med et eksempel fra en slik beregning.

Stasjon	H	B	$\Delta B$	$\Delta H$	Beregnet H
1	<u>50,2</u>	756,2	-2,2	24,5	<u>50,2</u>
$P_1$		754,0	-2,5	27,8	74,7
$P_2$		751,5	-1,7	18,9	102,5
2	<u>121,4</u>	749,8			<u>121,4</u>
	$\Delta H_{12} = 71,2$	$\Delta B_{12} = -6,4$	-6,4	71,2	
		$\Delta h = -11,13$			

$$\Delta h = \frac{71,2}{-6,4} = -11,13$$

Ved barometermålinger på forholdsvis små områder og ved bruk av de fremgangsmåter som her er nevnt, kan en oppnå en nøyaktighet i høydebestemmelsen på 1 - 2 m.

Nyttes barometeret over større områder hvor en ikke har muligheter for kontroll, kan feilene lett komme opp i atskillig større verdier.

Ved store høydeforskjeller bør de enkelte seksjoner regnes ut ved å nytte den barometriske høydeformel (eller i praksis nyttes tabeller utregnet på grunnlag av denne). Fås her et avvik mellom summen av de beregnede seksjoners høydeforskjeller og den gitte verdi for samme, fordeles dette proporsjonalt med de enkelte høydeforskjeller.

## KAPITTEL VI.

### UTARBEIDELSE OG BRUK AV KARTER m.v.

Når det gjelder utarbeidelse av kart, blir i det etterfølgende i stor utstrekning vist til den rettledning som er utarbeidet og som nyttes i forbindelse med de praktiske øvelser i landmåling ("Rettledning for de praktiske øvelser"). Det samme gjelder også i noen grad bruk av kart, spesielt arealberegning med planimeter.

#### 1. Utarbeidelse av kart.

##### A. Forberedende arbeider.

Vi forutsetter at all koordinatberegning av grunnlags- (fiks-) punktene er utført, og at en skisse over punktenes beliggenhet er utarbeidet ved at punktene er avsatt på millimeterpapir på grunnlag av sine koordinater.

De forberedende arbeider ved utarbeidelse av kart tar til med reduksjon av målebøkene og anskaffelse av kartark.

Reduksjon av målebøkene tar sikte på beregning av horisontale avstander og detaljpunktens høyder. Dette er behandlet detaljert i "Rettledning for de praktiske øvelser", og en viser til denne.

Når det gjelder anskaffelse av kartark, må en først gjøre seg opp en mening om arkets størrelse. Dette gjøres på grunnlag av fikspunktens koordinater sett i sammenheng med den målestokk kartet skal konstrueres i.

Hva slags "kartpapir" som skal nyttes, avhenger i noen grad av hva kartet skal brukes til. Der en ikke krever den største nøyaktighet av kartet, nyttes vanlig godt tegnepapir. Et krympefritt kartmateriale fås

ved å nytte kartark som er klebet på aluminium, eller en kan nytte ulike typer av plastfolier. Av disse kartmaterialer har det sistnevnte den fordel at originalkartet kan nyttes direkte ved lyskopiering.

Nyttes vanlig tegnepapir uten aluminiumsinnlegg, bør det ligge en dag eller to på kontoret før det tas i bruk. Dermed oppnår en at papiret mest mulig har krympet fra seg.

En kan anskaffe kartark hvor rutenettet (10 cm's kvadratiske ruter) er påsatt, men en kan også konstruere rutenettet selv, og en vil i dette tilfelle anbefale å bruke spesielle rutenettsjabloner som i dag finnes på de fleste oppmålingskontorer.

Grunnlagspunktene avsettes så ved sine koordinater (følgelig uavhengig av hverandre) i forhold til rutenettet, og en sørger for å kontrollere avsettingen slik det er omtalt i "Rettledning for de praktiske øvelser".

## B. Konstruksjon av karter.

### a. Konstruksjon av måleresultater ved rettvinkelmetoden.

Først avsettes målelinjene. Dette gjøres enten rent grafisk (ved geometrisk konstruksjon) eller - når målelinjenes skjæringspunkter er koordinatberegnet - ved vanlig avsetting av koordinatbestemte punkter i forhold til rutenettet.

Detaljpunktene avsettes så ved bruk av linjal og vinkelhake eller

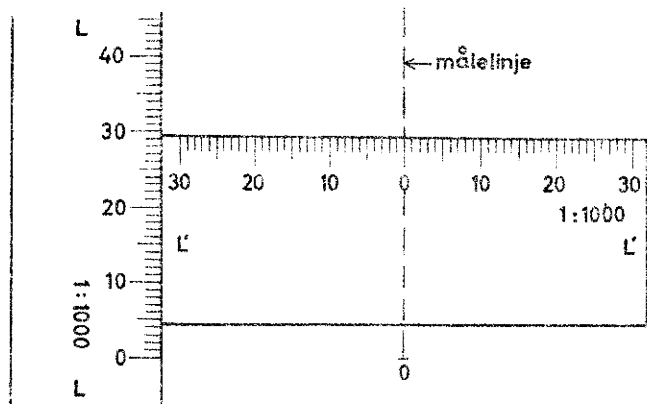


Fig. 117

en kan nytte spesialutstyr som vist i fig. 117. Linjalen L-L er så tung at den ligger i ro under konstruksjonen. Den plasseres parallelt med den aktuelle målelinje, mens linjalen L'-L' under konstruksjonen er vinkelrett på førstnevnte linjal. Bruken av utstyret forøvrig skulle gå fram av figuren.

### b. Konstruksjon av tachymetermålinger.

Konstruksjon av måleresultater opptatt med teodolitt avsettes vanligvis med transportører. En viser i den forbindelse til den detaljerte beskrivelse i "Rettledning for de praktiske øvelser". Her skal kun tilføyes at ved bruk av vanlige transportører bør arbeidet utføres så omhyggelig som mulig for at konstruksjonsnøyaktigheten skal kunne stå i et rimelig forhold til

observasjonsnøyaktigheten. Ved konstruksjon i store kartmålestøkker og der en krever den største nøyaktighet, nyttes spesielle presisjonspolarkoordinatografer.

c. Konstruksjon av høydekurver.

Høydekurvene gis som regel en høyde lik et rundt antall meter og således at deres høyder blir et multiplum av kartets ekvidistanse. For kart i  $M = 1 : 2000$  velges en ekvidistanse på 2 meter, for kart i  $M = 1 : 5000$  velges 5 meters ekvidistanse osv.

Bestemmelse av høydekurver kan som bekjent utføres både ved den direkte og ved den indirekte metode. Ved førstnevnte metode oppsøkes og bestemmes høydekurvene i marka. Ved konstruksjon av kartet avsettes direkte de punkter som bestemmer høydekurvene. Ved den indirekte metode bestemmes høydene til et antall terrengpunkter som avsettes på kartet på vanlig måte. Punktene høyder noteres svakt med blyant på kartet og punkter i høydekurvene bestemmes så ved lineær interpolasjon.

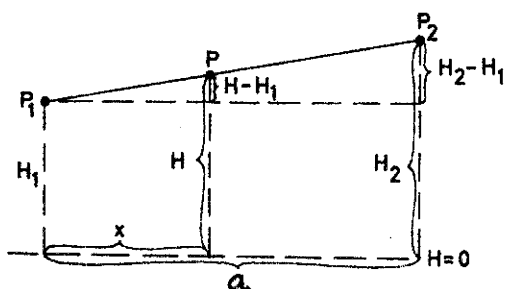


Fig. 118

I fig. 118 betrakter vi to terrengpunkter  $P_1$  og  $P_2$  med høydene  $H_1$  og  $H_2$  ( $H_2 > H_1$ ). Oppgaven går så ut på å oppsøke et punkt  $P$  med høyden  $H$ , hvor  $H_1 < H < H_2$ . Vi forutsetter at terrenget mellom  $P_1$  og  $P_2$  har jevn helning og at punktene er avsatt på kartet slik at avstanden mellom dem ( $a$ ) kan tas ut av

kartet. Av fig. 118 ser vi da :

$$\frac{x}{a} = \frac{H - H_1}{H_2 - H_1}$$

dvs.

$$x = \frac{a}{H_2 - H_1} (H - H_1)$$

Bestemmelsen av  $x$  kan enten utføres grafisk eller numerisk ved

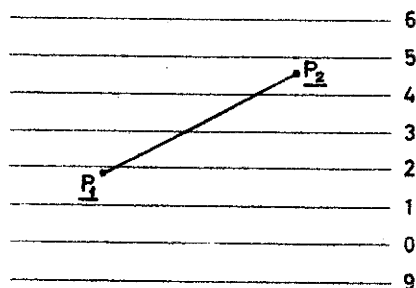


Fig. 119

bruk av regnestav. Den numeriske beregning er som regel å anbefale. Hentas derfor med bare én av de mange grafiske framgangsmåter. På et gjennom-siktig papir trekkes opp et system av parallelle, ekvidistante linjer som plasseres over de gitte høydepunkter som vist i fig. 119.  $P_2$  har her høyden 84,6 m og  $P_1$  81,9 m. Beliggenheten

av punkter på 82-, 83- og 84 m- kurvene fås så som skjæringspunkter mellom linjen  $P_1P_2$  og de parallelle linjer. Disse kurvepunkter stikkes på kartet.

Etter at en har interpolert mellom de avsatte høydepunkter, fås så høydekurvene ved at en forbinder punkter med samme høyde med hverandre. Dette gjøres i første omgang med blyant, og en forsøker å gi kurvene et jevnt forløp uten skarpe overganger fra en retning til en annen. Under konstruksjonen må man stadig sammenligne kartet med måleskissene og ha for øyet at kurvene kan oppfattes som vannstandslinjer og kan derfor verken skjære hverandre eller forgrene seg.

Betingelsen for å komme fram til brukbare resultater ved interpolasjonsmetoden er at antall høydepunkter er tilstrekkelig stort og at de er lagt til terrengoverflatens "knekkpunkter".

Dersom kartet skal nyttes til tekniske planleggingsarbeider der en nøyaktig fastlegging av terrengets høydeforhold er av stor betydning, f.eks. ved kanalisering og grøfting, bør det være en ufravikelig regel at de konstruerte høydekurver sammenlignes med terrenget. Først etter at dette er gjort og eventuelle korreksjoner er utført, foretas den endelige rentegning i tusj f.eks.

### C. Karttegning. Kartets utstyr og innhold.

Kartet danner i dag grunnlaget for de fleste større planleggingsarbeider og det bør derfor være målt, konstruert og tegnet slik at en kartkyndig mann skal kunne "lese" kartet inne på kontoret og utføre en stor del av planleggingen der. For at dette skal være mulig, må selve målingen skje fagmessig, og karttegningen må være utført oversiktlig og etter visse og alminnelig godkjente normer.

Når det gjelder tegning av karter og kartets utstyr og innhold, utfører vi dette i overensstemmelse med Norsk Standard nr. 740 - 741. En viser ellers til "Rettledning for de praktiske øvelser" der en bl.a. har behandlet kartskrift, opptrekning i tusj, strektykkelse og bruk av konvensjonelle tegn.

Fargelegging er et viktig hjelpemiddel for å få en god oversikt over fordelingene av de forskjellige markslag på kartet. Dersom en vil ha enkelte ting fremhevet, f.eks. veger og vann, nøyer en seg ofte med bare å fargelegge disse, vegene brune og vannet blått.

Vanligvis greier en seg med vannfarger, men disse må ikke legges på før en eventuell kopiering. Det finnes forøvrig spesielle kartfarger som bare sjenerer kopieringen ubetydelig.

De forskjellige farger for hage, dyrket mark, beite, skog, vann, fjell, forskjellig bebyggelse osv. står angitt i Norsk Standard. En bør bestandig bruke svake farger.

Karttegningen krever tålmodighet og det skal stor øvelse til for å bli en flink karttegner. For nybegynnere vil som regel skriften falle vanskeligst, men denne er i høy grad en rutinesak og med litt øvelse kan for alles vedkommende resultatet bli fullt brukbart.

Karttegningen blir mest vellykket ved en gjennomført enkelhet i tittel og utstyr. Holder en seg videre til de normer som oppgis for strektykkelse og påskrift og unngår at enkelte konvensjonelle tegn dominerer, er det mulig å få et pent og fremfor alt oversiktlig kart, vel egnet til de forskjellige anvendelser.

#### D. Reproduksjon (kopiering) av karter.

Vi skal her ikke behandle problemer i forbindelse med reproduksjon av karter som gis ut i store opplag, f.eks. de fremgangsmåter som nyttes ved utgivelsen av våre topografiske karter.

For de fleste formål (tekniske og administrative) fremstilles som regel kartkopier ved lyskopiering. Dersom originalkartet da er konstruert på et materiale som ikke er gjennomlysbart, må en overføring til et slikt materiale foretas. Dette kan gjøres manuelt ved å utføre en såkalt tracing på kalkerpapir eller kalkerlerret, eller enda bedre ved overføring til et mer målholdig materiale. Mer rasjonelt er det å utføre denne overføring fotografisk. Av den ugjennomsiktige kartoriginal tas en såkalt reflekskopi på en målholdig filmtransparent som så kan lyskopieres. Med denne metode unngår en den unøyaktighet og de feil som lett fås ved tracing, og tracingen er dessuten ganske arbeidskrevende.

Konstrueres originalkartet direkte på et gjennomlysbart materiale, f.eks. en eller annen type av plastfolie, kan denne nyttes direkte ved lyskopiering. Ved kopiering på de vanlige lyskopieringsmaskiner hvor "kopieringsoriginalen" føres på ruller gjennom maskinen, kan det bli nødvendig å overføre plastoriginalen og den tidligere omtalte reflekskopi til en papirtransparent som nyttes ved selve kopieringen.

Av andre metoder som kan komme på tale ved kopiering av karter, kan nevnes fotokopiering (tas først en negativ og deretter en positiv kopi), gjennomstikking og bruk av lysbord. De to siste metoder kan kun komme på tale når en bare har bruk for et meget begrenset antall kopier.

#### E. Målestøkkendring (forminskning og forstørning av karter.

Den nøyaktigste metode for målestøkkendring av karter er den fotografiske metode. Denne nyttes også i utstrakt grad i reproduksjonsteknikken.

Metoden kan imidlertid ha den ulempe at ved en sterk forminskning av originalkartet vil den forminskede kartkopi bli uoversiktlig og uegnet til direkte bruk på grunn av for mange detaljer pr. flateenhet.

Utføres målestokkendringen manuelt ved en såkalt pantograf, kan en

ta med de detaljer som er ønskelig.

Pantografen (se fig. 12o) består av fire inndelte linjaler som danner et parallelogram og er forbundet med bevegelige ledd. Føres stiften F langs omkretsen av en figur, vil en stift anbrakt i S beskrive en figur likdannet med den første. Likedannethetsforholdet vil være lik :

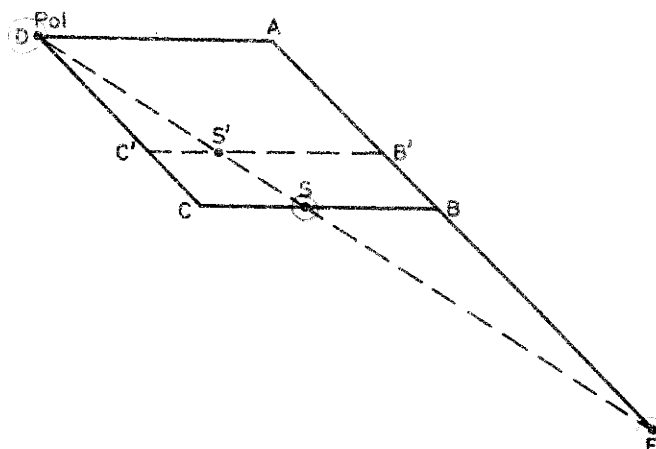


Fig. 12o

$$\frac{DS}{DF} = \frac{DC}{AF} = \frac{CS}{AD} = \frac{SB}{DA}$$

Dette forhold er konstant for en bestemt innstilling av linjalene og stiften S. Her fås altså en forminskning. Føres stiften i S rundt originalfiguren, vil stiften i F tegne en forstørret, likdannet gjengivelse av originalfiguren.

Likedannethetsforholdet endres ved å forflytte linjalen og stiften S slik som vist i figur 12o (C, B og S forflyttes til henholdsvis C', B' og S'). Linjalen har millimeterinndeling, men dessuten er likedannethetsforholdet angitt for de forskjellige stillinger av linjal og stift. En bør bestandig kontrollere at D, S og F ligger på en rett linje.

Pantografen er best skikket til forminskning. Dersom det imidlertid er mulig å anbringe polen i S og stiften i D, blir apparatet bedre egnet ved forstørning, og dessuten kan den da også nyttes til kopiering i samme målestokk.

## 2. Bruk (utnyttelse) av karter.

### A. Arealberegning.

Vi skal her behandle arealberegning direkte på kart, arealberegning ved kombinert bruk av kart og mål opptatt i terrenget og endelig arealberegning på grunnlag av mål tatt i marka. Av disse henholdsvis grafiske, halvgrafiske og numeriske metodene, hører egentlig ikke den siste inn under dette hovedavsnitt (Bruk av karter), men en har likevel valgt å behandle det her for å få en samlet fremstilling av hele arealberegningen.



Ved arealberegning på kart bør en eventuell kartkrympning tas i betraktning. Før vi behandler selve arealberegningen, skal vi derfor drøfte kartkrympningens innvirkning på arealet.

a. Kartkrympning.

Vanlig tegnepapir er hygroskopisk, dvs. det er utsatt for krympning (eller utvidelse) når fuktighetsforholdene endres.

Bestemmes en linje på kartet til å være lik  $l$ , mens den korrekte verdi er  $L$ , defineres krympningen som  $\frac{L - l}{l}$ , og den tilhørende krympningsprosent blir

$$p = \frac{L - l}{l} \cdot 100$$

dvs.

$$L = l + \frac{p}{100} l = l \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Vi skal så undersøke kartkrympningens innvirkning på arealbestemelsen og velger et rektangel hvis sider måles på kartet til  $g$  og  $h$ , mens de tilhørende krympningsprosenten forutsettes å være  $p$  og  $q$ .

På grunnlag av målene tatt på kartet, bestemmes rektanglets areal til å være

$$A' = gh$$

mens arealet skal være

$$A = g\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot h\left(1 + \frac{q}{100}\right) = gh\left(1 + \frac{p+q}{100} + \frac{p \cdot q}{100^2}\right)$$

Siste ledd i parantesen er så lite i forhold til de øvrige ledd at det kan settes ut av betraktning, og en får da

$$A = gh\left(1 + \frac{p+q}{100}\right)$$

dvs.

$$A = A' + \frac{p+q}{100} \cdot A'$$

Arealer beregnet på et kart med krympningsprosenten  $p$  og  $q$ , må altså gis et tillegg på  $(p + q) \%$ .

Her refererer altså  $p$  og  $q$  seg til rektanglets sideretninger. Nå er imidlertid forholdet det at summen av krympningsprosenten overalt på kartet har samme verdi for samtlige retninger som står vinkelrett på hverandre. Det vil derfor være likegyldig hvilke to retninger en velger å bestemme krympningsprosenten for (forutsatt at retningene danner en rett vinkel).

Krympningsprosentene kan bestemmes ved å sammenligne en linje målt på kartet med den tilsvarende linje målt i terrenget. Er kartet konstruert på grunnlag av et avsatt rutenett, bestemmes krympningen ved hjelp av rutenettet i rutenettets to hovedretninger. En avstand skal her være et multiplum av

10 cm, og er det et avvik fra dette, har kartet krympet siden rutenettet ble avsatt. For å kunne bestemme krympningen nøyaktig må en ha en korrekt linjal og nytte så store avstander som mulig.

b. Arealberegning på grunnlag av kart.

Arealberegning på grunnlag av kart vil en i dag vanligvis utføre ved hjelp av planimeter. Dersom en ikke skulle ha et planimeter til disposisjon og der det bare er meget begrensede (små) områder på kartet som skal arealberegnes, kan andre metoder komme på tale. Vi skal derfor foruten planimetermåling kort omtale to andre metoder.

b.1. Arealberegning på grunnlag av mål tatt på kartet.

Arealberegning på grunnlag av mål tatt på kartet må foregå på den måten at den aktuelle figur inndeles i tre- og firkanter og de måletall som er nødvendig for arealbestemmelsen av enkeltfigurene tas ut av kartet. Arealet av en trekant bestemmes ved grunnlinje og høyde. Kontroll fås ved å nytte forskjellige sett grunnlinjer og høyder. En firkant arealbestemmes dobbelt ved å

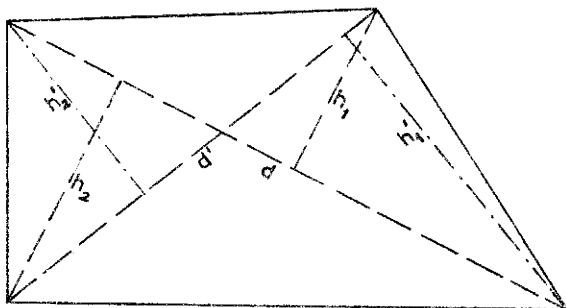


Fig. 121

måle begge diagonaler og høydene på samme (se fig. 121). En får da to bestemmelse lik

$$A = \frac{1}{2}d \cdot (h_1 + h_2)$$

$$A' = \frac{1}{2}d' \cdot (h_1' + h_2')$$

Som endelig verdi nyttes middel-tallet forutsatt at overensstemmelsen er tilstrekkelig god og at begge bestemmelsene kan anses like-

verdige.

Den nøyaktigste bestemmelse av trekanters areal oppnås når grunnlinje og høyde er om lag like store.

b.2. Arealberegning ved "skritting" og rutetelling.

Dersom en skal bestemme et område av uregelmessig form, fås i tillegg til de foran nevnte tre- og firkanter, en del mindre figurer av uregelmessig form som så bestemmes enten ved rutetelling eller "skritting". Ved rutetelling plasseres et gjennomsiktig rute-papir over den aktuelle kartfigur. Hver rute representerer et bestemt areal, og ved optelling av hele ruter (og jugering av brøkdeler av ruter i figurens ytterkanter) kommer en fram til arealet.

Ved "skritting" nyttes et gjennomsiktig papir med parallelle lin-

jer med konstant avstand. Når dette papiret plasseres over en kartfigur, blir den oppdelt i smale strimler, som kan betraktes som trapeser med konstant høyde  $h$  (se fig. 122). Vi måler ("skritter") og summerer fortløpende med passeren trapesens "middelsider"  $s_1, s_2, \dots$ .

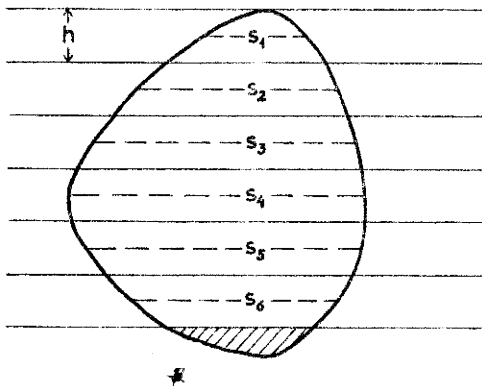


Fig. 122

Totalarealet fås så ved å multiplisere summen av middelsidene med den konstante høyde  $h$ . Totalarealet er nemlig lik

$$A = hs_1 + hs_2 + \dots = h \sum s$$

Et lite arealelement som det skraverte i fig. 122, forsøker en å unngå ved å dreie på "linjepapiret". Skulle dette likevel ikke lykkes, bedømmes størrelsen av det ved øyemål.

Også ved skritting utføres to beregninger. Ved annen gangs beregning dreies papiret til en annen stilling i forhold til figuren.

Denne metoden anvendes meget for arealbestemmelse av tverrprofiler i forbindelse med masseberegning og ved arealberegning av små figurer med stor omkrets i forhold til arealet. Metoden er rask, nøyaktigheten er ikke særlig stor, men nøyaktig nok for mange formål.

b.3. Arealberegning ved bruk av planimeter.

Arealberegning på kart ved bruk av planimeter er den metode som anvendes mest i praksis. Metoden er rask og en er på det nærmeste uavhengig av kartfigurens form. Planimeteret er omtalt i Instrumentlæren. Når det gjelder den praktiske bruk av det, viser en til "Rettledning for de praktiske øvelser".

c. Arealberegning ved den halvgrafiske metode.

Den halvgrafiske metode bygger på det forhold at ved arealbestemmelsen av figurer med stor forskjell mellom lengde og bredde ( $l > b$ ), vil nøyaktigheten av arealbestemmelsen i første rekke være avhengig av den minste faktors nøyaktighet. En feil ( $f_b$ ) i bestemmelsen av  $b$  fører til en stor feil i

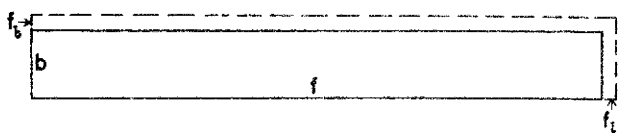


Fig. 123

arealbestemmelsen. En like stor feil ( $f_l$ ) i bestemmelsen av  $l$  har en betydelig mindre innflytelse på figurens areal. Dette går direkte fram av fig. 123.

Den minste faktor må altså bestemmes med størst mulig nøyaktighet. Ved den halvgrafiske metode gjøres dette på den måten at den minste faktor (f.eks. bredden av en veg) bestemmes ved direkte måling i marka, mens den største faktor (lengden av vegen) tas grafisk ut av kartet.

d. Arealberegning på grunnlag av mål tatt i marka.

Et kart er alltid et mer eller mindre sterkt forminsket bilde av et terrengområde. En arealbestemmelse som utføres på et kart vil derfor aldri kunne bli så nøyaktig som en arealbestemmelse som skjer direkte på grunnlag av de mål som er tatt i marka. Denne siste fremgangsmåte nyttes derfor særlig hvor grunnen har høy verdi, f.eks. i byer og bymessig bebygde strøk og for små parseller (tomter).

Har oppmålingen skjedd ved linjetriangulering og bruk av perpendikulærmetoden, vil arealberegningen kunne utføres ved først å beregne arealet av en kjernefigur som består av en rekke trekanter, og i tillegg hertil kommer beregning av en rekke mindre trekanter og trapeser.

Er trekantenes sider målt, bestemmes hver trekants areal enklest ved Herons formel

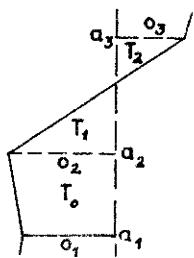


Fig. 124

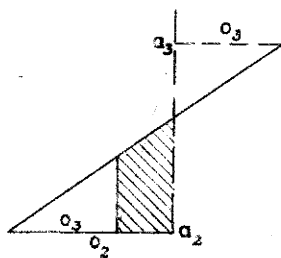


Fig. 125

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

hvor a, b og c er de kjente trekantsider, mens

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c).$$

Er den stiplede linjen i fig. 124 en målelinje og arealet til høyre for denne hører

til den arealbestemte kjernefigur, bestemmes "restarealet" som

$$A' = T_0 + T_1 - T_2 + \dots$$

( $T_1 - T_2$ ) er som en ser av fig. 125 lik det skraverte trapes i fig. 125 hvor summen av de to parallelle sider er lik ( $a_3 - a_2$ ) og avstanden mellom siden er lik ( $o_2 - o_3$ ),

dvs. 
$$A' = \frac{1}{2}(c_1 + o_2)(a_2 - a_1) + \frac{1}{2}(a_3 - a_2)(o_2 - o_3) + \dots$$

Dersom knekkpunktene i eiendomsgrensene er koordinatbestemt, kan en ved hjelp av koordinatene direkte bestemme tomtenes eller eiendommens areal.

Det kan vises at arealet er lik

$$A = -\frac{1}{2} \sum_1^n y_i(x_{i+1} - x_{i-1}) = \frac{1}{2} \sum_1^n x_i(y_{i+1} - y_{i-1})$$

hvor i gjennomløper hjørnepunktene nummer fra 1 til n.

Kontroll på beregningen fås ved å utføre den etter begge de uttrykk som er angitt ovenfor.

Formlene er almenlydige når figurens knekkpunkter blir nummerert i positiv omløpsretning, dvs. med urviseren.

B. Grenseregulering, avsetting av arealer m.v.

a. Grenseregulering.

a.1. Ensartet grunnverdi.

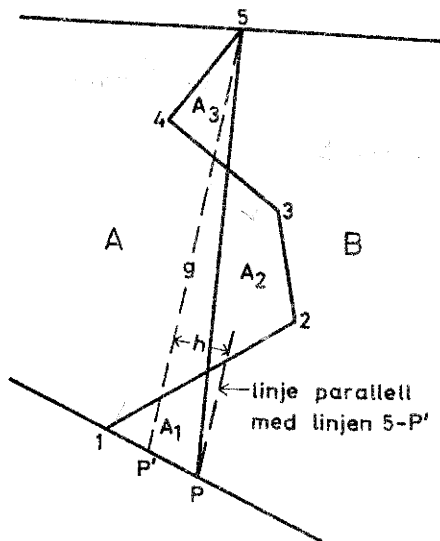


Fig. 126

Grenselinjen 1 - 2 - 3 - 4 - 5 mellom eiendommene A og B i figur 126 skal erstattes av en rett linje som går gjennom punkt 5. Eiendommens arealer skal forbli uendret.

Foreligger det et tilstrekkelig nøyaktig kart over grenseområdet, trekkes skjønsmessig en rett linje 5 - P', og i forhold til denne beregner vi hva A (eller B) avgir og mottar. Er differensen f.eks. lik F, betyr det at linjen må dreies om punkt 5 så mye at (se fig. 126):

$$F = \frac{1}{2} gh$$

dvs.

$$h = \frac{2F}{g}$$

Vi har her forutsatt at A får mer enn han avgir. Parallell med linjen 5P' trekkes en linje i en avstand h og det korrekte endepunkt P for den nye grenselinje fremkommer som skjæringspunktet mellom sistnevnte linje og den grenselinje gjennom punkt 1 som ikke er felles for A og B.

Foreligger det ikke kart over det aktuelle området, stikkes først skjønsmessig en provisorisk grenselinje 5P'. Denne benyttes som målelinje for innlegging av grensepunktene etter perpendikulærmotoden. Ved hjelp av måletallene foretas så den samme beregning som ovenfor.

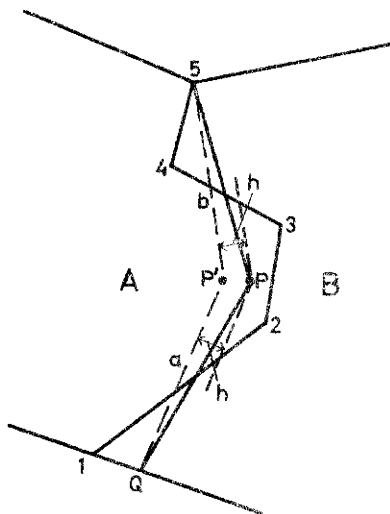


Fig. 127

Uansett hvilken av de to nevnte framgangsmåter som nyttes, kontrolleres til slutt om A avgir og mottar like mye i forhold til den endelige grenselinje.

Skal grenselinjen 1 - 2 - 3 - 4 - 5 erstattes av en linje 5 - P - Q (se fig. 127) med bryningspunkt i P og begynnelses- og endepunkt i 5 og Q, får vi på lignende måte at

$$h = \frac{2F}{a + b}$$

a.2. Uensartet grunnverdi.

Når grunnverdien er uensartet (forskjellige boniteter), skal en ved grensereguleringen opprettholde grunnverdien og ikke arealene.

Frångangsmåten blir stort sett den samme som ved ensartet grunn-

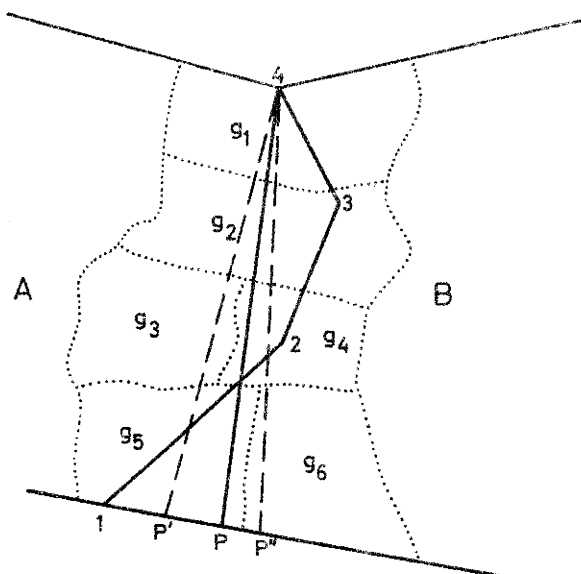


Fig. 128

verdi. En trekker først opp en provisorisk grenselinje (4 - P' i fig. 128) og i forhold til denne beregnes hva A (eller B) mottar og avgir. Avgir han et areal  $F = f_1 + f_2 + \dots$ , som består av deler av bonitetsfiguren med grunnverdi  $g_1, g_2, \dots$ , er den grunnverdi han avstår, gitt ved

$$V_a = f_1 \cdot g_1 + f_2 \cdot g_2 + \dots = \Sigma fg$$

Settes den verdi han mottar lik

$$V_m = f'_1 \cdot g_1 + f'_2 \cdot g_2 + \dots = \Sigma f'g$$

vil differensen  $V = V_a - V_m$  fortelle oss om han mottar for mye eller for lite. Er V negativ, har han mottatt for mye. Grenselinjen dreies så forsøksvis til stilling 4 - P'' og samme beregning foretas på nytt, nå i forhold til linje 4 - P''. Vi velger P'' så langt til høyre at  $V = V_a - V_m$  får motsatt fortegn, og det korrekte endepunkt for den nye grenselinje P finnes ved interpolasjon. Deretter foretas en beregning i forhold til den nye linjen 4 - P for å få kontroll på om  $V_a = V_m$ .

Dersom vi ved første beregning (i forhold til linjen 4 - P') finner at

$$V_1 = V_a - V_m = - 1000 \text{ verdienheter}$$

og ved annen beregning (i forhold til linjen 4 - P'') fås

$$V_2 = V'_a - V'_m = + 200 \text{ verdienheter}$$

bestemmes P'P ved

$$\frac{P'P}{1000} = \frac{P'P''}{1200}$$

Er P'P'' målt til 50 m, er avstanden P'P gitt ved

$$P'P = \frac{50 \cdot 1000}{1200} = \underline{41,7 \text{ m}}$$

b. Avsetting av arealer.

Vi vil nøye oss med å behandle det tilfelle at kun den ene begrensningsslinje er variabel og at dens retning er gitt. Her trekker vi også opp

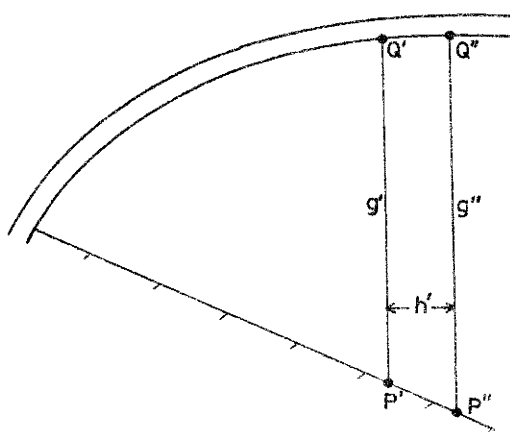


Fig. 129

læll med P'Q' og i en avstand h' og måler lengden av P''Q'' lik g''. Dermed fås en riktigere verdi av h gitt ved

$$h = \frac{F}{\frac{1}{2}(g' + g'')}$$

Kontroll på det hele fås ved en ny arealberegning av det avsatte areal.

Ved grenseregulering og avsetting av arealer nyttes som en ser, alltid følgende fremgangsmåte : 1) foreløpig arealberegning, 2) beregning av endringen av den provisoriske grenselinje og 3) endelig arealberegning.

### C. Litt om utstikkingsarbeider.

Med utstikking menes i denne forbindelse overføring av visse data (planer) fra kartet til terrenget. Det bør bare rent unntakelsesvis forekomme at en slik utstikking foretas ut fra andre punkter enn koordinatbestemte fikspunkter (trigonometriske punkter).

Vi skal her ikke behandle problemer i forbindelse med veg- kraftlinje- og tunnelstikking. Kurvestikking vil bli behandlet i forbindelse med andre fag og tas derfor ikke med her.

#### a. Utsikking av enkle punkter.

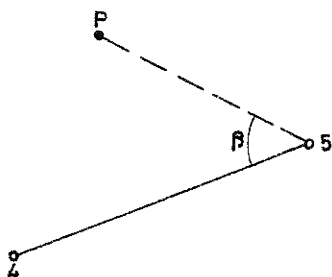


Fig. 130

etter beste skjønn, eller etter tilnærmet beregning, en foreløpig grenselinje (P'Q' i fig. 129) og parsellen areal beregnes. La oss anta at dette areal er F arealenheter for lite, dvs. at linjen P'Q' må parallellforskyves til høyre.

Dette utføres i to trinn. Vi setter først

$$F \approx g' \cdot h' \quad (g' \text{ er lengden av } P'Q')$$

$$\text{dvs. } h' \approx \frac{F}{g'}$$

og trekker opp linjen P''Q'' parallel

Punktene 4 og 5 i fig. 130 forutsetter å være polygonpunkter med kjente koordinater.

Tømtehjørnet P skal avsettes i forhold til polygonpunkt 5. Dette kan gjøres på følgende måte :

1. Koordinatene til P bestemmes i forhold til kartets rutenett.

2. Retningsvinkelen  $\varphi_{5p}$  og avstanden  $S_{5p}$  beregnes på grunnlag av de to punkters koordinater.
3. Utstikking foretas ved hjelp av teodolitt, (og består i avsetting av vinkelen  $\beta = \varphi_{5p} - \varphi_{54}$  og avstanden  $S_{5p}$ ).

En kontroll på grove måle- og beregningsfeil fås ved å ta ut stikkingsdataene ved hjelp av en vanlig transportør. Nyttets presisjonspolarkoordinatograf, kan stikkingsdataene for mange formål tas ut grafisk direkte av kartet.

b. Utstikking av rette linjer.

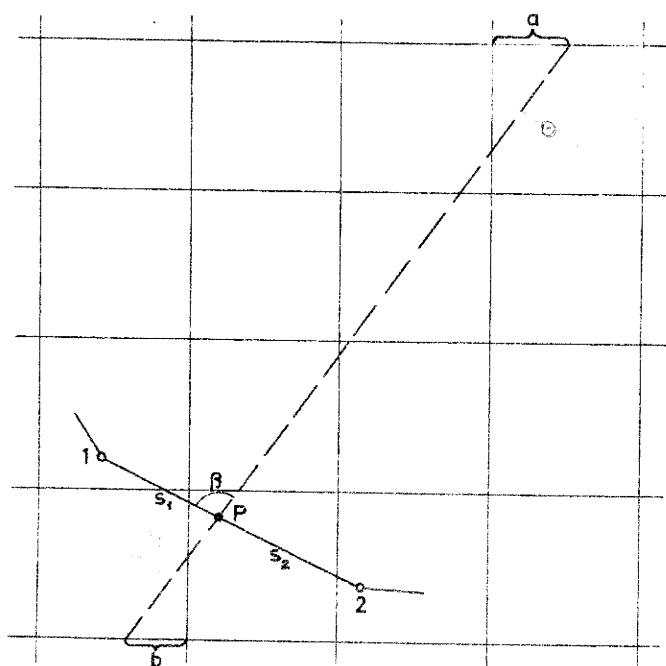


Fig. 131

På grunnlag av de korrigerede verdier for  $s_1$  og  $s_2$  stikkes P ut i marka. Med teodolitt avsettes så vinkelen  $\beta = \varphi - \varphi_{21}$  i P hvorved linjens retning blir fastlagt.

En grov kontroll på beregningen av  $\beta$  fås også her ved hjelp av en transportør. Kontroll på hele utstikkingen fås kun når en under stikkingsarbeidet, fortrinnsvis ved linjens endepunkter, kan få tilknytning til andre trigonometriske punkter. Slik kontroll må en alltid forsøke å skaffe seg.

D. Annen anvendelse av karter.

Ved de aller fleste tekniske og ved mange administrative planleggingsarbeider er i dag kurvelagte kart til stor hjelp. Vi skal - uten krav på fullstendighet - behandle noen av disse anvendelsesområder.

I fig. 131 er den stiplede linje en grenselinje som skal utstikkes. Den skjærer polygonsiden 1 - 2. Oppgaven kan løses på følgende måte :

1. Av linjens skjæring med kartets rutenett kan dens retningsvinkel  $\varphi$  bestemmes. (I fig 131 er  $\text{tg } \varphi = \frac{200 + (a + b)}{400}$  ).
2. På kartet måles avstanden  $s_1$  og  $s_2$ , og en eventuell uoverensstemmelse mellom  $(s_1 + s_2)$  og avstanden  $s_{12}$  utledet av koordinatene fordeles på  $s_1$  og  $s_2$  proporsjonalt med deres lengder.
3. På grunnlag av de korrigerede verdier for  $s_1$  og  $s_2$  stikkes P ut i marka. Med teodolitt avsettes så vinkelen  $\beta = \varphi - \varphi_{21}$  i P hvorved linjens retning blir fastlagt.



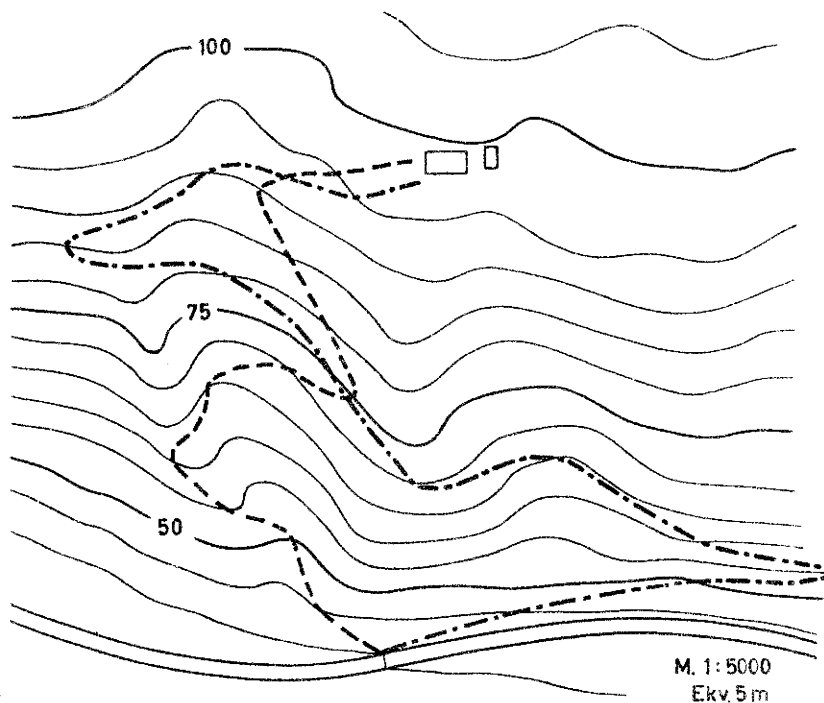


Fig. 132

Kartene kan nyttes ved planlegging (valg av trasé) av vegger. Er terrenget brattere enn vegens tillatte maksimumsstigning ( $1 : n$ ), kan avstanden  $d$  mellom vegens skjæringspunkter med to påfølgende høydekurver bestemmes av forholdet

$$\frac{e}{d} = \frac{1}{n}$$

hvor  $e$  er ekvidistansen, dvs.  $d = n \cdot e$ .

Er f.eks.  $e$  lik 5 m og  $n$  lik 10 får en  $d = 50$  m. En tar så 50 m i passeren (i kartets målestokk) og

prøver de ulike alternativer. For  $n = 20$ , fås  $d = 100$  m. Fig. 132 viser en trasé med  $n \approx 10$  (stiplet linje) og en trasé med  $n \approx 20$  (strek-prikket linje).

Det er også mulig å gi en grafisk fremstilling av en linjes lengdeprofil på grunnlag av kart, noe som muliggjør f.eks. en (som regel foreløpig) masseberegning i tilknytning til vegens videre prosjektering, hvor det gjelder å skaffe en viss balanse mellom fyllings- og skjæringsmasser.

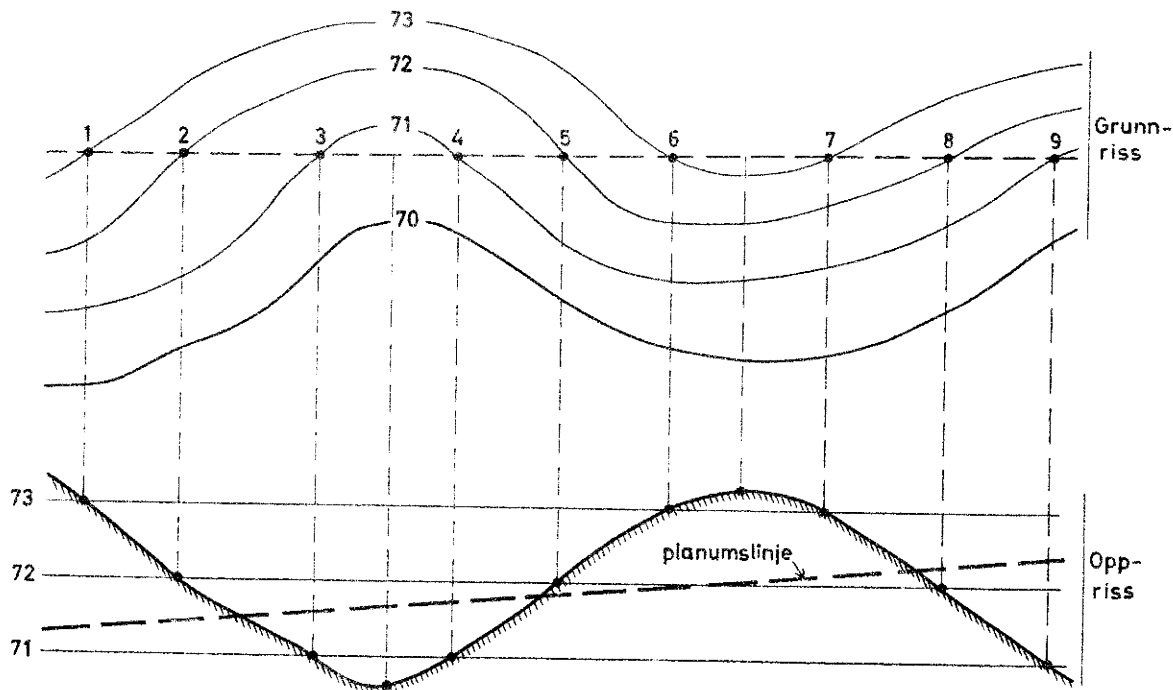


Fig. 133

I fig. 133 (øvre del) er den stiplede linje en planlagt veg på et kart. Det tilhørende terrengprofil er fremstilt i figurens nedre del. Her har en også lagt inn vegens planumslinje under mest mulig hensyntagen til massebalansen. Av figuren ser vi at den prosjekterte planumslinje ligger 1,7 m under pkt. 1 og 0,6 m under pkt. 2, 0,6 m over pkt. 3 osv. (For nøyaktig planlegging må også tverrprofilene tas i betraktning.)

Kurvlagte karter kan også nyttes for planlegging av traséer for kraft-, telefon- og telegrafledninger, vannverksprosjekteringer og planlegging av kraftanlegg, og i den forbindelse bestemmelse av nedslagsfelter. Videre kan kartene nyttes ved planlegging av vann- og kloakkledninger, utarbeidelse av reguleringsplaner osv. Dessuten kan nevnes et utall av anvendelser innen jord- og skogbruk, som jordregister, utarbeidelse av driftsplaner, skogtaksasjon, jordskifteplaner, skjønnsforretninger osv. Kartene nyttes også til rene administrative formål og karter i små målestokker (topografiske karter) nyttes ved oversiktsplanlegging (geologiske undersøkelser f.eks.) og spiller en stor rolle i turistnæringen.

### 3. Litt om norske karter.

#### A. Karter utgitt av Norges geografiske oppmåling.

Norges geografiske oppmåling (NGO) tar ved sin kartlegging sikte på å dekke hele landet med topografiske karter.

NGO ble opprettet i 1773, først for å dekke rene militære behov, men senere er de sivile behov blitt stadig mer dominerende.

Siden NGO tok til med sin virksomhet, har flere ulike kartserier vært påbegynt. NGO's forholdsvis små bevilgninger, vår korte målesesong og vanskelige terrengforhold har imidlertid ført til at ingen av disse kartseriene er blitt fullført. Arbeidet med de enkelte kartserier tok så lang tid at før en serie var ferdig, hadde utviklingen og kravene til kartets nøyaktighet, utstyr og innhold endret seg så mye at en fant det mest rasjonelt å ta til med en helt ny serie.

Av de karter som utgis av NGO og som fortsatt er i bruk, kan nevnes:

a. Amtskartene (eller fylkeskartene) i  $M = 1/200000$  ble utgitt i tidsrommet 1845 - 1917 og er av meget forskjellig kvalitet.

b. Rektangelkartene i  $M = 1/100000$  ble utgitt i tidsrommet 1867 - 1909 og dekker Trøndelag, Sørlandskysten og en del av Østlandet. Alle kartblad er rektangulære og dekker et område på 4 x 3 gamle norske mil.

\* c. Gradteigskartene i  $M = 1/100000$  er avgrenset av meridianer og paralleller, og hvert kartblad dekker et område på  $1/3$  breddegrad x 1 lengdegrad og ble besluttet utgitt samtidig med raktangelkartene. Gradteigskartene utgis fremdeles og dekker i dag store deler av Nord-Norge (nord for  $65^\circ$ ) og den vestlige del av Sør-Norge.

d. Landgeneralkartene i  $M = 1/250000$  ble påbegynt i 1916. Det er et kart i hele ni farger og gir et meget tiltalende inntrykk. Landgeneralkartene dekker Nordland, Nord-Trøndelag, østlige deler av Sør-Trøndelag og østlige deler av Sør-Norge.

e. Ekserserplass- og omegnskart i  $M = 1/25000$  finnes over områder av spesiell militær betydning og for traktene omkring våre større byer.

f. Nytt topografisk kart i  $M = 1/50000$  utgis i dag av NGO i samarbeid med NATO. Nye metoder (fotogrammetri og elektronisk avstandsmåling ved de geodetiske arbeider) gir håp om at denne kartserie kan bli fullført etter de oppsatte planer, dvs. omkring 1980.

En bør også her nevne at NGO er behjelpelig med de grunnleggende arbeider ved kartlegging i større målestokker, ~~kartene som utgis~~ <sup>som utføres</sup> av andre institusjoner ~~og som kort skal behandles nedenfor~~.  
(de viktigste av disse omtales nedenfor).

<sup>3.2.</sup>  
Karter som utgis av andre institusjoner.

Utenom NGO, men i mer eller mindre nært samarbeid med denne institusjon, gis det i dag ut en masse karter i  $M = 1/10000$  og større.

\*\* Disse kartene gis ut av bl.a. kommuner eller sammenslutninger av flere kommuner (interkommunale sammenslutninger) og i det siste også på ren fylkesbasis. Ved kartleggingen på fylkesbasis - som regel i  $M = 1/5000$  - er det et nært samarbeid mellom fylkene ved de såkalte kartnemnder, NGO og Jordskifteverket. Kartene konstrueres som regel av private firmaer.

Jordskifteverket kartlegger hvert år betydelige arealer, som regel i  $M = 1/5000$  for utmark og  $M = 1/2000$  for innmark. En del kartlegging (konstruksjon) settes også her bort til private firmaer.

Av andre institusjoner som driver kartlegging, delvis ~~og~~ <sup>på egen hånd</sup> og delvis ved hjelp av private firmaer, kan nevnes Vassdragsvesenet, Vegdirektoratet og Direktoratet for statens skoger.

Disse kartene har ofte en tilstrekkelig stor nøyaktighet for de fleste planleggingsarbeider. Alt etter hvilket formål de skal tjene, er de noe uensartet i utstyr og innhold, og åjourføringen er ofte meget mangelfull. Dette hindrer dessverre en rasjonell utnyttelse av kartene.

