

INSTITUTT FOR LANDMÅLING
NORGES LANDBRUKSHØGSKOLE

Forelesninger
i landmåling

MÅLELÆRE I

for jordskiftestudentene

Av
PROFESSOR DR. PAUL GLEINSVIK

VOLLEBEKK 1966

Inge Revhaug, Fsk.

Forelesninger

i

landmåling

MÅLELÆRE I

for

jordskiftestudentene ved
Norges Landbrukshøgskole

av

professor dr. Paul Gleinsvik

INSTITUTT FOR LANDMÅLING.

Vollebekk 1966.

I n n h o l d s f o r t e g n e l s e .

	Side
Innledning.	1
I. NOEN PRINSIPIELLE BETRAKTNINGER VILDRØRENDE FAST- LEGGING AV PUNKTER I LANDMÅLINGEN.	4
1. Litt om jordklodens geometriske og fysikalske egenskaper.	4
2. Måleenheter.	11
II. STIKKING AV RETTE LINJER.	16
1. Ekstrapolasjon.	16
2. Interpolasjon.	18
a) Det kan siktes mellom endepunktene.	18
b) Det kan ikke siktes mellom endepunktene.	18
3. Stikking av rette linjer med teodolitt.	20
III. LENGDEMÅLING.	23
I. Direkte lengdemåling.	24
1. De viktigste korreksjoner ved lengdemåling.	24
1) Korreksjon for målebåndets lengde.	25
2) Korreksjon for elastisk tøying.	26
3) Korreksjon for "pil".	26
4) Korreksjon for temperatur.	28
5) Korreksjon for helning.	28
a) Korrigering på grunnlag av høydefor- skjellen.	28
b) Korrigering på grunnlag av høydevink- elen.	29
6) Reduksjon til ellipsoiden.	29
2. Lengdemålingens utførelse.	30
a) Vanlig lengdemåling i horisontalt terreng.	30
b) Vanlig lengdemåling i hellende terreng.	31
c) Nøyaktigere lengdemåling.	32
d) Presisjonslengdemåling.	34
3. Spesielle vansker ved lengdemåling av rette linjer.	35
4. De viktigste feil ved direkte lengdemåling.	36

	Side
II. Optisk avstandsmåling.	38
A. Optisk avstandsmåling med konstant avstands- måleende vinkel og variabel stanglengde.	39
1. Instrumenter med distansestreker (konstant strekavstand).	39
a. Alminnelig (astronomisk) kikkert med Ramsdens okular.	40
b. Kikkert med indre fokusering.	42
2. Bestemmelse av horisontale avstander ved hellende siktelinje.	44
a. Stangen står vinkelrett på sikte- linjen.	44
b. Stangen står loddrett.	45
c. Horisontal stang vinkelrett på sikte- linjen.	47
3. Instrumenter med distansestreker (variabel strekavstand).	47
4. Skrueavstandsmålere.	50
5. Avstandsmåling ved hjelp av dobbeltbilder.	50
B. Optisk avstandsmåling med konstant stanglengde og variabel avstandsmåleende vinkel.	54
1. Den Gaussiske feilforplantningslov.	54
2. Med horisontal stang. (Basisstangmetoden)	55
1) Feil ved vinkelmålingen.	56
2) Feil på stanglengden.	56
3) Stangen står ikke vinkelrett på sikte- linjen.	56
4) Feil på stangens horisontalstilling.	57
5) Feil ved instrumentets og stangens sentrering.	57
3. Metoder for bestemmelse av større avstander ved basisstangmetoden.	57
a) Oppdeling av linjen i seksjoner.	57
b) Metoden med hjelpebasis.	58
4. Med vertikal stang.	61
C. Nøyaktigheten av den optiske avstands- og høyde- bestemmelse.	62
1. Feil som skyldes instrumentet.	62

	Side
2. Feil ved stangen	63
3. Avlesningsfeilen.	64
4. Feil som skyldes ytre forhold.	66
III. Elektronisk avstandsmåling.	67
1. Generelle betraktninger.	67
2. Elektronisk avstandsmåling etter impuls- prinsippet.	69
a) Radarmetoden.	69
b) Shoran- og hiranmetoden.	70
3. Elektronisk avstandsbestemmelse ved måling av faseforskjeller.	71
a) Faseforskjellsmåling i langbølgeområdet.	71
b) Faseforskjellsmåling i området av det synlige lys. (Den elektrooptiske metode.)	72
c) Faseforskjellsmåling i mikrobølgeområdet.	75
4. Elektronisk avstandsmåling ved måling av frekvensendringer.	75 b
IV: MÅLING AV HORISONTAL- OG VERTIKALVINKLER:	76
A. Måling av horisontalvinkler.	76
1. Generelle betraktninger.	76
2. Retnings- eller satsmåling.	77
3. Vinkelmåling.	80
a) Nærvinkelmetoden.	80
b) Metoden med fast utgangsretning.	81
c) Vinkelmåling i alle kombinasjoner.	81
4. Metoder for måling av enkeltvinkler.	82
a) Ved satsmåling.	82
b) Ved reiterasjon.	82
c) Ved vanlig repetisjon.	83
d) Den Gaussiske repetisjonsmetode.	84
5. Horisontalvinkelmålingens nøyaktighet.	86
a) Siktefeilen (innstillingsfeilen).	86
b) Avlesningsfeilen.	87
c) Sentreringsfeil.	87

	Side
B. Måling av vertikalvinkler.	88
1. Generelle betraktninger.	88
2. Bestemmelse av vertikalvinkler.	89
3. Vertikalvinkelmålingens praktiske utførelse.	91
4. Justering for indeksfeil.	92
V. AREALBEREGNING, GRENSEREGULERING m.v.	94
A. Arealberegning.	94
1. Innledning.	94
2. Arealbegrepet i landmålingen.	94
a) Den funksjonelle forbindelse mellom ellipsoidisk og midlere areal.	95
b) Den funksjonelle forbindelse mellom ellipsoidisk areal og kartprojeksjons- areal.	95
3. Beregning av arealer på grunnlag av originale mål eller derav utledede koordinater.	96
a) Trekanter.	96
b) Sluttet polygon.	97
4. Arealberegning på grunnlag av kart.	101
5. Den halvgrafiske metode.	104
6. Kartkrympning.	104
7. Arealberegningens praktiske utførelse.	106
8. Feilgrenser ved arealberegning.	107
B. Grenseregulering, avsetning av arealer, m.v.	107
1. Grenseregulering.	107
a) Ensartet grunnverdi.	107
b) Uensartet grunnverdi.	109
2. Avsetting av arealer.	110
3. Forstørring eller forminsking av karter.	111

I n n l e d n i n g .

Landmålingens viktigste oppgave er oppmåling av større eller mindre deler av jordoverflaten med sikte på en grafisk framstilling av resultatene i form av kartor, profiler osv.

Uttrykkene landmåling og geodesi som er av gresk opprinnelse og ordrett oversatt betyr jorddeling, dekket opprinnelig hverandre fullt ut. I moderne språkbruk har imidlertid uttrykket geodesi fått en noe videre ramme og nyttes i betydning av landmåling i aller videste forstand. Den vanligste definisjon på geodesi er: Geodesi er den vitenskap som tar sikte på å utforske jordklodens form og dimensjoner, både for jordkloden under ett og for mindre deler av denne.

Som fagdisiplin kan geodesien inndeles på forskjellige måter. Fra gammelt av har det vært vanlig å skille mellom høyere og lavere geodesi.

Med den lavere geodesi forstår vi den del av landmålingen som befatter seg med oppmåling av så små områder av jordoverflaten at jordens krumningsforhold kan neglisjeres. Målingene tenkes utført i et felles horisontalplan, slik at beregningen av oppmålingenes resultater kan basere seg på formelene fra den plane trigonometri.

Den høyere geodesi derimot befatter seg med så store deler av jordoverflaten at vi blir nødt til å ta hensyn til jordkrumningen. Til den høyere geodesi hører også bestemmelsen av jordklodens form og størrelse.

Som beregningsflate anvendes i den høyere geodesi vanligvis en omdreiningssellipsoide med omdreiningssakse som faller sammen med jordens rotasjonsakse. Ellipsoidens geometri er atskillig mer komplisert enn den plane geometri. Ved den beregningsmessige bearbeidelse av måleresultatene kommer derfor mer kompliserte matematiske formler til anvendelse enn i den lavere geodesi.

Når det gjelder selve måleoperasjonene, faller det naturlig å dele dem inn i horisontalmålinger på den ene siden og vertikal- eller høydemålinger på den annen side. De første tar sikte på å fastlegge punktenes beliggenhet på selve referensflaten, med andre ord koordinatene x og y , mens de sistnevnte har til formål å bestemme punktenes avstand fra referensflaten, med andre ord punktenes z -koordinater.

Dersom vi retter oppmerksomheten mot oppmålingens formål, er det hensiktsmessig å dele dem i følgende tre grupper:

a. Geodetiske målinger. Disse har for det første til formål å bestemme jordens størrelse og form. Ved disse målinger kommer foruten de rent geometriske metoder som måling av avstander og vinkler, også astronomiske og fysikalske

målinger til anvendelse. De siste omfatter tyngdekraftsmålinger og tar sikte på bestemmelse av jordens tyngdefelt.

De geodetiske målingers prinsipale formål er å etablere et system av godt bestemte trigonometriske punkter som kan tjene som grunnlag eller ramme for de etterfølgende detaljmålinger.

b. Topografiske målinger. Disse har til formål å skaffe til veie oversiktskarter i små målestokkforhold, såkalte topografiske karter. De topografiske målinger bygger på det fikspunktsystem som etableres ved de geodetiske målinger. På grunn av de topografiske karters små målestokkforhold er det ikke påkrevd med noen særlig stor nøyaktighet ved de enkelte terrengpunkters bestemmelse.

c. Økonomiske målinger. Denne gruppe omfatter målinger hvis prinsipale formål er av økonomisk-administrativ-teknisk natur.

Jordskifteverkets kartopptak over jordskifteløst er et eksempel på kartformål av hovedsakelig ren økonomisk natur. Som eksempel på målinger hvis formål er av administrativ art, kan nevnes kartopptak for områdeplanlegging, mens målinger med sikte på framstilling av karter som grunnlag for ulike tekniske prosjekteringer, hører inn under den siste gruppen. Som regel vil det være slik at de økonomiske målinger samtidig har flere av de nevnte formål for øye.

Skal de økonomiske karter være tjenlige til sine respektive formål, må de gi en temmelig detaljert terrengframstilling i forholdsvis store målestokkforhold. Derfor forutsetter disse målinger en nøyaktigere utførelse enn de topografiske målinger.

De geodetiske og topografiske målinger utføres her til lands av statsinstitusjonen Norges geografiske oppmåling.

Når det gjelder den undervisningsmessige side ved faget geodesi, kan en si at den i første rekke omfatter eller bygger på følgende fagkrets: Instrumentlære, målelære (herunder fotogrammetri), feillære med utjevningregning og støttefagene matematikk, optikk og geofysikk.

Instrumentlæren omfatter de forskjellige slags instrumenter som anvendes, deres bygning, bruk og verifisering.

Målelæren omhandler de forskjellige måleoperasjoner, oppmålingsmetoder og beregningsmetoder.

Ved de fleste målearbeider innen landmålingen opererer vi med overbestemte systemer, dvs. vi observerer flere størrelser enn nødvendig for oppgavens løsning. I en trekant, f.eks. nøyer vi oss ikke med bare å måle to av trekantvinklene og utlede den tredje vinkelen indirekte ved hjelp av vinkelsummen i trekanten, men som regel måler vi alle tre vinkler. Hensikten med overskytende målinger er flersidig. For det første vil vi skaffe oss kontroll

mot grove feil. For det annet tar vi sikte på å øke nøyaktigheten av de størrelser som skal bestemmes, og for det tredje skaffer vi grunnlag for vurdering av målenøyaktigheten. Feillæren med utjevningsregning blir derfor ett av de viktigste hjelpefag for geodesien.

K a p i t e l I .

NOEN PRINSIPIELLE BETRÅKTNINGER VEDRØRENDE FASTLEGGING AV PUNKTER I LANDMÅLINGEN.

1. Litt om jordklodens geometriske og fysikalske egenskaper.

Med oppmåling av en del av jordoverflaten, et terrengområde, forstår vi bestemmelsen av den relative beliggenhet til et større eller mindre antall terrengpunkter. Fastleggningen av punkter i landmålingen skjer i prinsippet på følgende måte: Den naturlige jordklode, som har en meget uregelmessig form, erstattes med en "idealisert" jordklode av en så regelmessig form at dens geometri blir forholdsvis enkel. Overflaten til denne fiktive kloden nyttes så som referensflate ved fastleggningen av terrengpunkter. Først nedføres (projiseres) punktene fra den naturlige (fysiske) jordoverflate til referensflaten. Vi får derved fram en "idealisert" jordoverflate hvis utseende vil avhenge av den valgte referensflate og videre av prinsippet for projiseringen av punktene fra den fysiske jordoverflate til referensflaten.

Etter at punktene er overført til og fastlagt i forhold til referensflaten, følger overføringen av punktene fra referensflaten til kartplanet i samsvar med den valgte kartprojeksjon. Vedkommende kartprojeksjons avbildnings- eller projeksjonsligninger gir funksjonsforbindelsen mellom et punkts koordinater på referensflaten og de tilsvarende plane koordinater x, y i projeksjonsplanet

$$x = f_1(\varphi, \lambda) \quad \text{og} \quad y = f_2(\varphi, \lambda)$$

hvor φ og λ er de såkalte geografiske koordinater. φ er geografisk bredde og λ er geografisk lengde.

Vi skal så gå nærmere inn på spørsmålet om referensflater innen landmålingen. Da alle referensflater, som det kan bli spørsmål om å anvende, står i en mer eller mindre nær tilknytning til jordens tyngdefelt, skal vi først gi en kort utredning om dette emne.

Som bekjent er jorden omgitt av et tyngdefelt, som er det resulterende felt av to partialfelter, nemlig 1. jordens gravitasjonsfelt som følge av tiltrekningen fra jordens masser, og 2. sentrifugalkraftens felt som følge av jordens rotasjon, og som virker inn på alle punkter som deltar i omdreiningen. Dessuten inngår noen andre komponenter i tyngdefeltet, f.eks. til-

trekningen fra andre himmellegemer. Videre påvirkes tyngdefeltet av masseforskyvninger på jordoverflaten som følge av flo og fjære. Virkningen av disse sistnevnte komponenter er variabel, og det har til følge at jordens tyngdefelt strengt tatt ikke er konstant. Imidlertid influeres tyngdefeltet så lite av andre himmellegemer og av flo og fjære at vi i praksis kan betrakte jordens tyngdefelt som invariabelt.

Matematisk kan vi uttrykke jordens tyngdefelt ved potensialfunksjonen:

$$W = V_1 + V_2.$$

hvor W er potensialet til jordens tyngdefelt, mens V_1 og V_2 er potensialene som skriver seg fra jordens gravitasjon og fra sentrifugalkraften. (Med potensialet i et punkt forstår vi det arbeid som utføres av tyngdekraften når masseenheten føres til punktet fra uendelig stor avstand. Potensialet vil følgelig avta med voksende høyde over havet.)

Tenker vi oss en flate som over alt står vinkelrett på tyngdekraftens retning, vil denne flate ha den karakteristiske egenskap at en masse vil kunne forskyves på flaten uten forbruk av energi. I samtlige flatens punkter vil potensialet følgelig ha samme verdi, dvs. flatens ligning får formen:

$$W = \text{konstant}$$

Flater med denne egenskap går under navn av ekvipotensialflater eller nivåflater. Til hver verdi av konstanten svarer en bestemt nivåflate. Ved å variere konstanten fås samtlige nivåflater, både de som omslutter jordkloden og de som befinner seg innenfor samme. Nivåflatene lar seg "materialisere" for så vidt som en vannflate i ro vil stille seg slik at den faller sammen med nivåflaten i høyde med vannspeilet.

Potensialfunksjonen har den matematiske egenskap at dens deriverte med hensyn til en vilkårlig retning gir oss komponenten til tyngdekraftens aksellerasjon i vedkommende retning. Velges retningen vinkelrett på nivåflaten, altså i tyngdekraftens retning, fås tyngdens aksellerasjon g , dvs.

$$\frac{\partial W}{\partial h} = -g$$

Det negative fortegn følger av at tyngdekraftens potensial avtar med voksende høyde.

Vi betrakter så to nærliggende nivåflater W_1 og W_2 (se fig. 1, hvor dh_1 og dh_2 er å oppfatte som differensialstørrelser, mens g_1 og g_2 er middelveirdien til tyngdens aksellerasjon langs dh_1 og dh_2). Potensialdifferensen mellom de to nivåflatene er konstant, dvs. det arbeid som skal til for å føre en masse m fra nivåflaten W_1 til W_2 , er uavhengig av den veg som benyttes ved

masseoverføringen. Dette konstante arbeidsoppbud er lik produktet av vekten til massen og høydeforskjellen mellom de to nivåflatene. Vekten av massen m er lik:

$$p = m g$$

Vi har følgelig:

$$W_2 - W_1 = -m g_1 dh_1 = -m g_2 dh_2$$

$$\text{dvs.} \quad \frac{dh_1}{dh_2} = \frac{g_2}{g_1}$$

Av denne ligning går det altså fram at avstanden mellom to nærliggende nivåflater er omvendt proporsjonal med tyngdens aksellerasjon. Da tyngdens aksellerasjon ikke er konstant på jorden, vil nivåflatene følgelig ikke være parallellflater.

Vi skal så undersøke nærmere hvordan nivåflatene til jordens tyngdefelt forløper rundt jordkloden. I fig. 2 betrakter vi på nytt to nærliggende

nivåflater og stiller opp ligningen

$$\frac{dh_1}{dh_2} = \frac{g_2}{g_1}$$

for polene og ekvator:

$$\frac{dh_p}{dh_E} = \frac{g_E}{g_p}$$

Som bekjent er tyngdekraftens aksellerasjon større ved polene enn ved ekvator, dvs.

$$\frac{g_E}{g_p} < 1, \text{ følgelig er også } \frac{dh_p}{dh_E} < 1$$

Vi har dermed vist at nivåflatene har større avstand ved ekvator enn ved polene.

Da nivåflatene ikke er parallellflater, vil heller ikke tyngdelinjene (eller loddlinjene som de også kalles)

som overalt står vinkelrett på nivåflatene, være rette linjer, men anta formen av svakt krummede linjer. Tangenten til tyngdelinjen, som går under navn av loddretning, angir overalt tyngdekraftens retning. Fig. 3 tar sikte på å anskueliggjøre forholdet. Den strek-prikkede kurve representerer tyngdelinjen eller loddlinjen gjennom punktet P.

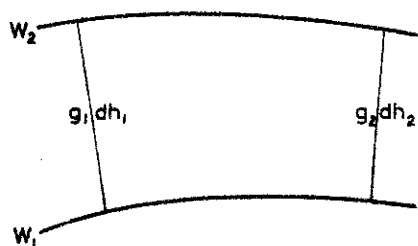


fig. 1

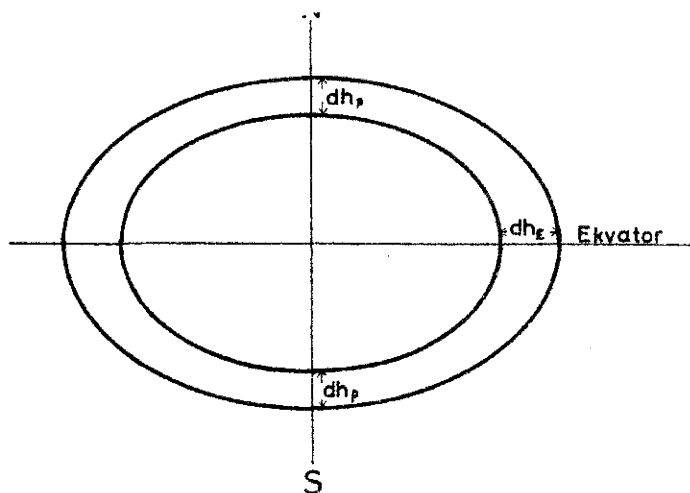


fig. 2

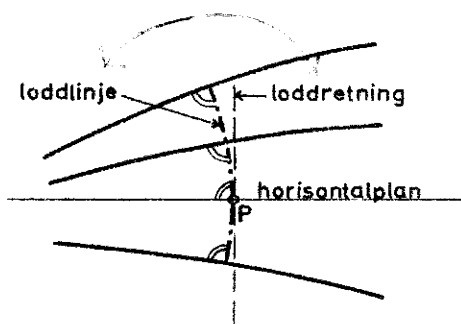


fig. 3

Tangenten til denne kurve i pkt. P representerer loddretningen. Det er mulig å "materialisere" loddretningen. Et fritthengende lodd med snor vil nemlig innstille seg i loddretningen. Planet vinkelrett på loddretningen i P kalles horizontalplanet.

Fra et fysikalsk synspunkt faller det naturlig å velge en nivåflate som representant for jordoverflaten og nytte denne til referensflate. Som slik referensnivåflate har en valgt nivåflaten i høyde med verdenshavenes middelvannstand. Denne nivåflate har fått et spesielt navn, nemlig den matematiske jordoverflate eller geoiden. Som projiserende linjer for overføringen av punkter på den fysiske jordoverflate til geoiden, faller det naturlig å velge loddlinjene (tyngdelinjene).

På grunn av den uregelmessige massefordeling i jordskorpen vil ikke geoiden være noen enkel geometrisk flate. Geoiden vil (riktignok i en noe avsvakket form) gjenspeile den fysiske jordoverflates uregelmessigheter. Fig. 4

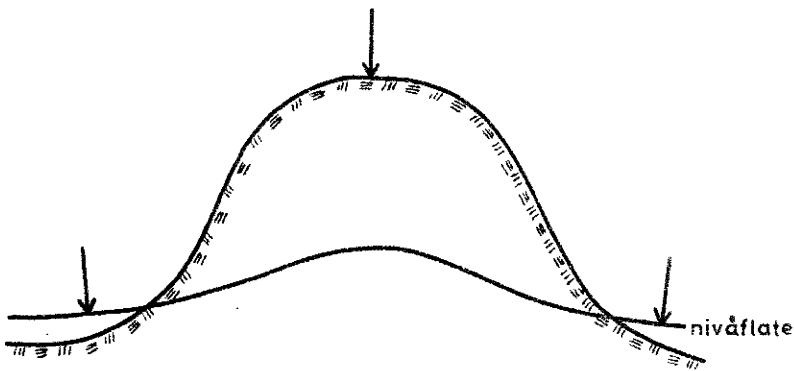


fig. 4

av geoidens uregelmessige form egner den seg ikke særlig godt til referensflate. Det melder seg derfor spørsmål om å erstatte den med en flate av enklere form, som approksimerer geoiden med tilstrekkelig tilnærmedelse. Inngående undersøkelser over dette spørsmål har gitt til resultat at geoiden avviker forholdsvis lite fra en omdreiningsellipsoide med omdreiningsakse sammenfallende med polaksen. For alle praktiske oppmålingsformål vil det derfor være tillatt å erstatte geoiden med en omdreiningsellipsoide med akser og flattrykning valgt på en slik måte at avvikene mellom geoiden og denne ellipsoide blir minst mulig

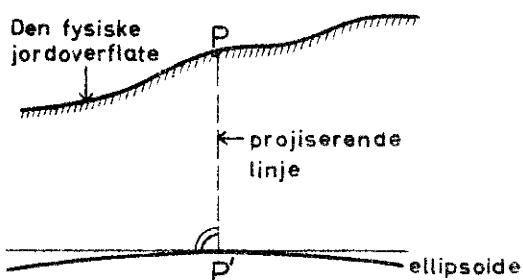


fig. 5

viser hvordan et fjellmassiv forårsaker en oppbulking på nivåflaten. Pilene angir loddretningene, som vi kan tenke oss materialisert ved lodd og snor. Bergmassivet vil trekke loddet til seg på begge sider, dvs. loddlinjene vil få en sterkere konvergens enn tilfellet hadde vært dersom vi hadde hatt en jevn massefordeling. På grunn

når vi betrakter hele jordkloden under ett. Som projiserende linjer for overføringen av punkter fra den fysiske jordoverflate til referensflaten faller det naturlig å velge ellipsoidnormalene i vedkommende punkter (se fig. 5 hvor P' er terrengpunktet P's projeksjon på ellipsoiden). Den ellipsoide som nyttes til referensflate, går under navn av referensellipsoiden eller jordsfæroiden.

Som allerede nevnt, gis det en rekke referensellipsoider hvis konstanter avviker litt fra hverandre. I Europa nyttes mest den Besselske ellipsoide. Norges offisielle kartlegging baserer seg på en litt avvikende Besselsk ellipsoide. Den norske ellipsoide er likodannet med den offisielle Besselske, har altså samme flattrykning, men litt andre verdier for akselengdene. Videre kan nevnes ellipsoidene til Hayford, Clarke og Krassowsky. Av hensyn til sammenføyningen av de enkelte lands kartverk er det fordelaktig med en felles referensflate. I 1924 ble det derfor besluttet på en internasjonal kongress for geodesi og geofysikk i Madrid å adoptere Hayfords ellipsoide til universell referensflate. Denne ellipsoide, som har fått navnet den internasjonale ellipsoide, er allerede tatt i bruk av flere land, bl.a. blir den nytet til referensflate for de militære innen alle land som sogner til NATO.

Dimensjonene til den internasjonale ellipsoide er gitt ved:

$$\begin{array}{ll} \text{Store halvakse} & a = 6378388 \text{ m} \\ \text{Lille} & \text{"} & b = 6356912 \text{ "} \\ \text{og flattrykning} & c = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{297} \end{array}$$

De tilsvarende tall for den offisielle Besselske ellipsoide er:

$$\begin{array}{ll} a & = 6377397 \text{ m} \\ \text{og } b & = 6356079 \text{ "} \\ \text{med } c & = \frac{1}{299} \end{array}$$

Det framgår av de angitte verdier for a og b at sferoidens avvik fra kuleformen er forholdsvis liten, idet differensen a - b bare utgjør ca. 20 km. Avviket er så lite at det - selv for temmelig store områder - er tillatt å bytte ut sferoiden med en kule uten at de feil som oppstår herved vil spille noen praktisk rolle. Radius til kulen må bestemmes på en slik måte at kuleflaten innenfor vedkommende område slutter seg best mulig til sferoiden. Det oppnås ved å velge den såkalte middelkrumningsradius $R = \sqrt{MN}$ til radius i erstatningskulen, hvor M og N er ellipsoidens meridiankrumningsradius, resp. perpendikulærkrumningsradius, som begge skal henføres til sentrum av vedkommende område. Fordelen med å bruke en kuleflate til referensflate stikker i at kulens geometri er vesentlig enklere enn sferoidens.

Dreier det seg om områder av enda mindre utstrekning, kan det komme på tale helt å neglisjere jordkrumningen, dvs. å erstatte sferoiden med et plan og nytte loddlinjene som projiserende linjer. Disse forutsettes innenfor vedkommende område å være rettlinjete og parallelle og vinkelrette på referensplanet. De regnemessige fordeler med denne forenklete framgangsmåte er meget store. Utstrekningen av det området som på én gang kan oppmåles uten å ta hensyn til jordens krumningsforhold, vil være avhengig av den nøyaktighet som forlanges. En nærmere undersøkelse over dette spørsmål gir til resultat at den

plane betraktningsmåten kan anvendes for områder inntil ca. 1000 km² uten at feilene som skriver seg herfra vil overstige virkningen av de observasjonsfeil som normalt må regnes med under oppmålingen.

Som tidligere nevnt, skjer det i forbindelse med oppmålingen en grafisk framstilling av resultatet i form av kartet, hvorved punktene på den fysiske jordoverflate (etter projiseringen på referensflaten) overføres fra referensflaten til kartplanet i samsvar med vedkommende kartprojeksjons avbildnings- eller projeksjonsligninger. Da både kule- og ellipsoideflater er flater med dobbelt krumning, kan framstillingen i kartplanet aldri bli en likedannet gjengivelse av originalfiguren på referensflaten. Projeksjonsfeilenes størrelse vil være avhengig av utstrekningen til det området som avbildes, og dessuten avhengig av vedkommende kartprojeksjons egenskaper. Ved enkelte projeksjoner oppnår en å bevare vinklene, slik at en figur på referensflaten blir avbildet ved en likedannet figur i kartplanet. En kartprojeksjon med denne egenskap kalles konform eller vinkeltro (strengt tatt er konformiteten begrenset til uendelig små figurer). Ved andre projeksjoner oppnås å bevare arealene, og en slik projeksjon kalles derfor flateriktig eller ekvivalent. Da referensflaten (ellipsoiden) er en flate med dobbelt krumning, eksisterer det ikke noen kartprojeksjon som samtidig er konform og ekvivalent, det ville nemlig bety at avbildningen var feilfri.

Med et karts målestokkforhold eller målestokk forstår vi forholdet mellom en avstand på kartet og den tilsvarende avstand på referensflaten. Som følge av projeksjonsfeilene ved overgangen fra referensflaten til kartplanet, vil målestokken variere litt innenfor det avbildede området. Ved de konforme projeksjoner er det slik at målestokken er den samme i alle retninger omkring et punkt når vi holder oss til uendelig små linjeelementer, mens den ved de ekvivalente projeksjoner er forskjellig i de forskjellige retninger omkring et punkt. Ved alle kartprojeksjoner er det slik at avbildningen av visse lengder på referensflaten avbildes uten forvanskning. Ved den Gauss-Krügerske projeksjon f.eks., som anvendes her i Norge, er avbildningen av x-aksemeridianene korrekt. Når det er tale om et karts målestokk under ett, er det målestokken for avbildningen av slike forvanskingsfrie lengder som det siktes til.

Det som er sagt foran om referensflater, har først og fremst gyldighet for bestemmelsen av de projiserte punkters beliggenhet på selve referensflaten, eller i x,y-planet når vi tenker på den etterfølgende kartprojeksjon. En fullstendig beskrivelse av punktenes relative beliggenhet på den fysiske jordoverflate forutsetter også kjennskap til lengden av de projiserende linjer, med andre ord kjennskap til punktenes høyder. Det melder seg derfor spørsmål om referensflate for høyderegningen. Det gunstigste ville jo selvsagt være om vi kunne operere med samme referensflate både for horisontal- og høyderegningen. Når det gjelder spørsmålet om referensflate for høydenes utmåling, vil valget avhenge av hvilket innhold som legges i begrepet høyde. I

prinsippet står det to muligheter åpne: Vi kan enten definere begrepet høyde ut fra rent geometriske forestillinger, slik at høydene får karakter av lengdemål, eller høydebegrepet kan fastsettes ut fra rent fysikalske betraktninger, slik at høydeforskjellene kan angis som potensialdifferenser. De viktigste høyder, under den første gruppen er de såkalte ortometriske og ellipsoidiske høyder, mens den siste høydeforestilling resulterer i de såkalte dynamiske høyder. I den praktiske landmåling er det de ortometriske høyder som spiller den uten sammenligning mest dominerende rolle. Deres definisjon er som følger: Med et punkts ortometriske høyde forstår vi lengden av den krumme lodmlinje mellom punktet og den matematiske jordoverflate. Ifølge denne definisjon er altså høyden til punktet P i fig. 6 gitt ved:

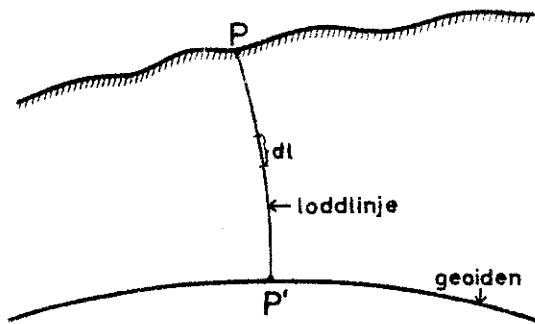


fig. 6

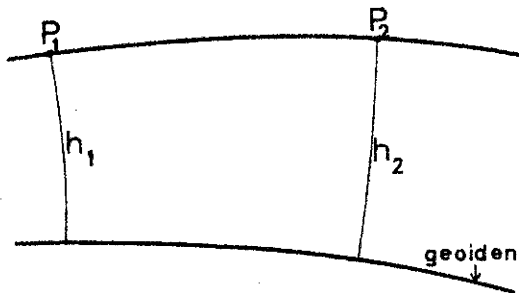


fig. 7

$$H_p = \int_P^P dl = \Sigma dl$$

Punkter med samme ortometriske høyde befinner seg på flater som går under navn av ekviortometriske flater.

Denne definisjon representerer et kompromiss mellom våre fysikalske og geometriske forestillinger om høyder. At definisjonen ikke er helt fysikalsk tilfredsstillende, vil framgå av det etterfølgende eksempel. I fig. 7 betrakter vi to punkter P_1 og P_2 som vi forutsetter befinner seg i vannspeilet til en sjø. Går vi tilbake til definisjonen på nivåflater, nemlig som flater med den egenenskap at et materielt punkt kan bevege seg på dem uten at det kreves arbeid (hvilket kun kan være tilfelle dersom flaten ikke oppviser noen høydeforskjeller), er det

klart at en vannflate i ro vil innta en nivåflate, dvs. punktene P_1 og P_2 befinner seg i samme nivåflate. Da nivåflater, som vi tidligere har påvist, ikke er parallellflater, vil h_1 være forskjellig fra h_2 , enda de etter forutsetningen inngår i en vannflate i ro. Av dette eksempel ser vi at definisjonen på ortometriske høyder fører til at en vannflate i ro kan komme til å oppvise høydeforskjeller, og det strir igjen mot våre fysikalske høydeforestillinger.

Imidlertid er det mulig å definere begrepet høyde på en slik måte at det blir fysikalsk uangripelig, men det fører igjen til at vi må prisgi de geometriske forestillinger som vi forbinder med høydebegrepet, nemlig som lengden av en rett eller krum linje mellom to punkter. En slik fysikalsk uangripelig definisjon ligger til grunn for de dynamiske høyder, som ifølge sin definisjon er proporsjonale med potensialforskjellen mellom den matematiske jord-

overflate og vedkommende punkt. Etter denne definisjon vil punkter som befinner seg på samme nivåflate, ha samme høyde.

Som allerede nevnt, er det bare de ortometriske høyder som interesserer i den praktiske landmåling, og referensflaten for disse høydene er altså den matematiske jordoverflate. Det melder seg så spørsmål om det også for høydene vedkommende er mulig å erstatte den matematiske jordoverflate med en omdreiningsellipsoide, slik at vi kunne operere med samme referensflate for horisontal- og vertikalmålingene. Dersom det var mulig, kunne høydene defineres som lengden av normalen fra punktene på den fysiske jordoverflate til ellipsoiden (se fig. 8). De således definerte høyder går under navn av ellip-

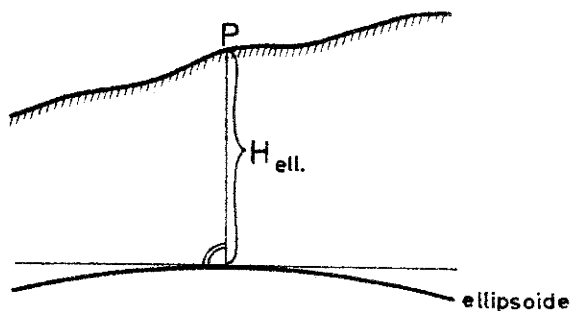


fig. 8

soidiske høyder. En nærmere undersøkelse over spørsmålet om muligheten for å erstatte de ortometriske høyder med ellipsoidiske, viser imidlertid at disse to høydene differerer så meget at det ikke kan komme på tale å bytte ut geoiden med en ellipsoide som referensflate for høydeberegningen. De ellipsoidiske høyder vil nemlig romme så store fysiske motsigelser at de ville være til

liten praktisk nytte. Ved kanaliserings- eller grøfteprosjekteringer f.eks. i meget flatt lende vil det tilfelle kunne inntreffe at vannet renner den motsatte veg av det som vi hadde regnet ut ved å legge ellipsoidiske høyder til grunn for våre beregninger. Dessuten kommer det til som en mangel ved de ellipsoidiske høyder, at deres bestemmelse ville bli problematisk. Saken er nemlig den at de metoder til bestemmelse av høyder som spiller den største rolle i praksis, som nivellement og den trigonometriske høydebestemmelse, leverer resultater som står de ortometriske høyder langt nærmere enn de ellipsoidiske høyder. I den praktiske geodesi har en derfor måttet avfinne seg med å operere med to forskjellige referensflater, nemlig en omdreiningsellipsoide som projeksjonsflate for horisontalbestemmelsen, og den matematiske jordoverflate, geoiden, som referensflate for høydeberegningen.

2. Måleenheter.

Å måle en størrelse vil si å undersøke hvor mange ganger størrelsen inneholder en i og for seg vilkårlig valgt enhet, måleenheten. De størrelser som det oftest blir spørsmål om å måle ved oppmålingsarbeider, er avstander og vinkler.

Som grunnlag for lengdemålingen nyttes i de fleste land metersy-

stemet, som ble innført i Frankrike under den franske revolusjon i 1795. Enheten er meteren. Det var fra begynnelsen av meningen at meteren skulle være et naturmål, idet en tok sikte på å gjøre den lik en timilliontedel av meridiankvadranten. For å få fastslått lengden av meridiankvadranten ble det satt i gang omfattende gradmålinger, og på grunnlag av disse ble det utarbeidet et normalmål, den såkalte arkivmeteren, som representerer det opprinnelige grunnlag for metersystemet. Senere ble det opprettet et internasjonalt vitenskape-
lig institutt "Bureau international des poids et mesures" med sete i Sèvres ved Paris. Dette instituttet fikk i oppdrag å utarbeide prototyper av arkivmeteren, som skulle fordeles på de land som etter hvert gikk over til metersystemet. En av disse prototypene, som ble framstilt av platiniridium, ble valgt til verdensprototyp. Den oppbevares i Sèvres og representerer nå det egentlige grunnlaget for metersystemet.

Lengdene og varmetvidelseskoeffisienten til prototypene ble bestemt med den aller største nøyaktighet. Den meterprototyp som Norge ble til-
delt, har ligningen:

$$1 \text{ meter} + 0,5 \mu + 8,642 \mu \cdot t + 0,001 \mu \cdot t^2$$

Ved $t=0^\circ\text{C}$ er følgelig dens lengde lik $1 \text{ m} + 0,5 \mu = 1,000\ 000\ 5 \text{ m}$.

Som allerede nevnt, var det opprinnelig forutsetningen at meteren skulle være et naturmål, nemlig lik en timilliontedel av meridiankvadranten. Imidlertid er det forbundet med store vanskeligheter å bestemme meridiankvadrantens lengde nøyaktig. Nyere målinger har vist at meteren ikke svarer helt til sin opprinnelige definisjon. På den internasjonale ellipsoide, som anses som den beste representant for jordkloden, er lengden av meridiankvadranten lik $10\ 002\ 288 \text{ m}$. En har derfor forlatt den opprinnelige definisjonen. Det var for så vidt også et uheldig valg å knytte meteren til jordens dimensjoner av den grunn at det kan være tvilsomt om jordens form og størrelse er invariabel. Som tidligere omtalt, er jordens matematiske form en funksjon av jordens tyngdefelt, som inneholder visse variable komponenter. Følgelig vil heller ikke hverken jordens form eller lengden av meridiankvadranten være konstant.

På generalkonferansen for mål og vekt ble det i 1960 besluttet å gå over til ny definisjon av meteren, slik at den på nytt får karakteren av naturmål, riktignok ikke lenger knyttet til jordklodens dimensjoner. Den nye offisielle definisjon er som følger:

1 meter er lik lengden av $1650763,73$ bølgelengder i det tomme rom av den stråling fra kryptonatommet 86 , som tilsvarer overgangen mellom nivåene $2P_{10}$ og $5d_5$.

Meteren ble innført ved lov i Norge i 1875. Som flatemål anvendes kvadratmeteren. Nedanfor er angitt de enheter for lengdemål og flatemål som har offisiell gyldighet i Norge, og deres forkortelser i samsvar med lov om

mål og vekt av 1946. Alle disse enheter er avledet av meteren.

<u>Lengdemål.</u>		<u>Flatemål.</u>	
kilometer	km = 1000 meter	kvadratkilometer	km ² = 10 00 000 m ²
meter	m	hektar	ha = 10 000 "
desimeter	dm = 0,1 "	dekar	da = 1000 "
centimeter	cm = 0,01 "	ar	a = 100 "
millimeter	mm = 0,001 "	kvadratmeter	m ²
mikron	μ = 10 ⁻⁶ "	kvadratdesimeter	dm ² = 0,01 "
		kvadratcentimeter	cm ² = 0,0001 "

Betegnelsen mål, som er meget alminnelig her til lands, betydde opprinnelig 2500 kvadratalen, som svarer til 984,3 m². No til dags brukes betegnelsen mål i betydning av 1000 m², men betegnelsen er altså ikke offisiell. Heller ikke er betegnelsen mil opptatt i loven. I daglig tale blir mil som regel brukt for 10 km. I vårt gamle målsystem betydde en mil, eller en norsk landmil som den også ble kalt, 36 000 fot, som svarer til ca. 11,3 km. For øvrig er mil ingen en tydig lengdeangivelse: 1 geografisk mil = 7 420 m, 1 sjømil (norsk) = 7 409 m, 1 engelsk mil = 1 609 m.

En vinkels størrelse kan enten uttrykkes i gradmål eller i absolutt vinkelmaß. Av gradmål har vi to systemer, nemlig:

1. Den sexagesimale deling med enheten 1 grad (1^o), som er lik 360-delen av en hel omdreining. Den deles i 60 minutter (') å 60 sekunder ('').

2. Den centesimale eller ny deling. Enheten i dette systemet er 1^g, som er 400-delen av en hel omdreining. Den deles i 100 minutter (°) å 100 sekunder (°').

Overgangen fra det ene systemet til det andre skjer ved hjelp av relasjonene

$$\begin{aligned}
 1^{\circ} &= 1,1111.111^g & 1^g &= 0^{\circ}54'00'' \\
 1' &= 0,0185.185^g & 1^{\circ} &= 0^{\circ}00'32,4'' \\
 1'' &= 0,0003.086^g = 3,086^{\circ\circ} & 1^{\circ\circ} &= 0^{\circ}00'0,324'' = 0,324''
 \end{aligned}$$

I det absolutte vinkelmaßsystemet blir størrelsen av vinklene uttrykt ved rene tall, nemlig som forholdet mellom buen og radien. Enheten er én radian, som er lik den vinkel hvis bue er lik radien.

Sammenhengen mellom gradmålssystemet og det absolutte systemet finnes med utgangspunkt i følgende proporsjon (se fig. 9):

$$\frac{\alpha^g}{400} = \frac{b}{2\pi r}$$

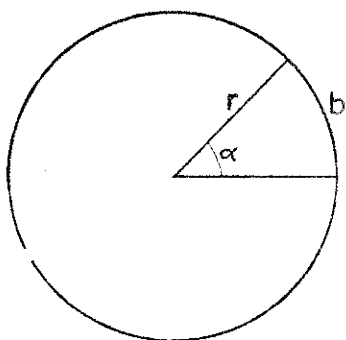


fig. 9

idet jo hele omkretsen er lik $2\pi r$, dvs.

$$\frac{b}{r} = \alpha_{\text{abs.}} = \frac{\alpha^g}{400 : 2\pi} = \frac{\alpha^g}{q^g}$$

idet vi innfører betegnelsen ρ for konstanten $\frac{400}{2\pi}$. Ved gammel deling fås på tilsvarende måte verdien $\frac{360}{2\pi}$ for ρ .

Vi lar i det etterfølgende tegnet $\hat{\alpha}$ symbolisere gradmål, mens en vinkel anført uten denne indekstilføyelse betyr at vinkelen opptrer i absolutt vinkelmål. De grunnleggende ligninger for overgangen fra det ene vinkelmålsystemet til det andre blir da

$$\alpha = \frac{\hat{\alpha}}{\rho} \quad \text{og} \quad \hat{\alpha} = \alpha \cdot \rho$$

hvor det er underforstått at $\hat{\alpha}$ og ρ skal uttrykkes i samme enheter. En vinkel uttrykt i gradmål omregnes altså til radianer ved å dividere med ρ , og en vinkel i radianer overføres til gradmål ved å multiplisere med ρ . For omsettings-tallet ρ gjelder følgende verdier:

$$\begin{aligned} \rho^{\circ} &= 57,29578 & , & & \rho^g &= 63,6619,8 \\ \rho' &= 3437,747 & , & & \rho^c &= 6366,198 \\ \rho'' &= 206264,8 & , & & \rho^{cc} &= 636619,8 \end{aligned}$$

Størrelsen ρ , som er gitt ved $\frac{400}{2\pi}$, resp. $\frac{360}{2\pi}$, blir følgelig lik vinkelverdien av én radian, idet hele omkretsen jo vil utgjøre 2π radianer.

Hva det absolute vinkelmålsystemet angår, må vi ha klart for oss at i de trigonometriske funksjoner opptrer vinklene egentlig i absolutt vinkelmål. Dette forhold er av betydning ved alle matematiske operasjoner som derivasjoner og integrasjoner som omfatter trigonometriske funksjoner. Dersom vi f. eks. med utgangspunkt i funksjonen $y = \sin x$, danner $dy = \cos x \, dx$, opptrer dy og dx her i absolutt vinkelmål.

Så vel innen den vitenskapelige som den praktiske geodesi spiller tyngdens aksellerasjon, eller tyngden som den ofte for korthets skyld benevnes, en framtreddende rolle. Enheten er l gal som er lik en aksellerasjon på 1 cm sek⁻². Enheten gal blir inndelt i 1000 mgal.

*

En oppmåling av et terrengområde er sammensatt av en hel rekke separate måleoperasjoner avhengig av hvilke metoder og hjelpemidler som står til disposisjon for løsningen av vedkommende oppmålingsoppgave. De viktigste måle-

operasjoner innen landmålingen, som går igjen ved praktisk talt alle former for oppmålingsarbeid, er: 1. stikking av rette linjer, 2. lengdemåling og 3. horisontal- og vertikalvinkelmålinger.

K a p i t e l II .

STIKKING AV RETTE LINJER.

Med en rett linje forstår vi i landmålingen det vertikale plan som kan legges gjennom de to punkter som fikserer linjen (i den høyere geodesi vil vi riktignok konstatere at denne definisjon - bortsett fra visse spesialtilfelle - ikke er holdbar, idet den fører til dobbelt sett forbindelseslinjer mellom linjens endepunkter, avhengig av hvilket endepunkt som det vertikale plan refererer seg til, men denne "irregularitet" er av mer teoretisk enn praktisk betydning). Til "materialisering" av linjen gjør vi oss bruk av landmålerstokker eller stikkstenger, som de også benevnes. De kan være av tre, stål eller aluminium, og er malt avvekslende med hvite og sorte, eller røde og hvite halvmeterfelter. Trestengene er i den ene enden forsynt med et smijernsbeslag (dupsko).

Ifølge definisjonen på en rett linje er betingelsen for at en stikkstang skal befinne seg i linjen, at den er anbrakt i det vertikale plan som markerer linjen. Innsikting av stikkstenger i linjen må følgelig ta sikte på oppfyllelse av denne betingelse. Av praktiske hensyn nøyer vi oss som regel ikke med å få stengene til å falle i det vertikale linjeplan, men forlanger i tillegg at stengene skal stå loddrett. Innsikting av stenger i linjen foregår på den måten at vi loddrettstiller stikkstenger i de to punktene som fikserer linjen. Ved sikting bringes så nye stenger inn i det vertikale plan som de to første stengene markerer. Loddrettstillingen av stengene skjer ved hjelp av lodd, idet vi benytter oss av det faktum at en linje er loddrett når den befinner seg i to vertikale plan. Som slike vertikale kontrollplan bør velges linjeplanet og vertikalplanet vinkelrett på linjeretningen.

Ved linjestikking kan oppgaven foreligge på flere ulike måter:

1. Ekstrapolasjon.

Oppgaven foreligger i den form at vi har to gitte punkter (pkt. A og B i fig. 10), og linjen som disse to punktene fikserer, skal forlenges til



fig. 10

sidene for B. Stikkingen kan utføres av én person. Først anbringes stenger i A og B. Deretter følger innsikting av nypunktene i rekkefølge 1,2,...

Avstanden mellom nypunktene bør være 50 - 100 m dersom terrengforholdene tillater det. Er det behov for tettere stangfølge, kan supplerende punkter innsiktes senere. For å få en tilstrekkelig sikker bedømmelse av stengenes plassering i linjen settes først stengene ned så nøyaktig som operatøren er i stand til. Deretter går noen skritt tilbake og innsiktingen kontrolleres. Saken er nemlig den at stangen ses under en temmelig stor synsvinkel når vi holder den på bare én armlengdes avstand. Følgelig blir bedømmelsen av innsiktingen usikker. Det går fram av fig. 11, som anskueliggjør forholdet. Holdes øyet i ro,

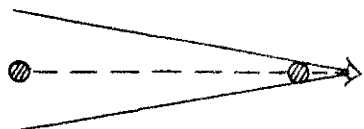


fig. 11

vil det for iakttakeren fortone seg som om alle punkter innenfor den angitte sektor befinner seg i linjen markert av de to stengene. Ellers er det å merke seg at nøyaktigheten av innsiktingen blir større ved sikting med solen enn ved sikting mot solen.

Opptrer det materielle hindringer, som umuliggjør en direkte fortsettelse av linjen, f.eks. større trær, bygninger osv., kan disse omgås ved å stikke ut en hjelpelinje parallell med hovedlinjen. I to punkter på hovedlinjen (pkt. 1 og 2 i fig. 12) oppreises perpendicularer og det avsettes like

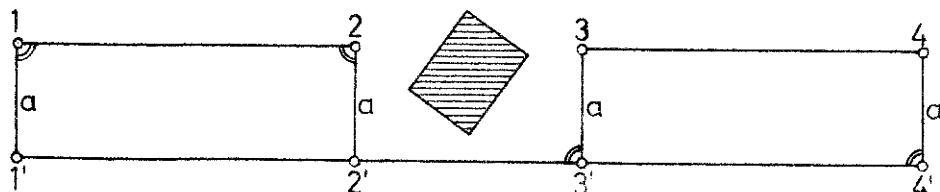


fig. 12

lange stykker langs disse. Derved fås punktene 1' og 2' på hjelpelinjen. Linjen gjennom 1' og 2' forlenges så forbi hindringen,

og vi kommer inn i hovedlinjen igjen ved i punktene 3' og 4' å gjenta prosessen i pkt. 1 og 2, hvorved vi kommer fram til punktene 3 og 4 i hovedlinjen. For å oppnå en tilfredsstillende nøyaktighet må avstandene 1-2 og 3-4 være tilstrekkelig store, helst ca. 100 m. Det henger sammen med at feil på a-ene vil betinge en desto større endring av linjeretningen jo kortere avstanden mellom perpendicularfotpunktene er. Videre må a-ene avsettes med størst mulig nøyaktighet. Derimot kommer det mindre an på nøyaktigheten i avsettingen av de rette vinkler. Det går fram av fig. 13. I pkt. A har vi ved avsettingen av

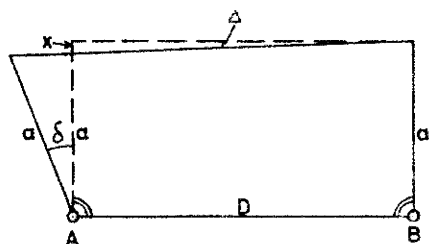


fig. 13

den rette vinkel begått feilen δ . Det har til følge at linjeretningen avbøyes vinkelen Δ . Vi har:

$$x \approx a - a \cos \delta = a(1 - \cos \delta)$$

Vi innfører her i samsvar med cosinusrekken:

$$\cos \delta \approx 1 - \frac{\delta^2}{2} \quad \text{og får}$$

$$x = \frac{a \delta^2}{2} = \frac{a \hat{\delta}^2}{2 \rho^2}, \quad \text{som resulterer i}$$

$$\hat{\Delta} = \frac{x}{D} \rho = \frac{a}{2D} \frac{\delta^2}{\rho}$$

Eks. for $\delta = 19^\circ$, $a = 20$ m og $D = 50$ m fås: $\Delta = 31''$

Kontroll på transaksjonen i fig. 12. fås ved å operere med 3 perpendikulærer istedenfor 2 som forutsatt i figuren.

2. Interpolasjon.

Linjens endepunkter er gitt, og oppgaven går ut på å anbringe stikkstenger i en del mellompunkter. Framgangsmåten vil avhenge av om det er mulig å sikte mellom endepunktene eller ikke.

a) Det kan siktes mellom endepunktene.

Endepunktene A og B signaliseres med stikkstenger, om nødvendig forsynt med flagg dersom det dreier seg om så store avstander at det faller vanskelig å se en stikkstang fra det ene endepunktet til det andre.

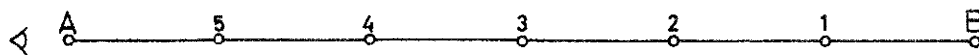


fig. 14

Stikkingen krever

to personer. Måleren stiller seg bak det ene endepunktet (i fig. 14 er forutsatt pkt. A) og medhjelperen vinkes inn i linjen i rekkefølgen 1, 2, Medhjelperen skal holde stengene med utstrakt arm, og herunder plassere seg slik at kroppen befinner seg utenfor linjen. Oppgaven kan også løses av en enkelt person ved bruk av speil- eller prismekors.

b) Det kan ikke siktes mellom endepunktene.

Dersom siktet mellom endepunktene er hindret av en mellomliggende høyderygg, løses oppgaven enklest etter metoden med suksessive approksimasjoner.

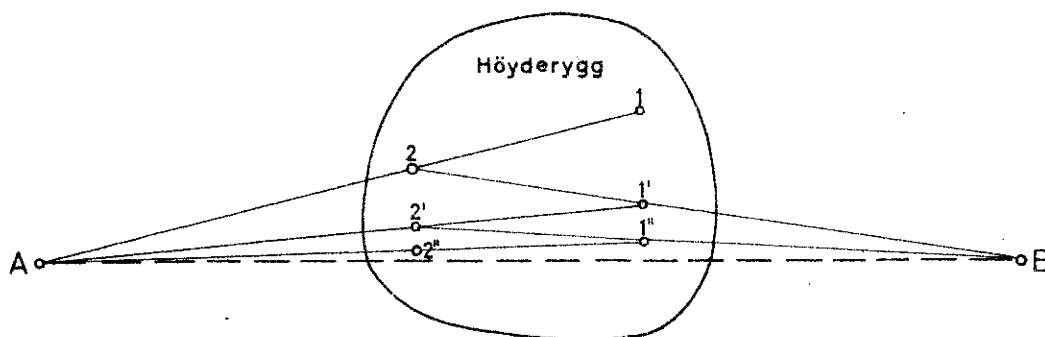


fig. 15

Framgangsmåten i fig. 15 forutsetter to personer. Måleren og medhjelperen stiller seg i punktene 1 og 2 valgt således at det fra begge er mulig å sikte både til A og B. Så siktes f.eks. 2 inn i linjen 1-A, deretter 1' inn i linjen 2-B, så 2' inn i linjen 1'-A og på denne måte fortsettes inntil begge er kommet inn i linjen mellom A og B. Avstanden mellom pkt. 1 og 2 bør ikke være for liten, ellers blir innsiktingen for unøyaktig. Jo nærmere pkt. 1 befinner seg linjen mellom A og B i utgangsstillingen, desto færre forflytninger må til for å komme inn i linjen. Ellers er det å merke seg at metodens "konvergens" forøkes ved å gjøre de første sideforflytningene noe større enn forutsatt i fig. 15. De første innsiktingene kan gjøres temmelig grove. Finsiktingen setter først inn når en kommer nær linjen, dvs. når sideforflytningene blir små.

Er høyderyggen meget smal, slik at det er vanskelig å få tilstrekkelig avstand mellom pkt. 1 og 2, er det gunstigere å operere med tre stokker (se fig. 16).

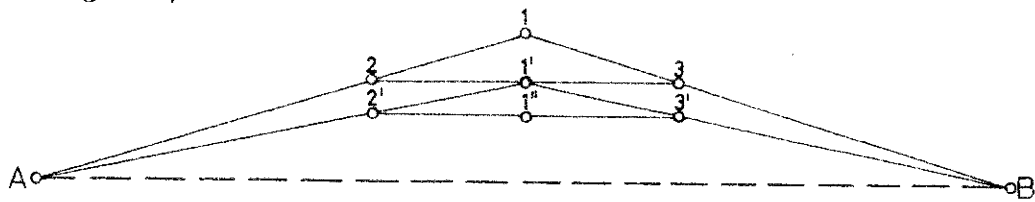


fig. 16

Fra pkt. 1 må både A og B kunne ses. Først siktes 2 og 3 inn på linjen 1-A, resp. 1-B.

Deretter 1' på linjen 2-3, og slik fortsettes til linjen mellom A og B nås.

Dersom hindringen ikke lar seg overvinne ved noen av de nettopp beskrevne metoder, kan en nytte følgende framgangsmåte som fører fram uansett karakteren av vedkommende hindring (se fig. 17). Først stikkes ut en hjelpe-

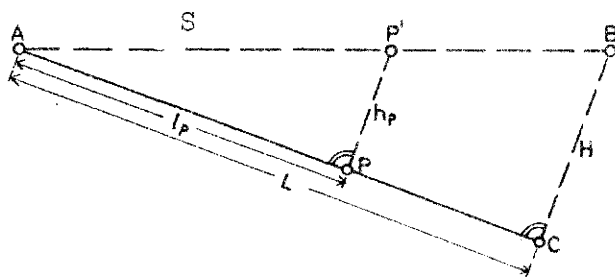


fig. 17

linje AC. Fra B nedfelles en perpendikulær på hjelpelinjen. Punktet C er fotpunktet til denne perpendikulæren. Vi setter oss så til oppgave å avsette et pkt. i linjen i nærheten av P. Det foregår ved å oppreise en perpendikulær i P og avsette h_p langs denne, hvor h_p er gitt ved:

$$\frac{h_p}{l_p} = \frac{H}{L} \quad \text{dvs.} \quad h_p = \frac{H}{L} l_p$$

Vi må altså måle H, L og l_p . Ved å gå fram på denne måten kan vi få avsatt så mange mellompunkter som ønskes i linjen AB.

Dersom avstanden A-P' skal ha en gitt verdi S, oppnås det ved å bestemme l_p av proporsjonen:

$$\frac{S}{l_p} = \frac{\sqrt{L^2 + H^2}}{L}, \quad \text{dvs.} \quad l_p = \frac{S \cdot L}{\sqrt{L^2 + H^2}} \quad \text{og} \quad h_p = \frac{S \cdot H}{\sqrt{L^2 + H^2}}$$

Dersom forholdene ligger slik an at det ikke er hensiktsmessig å la

hjelpe-linjen ta til i et av endepunktene, gås fram som vist i fig. 18. Hjelpe-

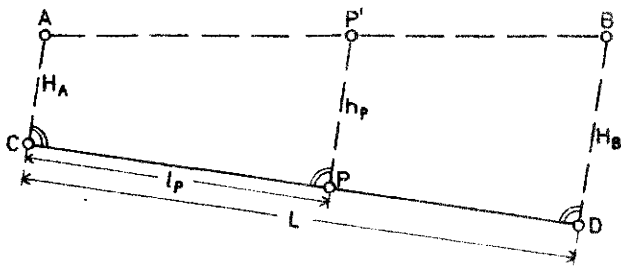


fig. 18

linjen stikkes utenfor begge endepunktene og det nedfelles perpendikulerer på hjelpe-linjen både fra A og B. Ifølge figuren har vi:

$$\frac{h_p - H_A}{l_p} = \frac{H_B - H_A}{L}, \text{ dvs.}$$

$$h_p = H_A + \frac{H_B - H_A}{L} l_p$$

I dette tilfelle må vi altså måle H_A , H_B , L og l_p .

3. Stikking av rette linjer med teodolitt.

Ved stikking av meget lange linjer, eller når det forlanges stor nøyaktighet, anvendes teodolitt. Vi betrakter først det tilfellet at A og B er



fig. 19

gitt og at linjen skal forlenges forbi B. Dersom instrumentet ikke er justert for kollimasjonsfeil eller

horisontalakseskjevhet, må metoden med dobbelt gjennomslag brukes (se instrumentlære side 92). Det foregår på den måten at teodolitten stilles opp i B og siktes inn mot A. Deretter slås kikkerten gjennom og stokken C_1 vinkes inn. Så dreies teodolitten om vertikalaksen og rettes igjen mot A og slås på nytt gjennom, og en stokk i C_2 vinkes inn. Midtpunktet mellom C_1 og C_2 vil da ligge på forlengelsen av linjen mellom A og B. Teodolitten flyttes så til C, siktes inn mot B og et nytt pkt. D bestemmes på samme måte.

Dersom oppgaven går ut på å sikte inn en stokk mellom to gitte punkter, går en fram på den måten at teodolitten stilles opp i det ene punkt(i fig. 20 er forutsatt i pkt. A) og siktes inn mot B, hvoretter medhjelperen

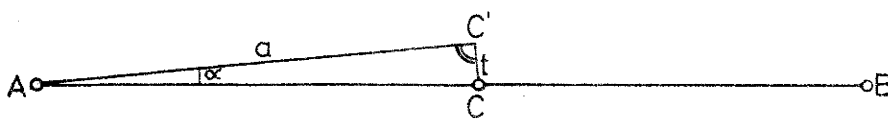


fig. 20

vinkes inn i linjen. Av hensyn til eventuell kollimasjonsfeil og horisontalakseskjevhet må transaksjonen utføres i

begge kikkertstillinger og midlet av de to bestemmelsene adopteres som endelig beliggenhet for C. Dersom avstanden mellom pkt. A og C er så stor at det

faller vanskelig å få utvekslet signaler mellom observatøren og medhjelperen, utføres innsiktingen av pkt. C på den måten at en grovinnsikter et pkt. C' og observerer vinkelen α mellom C' og B (se fig. 20). Stykket t som C' må flyttes til siden for å komme inn i linjen, er da gitt ved:

$$t = a \operatorname{tg} \alpha \approx a \frac{\hat{\alpha}}{\rho}$$

Da α vanligvis vil være en liten vinkel, er det tilstrekkelig med tilnærmet kjennskap til avstanden a. En feil på a lik da resulterer i følgende feil på t:

$$dt = \operatorname{tg} \alpha da, \text{ dvs. } da = \frac{dt}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Tallempele: Dersom vi forlanger at dt ikke skal overstige 1 mm, fås for $\alpha = 50^\circ$: $da = 12,7 \text{ m}$. I foreliggende tilfelle er det altså tilstrekkelig å kjenne lengden av a med 12,7 m's nøyaktighet.

Metoden med avsetting av tilnærmet punkt og måling av vinkelen mellom det tilnærmede punkt og linjen er nøyaktigere enn den førstnevnte metode, fordi en i siste tilfelle har muligheten for å bestemme α ved flere gangers måling, mens den direkte utsetting av C jo bare vil støtte seg til én observasjon i hver kikkertstilling.

Vi skal så behandle det tilfelle at det skal avsettes punkter med teodolitt mellom to gitte punkter som det ikke er mulig å sikte mellom. Vi går da fram på følgende måte: Først bestemmes et tilnærmet pkt. C', f.eks. etter

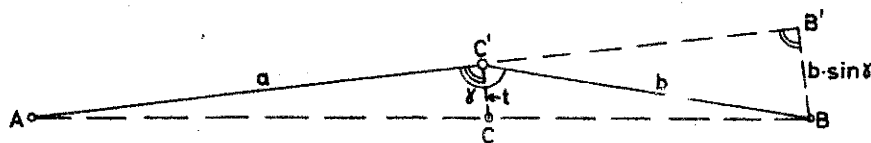


fig. 21

metoden med suksessive approksimasjoner. Instrumentet stilles opp i C' og vinkelen γ måles. Stykket t som stokken må flyttes til

siden rettvinklet på AC' for å komme inn i linjen, er da gitt ved:

$$\frac{t}{a} = \frac{b \sin \gamma}{\overline{AB}}$$

Vi innfører her den tilnærmelse at vi setter $\overline{AB}' = a + b$ og får:

$$t = \frac{a b}{a + b} \sin \gamma$$

Metoden forutsetter altså måling av avstandene a og b, men det lar seg også denne gang vise at det er tilstrekkelig med et tilnærmet kjennskap til disse. Vinkelen γ derimot må måles med størst mulig nøyaktighet.

Metoden med avsetting av hjelpepunkt og etterfølgende vinkelmåling kan også komme på tale ved forlengelse av linjer (se fig. 22). Det tilnærmede punkt C' avsettes ved grovinnsikting, hvorefter vinkelen γ bestemmes ved måling.



fig. 22

Sideforflytningen vinkelrett på BC' er da gitt ved:

$$t = a \operatorname{tg}(200^\circ - \gamma)$$

Samme framgangsmåte kan

selvsagt også nyttes ved avsetting av vilkårlige vinkler.

Metoden med avsetting av tilnærmet punkt og etterfølgende vinkel-
måling og forflytning er, som nevnt, langt nøyaktigere enn en direkte avset-
ting, og må alltid brukes dersom det fordres den størst mulige nøyaktighet i
avsettingen av brytningsvinklene, enten det nå dreier seg om rette linjer
(brytningsvinkler = 200°) eller om brutte linjer med brytningsvinkler av vil-
kårlig størrelse, slik som tilfellet vil være ved tunnelstikking f.eks.

K a p i t e l III .

LENGDEMÅLING.

Innledning.

Bestemmelse av en linjes lengde kan i landmålingen utføres på tre vesensforskjellige måter, nemlig enten ved anvendelse av et lengdemålingsredskap til dirckte lengdemåling, eller indirekte ved hjelp av en avstandsmålende innretning ved den såkalte optiske avstandsmåling og endelig ved den såkalte elektroniske avstandsmåling som bygger på måling av den tid som elektromagnetiske bølger trenger for å forplante seg mellom en linjes endepunkter.

Før vi går over til å behandle de forskjellige metoder for lengdemåling, er det nødvendig å anstille noen prinsipielle betraktninger over lengdebegrepet i landmålingen.

Som tidligere nevnt, blir punktene på den fysiske jordoverflate overført til kartprojeksjonsplanet i to trinn. Først overføres punktene fra den fysiske jordoverflate til referensflaten og deretter fra referensflaten til kartplanet i samsvar med avbildningsligningene for vedkommende kartprojeksjon. Det som interesserer her under omtalen av lengdemålingens prinsipper, er overføringen eller projiseringen av terrengpunktene på referensflaten.

Når det gjelder selve avstandsbegrepet, opererer vi med flere slike i landmålingen. I fig. 23 betrakter vi to vilkårlige punkter P_1 og P_2 hvis

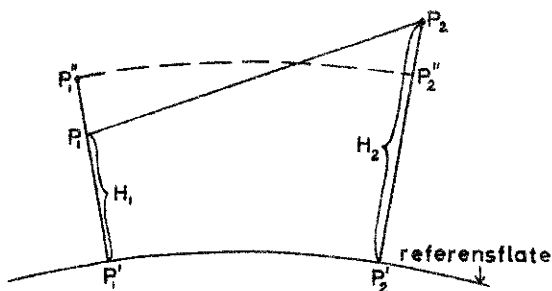


fig. 23

projeksjoner på referensflaten er P_1' og P_2' . Med skråavstanden mellom P_1 og P_2 forstår vi da lengden av den rette forbindelseslinje mellom linjens endepunkter. Videre har vi den ellipsoidiske avstand som er lengden av linjens projeksjon på referensellipsoiden, altså lengden av kurven mellom P_1' og P_2' . Som regel er det bestemmelsen av den ellipso-

idiske avstand som er lengdemålingens formål. Så har vi begrepet midlere avstand som er lengden av linjen når den projiseres på en parallellflate til referensflaten i endepunktene midlere høyde, altså lengden av kurven mellom P_1' og P_2' . Når det i landmålingen er tale om horisontal avstand, er det som regel den midlere avstand det siktes til. Endelig har vi begrepet kartprojeksjonslengde som er lengden av den rette forbindelseslinje mellom avbildningen av P_1 og P_2 i kartprojeksjonsplanet.

Ved lengdemåling av en linje med horisontalt målebånd, slik at båndet overalt står vinkelrett på loddretningen, vil resultatet med tilstrekkelig tilnærming kunne settes lik den midlere avstand. Det samme vil også være tilfelle dersom vi måler skrått og reduserer de enkelte skrålengder til horisonten. For å komme over til ellipsoidisk avstand, må den midlere avstand reduseres til ellipsoiden, og hvordan det foregår, vil bli behandlet senere under: Reduksjon til ellipsoiden (side 29).

I. Direkte lengdemåling.

1. De viktigste korreksjoner ved lengdemåling.

Hos oss anvendes for det meste målebånd av stål. Tidligere ble målestenger og målekjeder atskillig brukt, men de er nå gått praktisk talt ut av bruk. Det forekommer flere typer av målebånd. Noen typer er brede og tykke, mens andre er smale og tynne. Lengden kan variere fra 10 m og oppover til 100 m og enda mer.

Lengden av et stålbånd er ikke konstant, men avhengig av båndets temperatur og strekk. Ved målinger som tar sikte på den aller høyeste grad av presisjon, må vi også ta hensyn til andre faktorer som tyngdens aksellerasjon og kjedelinjens deformasjon. De sistnevnte faktorerens innvirkning på målingene skal vi komme inn på senere under basismåling.

For framstillingen av lengdemålingens teori er det lønnsomt å innføre betegnelsene buelengde for lengden av buen mellom målebåndets endepunkter, og kordelengde for lengden av den rette linje mellom endepunktene (se fig. 24).

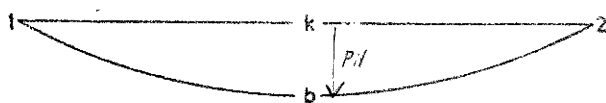


fig. 24

Når målebåndet strekkes ut på et plant underlag, faller b og k sammen. Henger målebåndet fritt bare understøttet i endepunktene, inntar målebåndet en matematisk kurve som går under navn av kjedelinje, og $b \neq k$.

Det umiddelbare måleresultat ved lengdemåling må tilføyes en hel rekke korreksjoner for å komme over til den søkte ellipsoidiske lengde. De korreksjoner som det kan bli spørsmål om, er:

1. korreksjon for uoverensstemmelse mellom målebåndets nominelle og virkelige lengde.
2. korreksjon for elastisk tøying.
3. korreksjon for "pil". *Differansen mellom kord og bue.*
4. korreksjon for temperatur.
5. korreksjon for helning.
6. korreksjon for nedføring til ellipsoiden.

Vi skal så gå over til å behandle de enkelte korreksjoner.

1) Korreksjon for målebåndets lengde.

Vi skaffer oss kjennskap til målebåndets virkelige lengde ved å la det komparere. Her til lands utfører Justervesenet slike kompareringer. Ved presisjonsmålinger, som basismålinger f.eks., må en alltid nytte komparerte presisjonsmålebånd og ta hensyn til avviket mellom målebåndets virkelige og nominelle lengde. Ved målinger med mer moderate nøyaktighetskrav opereres med målebåndets nominelle lengde. Det forutsetter riktignok at båndet er justert, slik at avviket mellom virkelig og nominell lengde holder seg innenfor den brukstoleranse som er fastsatt i loven (brukstoleransen er den feilgrense måleredskapet ikke må overstige for at det skal være lovlig i handel og vandel). Denne brukstoleranse er meget liberal i Norge. For et 10 m stålbånd er den 8 mm, og 12 mm for et 20 m stålbånd. Denne nøyaktighet er på langt nær tilstrekkelig når det dreier seg om presisjonsmålinger. Imidlertid er det mulig etter oppdrag å få utført presisjonskompareringer ved Justervesenet.

I loven om mål og vekt er det foreskrevet at måleredskaper som brukes i handel og vandel skal være justert. For å få Justervesenets godkjenning og bli utstyrt med justerstempel må målebåndets avvik fra den nominelle lengde ikke overskride den såkalte justertoleransen, som er lik halvparten av brukstoleransen. Grunnen til at justertoleransen er fiksert snevrere enn brukstoleransen er det at en vil sikre seg at måleredskapets nøyaktighet til en hver tid skal holde seg innenfor brukstoleransen. Søken er nemlig den at alle måleredskaper taper seg i nøyaktighet ved bruk. En må derfor operere med en viss sikkerhetsmargin.

For lengdemålingsredskaper, som nyttes ved landmåling, er det inn-til videre gjort unntak fra lovens bestemmelse om at alle måleredskaper som brukes i handel og vandel skal være justert og stemplet her i riket. Dispensasjonen er gjort avhengig av at redskapenes riktighet blir kontrollert ved hjelp av justerte redskaper av den person som utfører landmålingen.

Dersom et målebåndes lengde ved komparering er funnet å være $l + dl$, hvor l er målebåndets nominelle lengde, er den korreksjon som må tilføyes hver målebåndslengde gitt ved:

$$k_1 = + dl$$

slik at korreksjonen på hele linjelengden blir $n \cdot dl$, hvor n er antall hele målebåndslengder.

2) Korreksjon for elastisk tøying.

Den elastiske tøying for et målebånd med lengden l er ifølge Hooke's lov gitt ved:

$$\Delta l = \frac{l \cdot s}{E \cdot T}$$

hvor s = strekk, T = tverrsnitt og E = elastisitetsmodulen, som for stål kan settes til 20 000 kg/mm². Dersom det strekk som nyttes under målingen er lik s , mens det strekk som kompareringslengden refererer seg til er s_0 , betinger forskjellen mellom s og s_0 følgelig en forlængelse av båndet gitt ved:

$$dl = + \frac{l}{E \cdot T} (s - s_0)$$

og den tilhørende korreksjon på én målebåndslengde blir:

$$k_2 = + \frac{l}{E \cdot T} (s - s_0) = \alpha (s - s_0)$$

hvor α som blir konstant for ett og samme målebånd, betegnes som vedkommende båndes tøyningskoeffisient. For et 20 m stålbånd av den smale typen (1,3 cm brede og 0,2 mm tykke) blir dl lik 0,385 mm for et avvik i strekket på 1 kg. For å sikre seg at strekket er det samme som ved kompareringen, brukes fjærvekt. Det gjøres som regel bare når det dreier seg om presisjonsmålinger.

3) Korreksjon for "pil".

Når båndet henger fritt, bare påvirket av sin egen vekt og eventuelt strekk, inntar det, som tidligere nevnt, en matematisk kurve som går under navn av kjedelinje, og lengden av korden mellom opphengningspunktene blir forskjellig fra buelengden. I fig. 25 henger målebåndet fritt bare understøttet i

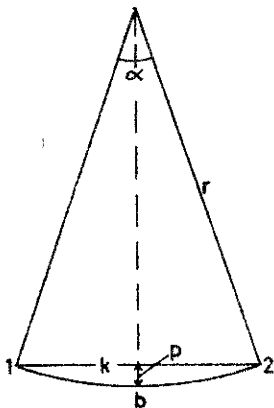


fig. 25

punktene 1 og 2. b blir følgelig en del av en kjedelinje. Stykket p er den såkalte pilhøyde. I praksis kan vi regne med at b er så liten i forhold til krumningsradien at det for de etterfølgende utledninger er tillatt å betrakte b som en sirkelbue med radius lik krumningsradien i kurvens laveste punkt, som vi har kalt r . Av figuren ser vi at:

$$b = r \alpha \quad \text{og} \quad k = 2 r \sin \frac{\alpha}{2}$$

Vinkelen α vil bli en meget liten vinkel. Vi kan derfor tillate oss å avbryte sinusrekken for α med de to første leddene, dvs.

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{1}{6} \alpha^3$$

Herav følger at:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{48}$$

følgelig:

$$b - k = r(\alpha - 2 \sin \frac{\alpha}{2}) = r\{\alpha - 2(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{48})\} = r \frac{\alpha^3}{24}$$

Vi fører inn $\alpha = \frac{b}{r}$ og får:

$$b - k = \frac{b^3}{24r^2}$$

Vi går så inn for å skaffe oss en relasjon mellom r og p . Av figuren ser vi at:

$$p = r - r \cos \frac{\alpha}{2}$$

Ifølge cosinusrekken har vi: $\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, dvs. $\cos \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{\alpha^2}{8}$, følgelig:
 $p = r - r(1 - \frac{\alpha^2}{8}) = r \frac{\alpha^2}{8} = \frac{b^2}{8r}$, dvs. $r = \frac{b^2}{8p}$ som innsatt i ligningen for $b-k$ resulterer i:

$$\underline{b - k = \frac{8}{3} \frac{p^2}{b}}$$

Et annet uttrykk for $b-k$ får vi ved i det første uttrykket for $b-k$ å erstatte r med følgende teoretiske relasjon, hvis utledning ikke tas med her:

$$r = s \frac{b}{v}$$

hvor v er målebåndets vekt og s det strekk som nyttes. Vi får da:

$$\underline{b - k = \frac{b v^2}{24 s^2}}$$

Ved lengdemåling tar en hensyn til skilnaden mellom b og k på følgende måte: Dersom kompareringslengden refererer seg til b , som er det vanligste, må måleresultatet forminskes dersom båndet nyttes fritthengende, dvs.

$$k_3 = - \frac{b v^2}{24 s^2}$$

Refererer derimot kompareringslengden seg til k , får vi riktig resultat når målebåndet brukes fritthengende, men må korrigere måleresultatet når båndet brukes på plant underlag. Korreksjonen blir:

$$k_3' = + \frac{b v^2}{24 s^2}$$

4) Korreksjon for temperatur.

Varmeutvidelseskoeffisienten for stål kan settes til $11,5 \cdot 10^{-6}$ pr. grad C. Dersom kompareringslengden refererer seg til temperaturen t_0 , mens t er den aktuelle temperatur, betinger forskjellen mellom t_0 og t en lengdeendring gitt ved:

$$dl = 1 \cdot 11,5 \cdot 10^{-6} (t - t_0)$$

og den tilhørende korreksjon blir:

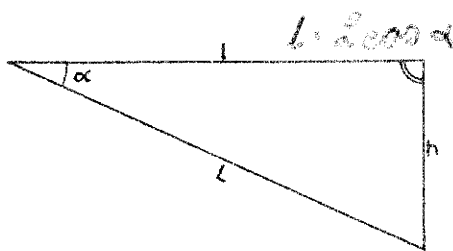
$$k_4 = + 1 \cdot 11,5 \cdot 10^{-6} (t - t_0)$$

I praksis byr det på store vanskeligheter å få bestemt båndets virkelige temperatur. Saken er nemlig den at det særlig på solskinnsdager kan være stor forskjell mellom luftens temperatur og båndets (spesielt ved måling langs bakken).

I praksis er det vanlig at korreksjonen for nominell lengde blir trukket inn i korreksjonen for temperatur på den måten at en beregner ved hvilken temperatur båndet gir riktig lengde. Denne temperaturen t'_0 betraktes som kompareringstemperatur og senere korreksjon for temperatur blir da lik avviket mellom t'_0 og den aktuelle temperatur t .

5) Korreksjon for helning.

a) Korrigering på grunnlag av høydeforskjellen.



Denne korreksjon blir aktuell dersom det er høydeforskjell mellom båndets endepunkter. I fig. 26 er L den målte skråavstand, men l er den søkte horisontale avstand. Korreksjonen som må tilføyes måleresultatet L for å komme over til l , fås av:

fig. 26

$$L + k_5 = l, \text{ dvs. } k_5 = l - L = \sqrt{L^2 - h^2} - L = L(1 - \frac{h^2}{L^2})^{\frac{1}{2}} - L$$

Vi utvikler rotuttrykket etter binominalformelen og får:

$$k_5 = L(1 - \frac{h^2}{2L^2} - \frac{h^4}{8L^4} + \dots) - L$$

Da $\frac{h}{L}$ som regel vil være en liten størrelse, er det tilstrekkelig å begrense rekkeutviklingen til de tre første ledd, hvorved uttrykket for k_5 antar formen:

$$k_5 = - \frac{h^2}{2L} - \frac{h^4}{8L^3}$$

For moderate verdier av h vil det være tilstrekkelig å begrense seg til det første korreksjonsleddet. Forlanger vi at k skal bestemmes med millimeters nøyaktighet, får vi som betingelse for å kunne neglisjere det 2.leddet:

$$\frac{h^4}{8L^3} \leq 0,001$$

som gir $h \leq 1,7$ m for et 10 meters, $h \leq 2,8$ m for et 20 meters og $h \leq 9,5$ m for et 100 meters målebånd.

Utleddningen av hovedleddet i korreksjonen for helning kan foretas enklere på følgende måte:

$$h^2 = L^2 - l^2 = (L - l)(L + l)$$

hvor $L - l = -k_5$, dvs.

$$k_5 = -\frac{h^2}{L + l}$$

Vi innfører her den tilnærming at vi erstatter l med L og får:

$$k_5 = -\frac{h^2}{2L}$$

b) Korrigerings på grunnlag av høydevinkelen.

Dersom lengdemålingen utføres i forbindelse med et vinkelmålende instrument, er det ofte fordelaktig å utføre målingen som skråmåling og bestemme høydevinkelen. Den horisontale avstand er da gitt ved (se fig.26)

$$l = L \cos \alpha$$

Disponeres regnestav med $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ -deling, lønner det seg isteden å beregne korreksjonen som må tilføyes skråavstanden for å komme over til horisontal avstand

$$k_5' = l - L = L \cos \alpha - L = -L(1 - \cos \alpha) = -2L \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

6) Reduksjon til ellipsoiden.

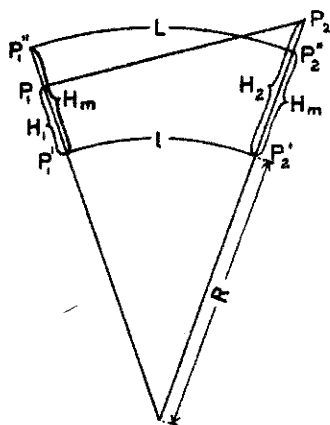


fig. 27

Vi skal så utlede den korreksjon som overfører den midlere lengde til ellipsoidisk lengde. I fig. 27 betrakter vi to punkter P_1 og P_2 hvis midlere avstand L skal reduseres til ellipsoiden. Vi tenker oss ellipsoiden erstattet av en kule med radius lik krumningsradiusen for det ellipsoidesnittet som vedkommende linje befinner seg i. Videre er $H_m = \frac{1}{2}(H_1 + H_2)$ middelhøyden til P_1 og P_2 , L er den målte horisontale lengde (midlere lengde) og l er den reduserte ellipsoidiske lengde.

Av figuren ser vi at:

$$\frac{l}{L} = \frac{R}{R+H} \quad , \quad \text{dvs.} \quad l = L \left(1 - \frac{H}{R+H}\right)$$

Vi kan her med tilstrekkelig tilnærming sette:

$$l = L \left(1 - \frac{H}{R}\right)$$

Korreksjonen som de midlere avstander må tilføyes for å komme over til ellipsoidiske, er følgelig gitt ved:

$$k_6 = - \frac{H}{R} L \quad , \quad \text{eller} \quad k_{6_{\text{om}}} = - 15,6 L_{\text{km}} \cdot H_{\text{km}}$$

For korte avstander og moderate verdier av H_m blir denne korreksjon temmelig liten. I den praktiske landmåling tas ikke hensyn til k_6 ved fastlegging av detaljpunkter ved tachymetri eller rettvinkelmetoden, fordi det her dreier seg om så små avstander, vanligvis ikke over 100 m, at korreksjonen ikke spiller noen praktisk rolle. Det tas heller ikke hensyn til k_6 ved polygonering. Derimot bør det tas hensyn til denne korreksjon ved etableringen av det punktsystemet som tjener som ramme for polygoneringen og fastleggingen av detaljpunktene. Den vanligste metode for etablering av slike rammesystemer er triangulering. Et triangelnett reduseres til ellipsoiden ved å redusere basislinjen. Derved oppnås at samtlige sider i nettet antar ellipsoidiske verdier.

2. Lengdemålingens utførelse.

a) Vanlig lengdemåling i horisontalt terreng.

Vi kommer i det etterfølgende til å operere med 3 nøyaktighetsgrader ved lengdemåling, nemlig 1. vanlig lengdemåling, 2. nøyaktigere lengdemåling og 3. presisjonslengdemåling. Den vanlige lengdemåling tar sikte på en forholdsvis liten nøyaktighet, mellom $\frac{1}{500}$ og $\frac{1}{2000}$, den nøyaktigere lengdemåling på en nøyaktighet mellom $\frac{1}{2000}$ og $\frac{1}{5000}$, mens presisjonsmålingen tar sikte på en nøyaktighet mellom $\frac{1}{5000}$ og $\frac{1}{30000}$.

Før lengdemålingen tar til, må linjen som skal lengdemåles avsettes i marken med stikkstenger eller på annen måte. Med hensyn til valg av framgangsmåte for lengdemålingens praktiske utførelse, vil den være avhengig av om terrenget er horisontalt eller ikke. I horisontalt terreng foregår målingen ved direkte pålegging av målebåndet. Målingen utføres av to personer. Til avmerking av båndlengdene brukes tynne stikker av tre eller metall. Nøyaktigheten av lengdemålingen vil i første rekke være avhengig av at båndets nullstrek holdes nøyaktig an til stikken, at avmerkingen av båndets endepunkter ut-

føres nøyaktig, at båndet ligger tilstrekkelig nøyaktig i linjen, og at strekk og temperatur ikke avviker for mye fra kompareringsverdiene. Ved vanlig lengdemåling brukes vanligvis ikke vekt til å måle strekket med, og heller ikke termometer til bestemmelse av temperaturen, og det er som regel ikke nødvendig å ta hensyn til avviket mellom nominell og virkelig lengde, forutsatt at dette avvik holder seg innenfor brukstoleransen.

b) Vanlig lengdemåling i hellende terreng.

I dette tilfelle kan målingen utføres på én av følgende to måter.

Trappemåling. Målingen utføres av to personer. Måleredskapet holdes horisontalt, og det frie endepunktet projiseres (loddet) ned på marken ved hjelp av lodd. Målingen bør helst foregå nedover bakken. Vedkommende som finner seg bakerst, kan da støtte hånden på bakken når han holder nullpunktet an til den nedsatte stikke, og det muliggjør et sikrere anlegg av båndet enn om han holder det fritt over bakken. Det tas heller ikke her hensyn til korreksjoner for strekk-, temperatur- og lengdeavvik, og heller ikke til korreksjon for "pil".

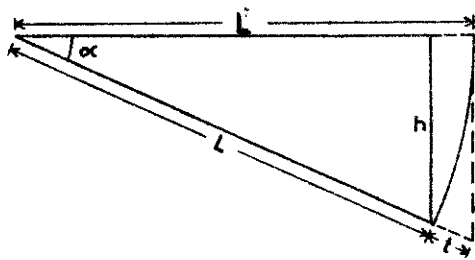
Trappemåling regnes for å være temmelig unøyaktig. Det skyldes i første rekke at nedloddningen av båndets endepunkter blir temmelig usikker, særlig ved påvirkning av vind. Dessuten kommer det feil til som følge av at båndet ikke holdes horisontalt under bruken. Som regel skjer nemlig horisontalstillingen av målebåndet på øyemål ved å bedømme vinkelen mellom båndet og loddsnoeren. Trappemåling må derfor bare brukes dersom den forlangte nøyaktighet er meget beskjeden (i underkant av $\frac{1}{1000}$).

Måling langs bakken. For i dette tilfelle å komme fram til horisontale avstander må måleresultatet korrigeres for helning. Korrigeringen skjer enten på grunnlag av høydeforskjellen mellom intervallenes endepunkter eller på grunnlag av helningsvinkelen. Høydeforskjellen bestemmes ved nivellement, mens helningsvinkelen kan bestemmes ved forholdsvis enkle instrumenter som går under navn av stigningsmåler. Disse angir enten helningen i gradmål eller i o/o. Instrumentet kan også være slik innrettet at en avleser direkte korreksjonen for helning.

Ved måling langs bakken må fallet være jevnt mellom intervallenes endepunkter. En må derfor legge inn mellompunkter i lengdeprofilets knekkpunkter dersom ikke fallet er jevnt for hele båndlengden. På den annen side er det tilstrekkelig med bare én helningsbestemmelse for seksjoner av linjen som har jevn helning.

Måling langs bakken er atskillig nøyaktigere enn trappemåling.

I forbindelse med måling langs bakken blir en ofte stilt overfor den oppgave å sette av punkter i linjen med en gitt horisontal avstand, som vanligvis faller sammen med hele målebåndslengder. Det vil f.eks. være tilfelle ved vegbygging hvor oppgaven går ut på å anbringe peler i vegens midtlinje med 10 eller 20 meters avstand. Oppgaven løses på den måten at en avsetter langs bakken den gitte lengde og beregner den tilleggsmåling t (se fig. 28) som må tilføyes den skrå avstand for å få den søkte horisontale avstand. Ifølge fig. 28 skal vi altså ha:



$$(L + t) \cos \alpha = L, \text{ dvs. } t = \frac{L}{\cos \alpha} - L$$

Vi innfører her:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{L^2 - h^2}}{L} = \sqrt{1 - \frac{h^2}{L^2}}$$

$$\text{følgelig: } t = L(1 - \frac{h^2}{L^2})^{-\frac{1}{2}} - L$$

fig. 28

Vi utvikler potensuttrykket etter binominalformelen og får når vi begrenser rekkeutviklingen til 3 ledd:

$$t = L(1 + \frac{h^2}{2L^2} + \frac{3}{8} \frac{h^4}{L^4}) - L = \frac{h^2}{2L} + \frac{3}{8} \frac{h^4}{L^3}$$

Det siste leddet vil for et 10 meters, resp. 20 meters målebånd utgjøre 1 mm for $h=1,4\text{m}$, resp. $h=2,4\text{m}$. For moderate verdier av h vil det derfor være tilstrekkelig å begrense seg til det første leddet, altså å sette:

$$t = \frac{h^2}{2L}$$

c) Nøyaktigere lengdemåling.

Slik som den vanlige lengdemåling er beskrevet foran, blir alle korreksjoner neglisjert. Vi skal i det etterfølgende rette oppmerksomheten på størrelsen av de feil som derved begås. Vi betrakter tre stålbånd. Det ene er 20 m langt (13,0 mm bredt, 0,2 mm tykt og vekt 0,4 kg). Det andre er et 50 m Lufkin-bånd (9,5 mm bredt, 0,2 mm tykt og vekt 0,750 kg). Det tredje er et 100 m Lundqvist-bånd (4,0 mm bredt, 0,3 mm tykt og vekt 0,925 kg). Som "arbeidsstrek" nyttes 10 kg for alle tre bånd. I den etterfølgende tabell er stilt sammen virkningen av pil-, strekk- og temperaturfeil.

	20 m målebånd		50 m målebånd		100 m målebånd	
	feil mm	relativ feil	feil mm	relativ feil	feil mm	relativ feil
Endring i elastisk tøyning pr. kg. strekkendring	0,39	$\frac{1}{51300}$	1,32	$\frac{1}{37900}$	4,18	$\frac{1}{23900}$
Endring i b-k pr. kg. strekkendring	0,26	$\frac{1}{76900}$	2,34	$\frac{1}{21400}$	7,13	$\frac{1}{14000}$
Resulterende lengdeendring pr. kg. strekkendring	0,65	$\frac{1}{30700}$	3,66	$\frac{1}{13700}$	11,31	$\frac{1}{8850}$
Lengdeendring pr. 1° C temperaturendring	0,23	$\frac{1}{87000}$	0,58	$\frac{1}{87000}$	1,15	$\frac{1}{87000}$
Korreksjon for pil	1,33	$\frac{1}{7500}$	11,72	$\frac{1}{4300}$	35,65	$\frac{1}{2800}$

Hva virkningen av en strekkendring ds angår, er det å merke seg at ved måling langs bakken består den av bare én komponent, nemlig av endring i den elastiske tøyning. Ved måling med fritthengende målebånd derimot inneholder den to komponenter. I tillegg til endringen i elastisk tøyning kommer også en endring i b-k, som kan utledes med utgangspunktet i uttrykket for b-k

$$b - k = k_3 = - \frac{bv^2}{24s^2}$$

dvs.
$$dk_3 = \frac{2bv^2}{24s^3} \cdot ds = - \frac{2}{s} k_3 ds$$

Resultanvirkningen blir lik summen av de to partialvirkninger, som her trekker i samme retning, idet fortegnet blir det samme både for endringen i elastisk tøyning og for b-k.

Av tabellen konstaterer vi for det første en generell tendens i retning av at en neglisjering av de forskjellige korreksjoner (bortsett fra temperaturkorreksjonen) vil resultere i desto større nøyaktighetstap jo lengere målebåndet er. Videre går det fram at de ulike korreksjoner er nokså forskjellige med hensyn til størrelse. Korreksjonen for pil vil normalt dominere i forhold til korreksjonene for strekk og temperatur. Selv uten vekt vil det nemlig ikke falle vanskelig å holde strekkfeilen (avviket i forhold til kompareringsstrekket) under 2-3 kg. Under vanlige forhold vil heller ikke temperaturavviket gjøre mye av seg. Et avvik i forhold til kompareringstemperaturen på 9°C vil jo bare medføre en feil på ca. $\frac{1}{10\ 000}$. Selv uten termometer vil det ikke være vanskelig å bestemme temperaturen innenfor en nøyaktighet av 10°C. Ved siden av korreksjonen for pil vil korreksjonen for avvik mellom nominell og faktisk lengde bety mest. Som allerede nevnt, er brukstoleransen for et 20 m stålbånd 12 mm. I praksis har det riktignok vist seg at vanligvis vil dette avvik holde seg langt under brukstoleransen.

Tar vi sikte på å øke nøyaktigheten utover det som oppnås ved vanlig lengdemåling, må vi altså rette oppmerksomheten mot korreksjonen for pil og avviket mellom nominell og faktisk lengde, og det er nettopp hensyntaken til disse to korreksjoner som sammen med en omhyggeligere utføring av selve målingene, spesielt med hensyn til båndlengdens avmerking, som karakteriserer den nøyaktigere lengdemåling. Det vil da være mulig å oppnå en nøyaktighet på mellom $\frac{1}{2000}$ og $\frac{1}{5000}$. (Ved bruk av 50 og 100 m's bånd kan det være vanskelig å oppnå en nøyaktighet på $\frac{1}{5000}$ uten vekt til å måle strekket med.)

Forøvrig er det mulig på grunnlag av tabellens angivelser å legge an lengdemålingen slik at en oppnår den nøyaktighet som tilsiktes i det enkelte tilfelle.

d) Presisjonslengdemåling.

Dersom vi tar sikte på enda større nøyaktighet enn ca. $\frac{1}{5000}$, kan det oppnås ved en presisjonslengdemåling. Det forutsetter at vi har et komparert stålbånd til disposisjon, slik at vi kjenner båndets nøyaktige lengde for en bestemt temperatur og et bestemt strekk. Dessuten må båndet ha millimeterskalaer ved begynnelses- og endepunktet. I linjen slås ned solide plugger for hver båndlengde. Pluggene bør rage ca. 2 cm over bakken, og deres plassering bestemmes ved en provisorisk lengdemåling, slik at avstanden mellom dem avviker bare lite fra en hel båndlengde. Dessuten må de anbringes nøyaktig i linjen. Små tverravvikfeil vil riktignok ikke influere synderlig på lengdemålingens nøyaktighet (se side 36). På toppen av pluggene anbringes fine stifter som tjener til målemerker under avlesningene. Under målingen strammes båndet med det samme strekket som kompareringslengden refererer seg til, vanligvis 10 kg, og det foretas samtidige avlesninger ved begge målemerkene etter anrop fra den ene av avleserne. Det foretas flere avlesninger for hver båndlengde, og mellom hver avlesning bør båndet helst forskyves litt i lengderetningen. Temperaturen må avleses med visse mellomrom, og høydeforskjellene mellom pluggene bestemmes ved nivellement. Av hensyn til den sikrest mulige bestemmelse av målebåndets temperatur må målingen utføres i overskyet vær. Det må tas hensyn til alle aktuelle korreksjoner.

Ved å utføre lengdemålingen i samsvar med disse regler er det mulig å oppnå en nøyaktighet på $\frac{1}{30\ 000}$ eller enda større.

Ved måling av basislinjer for selvstendige trianguleringer, slik som oppgaven vil foreligge ved de fleste av Jordskifteverkets målinger, må lengdemålingen utføres som presisjonslengdemåling.

I det foregående er forutsatt at terrenget er plant mellom intervallenes endepunkter, slik at målebåndet ligger understøttet på bakken under

målingen. Dersom terrenget er ujevnt, må pelene gjøres lengere og utstyres med skråstrevere for stabilitetens skyld. Pelene må rage så mye opp fra bakken at målebåndet under målingen henger fritt. Denne framgangsmåten faller mer komplisert enn den foregående. Ved basismålinger må en derfor prøve å legge basislinjen til mest mulig horisontalt landskap, eller i hvert fall til lende med jevnt fall.

I reglement for Jordskifteverkets målinger er fastsatt at basislinjen må måles minst to ganger, og de to målingene må ikke avvike mer enn $0,004\sqrt{L}$, hvor L er basislinjens lengde i meter. Måles linjen flere ganger, må middeltallets middelfeil ikke overstige $0,002\sqrt{L}$, som for en basislengde på 400 m betinger en nøyaktighet i betydning av middelfeil på $\frac{1}{10\ 000}$. Disse nøyaktighetsfordringer er temmelig romslige, spesielt på bakgrunn av at den nøyaktighet som kommer til uttrykk ved avvikene mellom de enkelte målinger, er den såkalte indre nøyaktighet som under visse omstendigheter kan avvike atskillig fra den faktiske nøyaktighet. Grunnen til uoverensstemmelse mellom indre og absolutt nøyaktighet ved lengdemåling skyldes at flere av de feil som opptrer, ikke gir seg utslag i spredning av måleresultatene. Som eksempel på slike feil kan nevnes avviket mellom nominell og virkelig lengde.

3. Spesielle vansker ved lengdemåling av rette linjer.

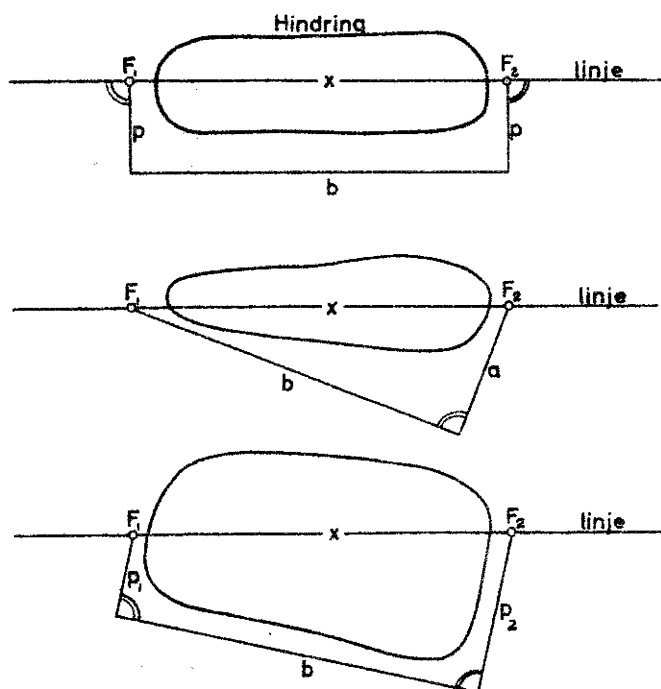


fig. 29

Dersom vi under målingen støter på materielle hindringer i linjen, som umuliggjør en direkte lengdemåling av en viss del av linjen, blir vi nødt til å slå inn på en indirekte bestemmelse av vedkommende seksjon. I alminnelighet vil en av de framgangsmåtene som er antydnet i fig. 29 føre fram, og som ikke skulle trenge noen nærmere forklaring. Av instrumentelt utstyr fordres kun et rettinkelapparat. I det første tilfelle har vi:

$$x = b$$

I det andre tilfelle er x gitt ved:

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

I det siste tilfelle er:

$$x = \sqrt{b^2 + (p_2 - p_1)^2}$$

4. De viktigste feil ved direkte lengdemåling.

Ved lengdemåling opptrer både tilfeldige og systematiske feil, og dessuten en spesiell feilgruppe som går under navn av ensidig virkende feil. De tilfeldige feil skriver seg hovedsakelig fra feil i avlesningen, at nullstrekken ikke holdes nøyaktig inn til det nedsatte merke og at endestrekken ikke avmerkes nøyaktig. De systematiske feil skriver seg i det alt vesentlige fra feil ved båndets lengde, fra neglisjering eller feilaktig bestemmelse av de forskjellige korreksjoner som følge av feilaktig strekk- og temperaturbestemmelse f.eks. Hva de to siste feilene angår, inntar de en mellomstilling mellom de systematiske og tilfeldige feil. Det henger sammen med at de vanligvis setter seg sammen av to komponenter, nemlig en systematisk og en tilfeldig komponent. Den første skyldes et konstant avvik mellom kompareringsstrek og benyttet strekk, mellom kompareringstemperatur og avlest temperatur. Disse systematiske avvik kan f.eks. skrive seg fra at den benyttede fjærvekt til å måle strekket med er feilaktig, eller at målebåndets temperatur oppviser en tilnærmet konstant forskjell i forhold til luftens temperatur. De tilfeldige feilkomponenter derimot skriver seg fra tilfeldige feil i avlesningen av termometeret og i reguleringen av strekket. Vanligvis vil de systematiske feilkomponenter dominere i forhold til de tilfeldige, slik at vi i praksis kan regne de feil som skriver seg fra feilaktig strekk- og temperaturbestemmelse som systematiske.

Til slutt har vi den gruppe av feil som går under navn av ensidig virkende feil. Det "klassiske" eksempel på ensidig virkende feil er feilen som skriver seg fra båndets avvik fra lengderetningen under målingen. I sitt innerste vesen er denne feil en tilfeldig feil. Saken er nemlig den at avviket fra tverretningen vil være tilfeldig både med hensyn til fortegn og størrelse. Virkningen derimot er ensidig, idet feilen - uten hensyn til fortegn og størrelse - alltid fører til for stort måleresultat. Virkningen av tverravviksfeilen er gitt ved k_5 , idet et avvik t i forhold til linjeretningen forårsaker en feil gitt ved (se fig. 30):

$$f = \frac{t^2}{2L}$$

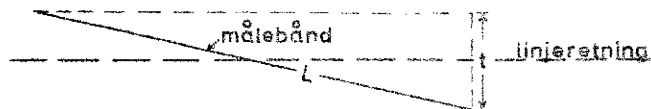


fig. 30

Settes $L=20$ m og $t=0,2$ m blir f lik 1 mm. Vi ser herav at små avvik fra linjereetningen ikke får noen større innvirkning på måleresultatet.

Hva virkningen av feil på bestemmelsen av høydeforskjellen mellom de enkelte intervallers endepunkter angår, så finnes den med utgangspunkt i korreksjonsformelen for helning:

$$k_5 = \frac{h^2}{2L}$$

Dersom h her har feilen dh , betinger det en feil på k_5 gitt ved:

$$dk_5 = \frac{h}{L} dh$$

Dersom det forlanges at denne feil skal holde seg under 1 mm, må:

h i m	dh	
	L=10 m	L=20 m
0	14 cm	20 cm
0,2	5 "	10 "
0,5	2 "	4 "
1,0	1 "	2 "
2,0	0,5 "	1 "

$$dh_i \text{ cm} < \frac{L_i \text{ m}}{10 h_i \text{ m}}$$

Tabellen viser sammenhengen mellom dh og h for at betingelsen $dk_5 < 1$ mm skal være oppfylt. Det går fram av tabellen at kravet til nøyaktighet i bestemmelsen av høydeforskjellen øker med størrelsen av høydeforskjellene.

*

Hva virkningen av de enkelte feilgrupper på sluttresultatet angår, vil dette spørsmålet bli nærmere behandlet i feillæren. Vi nøyer oss her med å slå fast at opphopingen av de systematiske og ensidig virkende feil foregår på en langt ugunstigere måte enn opphopingen av de tilfeldige feil. Det henger sammen med at de siste opptrer like gjerne med positivt som med negativt fortegn, slik at deres virkning i en viss utstrekning elimineres. I feillæren skal vi vise at virkingen av de tilfeldige feil kan settes proporsjonal med kvadratroten av linjelengden. De systematiske og ensidig virkende feil derimot har en tendens til å opptre med konstant verdi for samtlige målebåndslengder. Virkningen av dem kan følgelig settes proporsjonal med linjelengden.

En annen feilgruppe som spiller en stor rolle ved lengdemåling, er de såkalte grove feil. I betegnelsen grove feil ligger det at vi her har med feil å gjøre som skyldes en forsømmelse eller mistak fra målerens side, og som derfor faller utenfor rammen av de feil som normalt vil opptre. I forbindelse med målebåndets avlesninger opptre slike feil oftest som 10 meter feil, meterfeil og desimeterfeil. All erfaring viser at grove feil opptre forholdsvis hyppig ved lengdemåling. Måleanordningen må derfor spesielt ta sikte på en effektiv sikring mot grove feil, enten ved at alle avlesninger kontrolleres omhyggelig, eller enda bedre ved å utføre alle lengdemålinger dobbelt med benyttelse av forskjellige nullpunkter. Det er viktig at denne nullpunktforskyvelse utgjør mer enn én meter, slik at kontrollen også omfatter hele meter.

*

Hva føringen av lengdemåling angår, så gjelder det samme her som overalt ellers ved føring av måleresultater, at det skal skje på en slik måte at en ikke-tilstedeværende fagmann skal kunne finne ut av det hele.

Det kan her bli spørsmål om å basere seg på skissetegning eller på en skriftlig framstilling. Det siste er å foretrekke, da det er langt lettere med ord å få angitt presist de nærmere omstendigheter ved lengdemålingen enn ved skissetegning.

Eksempel:

Lengdebestemmelse: A-B.

Ved måling av skrålengde (fritthengende bånd) og vertikalvinkel.

<u>1.</u>	<u>2.</u>	
83,632	86,218	Bånd: Lundqvist nr. 2
<u>0,000</u>	<u>2,584</u>	S = 10 kg
83,632	83,634	T = 22°
83,633 m		

Altså først en overskrift som viser hva slags linje det dreier seg om, og dernest en nærmere beskrivelse av hvordan lengdemålingen utføres, og til slutt selve måleresultatet.

II. Optisk avstandsmåling.

Innledning.

Den optiske avstandsmåling utgjør et av hovedelementene i den målemetode som går under navn av tachymetri. Avstandsbestemmelsen foregår i prinsippet på den måte at en avstandsmålende kikkert stilles opp i det ene endepunkt og en inndelt stang (distansestang) i det andre endepunkt til den linje hvis lengde skal bestemmes. Ved hjelp av kikkerten er det så mulig å lese av på stangen enten den horisontale avstand direkte, eller størrelser som kan omregnes til horisontal avstand. Den optiske avstandsbestemmelse kan utføres etter to hovedprinsipper, nemlig:

1. Med konstant avstandsmålende vinkel og variabel stanglengde.
2. Med konstant stanglengde og variabel avstandsmålende vinkel.

I begge tilfelle foregår avstandsbestemmelsen ved hjelp av en avstandsmålende vinkel og et stangavsnitt. I fig. 31 er ϵ den avstandsmålende eller parallaktiske vinkel og l stangavsnittet. Dersom stangen står vinkel-

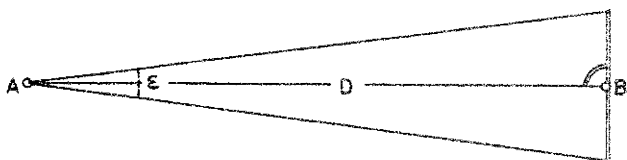


fig. 31

rett på vinkelens halveringslinje, blir trekanten som stangavsnittet og den avstandsmålende vinkel danner, likebenet, og vi har:

$$\operatorname{tg} \frac{\epsilon}{2} = \frac{l}{2D}, \text{ dvs. } D = \frac{l}{2 \operatorname{tg} \frac{\epsilon}{2}}$$

Det langt vanligste er at den avstandsmålende vinkel frambringes ved instrumentet og at stangen anbringes i det andre endepunktet av linjen, men det forekommer også prinsipper hvor rollene er byttet om, slik at stangen anbringes ved instrumentet, mens den avstandsmålende vinkel frambringes i det andre endepunktet av linjen.

Under hver av de to hovedgruppene forekommer en rekke undergrupper. For oversiktens skyld følger først en oppstilling som viser hvordan det faller naturlig å inndele de forskjellige metoder eller prinsipper som den optiske avstandsbestemmelse baserer seg på:

- A. Optisk avstandsmåling med konstant avstandsmålende vinkel og variabel stanglengde.
 - 1. Instrumenter med distansestreker
 - a. Konstant strekavstand
 - b. Variabel " } selvreduserende instrumenter.
 - 2. Skruvavstandsmålere.
 - 3. Avstandsmåling ved hjelp av dobbeltbilder.
- B. Optisk avstandsmåling med konstant stanglengde og variabel avstandsmålende vinkel.
 - 1. Med horisontal stang.
 - 2. Med vertikal stang.

Vi går så over til en nærmere behandling av de enkelte grupper.

A. Optisk avstandsmåling med konstant avstandsmålende vinkel og variabel stanglengde.

1. Instrumenter med distansestreker
(konstant strekavstand).

Denne konstruksjon er den eldste. Prinsippet skriver seg fra Reichenbach. De to siktelinjer som inneslutter den avstandsmålende vinkel, framkommer ved hjelp av to horisontale distansestreker på trådkorsplaten (se fig. 32, hvor m er den vanlige horisontale tråd, mens ø og n er de to distansestreker, henholdsvis øvre og nedre). Vi skal i det etterfølgende behandle utformingen av dette prinsipp for de to hovedkikkerttyper.

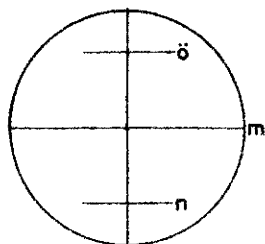


fig. 32

a. Alminnelig (astronomisk) kikkert med Ramsdens okular.

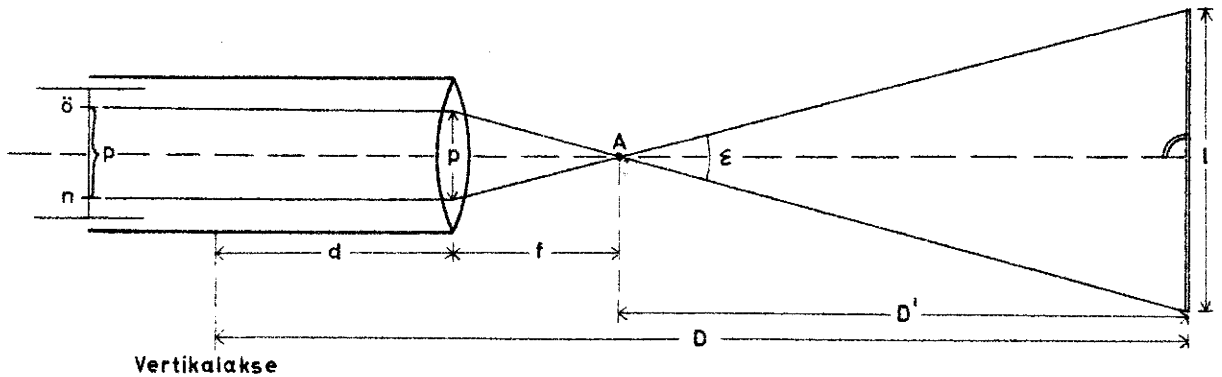


fig. 33

Fig. 33 anskueliggjør forholdene for det tilfelle at siktelinjen treffer stangen under en rett vinkel. Den anførte strålegang bygger på den forenklete betraktningssmåte at objektivsystemets to hovedplan faller sammen. Den distansemålende vinkel ϵ er framkommet ved å betrakte strålegangen til to stråler fra δ og n som er parallelle med objektivets optiske akse. Toppunktet A til den avstandsmålende vinkel går under navn av det analaktiske punkt. I foreliggende tilfelle faller det sammen med objektivets forreste brennpunkt. Av figuren ser vi at:

$$D' = \frac{l}{2 \operatorname{tg} \epsilon/2} = \frac{l}{2 \frac{p}{2f}} = \frac{f}{p} l = k \cdot l$$

Avstanden fra instrumentets vertikalakse til stangen blir:

$$D = d + f + D' = (d+f) + \frac{f}{p} l = c + k \cdot l$$

hvor c , som er avstanden fra det analaktiske punkt til vertikalaksen, betegnes som addisjonskonstant, mens k betegnes som multiplikasjonskonstant. Den siste gjøres vanligvis lik 100.

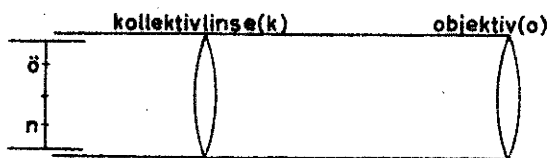


fig. 34

For utregningen av avstanden er det naturligvis fordelaktig om addisjonskonstanten er lik null, hvilket inntreffer dersom det analaktiske punkt faller i vertikalaksen. Den første som klarte å løse dette problem, var italieneren Porro. Han oppnådde det ved å anbringe

en såkalt kollektivlinse mellom objektiv- og okularlinsen i en konstant avstand fra objektivet (se fig. 34).

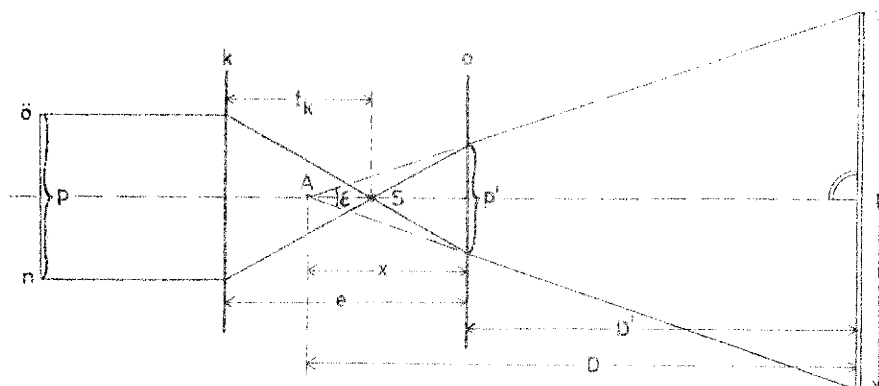


fig. 35

Fig. 35 viser hvordan den distanse-målende vinkel ϵ framkommer, idet vi på nytt betrakter to stråler fra δ og n parallelle med den optiske akse. Vi har også her gjort den forenkling

at vi betrakter hovedplanene som sammenfallende. Vi har ifølge figuren:

$$\frac{D'+x}{1} = \frac{x}{p'}, \text{ dvs. } D'+x = \frac{x}{p'} \cdot 1 = D$$

Videre har vi:

$$\frac{p'}{p} = \frac{e - f_k}{f_k}, \text{ dvs. } p' = p \frac{(e - f_k)}{f_k}$$

Dersom vi tenker oss en gjenstand anbrakt i kollektivlinsens brennpunkt S , vil den avbildes virtuelt ved objektivlinsen i pkt. A , dvs. A er det virtuelle bildepunkt til S . Vi må følgelig ha, idet objektivets brennvidde betegnes med f_o :

$$\frac{1}{e - f_k} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f_o}, \text{ dvs. } x = \frac{f_o (e - f_k)}{f_o - (e - f_k)}$$

Ved å sette uttrykkene for p' og x inn i uttrykket for $D'+x$ fås:

$$D'+x = D = \frac{f_o f_k}{f_o + f_k - e} \frac{1}{p} = \frac{F}{p} \cdot 1$$

hvor altså F er den ekvivalente brennvidde til det sammensatte system av objektiv og kollektivlinse. Det er klart at pkt. A får en fast beliggenhet, idet e jo etter forutsetningen er konstant. Ved passende valg av brennvidde for kollektivlinsen og avstand e kan det oppnås at A faller i vertikalaksen, hvorved addisjonskonstanten blir lik null.

Det som vi har vist foran for Perro's kikkert, at multiplikasjonskonstanten er lik forholdet mellom objektivsystemets ekvivalente brennvidde og trådkorsavstanden, har generell gyldighet, uansett kikkertform og okular-type.

b. Kikkert med indre fokusering.

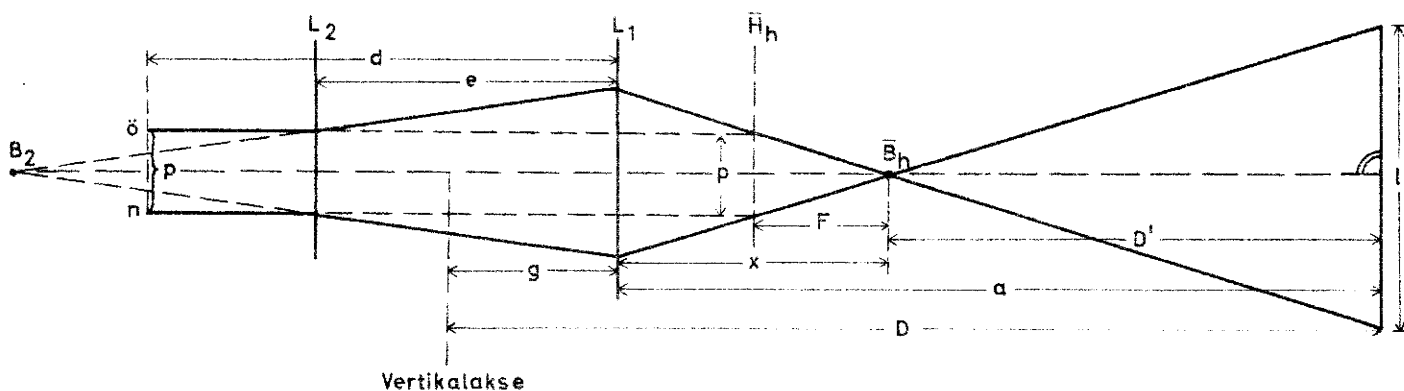


fig. 36

I fig. 36 betyr:

- L_1 = den positive objektivlinse med brennvidde f_1 .
- L_2 = den negative fokuserlinse med brennvidde f_2 .
- d = avstanden mellom trådkors og objektivlinse, som er konstant.
- e = den variable avstand mellom objektivlinse og fokuserlinse.
- B_2 = bakerste brennpunkt til fokuserlinsen.
- F = objektivsystemets ekvivalente brennvidde.
- \bar{H}_h = ekvivalentssystemets forreste hovedplan.
- \bar{B}_h = " " brennpunkt.

Av figuren ser vi at:

$$\frac{1}{D'} = \frac{p}{F} \quad , \quad \text{dvs.} \quad D' = \frac{F}{p} l$$

Videre har vi:

$$D = g + x + D' = g + x + \frac{F}{p} l = c + k l$$

Dermed har det lykket oss å få uttrykt D ved et tilsvarende uttrykk som det vi utledet tidligere for den astronomiske kikkert. Imidlertid er det her å merke seg at hverken c eller k denne gang er konstant. Som bekjent er objektivets ekvivalente brennvidde gitt ved:

$$F = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - e}$$

Her er e variabel, følgelig vil F bli variabel. Videre blir størrelsen x , som er gitt ved:

$$x = \frac{f_1 f_2 - e f_1}{f_1 + f_2 - e}$$

også variabel, dvs. såvel multiplikasjons- som addisjonskonstanten er variabel. Det ligger derfor nær å trekke den slutning at kikkerter med indre fokusering er ubrukelige til optisk avstandsmåling. Når så ikke er tilfelle, skyldes det at virkningen av variasjonene i F og x med stor tilnærming opphever hverandre, slik at vi også for kikkerter med indre fokusering kan sette:

$$D = c + 100 \cdot l$$

hvor c blir en praktisk talt konstant størrelse, som av hensiktsmessige grunner gjøres mest mulig lik null. (I uttrykket for D har vi innført verdien 100 for multiplikasjonskonstanten, men det er selvsagt ingen ting i veien for å operere med andre verdier.)

I den etterfølgende tabell blir spørsmålet om addisjonskonstantens avvik fra grunnverdien belyst tallmessig, idet multiplikasjonskonstanten betraktes som eksakt konstant lik 100, slik at hele feilen ved bruk av ligningen $D=c+k \cdot l$ tilskrives addisjonskonstanten. Tabellen bygger på en kikkert med indre fokusering med:

$$f_1 = + 179,2 \text{ mm} , f_2 = - 78,6 \text{ mm} , d = 218,8 \text{ mm} \text{ og } g = 90 \text{ mm}.$$

a m	e mm	F mm	x mm	$k = \frac{F}{p}$	l m	D= $k \cdot l + x + g$	$100 \cdot l$ m	c mm
∞	139,800	359,310	998,4	100,-				
300	139,943	358,008	995,444	99,6377	3,00092	300,09	300,092	- 2
100	140,229	355,425	989,530	98,9187	1,00093	100,09	100,093	- 3
10	144,195	323,091	915,815	89,9196	0,10103	10,09	10,103	-13
5					0,05114	5,09	5,114	-24

I tabellen er $k \cdot l + x + g$ lik den virkelige avstand fra stangen til instrumentets vertikalakse, mens $100 \cdot l$ er verdien vi får ved optisk avstandsbestemmelse. Alle størrelser er beregnet på grunnlag av de gitte utgangsdata. Av dette eksempel går det fram at det er mulig også å nytte kikkerter med indre fokusering til optisk avstandsbestemmelse, idet ligningen:

$$D = c + k l$$

er oppfylt med tilstrekkelig tilnærming. I foreliggende tilfelle er k gjort lik eksakt 100 for $a = \infty$, dvs. trådkorsavstanden er gjort lik 3,5931 mm, og vi ser da at vi får bestemt avstandene optisk ved å multiplisere stangavlesningene l med 100 med en nøyaktighet på ca. 2 cm for intervallet 300 - 5 m. Det maksimale avvik opptrer for avstanden 5 m og er lik 2,4 cm. I praksis blir det imidlertid sjelden aktuelt å bruke optisk avstandsbestemmelse for avstander under ca. 20 m fordi det som regel faller raskere å måle mindre avstander

direkte, og for avstander større enn 20 m er feilen som følge av at ligningen

$$D = c + k \cdot l$$

ikke er eksakt oppfylt for konstante verdier av c og k , helt betydningsløs.

2. Bestemmelse av horisontale avstander ved hellende siktelinje.

Vi har i det foregående forutsatt at siktelinjen treffer stangen under en rett vinkel. Dreier det seg om hellende siktelinje, kan stangen og siktelinjen innta følgende tre stillinger i forhold til hverandre:

- a. Stangen står vinkelrett på siktelinjen.
- b. " " loddrett.
- c. " " horisontalt.

a. Stangen står vinkelrett på siktelinjen.

Av fig. 37 ser vi at:

$$D = (c+kl)\cos \alpha + s \sin \alpha$$

og

$$\Delta h_{12} = (c+kl)\sin \alpha + i - s \cos \alpha$$

hvor i og s står for instrumenthøyde og siktehøyde. Denne metode har fått liten utbredelse i praksis på grunn av at det byr på vanskeligheter å få stilt stangen slik i forhold til siktelinjen. Stangen må i tilfelle utstyres

med et diopter som står vinkelrett på stangens lengderetning, og som ved hver stangoppstilling siktes inn mot instrumentet.

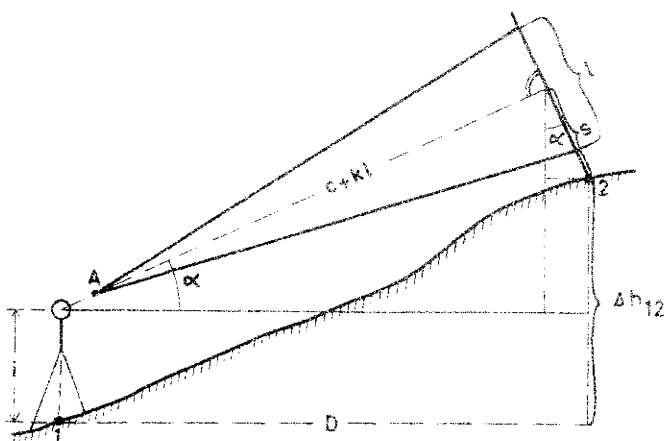
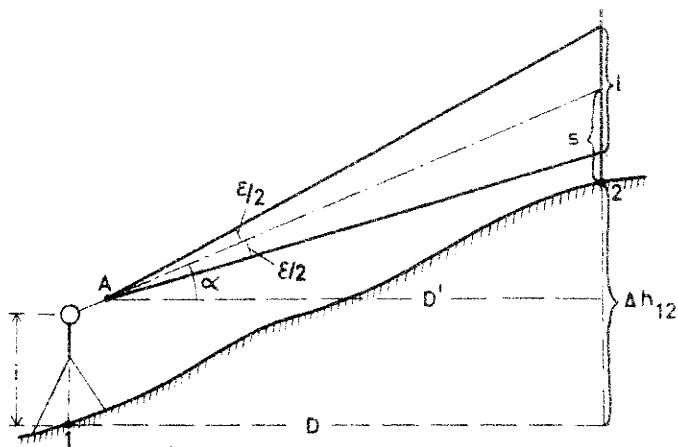


fig. 37

b. Stangen står loddrett.



Dette er den metode som spiller den største rolle i praksis. I fig. 38 har vi kalt den horisontale avstand mellom det analaktiske punkt og distansestangen for \$D'\$. Vi har da ifølge fig. 38, hvor den strek-prikkede linje forestiller siktelinjen gjennom midttråden:

fig. 38

$$\begin{aligned}
 l &= D' \operatorname{tg}(\alpha + \frac{\epsilon}{2}) - D' \operatorname{tg}(\alpha - \frac{\epsilon}{2}) \\
 &= D' \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \frac{\epsilon}{2}}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\epsilon}{2}} - \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \frac{\epsilon}{2}}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\epsilon}{2}} \right) = D' \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\epsilon}{2} + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg} \frac{\epsilon}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\epsilon}{2}} \\
 &= D' \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\epsilon}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\epsilon}{2}} = D' \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\epsilon}{2}}{\cos^2 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\epsilon}{2})}, \text{ som resulterer i}
 \end{aligned}$$

$$D' = \frac{1 \cos^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \frac{\epsilon}{2}} (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\epsilon}{2})$$

Vi innfører her: $\operatorname{tg} \frac{\epsilon}{2} = \frac{p}{2f} = \frac{1}{2k}$ og får:

$$D' = k l \cos^2 \alpha - \frac{1 \sin^2 \alpha}{4 k}$$

Den horisontale avstand \$D\$ fås ved til \$D'\$ å addere \$c \cdot \cos \alpha\$, dvs.

$$D = c \cos \alpha + k l \cos^2 \alpha - \frac{1 \sin^2 \alpha}{4 k}$$

som er det eksakte uttrykk for den horisontale avstand ved optisk avstandsbestemmelse med hellende siktelinje og loddrett stang. Det siste leddet i formelen ovenfor blir så ubetydelig at det uten videre kan neglisjeres. Det framgår av den etterfølgende oversikt som refererer seg til \$k=100\$ og \$l=1\$ m:

\$\alpha\$	\$\frac{1 \cdot \sin^2 \alpha}{4 k}\$
\$25^\circ\$	\$0,4\$ mm
\$50^\circ\$	\$1,3\$ "
\$75^\circ\$	\$2,1\$ "

Vi kan derfor sette:

$$D = c \cos \alpha + kl \cos^2 \alpha$$

For høydeforskjellen finner vi:

$$\Delta h_{12} = D \operatorname{tg} \alpha + i - s = c \sin \alpha + k \cdot l \cos \alpha \sin \alpha + i - s$$

Disse formlene for D og Δh er tungvinte å regne med. For den praktiske regning gjøres derfor den tilnærming at vi setter:

$$D = (c + kl) \cos^2 \alpha$$

og
$$\Delta h_{12} = D \operatorname{tg} \alpha + i - s = (c + kl) \sin \alpha \cos \alpha + i - s$$

som er de formler som nyttes i praksis. De feilene som derved begås, er gitt ved:

$$f_D = c \cos \alpha - (c + kl) \cos^2 \alpha$$

$$f_{\Delta h} = c \sin \alpha - (c + kl) \sin \alpha \cos \alpha$$

Disse feilene gjør seg altså bare gjeldende for instrumenter med addisjonskonstant forskjellig fra null. For $c=0,5$ m og den ekstremt store høydevinkel $\alpha=50^\circ$ utgjør disse feil: $f_D = f_{\Delta h} = 0,1$ m.

Med hensyn til utregningen av horisontal avstand og høydeforskjell etter formlene:

$$D = (c + kl) \cos^2 \alpha$$

og
$$\Delta h = (c + kl) \sin \alpha \cos \alpha$$

er regnestav mest hensiktsmessig. Istedenfor å beregne den horisontale avstand direkte er det av regnetekniske grunner å foretrekke å regne ut den korreksjon ΔD som må tilføyes den på stangen avleste avstand $c+kl$ for å komme over til horisontal avstand. Vi skal altså ha:

$$\Delta D + c + kl = (c + kl) \cos^2 \alpha$$

dvs.
$$\Delta D = (c + kl) \cos^2 \alpha - (c + kl) = \underline{\underline{-(c + kl) \sin^2 \alpha}}$$

Høydeforskjellen derimot regnes ut direkte på grunnlag av formelen $h = (c+kl) \sin \alpha \cos \alpha$. Regnestaven må altså være forsynt med deling for $\sin^2 \alpha$ og $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2 \alpha$.

c. Horizontal stang vinkelrett på siktelinjen.

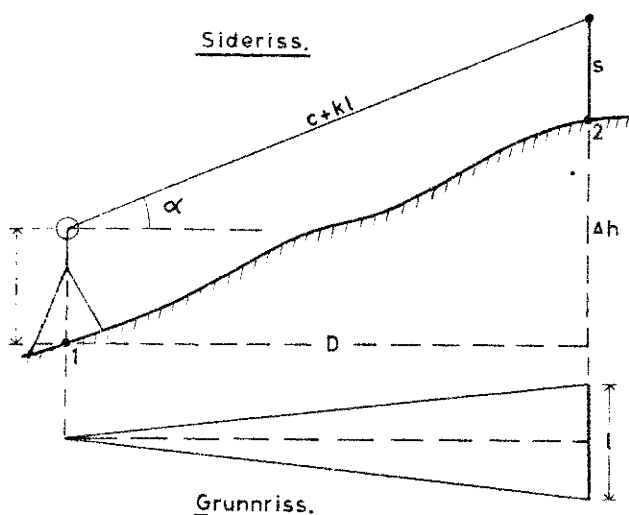


fig. 39

Distansestreke er her anbrakt på den horisontale trådkorsstrek i stedet for på den vertikale. Av fig. 39 følger at:

$$D = (c + kl) \cos \alpha$$

$$\text{og } \Delta h_{12} = (c + kl) \sin \alpha + i - s$$

3. Instrumenter med distansestreker.
(variabel strekavstand)

Hos disse instrumenter er distansestreke erstattet av to kurver eller diagrammer hvis avstand varierer med høydevinkelen på en slik måte at stangavsnitt multiplisert med faste multiplikasjonskonstanter alltid gir den horisontale avstand og høydeforskjellen. Slike instrumenter betegnes derfor som

selvreduserende. I fig. 40

er forutsatt at det analaktiske punkt A faller i horisontalaksen, slik at $c=0$. Høydevinkelen til den distansemålende vinkels nedre vinkel er α . Betingelsen for at instrumentet skal være selvreduserende er at $D=l_0 \cdot l_1$ (eller generelt $D=k_1 l_1$).

Av figuren ser vi at

$$\frac{D'}{\cos(\alpha + \epsilon)} = \frac{l_1}{\sin \epsilon}$$

$$\text{dvs. } D' = \frac{l_1}{\sin \epsilon} \cos(\alpha + \epsilon) = \frac{D}{\cos \alpha}$$

som resulterer i:

$$D = l_1 (\cos^2 \alpha \operatorname{ctg} \epsilon - \cos \alpha \sin \alpha)$$

Av ligningen: $D = k_1 l_1$ følger:

$$k_1 = \frac{D}{l_1} = \cos^2 \alpha \operatorname{ctg} \varepsilon - \cos \alpha \sin \alpha$$

dvs.
$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\cos^2 \alpha}{k_1 + \sin \alpha \cos \alpha}$$

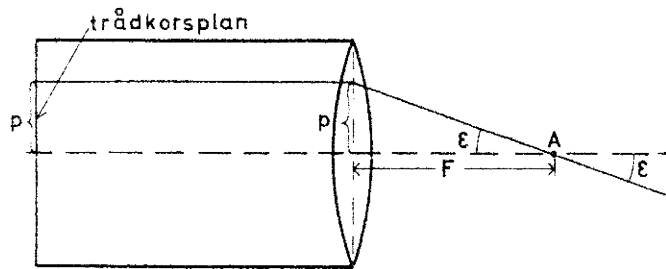


fig. 41

Kaller vi avstanden mellom distansestrekene for p , har vi under forutsetning av at den avstandsmålende vinkels ene ben faller sammen med objektivet optiske akse (se fig. 41):

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{p}{F}$$

dvs.
$$p = F \frac{\cos^2 \alpha}{k_1 + \sin \alpha \cos \alpha}$$

som blir en funksjon av høydevinkelen. Når strekavstanden er i samsvar med denne ligning,

vil altså instrumentet være selvreduserende, dvs. den horisontale avstand vil være lik $100 \cdot l_1$ (generelt lik $k_1 l_1$).

På grunnlag av den utledede ligning for p konstrueres to kurver eller diagrammer. En av kurvene, som går under navn av grunnkurven, er en sirkel, og den andre kurven - distansekurven - er regnet ut i samsvar med formelen for den variable distansestrekavstand. Diagrammene anbringes på eller ved høydesirkelen og koples sammen med instrumentets bevegelse i vertikalplanet. Dia-

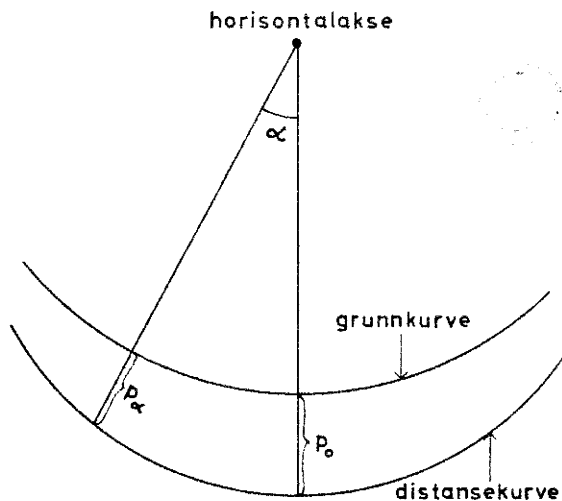


fig. 42

grammene avbildes i trådkorsplanet, og det hele er innrettet på en slik måte at det er stykket p_α som avbildes inntil den vertikale tråd, og som følgelig blir avstanden mellom distansestrekene dersom høydevinkelen er α (se fig. 42).

Det vanligste er at instrumenter av denne type er utstyrt med to sett diagrammer, ett sett for direkte bestemmelse av horisontale avstander og ett sett for direkte bestemmelse av høydeforskjeller. I fig. 43 skal altså høydeforskjellen være gitt ved:

$$\Delta h = k_2 l_2 + i - s$$

len være gitt ved:

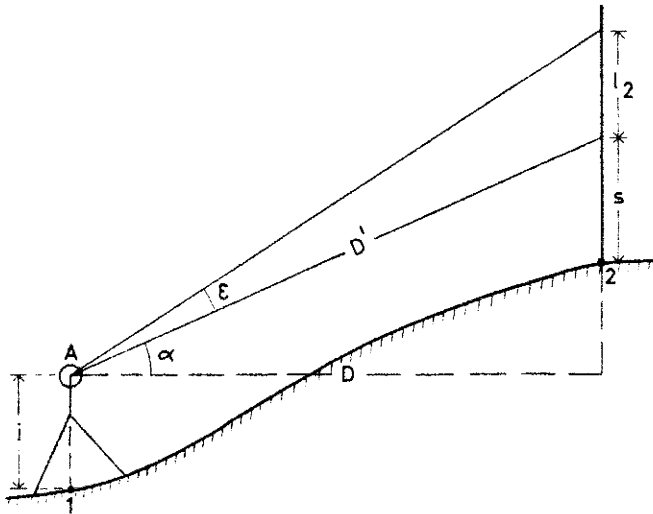


fig. 43

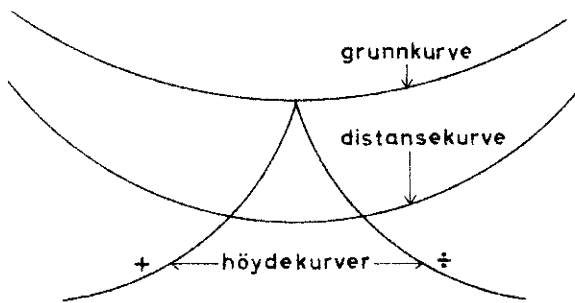


fig. 44

Fig. 45 viser et eksempel på avlesning hos et instrument med "diagramtrådkors". Eksemplet refererer seg til det Hammer-Fennelske tachymeter. I

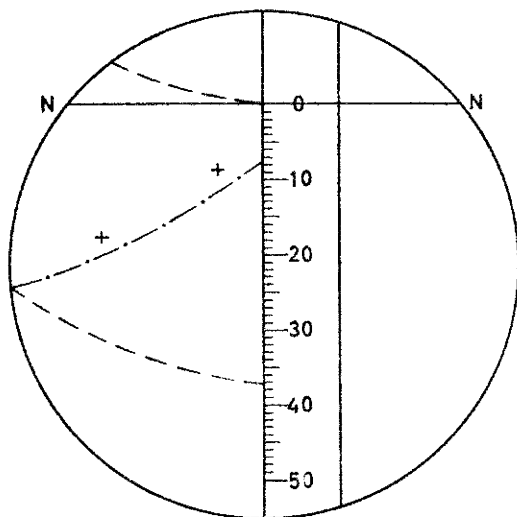


fig. 45

hvor l_2 er stangavsnittet mellom høydediagrammene. For den variable avstand mellom høydediagrammene finner vi på samme måte som ved utledningen av den tilsvarende avstand mellom distansediagrammene:

$$p' = F \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{k_2 + \sin^2 \alpha}$$

I praksis lar en grunnkurven være felles for begge diagrammene slik at vi i alt får tre kurver, nemlig grunnkurven eller nullkurven, distansekurven og høydekurven (se fig. 44). Vanligvis gjøres k_2 lik $2c$. Hos enkelte instrumenter opptrer to sett høydediagrammer, ett med $k_2 = 1c$ og ett med $k_2 = 2c$.

Ved bruk av selvreduserende instrumenter innretter en seg slik i praksis at $i = s$, og avleser da direkte høydeforskjellen mellom instrument- og stangoppstillingspunktet. For $i \neq s$ må differensen $i - s$ adderes til den avleste høydeforskjell.

Fig. 45 viser et eksempel på avlesning hos et instrument med "diagramtrådkors". Eksemplet refererer seg til det Hammer-Fennelske tachymeter. I fig. 45 er NN horisontaltråden, som innstilles på stangens nullpunkt. De strekede diagrammene er distansekurvene. Den øverste av disse er grunnkurven, og den tangerer horisontaltråden i den vertikale skillelinje som samtidig fungerer som vertikaltråd. Den nederste strekede kurve bestemmer sammen med horisontaltråden et stangavsnitt som multiplisert med $10c$ gir den horisontale avstand. Den strek-prikkede kurven, høydekurven, bestemmer sammen med horisontaltråden et stangavsnitt som multiplisert med $2c$ gir høydeforskjellen mellom instrumentets horisontalakse og stangens nullpunkt. Avlesningene blir:

$$D = 37,3 \text{ m} \quad \text{og} \quad \Delta h = + 1,54 \text{ m}$$

idet tegnet + på høydekurven angir at høydeforskjellen er positiv.

Stangen til dette instrument er konstruert på en slik måte at delingen kan forskyves i forhold til stangens understøttelsespunkt. Dette benyttes til å gjøre s lik i , idet delingens nullpunkt innstilles på høyden i i forhold til understøttelsespunktet. Derved oppnås at høydeforskjellen mellom instrumentoppstillings- og stangoppstillingspunktet kan avleses direkte på stangen som $\Delta h = k_2 l_2$.

4. Skrueavstandsmålere.

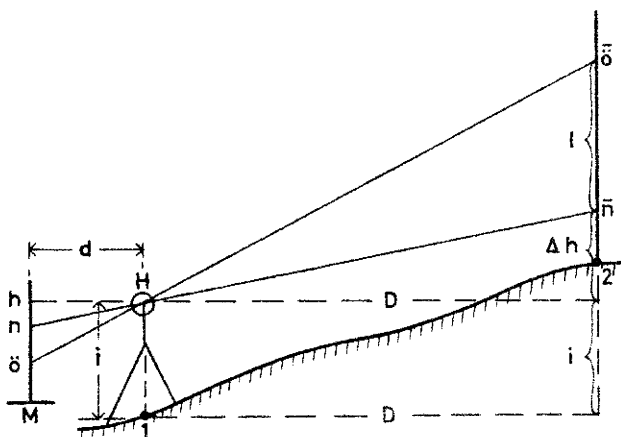


fig. 46

Instrumentet er her dreibart om horisontalaksen H ved hjelp av mikrometerskruen M . Avlesningene på M som svarer til stanginnstillingene \bar{n} og $\bar{\sigma}$, er n og ø . Det vi leser av på M er den lineære forskyvelse langs mikrometerskruens akse. Vi har følgende:

$$\frac{\sigma - n}{d} = \frac{1}{D} \quad , \quad \text{dvs.} \quad D = \frac{d}{\sigma - n} l$$

Av hensyn til utregningen av D lønner det seg å operere med en konstant

verdi for differensen $\sigma - n$, dvs. med et konstant ømdreiningstall på mikrometerskruen, og d bør være slik avpasset til denne differens at $\frac{d}{\sigma - n}$ blir lik 100. Men det er selvsagt ikke noe i vegen for å operere med konstant verdi for l og variabel $\sigma - n$, eller med vilkårlige verdier for både l og $\sigma - n$, men utregningen av D blir da mer tungvint.

Dersom avlesningen på M for horisontal siktelinje er h , utledes høydeforskjellen av ligningen:

$$\frac{n - h}{d} = \frac{\Delta h}{D} \quad , \quad \text{dvs.} \quad \Delta h = D \frac{n - h}{d} = \frac{n - h}{\sigma - n} l$$

5. Avstandsmåling ved hjelp av dobbeltbilder.

Hos de instrumenter som er innrettet for avstandsmåling etter dette prinsippet, dannes den avstandsmålende vinkel ved hjelp av glassprismer som

skytes inn i strålegangen. Prinsippet skriver seg fra en amerikaner ved navn Richard.

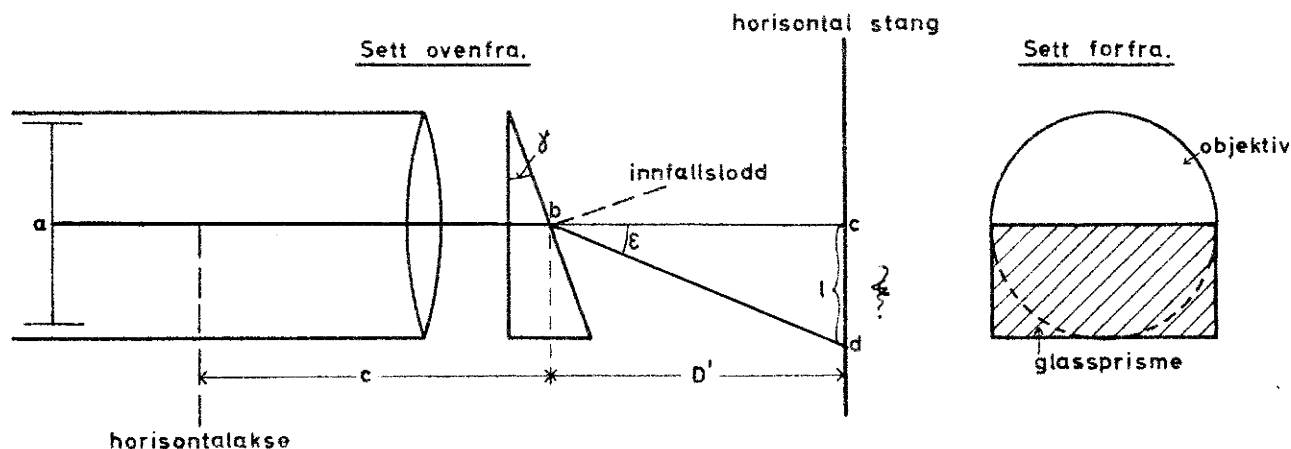


fig. 47

Fig. 47 tar sikte på å anskueliggjøre prinsippet. Glassprismet, som må være akromatisk, dekker bare den ene halvdel av objektivet. Strålen a-b-c passerer gjennom objektivets udekte halvdel og får ingen bøyning. Den røde stråle derimot treffer glassprismet hvor den får en avbøyning lik vinkelen ϵ . I punkt a i trådkorsplanet får vi følgelig avbildning både av pkt. c og d på stangen. Vinkelen ϵ blir konstant og kun avhengig av prismets brytende vinkel γ . Av fig. 47 ser vi at:

$$D' = l \operatorname{ctg} \epsilon = k \cdot l$$

Ved passende valg av brytningsvinkel γ sørges for at ϵ får en verdi gitt ved $\operatorname{ctg} \epsilon = l_{00}$, som betinger verdien l_{00} for multiplikasjonskonstanten.

Vi får altså to avbildninger av stangen, som ligger forskjøvet i forhold til hverandre. I kikkertens synsfelt får vi fram et stangbilde som vist i fig. 48, hvor den øverste halvdel representerer det avbøyde bildet og den ned-

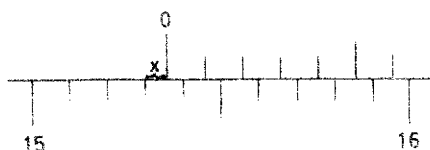


fig. 48

erste halvdel avbildningen ved de ubrutte stråler. Stangavsnittet l som er lik bildeforskyvelsen, blir i dette tilfelle lik 153,6 cm. Med $k=100$ svarer hertil avstanden 153,6m.

Slik som beskrevet foran, var den opprinnelige utforming av metoden. Senere er den blitt vesentlig forbedret, og denne forbedring knytter seg hovedsakelig til bestemmelsen av stykket x i fig. 48, som vi forutsatte bestemt ved jugering. På de moderne instrumenter blir det sjaltet inn en planparallel

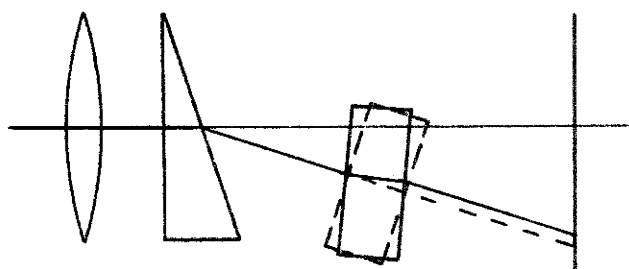


fig. 49

glassplate i strålegangen, slik som vist i fig. 49. I nullstillingen (den strekede stilling) står platen vinkelrett på den avstandsmålende vinkels avbøyde ben, og influerer følgelig ikke på strålegangen (den strekede røde stråle). Dreies platen om en akse loddrett på figurens plan, resulterer herav en parallellforskyvelse av strålen (den helt opptrukne røde stråle). Dreining av platen skjer ved håndtering av en mikrometerskrue, og hele innretningen går under navn av optisk mikrometer. Vi går tilbake til avlesningseksemplet i fig. 48. Ved hjelp av mikrometerskruen bringes o-streken til koinssidens med en strek på nederste stangdeling, og avlesningen setter seg sammen av stangavles-

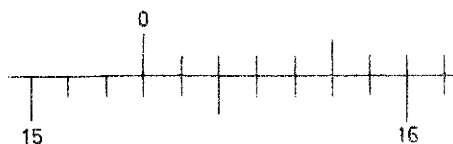


fig. 50

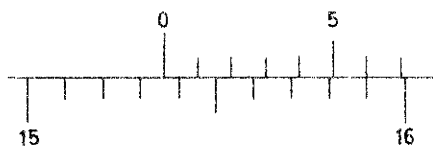


fig. 51

eller uten planparallell glassplate - gis det også konstruksjoner med to prizmer og to planparallele glassplater. Det er f.eks. tilfelle hos den Wildske avstandsmåler (se fig. 52). Prismene dekker hver sin halvpart av objektivet.

Sett ovenfra.

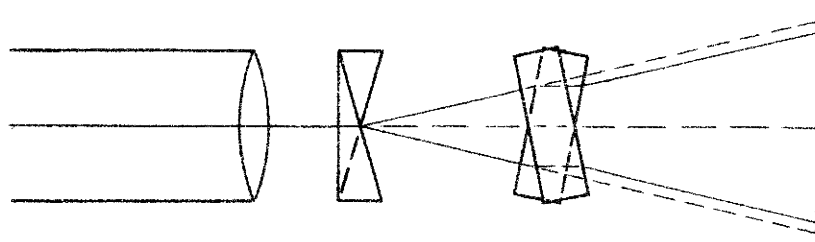


fig. 52

Hvert glassprisme er "tilordnet" en planparallell glassplate, som i nullstillingen står vinkelrett på hvert sitt av den avstandsmålende vinkels ben. Til nullstillingen svarer den strekede strålegang. Ved hjelp av en mikrometerskrue kan platene dreies like mye hver sin

veg, hvorved strålene parallellforskyves, og vi får den helt opptrukne stråle. Mikrometerskruen dreies inntil koinssidens av to stangstreker. Den Wildske distansemåler opptrer som tilbehør til Wild-teodolittene og monteres på når instrumentet skal brukes til optisk avstandsbestemmelse. Den brukes i forbindelse med horisontal stang.

Slik som prinsippet for avstandsmåling ved hjelp av dobbeltbilder er beskrevet ovenfor, resulterer det i skrå-avstander. For å komme over til

horisontale avstander må den tilhørende høydevinkel bestemmes, hvorefter den horisontale avstand D utledes ved:

$$D = (c + kl) \cos \alpha$$

hvor altså c ifølge fig. 47 er lik avstanden fra glassprismets forreste kant til vertikalaksen. I praksis sørges for at c blir lik null, og det oppnås ved å "trekke inn" c i stangdelingen. Er f.eks. c lik $2c$ og k lik $10c$, gjøres c lik null ved å anbringe stangens nullpunkt 2 mm feilaktig.

Imidlertid er det mulig å utforme dobbeltbildeprinsippet på en slik måte at det virker selvreduserende. Det er f.eks. tilfelle hos den Bosshardt-Zeisske avstandsmåler. Her består prismeanordningen av to kileprismer som dekker den ene halvdel av objektivet. Glasskilene kan dreies om en felles akse

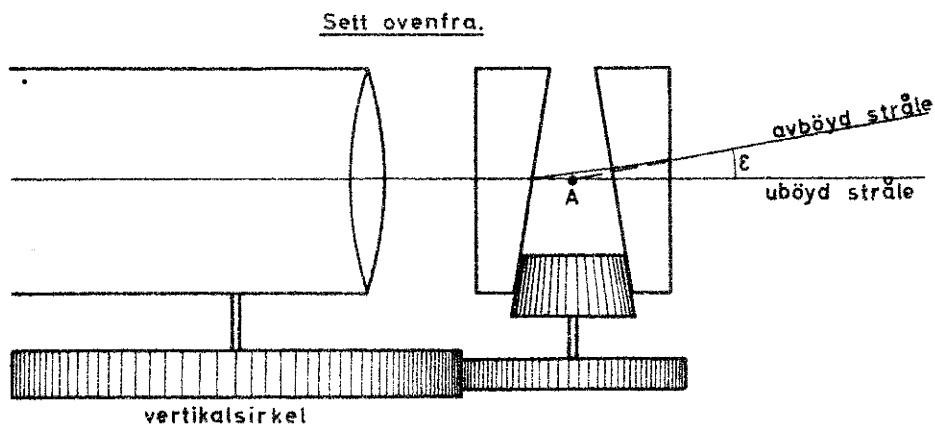


fig. 53

parallel med objektivets optiske akse? Som det framgår av fig. 53, er kilenes dreining koplet sammen med vertikalsirkelen. Når kikkerten beveges i vertikalplanet, vil glasskilene dreie seg like meget, men i hver sin retning. Som følge av denne dreining endres den distansemålende vinkel ϵ . I nullstillingen, hvor prismenes hovedsnitt er horisontale, får ϵ sin største verdi som vi kaller ϵ_0 . Vi har da, idet vi ser bort fra addisjonskonstanten som også her "trekkes inn" i stangdelingen:

$$D = \text{ctg } \epsilon_0 \cdot l = k \cdot l$$

Dreies kilene vinkelen α i forhold til hverandre, lar det seg vise at den distansemålende vinkel forminskes til en verdi ϵ_α gitt ved *konstanten*

$$\text{tg } \epsilon_\alpha = \text{tg } \epsilon_0 \cos \alpha$$

Med denne verdi for den distansemålende vinkel fås for skråavstanden som vi kaller D'

$$D' = \text{ctg } \epsilon_\alpha l = \text{ctg } \epsilon_0 \frac{l}{\cos \alpha}$$

dvs.

$$D = D' \cos \alpha = \text{ctg } \epsilon_0 \cdot l = kl$$

Dermed har vi vist at dersom prismene koples til høydebevegelsen på en slik måte at deres dreining blir lik siktelinjens høydevinkel, vil kl fremdeles være lik den horisontale avstand, dvs. avstandsmåleren er selvreduserende.

B. Optisk avstandsmåling med konstant stanglengde og variabel avstandsmålende vinkel.

1. Den Gaussiske feilforplantningslov.

I det etterfølgende får vi ofte bruk for middelfeilen til størrelser som blir bestemt indirekte som funksjon av målte størrelser.

I det generelle tilfelle har vi gitt funksjonen

$$y = f(c_1, c_2, \dots, c_n)$$

hvor c -ene er observerte størrelser hvis tilhørende middelfeil forutsettes kjent. Utledningen av y 's middelfeil foregår da på følgende måte:

1. Først dannes det totale differensial til funksjonen y .

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial f}{\partial c_1} dc_1 + \frac{\partial f}{\partial c_2} dc_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial c_n} dc_n \\ &= a_1 dc_1 + a_2 dc_2 + \dots + a_n dc_n \end{aligned}$$

idet vi har innført spesielle betegnelser for de partielle differensialkvotienter.

2. Fra det totale differensial kommer vi over til middelfeilen på y ved å bytte ut santlige d -er med m -er og sette alle størrelser i kvadrat, m.a.o.

$$m_y^2 = a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 + \dots + a_n^2 m_n^2$$

Dette er den såkalte Gaussiske feilforplantningslov.

Dersom alle observerte størrelser er målt med samme nøyaktighet, går uttrykket for m_y^2 over til

$$m_y^2 = [aa]m^2$$

hvor $[]$ står som summesymbol.

For det praktisk viktige tilfelle at funksjonen y er en sum av flere målte størrelser, fås:

$$y = c_1 + c_2 + \dots + c_n$$

$$dy = dc_1 + dc_2 + \dots + dc_n$$

$$m_y^2 = m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2$$

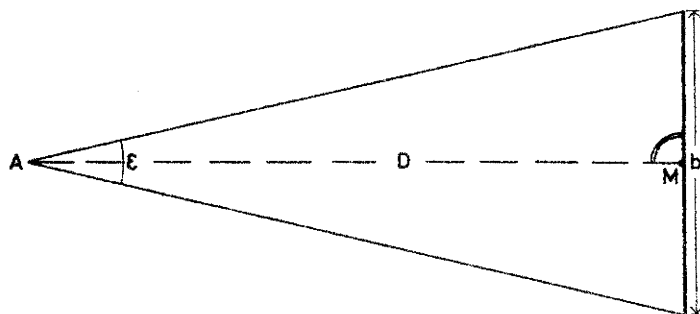
son går over til

$$m_y^2 = n \cdot m^2$$

derson samtlige observerte størrelser er målt med samme nøyaktighet.

2. Med horisontal stang. (Basisstangmetoden)

Den avstandsmålende vinkel ϵ bestemmes her ved hjelp av en teodolitt som stilles opp i linjens ene endepunkt. I det andre endepunkt av linjen stilles opp en horisontal stang hvis midtpunkt M faller i linjen, og som



står vinkelrett på linjere-
retningen. Stangens lengde
b er konstant, som regel lik
2 m. Avstanden D er da gitt
ved:

$$D = \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\epsilon}{2}$$

fig. 54

De geometriske forhold i
fig. 54, som forestiller pro-

sjeksjonen på horisontalplanet, influeres ikke av stangens plassering i vertikalplanet, dvs. metoden resulterer i horisontale avstander. Høydeforskjellen mellom instrument- og stangoppstillingspunktet, som finnes ved å måle høydevinkelen, er gitt ved:

$$\Delta h = D \operatorname{tg} \alpha + i - s$$

Nøyaktigheten av avstandsbestemmelsen etter denne metode vil være avhengig av:

1. Nøyaktigheten av vinkelmålingen.
2. " " stangens lengde.
3. " " den rette vinkel ved M .
4. " " stangens horisontalstilling.
5. " " instrumentets og stangens sentrering.

1) Feil ved vinkelmålingen. Vi tar vårt utgangspunkt i uttrykket:

$$D = \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2}$$

En feil på vinkelen ε lik $d\varepsilon$ resulterer i en feil på avstandsbestemmelsen gitt ved:

$$dD = - \frac{b}{4} \frac{1}{\sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} d\varepsilon$$

Med tilstrekkelig tilnærming kan vi her innføre at (se fig. 54):

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{b}{2D}$$

dvs.

$$dD = - \frac{D^2}{b} d\varepsilon$$

Vi har dermed vist at nøyaktigheten avtar proporsjonalt med kvadratet av avstanden.

Før $d\varepsilon = \pm 3''$ og $b = 2$ m kan vi stille opp følgende oversikt:

D_1 m	20	40	60	80	100	150	200	300	400	500	1000
dD_1 mm	0,9	3,8	8,5	15,1	23,6	53,0	94,3	212,1	377,0	589,4	2360
$dD:D$	1:2220	1:1050	1:7060	1:5300	1:4240	1:2830	1:2120	1:1410	1:1060	1:850	1:420

2) Feil på stanglengden. Vi differensierer det grunnleggende uttrykk $D = \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2}$ med hensyn til b og får:

$$dD = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} db = \frac{D}{b} db$$

Av instrumentfirmaene som framstiller slike basisstenger, blir nøyaktigheten av stengenes lengde oppgitt til $\pm 0,1$ mm, som omfatter både feilen i plasseringen av 2 m-merket og lengdeendringer som følge av temperaturvariasjoner. Før $db = 0,1$ mm fås:

$$dD = \frac{D \cdot 0,1}{2000} = \frac{D}{20000}$$

3) Stangen står ikke vinkelrett på siktelinjen. Dersom avviket i M fra en rett vinkel er δ , følger herav en feil i avstandsbestemmelsen gitt ved:

$$dD = \frac{D}{2} \delta^2$$

Dersom vi forlanger at også denne feilen skal holde seg under $\frac{D}{20000}$, fås som betingelse at

$$\delta \leq 0,649$$

Stangen bringes vinkelrett på siktelinjen ved hjelp av en diopieranordning som basisstangen er utstyrt med, og som er såpass nøyaktig at det ikke byr på noen vanskeligheter å oppfylle den foran oppstilte fordring.

4) Feil på stangens horisontalstilling. En feil Δ i horisontalstillingen medfører en feil i avstandsbestemmelsen gitt ved:

$$dD = \frac{D}{2} \Delta^2$$

Også denne feil vil holde seg under $\frac{D}{20\ 000}$ dersom $\Delta \leq 0,64^{\circ}$.

5) Feil ved instrumentets og stangens sentrering. Det er klart at en feil i sentreringen av instrument og stang kommer igjen med samme størrelse på avstandsbestemmelsen. Som regel nyttes optisk sentrering både for instrument og basisstang når basisstangmetoden brukes, og da byr det ikke på noen vanskelighet å holde denne feil på ca. 2 mm.

3. Metoder for bestemmelse av større avstander ved basisstangmetoden.

Den foregående undersøkelse over de feil som nøyaktigheten av avstandsbestemmelsen etter metoden med basisstang avhenger av, viser altså at det er nøyaktigheten av vinkelen ϵ som er utslagsgivende. Av den oppstilte tabell over den relative nøyaktighet $dD:D$ går det fram at nøyaktigheten avtar raskt med økende avstander, slik at metoden for de fleste praktiske formål blir ubrukbar for avstander større enn ca. 100 m. Imidlertid kan metoden modifiseres slik at det blir mulig å måle større avstander med tilfredsstillende nøyaktighet. Det består hovedsakelig to muligheter:

a) Oppdeling av linjen i seksjoner.

Dersom linjen D avstandsbestemmes ved oppstilling av teodolitten i A og basisstangen i B (se fig. 55), har vi allerede vist at:

$$dD = -\frac{D^2}{b} d\epsilon \quad , \quad \text{dvs.} \quad M_D = \frac{D^2}{b} m_\epsilon$$

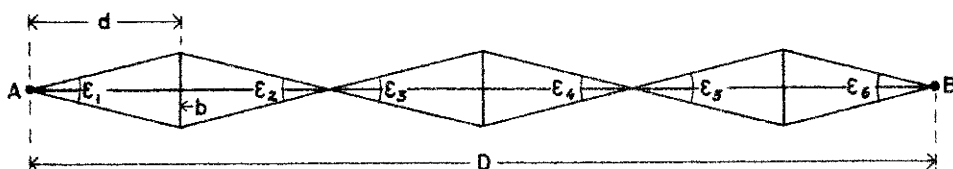


fig. 55

Deles linjen opp i n like lange seksjoner, hver med lengden d , vil feilen på avstandsbestemmelsen

være gitt ved (se fig. 55):

$$dD = -\frac{d^2}{b} d\varepsilon_1 - \frac{d^2}{b} d\varepsilon_2 - \dots - \frac{d^2}{b} d\varepsilon_n$$

dvs.
$$m_D = \frac{d^2}{b} \sqrt{n} m_\varepsilon$$

idet vi forutsetter at alle ε blir målt med samme nøyaktighet. Vi innfører her $D = n \cdot d$ og får:

$$m_D = \frac{D^2}{b\sqrt{n^3}} m_\varepsilon = \frac{M_D}{\sqrt{n^3}}$$

M_D er feil dersom en har målt hele strekningen av én gang.

Det framgår av dette uttrykk at vi oppnår en betraktelig økning i nøyaktigheten ved å dele opp linjen i seksjoner. I virkeligheten vil nøyaktighetsvinningen være større enn den siste formel gir uttrykk for. Under utledningen har vi nemlig forutsatt samme m_ε i begge tilfelle, men som regel kan vi regne med at nøyaktigheten av vinkelmålingen vil være større for små avstander (fra 30 m og oppover) enn for store avstander. Det henger sammen med at luftsitringen gjør seg mer gjeldende for store enn for små avstander.

Tallempler: For $n=2$, som betyr at stangen stilles opp midt mellom linjens endepunkter fås: $m_D = 0,355 M_D$. For en linje på 500 m som deles i 5 seksjoner og $m_\varepsilon = 3''$, får vi: $m_D = \frac{58,9}{\sqrt{125}} = \pm 5,3 \text{ cm}$.

b) Metoden med hjelpebasis.

Fig. 56 viser et eksempel på avstandsbestemmelse etter metoden med hjelpebasis. Først bestemmes hjelpebasisen d og deretter den søkte strekning D på grunnlag av denne.

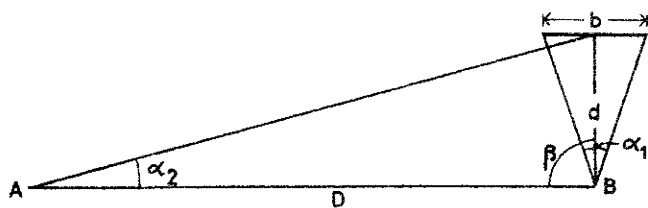


fig. 56

Vi skal i det etterfølgende undersøke hvordan "basisnettet" skal utformes for å oppnå den nøyaktigst mulige bestemmelse av D , dvs. den bestemmelse av D som betinger den minst mulige middelfeil. Vi tar vårt utgangspunkt i følgende

ligninger (som riktignok bare har tilnærmet gyldighet):

$$d = \frac{b}{\alpha_1} \quad , \quad \text{og} \quad D = \frac{d}{\alpha_2} = \frac{b}{\alpha_1 \alpha_2}$$

Virkingen av målefeilene $d\alpha_1$ og $d\alpha_2$ finnes ved differensiasjon

$$dD = \frac{b}{\alpha_1 \alpha_2} \left(-\frac{1}{\alpha_1} d\alpha_1 - \frac{1}{\alpha_2} d\alpha_2 \right) = D \left(-\frac{d}{b} d\alpha_1 - \frac{D}{d} d\alpha_2 \right)$$

dvs.
$$m_D^2 = D^2 \left(\frac{d^2}{b^2} + \frac{D^2}{d^2} \right) m_\alpha^2$$

idet vi forutsetter at begge parallaktiske vinkler er like nøyaktig målt, ($m_{\alpha_1} = m_{\alpha_2}$). Vi søker så den verdi av d som gjør m_D til minimum. Av formelen for m_D^2 framgår det at m_D har minimum når parentesuttrykket, som vi kaller y , har minimum. Vi får følgelig å derivere y med hensyn til d og sette differensialkvotienten lik null.

$$\frac{dy}{dd} = \frac{2d}{b^2} - \frac{2D^2}{d^3} = 0$$

Av denne ligning følger:

$$\underline{d = \sqrt{bD}}$$

For denne verdi av d blir vinklene α_1 og α_2 like store. Den tilhørende minimumsverdi for m_D blir lik:

$$m_D = D \sqrt{\frac{2D}{b}} m_\alpha = D\sqrt{D} m_\alpha \quad (\text{for } b = 2 \text{ m})$$

For nøyaktigheten av avstandsbestemmelsen etter denne metode er nøyaktigheten av vinkelen β i fig. 56 av underordnet betydning så lenge denne vinkels avvik fra 100° ikke overstiger ca. 20° .

Benyttes metoden med hjelpebasis til bestemmelse av samme avstand som i det tidligere anførte eksempel under seksjonsmetoden ($D=500$ m og $m_\alpha=3^{cc}$), finner vi:

$$m_D = \frac{500 \cdot 3 \cdot \sqrt{500}}{636620} = \pm 5,3 \text{ cm}$$

dvs. samme middelfeil som ved bruk av seksjonsmetoden. Av dette eksempel følger at metoden med hjelpebasis er langt mer rasjonell enn seksjonsmetoden, for mens den siste i det foreliggende tilfelle betinger måling av 6 vinkler, forutsetter metoden med hjelpebasis måling av bare to vinkler (vi har da sett bort fra vinkelen β som kan bestemmes med mindre nøyaktighet).

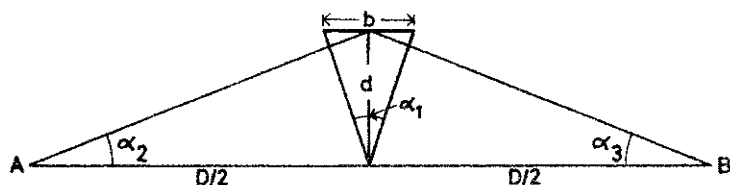


fig. 57

Enda større nøyaktighet oppnås dersom hjelpebasisen legges midt på den linjen som skal avstandsbestemmes (se fig. 57). En tilsvarende undersøkelse som i første tilfelle, resulterer i:

$$d = 0,6\sqrt{bD}$$

$$m_D = 0,84 \cdot D\sqrt{\frac{D}{b}} m_\alpha$$

Denne metode anvendt på det tidligere eksempel ($D = 500$ m og $m_\alpha = 3^{cc}$) gir $m_D = \pm 3,1$ cm.

I den praktiske landmåling kan problemet med bestemmelse av forholdvis store avstander bli aktuelt i forbindelse med langsidedet polygonering til erstatning av triangulering av lavere orden. Det forekommer nemlig ikke så sjelden i praksis at terrengforholdene er så vanskelige at en full utbygging av triangelnettet vil betinge en uforholdsmessig kostbar signalbygging. Vanskeligheten kan enten bunne i topografiske forhold eller i vegetasjon som stenger for siktene mellom de terrengpunktene som kan komme på tale som triangelpunkter. Særlig vanskelig blir det når begge disse vansker opptrer samtidig. Under slike forhold vil det ofte være rasjonelt å erstatte de siste trinn av trianguleringen med polygonering med sidelengder på 0,5 - 1 km. Metoden har med hell vært prøvd utenlands, særlig i forbindelse med ekstensivoppmålinger i kolonionråder, men den vil utvilsomt også la seg innpasse i økonomiske oppmålingsarbeider.

*

Avstandsbestemmelse ved hjelp av hjelpebasis brukes også meget i forbindelse med direkte lengdemåling, f.eks. ved måling av polygonsider. Ofte kan terrengforholdene være så vanskelige at en direkte lengdemåling av polygonsidene faller tungvint, eller i enkelte høve sågar umulig, f.eks. dersom polygonsiden krysser et vann. I slike tilfelle kan avstandsbestemmelsen foretas indirekte ved hjelp av metoden med hjelpebasis. I fig. 58 er D den søkte

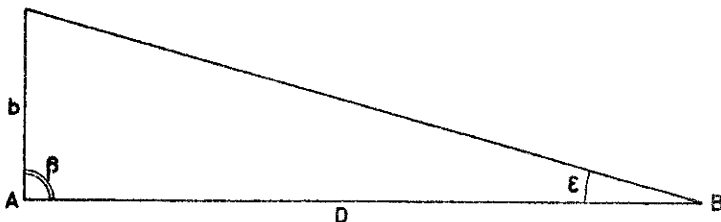


fig. 58

avstand. I punkt A anlegges en hjelpebasis vinkelrett på linjen AB. Lengden av hjelpebasisen bestemmes ved direkte lengdemåling, og dessuten måles vinkelen ϵ .

Vi setter oss så til oppgave å undersøke hvordan nøyaktigheten av de målte størrelser må tilpasses for at bestemmelsen av D skal bli gunstigst mulig, dvs. slik at vi oppnår den nøyaktigst mulige bestemmelse av D med minst mulig målearbeid. Vi benytter sinusproporsjonen på trekanten i fig. 58, og får for D

$$D = \frac{b}{\sin \epsilon} \sin(\beta + \epsilon) = b(\sin \beta \operatorname{ctg} \epsilon + \cos \beta)$$

Dersom størrelsene b , ϵ og β har feilene db , $d\epsilon$ og $d\beta$, fås den tilsvarende feil på D ved differensiasjon

$$dD = (\sin \beta \operatorname{ctg} \epsilon + \cos \beta)db - \frac{b \sin \beta}{\sin^2 \epsilon} d\epsilon + b(\operatorname{ctg} \epsilon \cos \beta - \sin \beta)d\beta$$

som for $\beta = 100^\circ$ forenkles til:

$$dD = \operatorname{ctg} \varepsilon db - \frac{b}{\sin^2 \varepsilon} d\varepsilon - b d\beta$$

Vi innfører her tilnærmelsen $\sin \varepsilon \approx \frac{b}{D}$ og får:

$$dD = \frac{D}{b} db - \frac{D^2}{b} d\varepsilon - b d\beta$$

I praksis gjøres b liten i forhold til D (som regel $\frac{1}{5} - \frac{1}{10}$ av D). Vi kan da trekke følgende slutninger av formelen for dD : Basislengden må måles med størst mulig nøyaktighet fordi at en feil db vil forstørres i forholdet $\frac{D}{b}$. Også den parallelaktiske vinkel ε må måles med størst mulig nøyaktighet. Derimot ser vi at den rette vinkel β ikke behøver å være særlig nøyaktig avsatt. Av formelen går det nemlig fram at virkningen av feilene $d\varepsilon$ og $d\beta$ på avstanden D er like store dersom

$$\frac{D^2}{b} d\varepsilon = b d\beta \quad , \quad \text{dvs. dersom} \quad d\beta = \frac{D^2}{b^2} d\varepsilon$$

slik at $d\beta$ kan tillates å være $\frac{D^2}{b^2}$ så stor som $d\varepsilon$. Ofte vil det være tilstrekkelig å avsette β med rettvinkelapparat.

Det er ikke alltid at det passer å operere med en rettvinklet basistrekant, men det bør ihvertfall sørges for at vinkelen β ikke avviker mer enn ca. 20° fra 100° . Vinkelen β må da måles med teodolitt. Nøyaktigheten av denne vinkelmåling behøver ikke være særlig stor dersom β 's avvik fra 100° holder seg under den angitte toleranse.

4. Med vertikal stang.

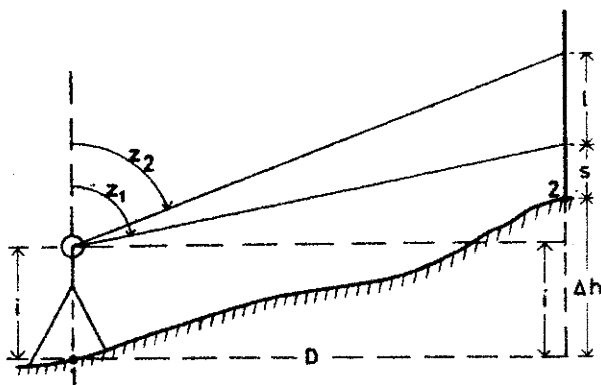


fig. 59

I dette tilfelle skjer avstandsbestemmelsen ved måling av to zenitdistanser (eller høydevinkler). I fig. 59 er z_1 og z_2 målt. Vi kan følgelig stille opp følgende ligning:

$$l = D \operatorname{ctg} z_2 - D \operatorname{ctg} z_1$$

$$\text{dvs.} \quad D = \frac{l}{\operatorname{ctg} z_2 - \operatorname{ctg} z_1}$$

Videre har vi:

$$\Delta h_{12} = D \operatorname{ctg} z_1 + i - s = D \operatorname{ctg} z_2 + i - (s + l)$$

Den dobbelte høyderegning kontrollerer også utregningen av D .

Betrakter vi basislengden l som feilfri, blir middelfeilen på avstandsbestemmelsen under forutsetning av at $z_1 \approx z_2 \approx 100^g$

$$m_D = \frac{\sqrt{2}}{\rho} \frac{D^2}{l} m_z$$

For $l = 2 \text{ m}$, $m_z = 5^{cc}$ og $D = 100 \text{ m}$, fås $m_D = \pm 5,5 \text{ cm}$.

Ved steile sikter vil feil i loddrettstillingen av stangen bevirke betydelige feil i avstandsbestemmelsen etter denne metode.

NB! Formelen $\Delta h = D \sin z + i - s$ er forøvrig det generelle uttrykk for høydeforskjellen ved trigonometrisk høydebestemmelse når avstanden er så liten at såvel jordkrumning som refraksjon kan settes ut av betraktning (for avstander $\leq 380 \text{ m}$).

C. Nøyaktigheten av den optiske avstands- og høydebestemmelse.

Denne metode brukes sjelden på kortere avstander.

De etterfølgende betraktninger har i første rekke gyldighet for instrumenter med konstante distansestreker. De selvreduserende spesialkonstruksjoner må gjøres til gjenstand for separate undersøkelser i hvert enkelt tilfelle.

De viktigste feilkilder ved den optiske avstandsmåling er:

1. Feil som skyldes instrumentet.
2. " " " stangen.
3. " " " observatøren.
4. " " " ytre forhold.

1. Feil som skyldes instrumentet.

I det enkleste tilfelle med horisontal stang er avstanden gitt ved:

$$D = c + k l$$

Den første forutsetning for å få riktige avstander er kjennskap til de korrekte verdier av c og k . En feil i den benyttede verdi for c medfører selvsagt en like stor feil på D . En feil på k lik dk vil bevirke en feil på avstanden gitt ved

$$dD = l \cdot dk$$

Vi innfører her $l \approx \frac{D}{k}$ og får

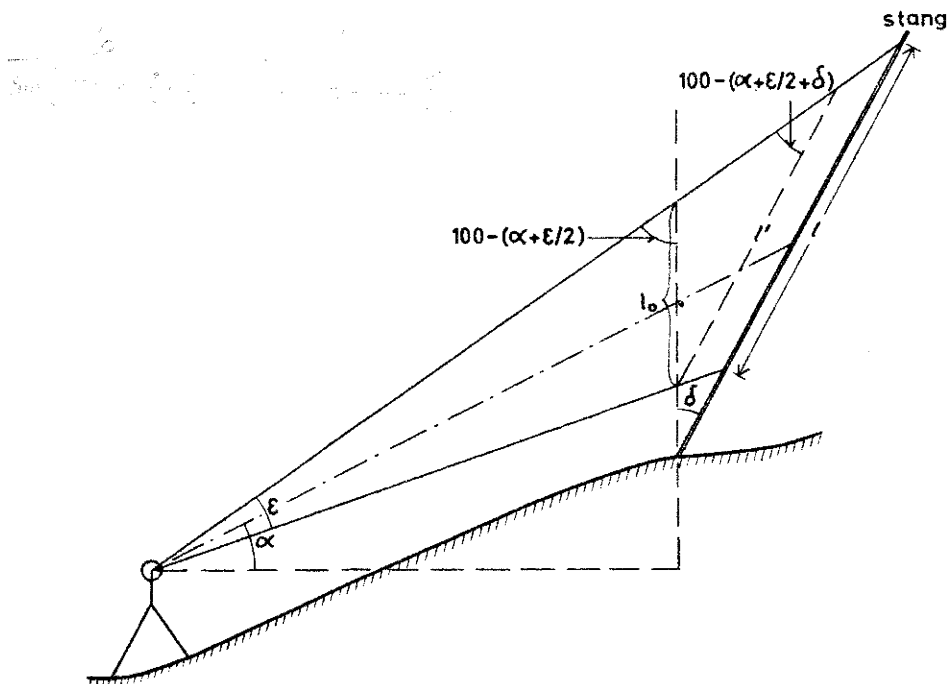
$$\frac{dD}{D} = \frac{dk}{k}$$

I virkeligheten kan vi ikke regne med at k er en eksakt konstant størrelse. Saken er nemlig den at k vil endre seg en smule med temperaturen.

Det skyldes at glassets brytningsindeks varierer litt med temperaturen. Stigende temperatur medfører at lysstrålene brytes sterkere, dvs. linsens brennvidder blir mindre, og følgelig vil k som er lik $\frac{F}{p}$, avta.

2. Feil ved stangen.

Stangen holdes skjevt. I fig. 60 avviker stangen δ fra den loddrette stilling.



Vi leser følgelig av stangavsnittet l istedenfor l_0 som vi ville lese av dersom stangen sto loddrett. I figuren er l' parallell med l , og under den etterfølgende utledning innfører vi den tilnærmelse at vi setter $l' = l$. Funksjonsforbindelsen mellom l_0 og l er følgelig gitt

fig. 60

ved:

$$l_0 = l \frac{\sin\{100^\circ - (\alpha + \frac{\epsilon}{2} + \delta)\}}{\sin\{100^\circ - (\alpha + \frac{\epsilon}{2})\}} = l \frac{\cos(\alpha + \frac{\epsilon}{2} + \delta)}{\cos(\alpha + \frac{\epsilon}{2})}$$

$$= l \frac{\cos(\alpha + \frac{\epsilon}{2})\cos\delta - \sin(\alpha + \frac{\epsilon}{2})\sin\delta}{\cos(\alpha + \frac{\epsilon}{2})} = l \cos\delta - l \operatorname{tg}(\alpha + \frac{\epsilon}{2})\sin\delta$$

Vi forutsetter at δ er en liten vinkel og innfører $\cos\delta = 1 - \frac{\delta^2}{2}$ og $\sin\delta = \delta$. Derved går uttrykket for l_0 over til:

$$l_0 = l - l \frac{\delta^2}{2} - l \operatorname{tg}(\alpha + \frac{\epsilon}{2})\delta$$

Feilen på stangavlesningen som følge av stangens skråstilling, er lik $l - l_0$.

$$l - l_0 = \Delta l = l \frac{\delta^2}{2} + l \delta \operatorname{tg}(\alpha + \frac{\epsilon}{2})$$

Den til Δl svarende feil på avstandsbestemmelsen blir følgelig lik:

$$dD = k \cdot \Delta l \cdot \cos^2 \alpha = \left\{ k l \frac{\delta^2}{2} + k l \delta \operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right\} \cos^2 \alpha$$

$$\approx \left(k l \frac{\delta^2}{2} + k l \delta \operatorname{tg} \alpha \right) \cos^2 \alpha \approx 102 \text{ cm} + 5 \text{ cm}$$

Dersom stangen stilles loddrett på øyemål, må vi regne med en usikkerhet i loddrettstillingen i betydning av middelfeil på ca. 2^g.

Eksempel. For $l = 1 \text{ m}$ (dvs. $D \approx 100 \text{ m}$), $\alpha = 20^g$ og $\delta = + 2^g$ finner vi:

$$dD = (5 \text{ cm} + 102 \text{ cm}) \cos^2 \alpha = 97 \text{ cm}$$

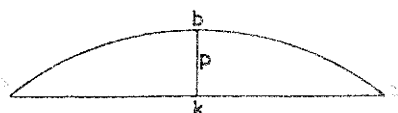
Den tilhørende feil i høydebestemmelsen blir

$$dh = dD \operatorname{tg} \alpha = 32 \text{ cm}$$

Eksemplet viser med all tydelighet betydningen av en nøyaktig loddrettstilling av stangen for siktelinjer med stor høydevinkel.

Feil ved stangens deling. Ved optisk avstandsbestemmelse som bygger på avlesning av et stangavsnitt, er det klart at en får uttrykt avstandene i de samme enheter som stangen er inndelt i. Avviker stangenheden $p \%$ fra normalmeteren, vil også de verdier som vi kommer fram til for avstandene, avvike $p \%$ fra de riktige meterverdier.

Stangens krumning. Fra lengdemålingens teori vet vi at (se fig. 61):



$$b - k = \frac{8 p^2}{3 b}$$

hvor p er den såkalte pilhøyde.

fig. 61

Eksempel. For $b = 1 \text{ m}$ og $p = 3 \text{ cm}$ finner vi: $b - k = 2,4 \text{ mm}$. For $k = 100$ vil hertil svare en feil på avstandsbestemmelsen lik 24 cm .

Stangens krumning er en viktig årsak til avlesningsfeil.

3. Avlesningsfeilen.

Under avlesningen på stangen stilles først en av trådene på et helt tall, hvoretter avlesning foretas ved den andre tråden. Sluttfeilen vil derfor sette seg sammen av én innstillingsfeil og én avlesningsfeil. Som tidligere nevnt, er den menneskelige evne til å bedømme en streks stilling innen et felt atskillig dårligere enn evnen til å innstille en strek til koinsidens i forhold til en annen. Erfaringen viser at innstillingsnøyaktigheten er om lag dobbelt så stor som avlesningsnøyaktigheten. Den første kan ved bruk av siktekikkert under gunstige forhold settes til ca. 2^c ,

og den totale avlesningsfeil blir følgelig $\sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} = u_\alpha$, som kan oppfattes som en feil på den distansemålende vinkel. Den herav resulterende lineære avlesningsfeil på stangen blir $u_1 = D \cdot u_\alpha$. Hertil svarer en feil på avstandsbestemmelsen lik

$$u_D = k \cdot u_1 = k D u_\alpha$$

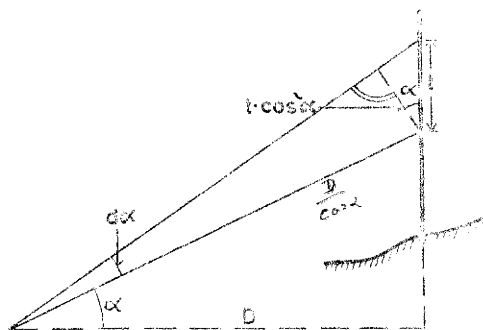
dvs.
$$\frac{u_D}{D} = k \cdot u_\alpha = \frac{100\sqrt{20}}{636620} \approx \frac{1}{1400}$$

som blir virkningen av feilen som knytter seg til avlesningen av stangavsnittet l . Ved måling av hellende linjer kommer også en annen observasjonsfeil inn i bildet, nemlig feilen på høydevinkelbestemmelsen. Vi skal i det etterfølgende undersøke virkningen av denne feil på bestemmelsen av D og Δh. Vi forutsetter at addisjonskonstanten er lik null og har

$$D = k l \cos^2 \alpha$$

dvs.
$$dD = - 2 k l \cos \alpha \sin \alpha d\alpha = - 2D \operatorname{tg} \alpha d\alpha$$

Vi skal så utlede den funksjonelle forbindelse mellom $d\alpha$ og den tilsvarende lineære forflytning av siktelinjen. Vi kaller denne forflytning t og har ifølge fig. 62



$$d\alpha = \frac{t \cos^2 \alpha}{D}$$

som innført i uttrykket for dD resulterer i

$$dD = - \frac{2D \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha t}{D} = - 2t \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= - t \sin 2 \alpha$$

fig. 62

For $t = 5$ cm kan vi stille opp følgende tabell:

α	dD_i cm
2 ^o	- 0,3
10 ^o	- 1,6
20 ^o	- 3,0
50 ^o	- 5,0

Denne tabell gir legitimasjon for den framgangsmåten som er meget utbredt i praksis, og som går ut på følgende: Først innstilles midttråden på instrumenthøyde, hvorefter høydevinkelavlesning foretas. Strengt tatt skulle også avstandsbestemmelsen foretas med samme stilling av midttråden, idet

reduksjonsformelen $(c+kl)\cos^2\alpha$ forutsetter samsvar mellom den avleste verdi for $c+kl$ og α . Ved avlesningen av stangintervallet l er det av praktiske grunner fordelaktig å innstille den ene tråden på en hel desimeter. Denne forflytning kan i høyden utgjøre 5 cm dersom vi hele tiden sørger for å flytte til nærmeste hele desimeter. Som det går fram av tabellen ovenfor, vil den feil som derved begås, uten videre kunne tolereres.

Enda enklere faller avstandsavlesningen dersom vi konsekvent stiller den nedre distansestreken på én meter. De feil som derved begås, går fram av følgende tabell som bygger på $i = 1,45$ n.

$\alpha \backslash \text{Dim}$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	120	150
	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm
2°	2,5	2,2	1,9	1,6	1,3	0,9	0,6	0,3	0	0,3	0,9	1,9
10°	12,4	10,8	9,3	7,7	6,2	4,6	3,1	1,5	0	1,5	4,6	9,3
20°	23,5	20,6	17,6	14,7	11,8	8,8	5,9	2,9	0	2,9	8,8	17,6

Som vi ser, vil feilen på avstandsbestemmelsen avhenge av avstanden og av høydevinkelens størrelse.

I de fleste tilfelle hvor den tachymetriske målenetode nyttes, vil disse feil kunne tolereres.

Vi har foran vist at for reduseringen av den avleste avstand $c+kl$ trenges ikke stor nøyaktighet i høydevinkelbestemmelsen. For bestemmelsen av høydeforskjellen derimot får nøyaktigheten av høydevinkelmålingen langt større innvirkning. Det går fram av følgende betraktning:

$$\Delta h = kl \cos \alpha \sin \alpha = \frac{1}{2} kl \sin 2 \alpha$$

$$d\Delta h = kl \cos 2 \alpha d\alpha = kl(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)d\alpha \approx D d\alpha$$

4. Feil som skyldes ytre forhold.

Av ytre forhold som influerer på nøyaktigheten av den optiske avstandsmåling, kan nevnes luftens sitring og den såkalte differensialrefraksjon. Luftsitringen gjør stangbildet utydelig og urolig, slik at avlesningsnøyaktigheten blir nedsatt. Det er særlig på solskinnsdager at luftsitringen kan være sjenerende. Differensialrefraksjonen gjør seg gjeldende ved bruk av vertikal stang, og skyldes at de to strålene som utgjør den distansemålende vinkel, forløper i forskjellige luftlag. Særlig på sol-

skinnsdager vil luftsjiktene like ved jordoverflaten oppvise betydelige forskjeller med hensyn til optisk tetthet. Den distansemålende vinkels to stråler vil følgelig bøyes forskjellig, og det er ensbetydende med endring i den avstandsmålende vinkel og følgelig også i multiplikasjonskonstanten. Denne feilkilde sjaltes ut ved bruk av horisontal stang. På den annen side kan en ved horisontal stang få feil som følge av siderefraksjon dersom siktelinjen stryker tett forbi en oppvarmet hus- eller fjellvegg f.eks.

Som tidligere nevnt innvirker også ytre forhold som temperatur og fuktighetsendringer på linsens lysbrytning, slik at den avstandsmålende vinkel og dermed også k endrer seg.

*

Foruten de hittil berørte faktorer som virker inn på den optiske avstandsbestemmelse, vil nøyaktigheten også i høy grad være avhengig av hvilket prinsipp som ligger til grunn for avstandsbestemmelsen. Generelt kan en si at prinsippet med distansestreker er det minst nøyaktige. Rundt regnet kan nøyaktigheten ved bruk av dette prinsippet angis til 1:1000. Avstandsmåling ved hjelp av dobbeltbildeprinsippet og basisstangprinsippet er om lag like nøyaktige, ca. 1:4000. Disse nøyaktighetsangivelser refererer seg til gunstige observasjonsforhold.

III. Elektronisk avstandsmåling.

1. Generelle betraktninger.

Den elektroniske avstandsmåling representerer utvilsomt den største landevinning på geodesiens område i etterkrigstiden. Avstandsmåling etter dette prinsippet er allerede utviklet så langt at det i dag står instrumenter og metoder til disposisjon, som tillater direkte måling av alle mulige avstander fra noen få meter opp til 300 km og enda mer med en nøyaktighet som tilfredsstillende de fleste geodetiske behov. Som følge av denne utvikling er området for de geodetiske måleoperasjoner blitt utvidet i så stort omfang at det med en viss rett kan hevdes at den elektroniske avstandsmåling har brakt en ny dimensjon til geodesien.

Alle metoder for elektronisk avstandsmåling bygger på bestemmelse av den tid som elektromagnetiske bølger bruker til å tilbakelegge den strekning som skal avstandsbestemmes. Det forutsetter at hastigheten til de be-

nyttede elektromagnetiske bølger er kjent, dessuten kjennskap til deres banekurve, og endelig at vi er i stand til å måle forplantningstiden med tilstrekkelig nøyaktighet.

Ad eksperimentell veg har en funnet verdien $c = 299792,5$ km/sek for forplantningshastigheten til elektromagnetiske bølger i vakuum. Med utgangspunkt i vakuumbastigheten gjelder det så å utlede den aktuelle verdi v , som avhenger av de aktuelle meteorologiske forhold. Mellom c og v består relasjonen

$$v = c N^{-1}, \text{ hvor } N = \sqrt{\mu\epsilon}$$

Her betyr N brytningsindeksen, μ den magnetiske permeabilitet og ϵ luftens dielektrisitetskonstant. For det tomme rom er både μ og ϵ lik 1. Så vel μ som ϵ , og særlig da den siste, varierer med luftens tilstand med hensyn til fuktighetsinnhold og temperatur. De meteorologiske elementer kan som regel bare gjøres til gjenstand for måling i endepunktene av vedkommende linje som skal avstandsbestemmes. Imidlertid vil de meteorologiske forhold i den mellomliggende del av banekurven ha vel så stor betydning for forplantningshastigheten, slik at vi i praksis må regne med et skillig usikkerhet i bestemmelsen av v når det skjer på grunnlag av meteorologiske data i endepunktene. (I virkeligheten vil ikke bare v , men også banekurvens form avhenge av brytningsindeksen og dermed av de meteorologiske data.)

Den direkte målte avstand refererer seg til lengden av selve banekurven og må følgelig omregnes til korden mellom endepunktene. Som regel vil banekurven med tilstrekkelig tilnærming kunne erstattes med en sirkelbue. Det er først ved avstander større enn ca. 40 km at det må tas hensyn til banekurvens avvik fra den rette linje.

Ved omregning fra banekurve til korde fås lengden av den rette forbindelseslinje mellom endepunktene. Den elektroniske avstandsbestemmelse resulterer med andre ord i skråavstander. For å komme over til horisontale avstander må vi ha kjennskap til høydeforskjellen eller høydevinkelen mellom endepunktene. Som regel blir det også spørsmål om å redusere den målte avstand til ellipsoiden, hvilket forutsetter kjennskap til endepunktene's middelhøyde.

Som allerede nevnt, bygger den elektroniske avstandsmåling på måling av den tid som elektromagnetiske bølger trenger til å forplante seg mellom en linjes endepunkter. På grunn av elektromagnetiske bølgers store forplantningshastighet blir de tidsintervaller som skal gjøres til gjenstand for måling, svært små. Skal en avstand bestemmes med 5 cm's nøyaktighet, forutsetter det at vi er i stand til å måle tidsintervaller med en nøyaktighet gitt ved

$$t = \frac{2.5}{3 \cdot 10^{10}} = 3,3 \cdot 10^{-10} \text{ sek}$$

lyshastighet = $3 \cdot 10^{10}$ cm/sek

2.5 cm avstand = $2.5 \cdot 10^{-10}$ sek

m.a.o. et forsvinnende lite tidsintervall. Det er de siste årtiers utvikling innen elektroteknikken som har muliggjort måling av så små tidsintervaller med tilstrekkelig nøyaktighet.

Den elektroniske avstandsmåling kan utføres etter flere prinsipper. I praksis er det særlig tre prinsipper som spiller noen rolle, nemlig impulsprinsippet, faseforskjellprinsippet og frekvensendringsprinsippet. Etter det første måles forplantningstiden direkte, mens de to siste bygger på indirekte bestemmelse ved måling av faseforskjeller, respektive frekvensendringer (dopplereffekt). Innenfor hver av disse hovedgruppene opptrer det en rekke forskjellige metoder, som atskiller både med hensyn til instrumentutrustning og bølgelengde for de benyttede elektromagnetiske bølger.

2. Elektronisk avstandsmåling etter impulsprinsippet.

a) Radarmetoden.

Radar er en forkortelse for radio detection and ranging (retnings- og avstandsbestemmelse ved radiobølger). Innen geodesien er det hovedsakelig radarens muligheter for avstandsmåling som interesserer. Radarmetodens utvikling skyldes hovedsakelig den siste krigs militære behov for sikre navigasjonshjelpemidler.

Alle radarsystemer bygger på utsending av kortvarige, men meget kraftige elektromagnetiske impulser som reflekteres etter å ha truffet målobjektet, hvorefter ekkøene vil returnere til radarmottakeren, også i form av impulser. Bestemmelsen av tidsintervallet mellom impulsutsendelsen og mottakelsen av den reflekterte impuls skjer ved hjelp av et katodestruålerør

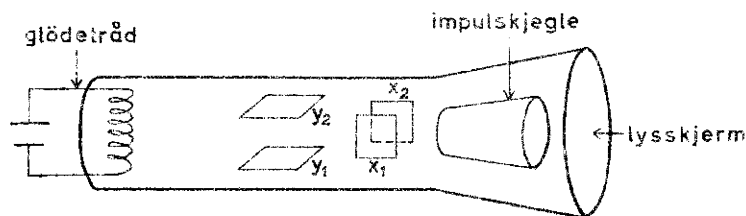


fig. 63

(se fig. 63). Glødetråden utsender elektroner som kastes mot en fluorescerende skjerm, hvor elektronstrømmen gir seg til kjenne som et lysende punkt. Platene x_1 , x_2 , y_1 og y_2 er de såkalte avbøyningsplater.

y - og x -platene er innbyrdes parallelle, og hvert platepar står vinkelrett på det andre. Platene tilføres høyfrekvent 100^3 faseforskjøvet vekselspanning med frekvens f_w . Det har til følge at elektronstrømmen ikke lenger vil treffe lysskjermer i et enkelt punkt, men vil beskrive en sirkel - den såkalte tidsbasis - som tjener som skala for tidsmålingen. Elektronstrømmen vil omlepe sirkelen f_w ganger pr. sek. Dessuten opptrer i elektronrøret den

såkalte impulskjegle, som står i tilknytning til utsendelsen og mottakelsen av impulsene. I samme øyeblikk en impuls blir utsendt, påvirker impulskjeglen elektronstrømmen, slik at vi får et hakk på sirkelen, og det samme gjentar seg når impulsekkoet vender tilbake (se fig. 64). I fig. 64

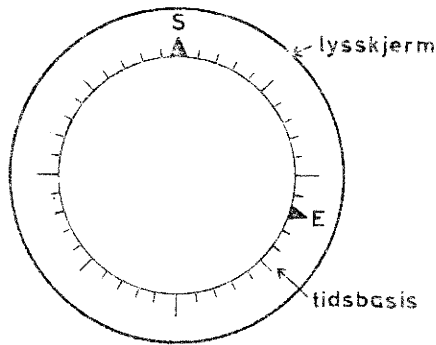


fig. 64

forestiller S den avbøyning av tidsbasisen som senderimpulsen forårsaker, mens E er den tilsvarende avbøyning forårsaket av ekkimpulsen. Ved hjelp av den inndelte skala utenfor tidsbasis kan vinkelen mellom S og E avleses, som sammen med frekvensen f_w gir grunnlag for utregning av tidsintervallet mellom sender- og ekkimpuls. Impulsene blir utsendt med frekvensen f_i . De to frekvensene f_w og f_i er således avstemt til hverandre at impulsutsendelsene foregår samtidig med at elektronstrømmen passerer skalaens nullpunkt. (I fig. 64 forutsettes altså S å falle sammen med skalaens nullpunkt).

b) Shoran- og hiranmetoden.

Ved radarmetoden skjer avstandsbestemmelsen uten noen aktiv medvirkning fra målobjektets side. Målet spiller utelukkende den passive rolle å tjene som refleksjonsflate for de utsendte elektromagnetiske impulser. Slike systemer er ikke i stand til å arbeide med noen særlig stor nøyaktighet.

De to metodene, shoran, som er en forkortelse for short range air navigation (luftnavigering over korte avstander), og hiran som står for high accurate shoran, er i prinsippet identiske metoder, bare med den forskjell at hiran er en videreutviklet og forbedret form for shoran. Den vesentligste forskjell mellom den enkle radarmetode på den ene siden og shoran-hiranmetoden på den annen består i at hos de siste blir ikke impulsene bare passivt reflektert av målobjektet, men mottatt, forsterket og sendt tilbake til senderen med en annen frekvens. Her blir altså reflekteringen ikke lenger bare et "overflatefenomen" slik som tilfellet er hos radar, men målet koopererer med senderstasjonen. Det er grunnen til at shoran-hiranmetoden også betegnes som kooperativ radar, mens den enkle radarmetode betegnes som primær eller ikke-kooperativ radar.

Det kooperative radarprinsippet byr på langt større nøyaktighet enn det enkle radarprinsippet, og det er grunnen til at kooperativ radar er praktisk talt enerådende når impulsprinsippet skal nyttes til geodetiske målinger.

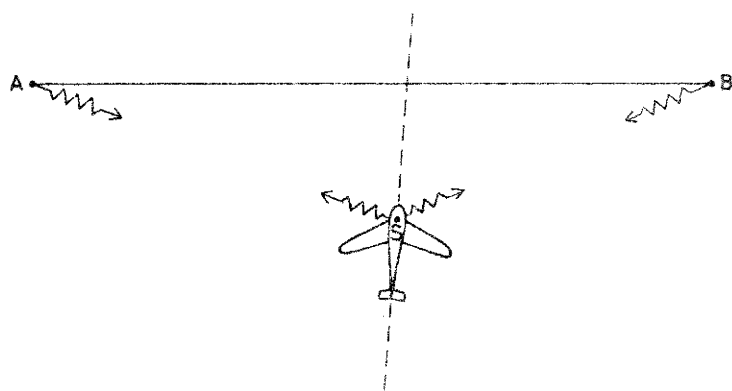


fig. 65

Figur 65 viser hvordan avstandsbestemmelse etter shoran-hiranmetoden foregår. A og B er endepunktene til den linjen hvis avstand skal bestemmes. Hovedstasjonen S befinner seg ombord i flyet og sender ut impulser på to bærefrekvenser f_1 og f_2 , samtidig med at flyet flyr på tvers av forbindelseslinjen mellom A og B.

Endepunktene A og B er utstyrt med mottakere som er avstent på hver sin av de to senderfrekvensene. De mottar, forsterker og sender impulsene på en felles frekvens tilbake til hovedstasjonen. Det hele er slik innrettet at en i flyet kontinuerlig kan avlese summen av avstandene AS og BS. I praksis skjer det på grunnlag av en fotografisk registrering av avlesningene. Ved konstant flyhøyde vil minimumsverdien av denne avstandssum svare til at flyet krysser forbindelseslinjen mellom A og B. Den avleste minimumsverdi sammen med flyhøyden, som også må kjennes, danner derfor et tilstrekkelig grunnlag for utledningen av den søkte avstand.

Shoran-metoden har allerede spilt en stor rolle ved løsning av problemer innen den praktiske geodesi, bl.a. ved sammenføyning av triangelnett som er atskilt ved havområder av så stor utstrekning av den "klassiske" trianguleringsmetode ikke fører fram. Som eksempel kan nevnes tilknytningen mellom det norske og skotske landsnett over Nordsjøen. Videre er store områder i Nord-Canada dekket med trilaterasjonsnett som er etablert ved hjelp av shoran-metoden.

3. Elektronisk avstandsbestemmelse ved måling av faseforskjeller.

a) Faseforskjellsmåling i langbølgeområdet.

Den mest kjente metode som arbeider etter dette prinsippet, er deccametoden. Et deccaanlegg virker på følgende måte: To sendere befinner seg i L og N (se fig. 66) i en avstand som svarer til et multiplum av den benyttede bølgelengde. Begge sender kontinuerlige, likefasete elektromagnetiske bølger med samme frekvens. Det geometriske sted for alle punkter

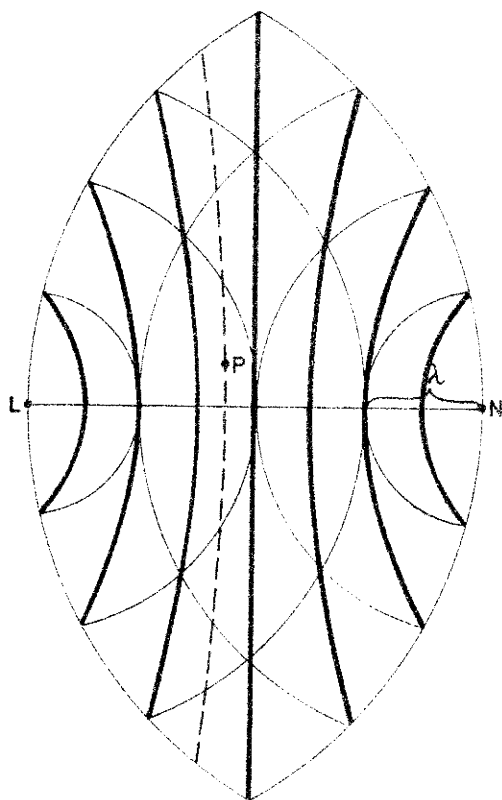


fig. 66

gir da P som skjæringspunktet mellom to hyperbler. Primært resulterer altså decca-metoden i bestemmelse av punkters posisjoner, men på grunnlag herav kan selvsagt avstander utledes.

Decca-metoden blir først og fremst benyttet som navigasjonsmiddel for sjø- og luftfart.

b) Faseforskjellmåling i området av det synlige lys. på sjøen

Den elektro-optiske metode.

Det som først og fremst karakteriserer den elektro-optiske metode, er at det her nyttes lys som bølge for de signaler som selve lengdemålingen baserer seg på. Selve "målebølgen" består av intensitetsmodulert lys som utsendes fra det ene endepunktet og reflekteres tilbake i det andre. Den søkte avstand utledes så på grunnlag av måling av faseforskjellen mellom det utsendte og reflekterte lys. Prinsippet ble opprinnelig nyttet av Fizeau og Michelson til bestemmelse av lyshastigheten. Når det gjelder løsningen av det ovennævnte problem - med kjent lyshastighet å bestemme avstander - har ikke minst den svenske geodet Bergstrand nedlagt et grunnleggende arbeid.

Som allerede nevnt nyttes høyfrekvent, modulert lys som målebølge. Det utsendes m.a.o. et kontinuerlig blinklyssignal med en bestemt frekvens. Selve moduleringen skjer i en såkalt modulator, og den hertil nødvendige høyfrekvente

hvor disse bølger vil inntreffe i samme fase - eller samme svingningstilstand om en vil - blir hyperbler med L og N som brennpunkter. Måles faseforskjellene langs hyperblene som er inntegnet i fig. 66, finnes overalt verdien null. Disse hyperblene går derfor under navn av nullhyperbler. Ved å gå over fra en nullhyperbel til nabohyperbelen vokser faseforskjellen fra 0° til 400° . For å få fastlagt beliggenheten av et vilkårlig pkt. P må faseforskjellen i P måles, og vi må dessuten skaffe oss kjennskap til mellom hvilke nullhyperbler punktet befinner seg. Dermed er det geometriske sted for P fastlagt i form av en hyperbel (den strekede hyperbel i fig. 66). Det er følgelig ikke tilstrekkelig med to senderstasjoner. En éntydig fastlegging forutsetter minst tre senderstasjoner. To faseforskjellmålinger

vekselspenning oppnås ved hjelp av en krystallstyrt oscillator.

Det er viktig å ha klart for seg at når det i det etterfølgende er tale om frekvenser, faseforskjeller og bølgelengder, så refererer ikke disse betegnelse seg til lysets primære bølgeegenskaper, men til bæreølrens påtvungne sekundære bølgeegenskaper som følge av moduleringen. Det går fram av fig. 67, som fore-



fig. 67

stiller et utsnitt av blinklysserien (l=lys, m=mørk). Bølgelengden λ blir da lik avstanden mellom to like faser i blinklysserien. Dette modulerte lys utsendes fra det ene endepunkt av linjen i retning av det andre, hvor det reflekteres ved hjelp av prismer eller speil og sendes tilbake til senderstasjonen, hvor faseforskjellen mellom det utsendte og reflekterte lys bestemmes.

Lysset har da tilbakelagt den dobbelte avstand mellom linjens endepunkter, dvs. $2D$ er lik et helt antall bølgelengder med tillegg av en brøkdel av en bølgelengde svarende til faseforskjellen, n.a.o.

$$2D = n \cdot \lambda + L$$

hvor D er den søkte avstand, λ er bølgelengden, n er antall hele bølgelengder, mens L er faseforskjellen omsatt til lineært mål. Relasjonen mellom λ , den benyttede moduleringsfrekvens f og den aktuelle lyshastighet er gitt ved

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

*

Det mest kjente instrument som baserer seg på den elektro-optiske metode, er det såkalte geodimeter, som er konstruert av Bergstrand.

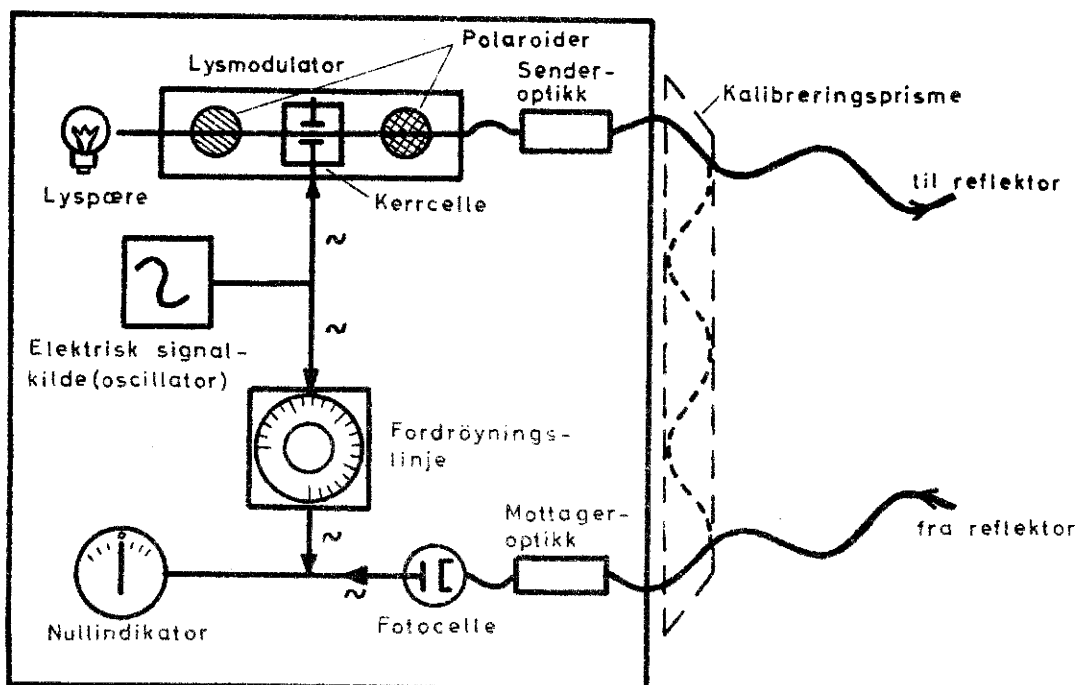


fig. 68

Fig. 68 viser en prinsippskisse for geodimeteret. Fra lyspæren sendes en lysstråle til modulatorene, som består av en Kerr-celle plassert mellom to polaroider. Her bringes lyset til å blinke i takt med den høyfrekvente vekselspenning som tilføres fra signalkilden. Det opereres med tre forskjellige frekvenser i området ca. 30-31 MHz (MHz = megahertz = 10 00 000 Hz), dvs. lyset blinker ca. 30 millioner ganger pr. sek. Det modulerte lyset passerer så senderoptikken og videre mot reflektoren, hvor det reflekteres tilbake og tas inn i mottageroptikken. Reflektoren består av én eller flere såkalte retrodirektive prismer (betegnelsen retrodirektiv refererer seg til den egenskap ved prismet at refleksjonsretningen er parallell med innfallsretningen). Fra mottageroptikken går lyset til fotocellen. Fotocellens følsomhet blir styrt av det samme elektriske signalet som besørger moduleringen av lyset. Derved blir det mulig å foreta en fasesammenligning mellom det utsendte og reflekterte lyset (som følge av at lyset har gått målestrekningen fram og tilbake, vil nemlig det utsendte og reflekterte lys oppvise faseforskjell, "fordrøyning"). Hva målingen av denne faseforskjell angår, så skjer det ved hjelp av fordrøyningslinjen og nullindikatoren. Fordrøyningslinjen tillater en fordrøyning (forsinkelse) av det elektriske signalet som går til fotocellen, slik at det blir mulig å bringe det utsendte og mottatte lys i fase med hverandre, hvilket inntreffer når nullindikatoren viser null.

Det sier seg selv at den verdi for lysvegens lengde som vi skal fram til, er den effektive lengde, dvs. lengden mellom linjens to endepunkter, mens den aktuelle lysvei også omfatter optiske og elektriske lengder inne i instrumentet. Disse såkalte indre lengder bestemmes ved egne kalibreringsmålinger, som foregår på den måten at det anbringes et eget kalibreringsprisme foran instrumentet, som fungerer som reflektor, slik at vi får en "amputert" lysveg som nettopp omfatter de søkte indre lengder.

Som nevnt opereres det med tre modulasjonsfrekvenser. For hver av disse kan det stilles opp en ligning for D, slik at vi ialt får

$$D = n_1 \cdot 2u_1 + L_1$$

$$D = n_2 \cdot 2u_2 + L_2$$

$$D = n_3 \cdot 2u_3 + L_3$$

hvor u-ene er gitte størrelser lik $\frac{1}{4}$ av bølgelengden (for $f = 30$ MHz vil λ utgjøre $\lambda = \frac{v}{f} \approx 10$ m, dvs. u-ene vil dreie seg om ca. 2,5 m), L-ene er faseforskjellen omsatt til lineært mål, mens n-ene er ukjente hele tall. Disse ligninger danner grunnlaget for utledningen av den søkte avstand.

Som nevnt er reflektorprismene retrodirektive (refleksjonsretningen er parallell med innfallsretningen). For å få det reflekterte lyset inn i mottageroptikken nyttes egne glasskiler som besørger den nødvendige avbøyning i sideretningen. Denne avbøyning øker med avtagende avstand. På den nyeste geodimeterkon-

struksjon (modell 6) er sender- og mottageroptikken anbrakt koaksialt (mottageroptikken er plassert konsentrisk i senderoptikken), slik at kiler blir overflødig.

Den lyshastighet som ligger til grunn for instrumentets gradering, refererer seg til en bestemt normaltilstand av atmosfæren med hensyn til lufttrykk og temperatur. Det blir derfor nødvendig med korrigeringer for avvik fra denne normaltilstand (-6°C og 760 mm Hg).

Opprinnelig nyttet en som lyskilde en vanlig lyspære (standardlampe), men er senere gått over til kvikksølvlampe. Den siste har den store fordel sammenlignet med standardlampen at den har større "gjennomslagskraft", slik at det derved oppnås en betydelig utvidelse av geodimeterets aksjonsområde. Det framgår av følgende oversikt

	<u>Rekkevidde</u>	
	<u>Dagslys</u>	<u>Mørke</u>
Standardlampe	1,5 km	15 km
Hg-lampe	4,5 "	25 "

Hva nøyaktigheten angår, så vil den avhenge av avstanden og observasjonsforholdene. Under vanlige forhold kan en regne med en nøyaktighet gitt ved

$$m_D = 10 \text{ mm} + 2 \text{ mm} \cdot D_{\text{km}}$$

hvor m_D har betydning av middelfeil (de to termene skal slås sammen ved kvadratisk addisjon). For $D = 10$ km f.eks. fås

$$m_D^2 = 10^2 + (2 \cdot 10)^2 = 500, \text{ dvs. } m_D = \underline{22 \text{ mm}}$$

Av alle hittil kjente metoder for elektronisk avstandsmåling er den elektro-optiske den nøyaktigste. På minussiden kan anføres at instrumentutstyret blir temmelig omfangsrikt, slik at transporten blir problematisk når det er tale om måling i vanskelig tilgjengelige punkter. Dessuten kommer det til at målingene forutsetter klart, siktbart vær. Et stort aber er det også at for litt lengre avstander må målingene utføres om natten, og nattobservasjoner byr alltid på langt større problemer enn dagsobservasjoner.

c) Faseforskjellmåling i mikrobølgeområdet.

Den mest kjente instrumentkonstruksjon som opererer i mikrobølgeområdet er det såkalte tellurometer. Her benyttes som bæreølge elektromagnetiske bølger i det usynlige området med frekvenser på ca. 3000 MHz, dvs. med en bølgelengde på ca. 10 cm.

Tellurometerets arbeidsmåte blir i prinsippet å karakterisere som en refleksjonsmetode med aktiv reflektor, som baserer seg på modulerte 10-centimeter-

bølger. Under selve målingen fungerer det ene endepunktet som hovedstasjon (master) og det andre som bistasjon (remote). De to instrumentene master og remote er temmelig like. Som svingningskilde anvendes såvel i hoved- som i bistasjon en såkalt refleksklystron. Derved frambringes selve bæreølgen som så ved modulering gjøres egnet til overføring av de for lengdebestemmelsen nødvendige "informasjoner". Modulasjonsfrekvensen er 10 MHz. I prinsippet skjer avstandsbestemmelsen ved måling av forplantningstiden for den modulerte 10 MHz-bølge, idet faseforskjellen mellom den utsendte og reflekterte bølge bestemmes ved hjelp av et katodestrålerør i hovedstasjonen. Men før det skjer blir 10 MHz-bølgen ved forskjellige foranstaltninger "forvandlet", slik at det oppstår en resultantbølge med frekvens 1 kHz. Den søkte avstand blir da lik et helt antall bølgelengder med tillegg av den brøkdelen av en bølgelengde svarende til vinkelen mellom tidsbasisens (katodestrålerøret) nullpunkt og avbryningspunktet. Det ukjente antall hele bølgelengder kan en skaffe seg kjennskap til ved gjentaing av målingene med endret frekvens. Dette er utnyttet på en meget elegant måte til suksessiv bestemmelse av siffer for siffer i det søkte antall.

Hva nøyaktigheten av tellurometeret angår, kan en regne med at den er om lag den samme som senere blir oppgitt for distomaten. Også her er det kjennskapet til de atmosfæriske forhold som representerer "flaskehalsen" i nøyaktighetsmessig henseende. Her gjør det seg forresten en viss forskjell gjeldende mellom den elektro-optiske metode og tellurometermetoden, idet luftens fuktighetstilstand spiller en stor rolle i siste tilfelle, men ikke i første.

Av spesielle fordeler som knytter seg til bruken av radiobølger til avstandsbestemmelsen, kan først nevnes at herved oppnås å kunne nytte selve "målebølgene" til etablering av radioforbindelse mellom linjens endepunkter. Derved spares det inn atskillig materiell, slik at utrustningen totalt får mindre omfang. En annen fordel følger av at radiobølgenes spredning er større enn tilfellet er for lysbølgers vedkommende (som vi senere skal se medfører dette forhold også ulemper). For å få etablert en provisorisk kontakt mellom endepunktene er det tilstrekkelig med en innsiktningsnøyaktighet på ca. 10-15%, hvoretter fininnsiktingen kan foretas ad elektronisk vei. Den elektro-optiske metode forutsetter en atskillig større innsiktningsnøyaktighet. Men den uten sammenligning største fordelen består i at målingene kan foregå like godt om dagen som om natten. Tåke eller regn representerer heller ikke noen vesentlig hindring for målingene. Teoretisk sett må det være fri siktelinje mellom endepunktene, men mindre hindringer som enkelte trær eller hus, eller mindre terrengformasjoner, lar seg uten videre "overvinne". Det at mikrobølger har større gjennomslagskraft enn lysbølger, henger sammen med bølgelengden. Generelt gjelder nemlig at evnen hos elektromagnetiske bølger til å trenge gjennom legemer av fast, flytende eller gassformig konsistens tiltar med voksende bølgelengde (til sammenligning kan nevnes at vanlig lys har bølgelengder på 0,4-0,8 μ).

En vesentlig ulempe som følger med bruk av mikrobølger, har sammenheng med den tidligere omtalte spredning. Den innebærer muligheten for at en del av "bølgestrålen" støter mot bakken, reflekteres og doretter "blander" seg med målebølgene som forplanter seg direkte mellom endepunktene, slik at det oppstår en forfalskning av måleresultatet. Generelt gjelder at elektromagnetiske bølgers spredning er direkte proporsjonal med frekvensen.

En annen bakdel består i at metoden forlanger operatører i begge endepunkter.

*

Foruten tellurometeret skal kort omtales en annen konstruksjon som også opererer i mikrobølgeområdet, nemlig Wilds distomat. Instrumentet arbeider i det hovedsakelige etter samme prinsipp som tellurometeret, men nytter mindre bølgelengder (bølgelengder på ca. 3,3 cm istedenfor 10 cm). For distomaten oppgis følgende nøyaktighet (i betydning av middelfeil):

$$\pm (20 \text{ mm} \pm 1 \text{ til } 10 \text{ mm pr. km})$$

alt etter atmosfæriske forhold.

4. Elektronisk avstandsmåling ved måling av frekvensendringer.

Denne metode har sitt utspring i den såkalte dopplereffekt som opptrer når bølger forplanter seg mellom punkter som er i bevegelse i forhold til hverandre. Effekten lar seg enklest anskueliggjøre med utgangspunkt i en betraktning over lydbølgers forplantning. Her opptrer nemlig det fenomen dersom en iaktaker beveger seg i forhold til en stilløstående lydkilde med en hastighet v' , at han vil registrere en økning av lydhastigheten fra v til verdien $v + v'$. Tilsvarende blir det med frekvensen. Her registrerer han verdien $f + \Delta f$, hvor f er verdien når så vel lydkilde som iaktaker befinner seg i ro. Fenomenet "dirigeres" ved ligningen

$$\frac{f + \Delta f}{f} = \frac{v + v'}{v}$$

Herav resulterer den såkalte dopplerfrekvens f_D

$$f_D = f + \Delta f = f \left(1 + \frac{v'}{v} \right)$$

Et tilsvarende fenomen gjør seg også gjeldende ved forplantning av elektromagnetiske bølger mellom punkter som beveger seg relativt i forhold til hverandre. Det vil da opptre en dopplerfrekvens gitt ved

$$f_D = f \sqrt{\frac{1 \pm \frac{v'}{v}}{1 \mp \frac{v'}{v}}}$$

hvor v' er den relative hastighet mellom iaktaker og bølgekilde (det øvre fortegn gjelder når iaktaker og bølgekilde nærmer seg hverandre og det nedre når de fjerner seg fra hverandre). Av denne ligning følger at bestemmelsen av f_D gir grunnlag for utledning av v' .

Dopplereffekt opptrer også ved utsending av elektromagnetiske bølger som kastes tilbake av en reflektor når sender og reflektor beveger seg i forhold til hverandre. Differensfrekvensen Δf bestemmes ved interferens mellom utsendte og reflekterte frekvens.

Ved denne metode er det primært den relative hastighet mellom linjers endepunkter som bestemmes, men det er klart at herved fås grunnlag for utledning av avstander, som da framkommer ved ut fra et bestemt tidspunkt, ved hvilket sender og refleksjonssted har en kjent avstand, å integrere over den tid som er foreløpet.

Metoden har fått atskillig praktisk anvendelse når det gjelder å bestemme avstander mellom punkter som beveger seg i forhold til hverandre, f.eks. ved bestemmelse av avstander til kunstige satellitter.

K a p i t e l IV.

MÅLING AV HORIZONTAL- OG VERTIKALVINKLER.

A. Måling av horisontalvinkler.

1. Generelle betraktninger.

Med horisontalvinkelen mellom to punkter forstår vi i landmålingen vinkelen mellom de to plan som kan legges gjennom stasjonspunktets loddretning og de to punkter. I fig. 69 er A et stasjonspunkt og B og C to terrengpunkter. Vinkelrett på loddretningen i A er lagt et plan 1, 2, 3, 4, som betegnes som pkt. A's horisontalplan, og som følgelig blir tangentplanet til nivåflaten gjennom A. Punktene B' og C' er projeksjonene av B og C på dette horisontalplan. På grunn av den atmosfæriske refraksjon vil ikke lysstrålen mellom A og B, resp. A og C få et rettlinjett forløp, men følge de strek-prikkede kurver i fig. 69. Som regel kan vi

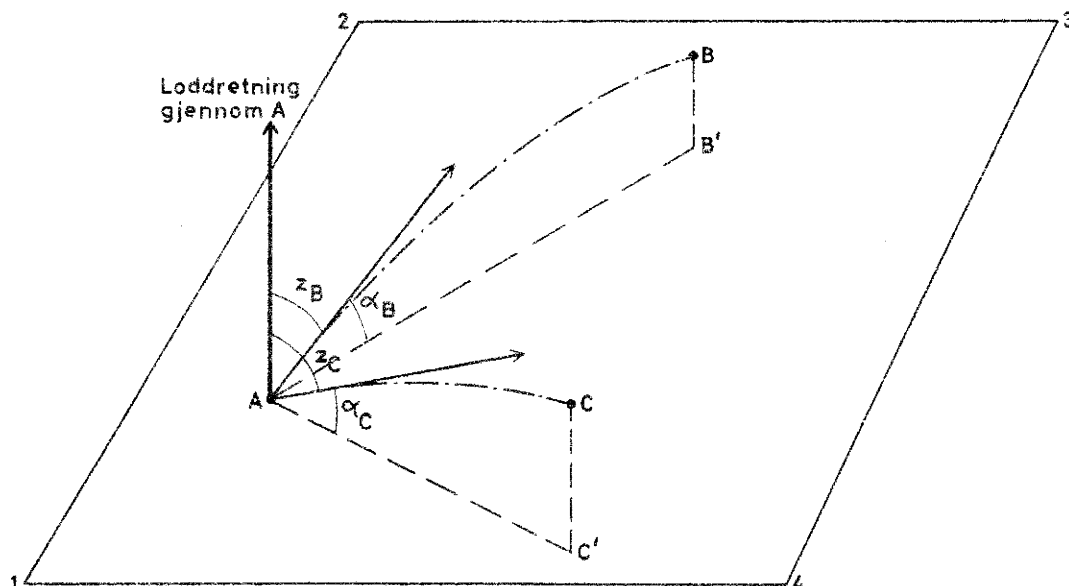


fig. 69

regne med at lysstråler mellom to punkter vil forplante seg i de to punkters vertikallplan. Avvik i sideretningen opptrer dersom lysstrålene blir utsatt for siderefraksjon. I punktet A er tangentene til disse lyskurvene trukket. Siktelinjen til en teodolitt som oppstilles i A og innsiktes mot B og C, vil falle sammen med disse tangentene. Av definisjonen på horisontalvinkler følger at horisontalvinkelen i A mellom B og C blir lik vinkelen B'AC'. Horisontalvinkelen i et punkt mellom to andre punkter kan følgelig også defineres som vinkelen mellom projeksjonen av punktene på

stasjonspunktets horisontalplan.

Ved vertikalmålinger er det enten vinkelen mellom loddretningen og tangenten til lyskurven (z_B og z_C) eller vinkelen mellom tangenten og horisontalplanet (α_B og α_C) som bestemmes. De første betegnes som zenitdistanser og de siste som høydevinkler. (Det gis også instrumenter hvor det er vinkelen $200^g - z$ som måles, såkalte nadirdistanser.)

*

Vi skal først se nærmere på måling av horisontalvinkler.

Vi skiller her mellom retnings- eller satsmåling på den ene siden og vinkelmåling på den andre siden. Med retningen til et punkt forstår vi vertikallplanet gjennom instrumentoppstillingspunktet og det tilsiktede punkt. På tilsvarende måte forstår vi med retningsavlesning den avlesning på teodolittens horisontalsirkel som vi har når siktelinjen er innsiktet i dette vertikallplanet. Av denne definisjon følger at en horisontalvinkel finnes som forskjellen mellom to retningsavlesninger.

Med retnings- eller satsmåling forstår vi en observasjonsmetode hvor et større antall retninger ($n > 2$) blir observert kollektivt.

Vinkelmåling er det spesialtilfelle av satsmåling som inntreffer når $n = 2$. Ved denne metode måles altså de enkelte vinkler hver for seg, altså uavhengig av hverandre.

2. Retnings- eller satsmåling.

Vi tenker oss at det i et stasjonspunkt S skal fastlegges 4 retninger til objektene 1, 2, 3 og 4 i forhold til hverandre. Etter oppstilling av teodolitten i S innstilles først mot objekt 1 med avlesning på

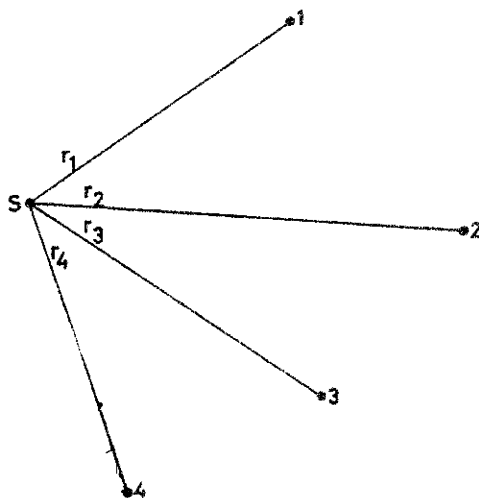


fig. 70

begge avlesningsmidler. Deretter innstilles mot objekt 2 ved dreining av alidaden med ny avlesning. Så følger innstilling og avlesning mot objektene 3 og 4. Det som dermed er utført, går under navn av en halvsats. Nå slås kikkerten gjennom og det samme gjentas i II. kikkertstilling, bare med den forskjell at objektene innstilles i omvendt rekkefølge, med andre ord i rekkefølgen 4, 3, 2, 1.

Til sammen utgjør disse to målinger en helsats. Det at punktene tilsiktes i omvendt rekkefølge i den andre

halvsats, tar sikte på eliminering av feil som følge av en eventuell dreining av instrumentet mens målingene pågår. Antar vi nemlig at dreiningen er proporsjonal med tiden og videre at innsiktningen tar like lang tid for samtlige retninger, lar det seg vise at vi ved denne framgangsmåte oppnår at middeltallene av avlesningene i I. og II kikkertstilling alle får samme feil, noe som ikke influerer på nøyaktigheten av satsen som sådan.

Observeres i flere satser, må sirkelens stilling endres mellom hver sats. Denne forholdsregel tar sikte på eliminering av virkningen av sirkeldelingsfeilene, og dessuten på gardering mot grove avlesningsfeil. Ved n satser endres sirkelen ca. $\frac{200^g}{n}$ mellom hver sats.

Dersom det observeres bare i én sats (altså i to halvsatser), skulle en etter denne regel dreie sirkelen 100^g mellom hver halvsats. For instrumenter med avlesning bare på ett sted på sirkelen bør en imidlertid innrette seg annerledes. Her vil det være tre hensyn å ta som delvis står i strid med hverandre, nemlig:

1. Hensynet til sirkeldelingsfeilene, som forlanger 100^g 's dreining av sirkelen.
2. Hensynet til alidadens eksentrisitet, hvis virkning elimineres ved måling i begge k.st. uten sirkelforflytning.
3. Sikring mot grove feil, som forlanger dreining av sirkelen.

Det avgjørende blir da hvilke av disse hensyn som skal gis prioritet. Erfaringen viser at sirkeldelingsfeilene på moderne instrumenter spiller en underordnet rolle i forhold til feil som følge av alidadens eksentrisitet. Sikring mot grove feil har også alltid høyeste prioritet. Ved halvsatsmåling blir regelen følgelig den at det bare skal foretas en liten sirkelforflytning mellom de to halvsatser (ca. $2-3^g$). Da sirkeldelingsfeilene som nevnt betyr så lite, og det selvsagt vil være fordelaktig å kunne operere med en standardprosedyre, lar en denne regel gjelde generelt ved måling i to halvsatser uten hensyn til om instrumentet har avlesning bare ett sted på sirkelen eller på to diametrale steder.

Måling av vinkler i to halvsatser kommer særlig til anvendelse ved polygonmåling.

For nøyaktigheten av satsen er det i og for seg likegyldig hvilken retning som velges til nullretning dersom det er mulig å få med samtlige retninger som skal observeres i vedkommende stasjon, i en enkelt satsserie. Forholdet er nemlig det at satsresultatet (vinklene mellom de ulike objekter, som fremkommer som differenser mellom korresponderende retningsverdier) ikke påvirkes av hvilken retning som satsene reduseres til null med hensyn på. Derimot er det av betydning for vurderingen av nøyaktigheten av målingene (hvor godt de enkelte satser stemmer overens) om vi velger et nærliggende eller fjerntliggende

objekt til nullretning. Velges et nærliggende objekt til nullretning, hvis til-
siktning blir unøyaktig, så betyr det at feilen på dette objekt ved reduseringen
overføres til samtlige andre, og vi får følgelig stor spredning for samtlig
retninger (men som allerede nevnt, vil ikke dette forhold innvirke på størrelsen
av vinklene som kan utledes av satsen). Vi konstaterer altså at alt stemmer dår-
lig, men kan ikke uten videre avgjøre om det skyldes at målingene i sin helhet
er unøyaktige, eller om det bare skyldes at nullretningen er unøyaktig. Velges
derimot et fjerntliggende objekt til nullretning, som kan innstilles nøyaktig,
så vil satsene stemme godt overens for de punkters vedkommende som er nøyaktig
observert, mens vi får utslag for det eller de punkter som er mindre nøyaktig
innstilt, dvs. vi konstaterer at det stemmer godt det som skal stemme godt, og
at det blir større spredning der hvor det er å vente.

I praksis må vi regne med at instrumentet også foretar uregelmessige
egenbevegelser mens målingene pågår, dvs. dreininger som veksler både med hen-
syn til omdreiningshastighet og omdreiningretning. Da vi må regne med at slike
egenbevegelser har en tendens til å gjøre mer av seg jo lenger målearbeidet pågår,
er det av betydning at hver enkelt sats observeres på kortest mulig tid. Da tids-
forbruket vil være avhengig av antall retninger i satsen, må vi sørge for å hol-
de dette antall tilstrekkelig lavt. Under vanlige forhold bør ikke antall ret-
ninger overstige 6 - 7. Er det totale antall større, må vi gå til en oppdeling
av retningene i to eller flere satsserier. Seriene må i det minste ha én ret-
ning felles, og det er fordelaktig å anvende denne fellesretning til nullret-
ning for samtlige satsserier. Ved valg av fellesretning må det tas hensyn til
at denne kan innstilles skarpt. En bør derfor til fellesretning velge retningen
til et av de fjerne objekter som ligger slik til at vi kan regne med at det kan
tilsiktet nøyaktig hele tiden mens målingene i vedkommende stasjon pågår.

Nedenfor følger et eksempel på føring ved observering av helsatser.

Stasjon	Sikte til	I. k.st.		II. k.st.		Middel	Red.middel
		A	B	B	A		
I	1	35,4685	,4625	35,4612	,4652	35,4644	0,0000
	2	80,9024	,8984	80,8976	,9012	80,8999	45,4355
	3	131,1073	,1052	131,1045	,1068	131,1060	95,6416
	4	228,5360	,5340	228,5300	,5330	228,5332	193,0688

Som allerede nevnt, endres ikke satsen ved å føreke eller før-
minke sanntlige retningsverdier med en konstant. En gjør seg nytte av dette
forhold ved danningen av den såkalte reduserte sats som dannes av middeltal-
lene i nest siste kolonne ved å subtrahere retningsavlesningen til nullret-

ningen fra sanrlige retningsavlesninger, slik at den valgte nullretning får verdien null. I talleksenplet er satsen redusert med hensyn på første retning, men det er selvsagt ikke noe i veien for å redusere satsen slik at en hvilken som helst av de retninger som inngår i satsen, blir nullretning.

Observeres i flere satser, dras de enkelte satser til slutt sammen til en middelsats. I denne middelsats framkommer hver enkelt retningsverdi som middeltallet av retningsverdiene til de reduserte satser, idet vi forutsetter at sanrlige enkeltsatser er redusert til null med hensyn på samme retning. I feillæren skal vi vise hvordan nøyaktigheten av observasjonene kan utledes på grunnlag av avvikene mellom de reduserte satser og middelsatsen.

Nedenfor følger et eksempel på skjemaføring ved måling av to halvsetser.

Stasjon	Sikte til	I. k. st. (I.halvsats)	II. k. st. (II.halvsats)	I.halvsats reduert	II.halvsats reduert	Middel av satsene
I	1	12,6670	214,1237	0,0000	0,0000	0,0000
	2	42,1533	243,6072	29,4863	29,4835	29,4849
	3	88,6295	290,0890	75,9625	75,9653	75,9639
	4	225,1388	26,5943	212,4718	212,4706	212,4712

I dette tilfelle regnes hver halvset ut særskilt. De forskjellige instrumentfeil som kollimasjonsfeil og horisontalakseskjevhet vil bevirke at resultatene av de to halvsetene kan avvike mer fra hverandre enn observasjonsnøyaktigheten skulle tilsi. Mens avvikene mellom de reduserte satser ved måling av helsatser utelukkende vil avhenge av observasjonsnøyaktigheten (idet virkningen av nevnte instrumentfeil elimineres av middeltallet av målingene i I. og II. k.st.), vil de tilsvarende avvik ved måling av halvseter også inkludere virkningen av kollimasjonsfeil og horisontalakseskjevhet. Vi må derfor regne med atskillig større avvik mellom reduserte halvseter enn tilfellet er ved helsatser.

Gangen i observasjonsarbeidet ved satsmåling blir følgende:

1. Med tilnærmet nullavlesning på sirkelen for første objekts vedkommende innstilles objektene fra venstre mot høyre i I. k.st.

RED SOLA

2. Kikkerten slås over til II. k.st. og objektene innstilles i omvendt rekkefølge.

3. Kikkerten slås over til I. k.st., og sirkelendrecies omtrentlig $\frac{2009}{n}$. Så følger justering av horisontalstillingen og gjentakelse av operasjonene under pkt. 1, og slik fortsettes til samtlige satser er ferdigmålt.

Satsmåling er uten sammenligning den mest anvendte metode ved horisontalvinkelmåling, og særlig da ved triangulering av 2., 3. og 4. orden.

3. Vinkelmåling.

I dette tilfelle måles de enkelte vinkler hver for seg, uavhengig av hverandre. Det gis en rekke metoder å anordne denne vinkelmåling på. De viktigste er nabovinkelmetoden, metoden med fast utgangsretning og vinkelmåling i alle kombinasjoner. Alle disse metoder bygger på måling av enkeltvinkler. Hva målingen av de enkelte vinkler angår, kan den utføres på flere måter, enten ved satsmåling, reiterasjon eller repetisjon. Vi skal først behandle selve vinkelmålingsmetodene og senere komme nærmere inn på hvordan målingen av de enkelte vinkler foregår.

a) Nabovinkelmetoden.

Denne metode består i å kombinere hver retning med nærmeste naboretning til høyre og til venstre. Det blir like mange vinkler å observere som antall retninger. Observasjonskontroll fås ved betingelsesligningen

$$\Sigma \alpha = 400^g$$

Metoden har den store mangel at nøyaktigheten av vinklene i nettet ikke blir konstant. For en vinkel som er satt sammen av summen eller differensen av to

eller flere enkeltvinkler blir nøyaktigheten mindre enn for de observerte enkeltvinkler.

Eks.: $\beta = \alpha_1 + \alpha_2$

$$m_{\beta}^2 = m_1^2 + m_2^2 = 2 m_{\alpha}^2$$

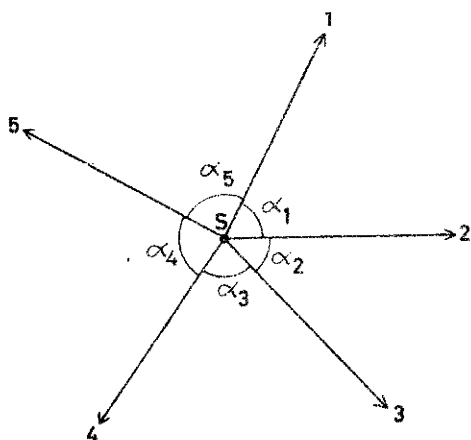


fig. 71

hvor m_α er middelfeilen på enkeltvinklene, idet vi forutsetter at alle vinklene er målt med samme nøyaktighet. Det at de forskjellige vinkler i nettet blir av ulik nøyaktighet, kompliserer den beregningsmessige utnyttelse av måleresultatene etter nabovinkelmetoden. Metoden nyttes forholdsvis lite i praksis.

b) Metoden med fast utgangsretning.

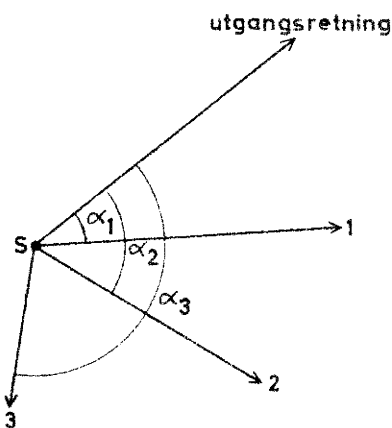


fig. 72

I dette tilfelle fastlegges hver enkelt retning i forhold til en spesiell utgangsretning, som ikke inngår i triangelnettet. Ved denne metode oppnås homogen nøyaktighet med hensyn til bestemmelsen av de enkelte retninger i forhold til hverandre, idet en hvilken som helst vinkel i nettet kan utledes som differensen mellom to målte vinkler. I feilteoretisk forstand ekvivalerer måleresultatet etter denne metode en ekte satsserie, slik at den etterfølgende utjevning av nettet kan foretas som om målingene var utført som sats-

måling.

Denne metode blir en del brukt når det er tale om vinkelmåling av høyeste presisjon, f.eks. ved 1. orden triangulering.

c) Vinkelmåling i alle kombinasjoner.

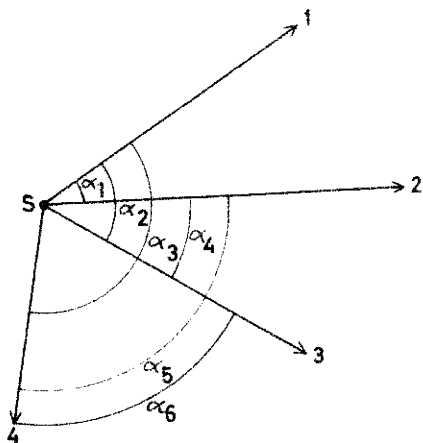


fig. 73

Denne metode skriver seg fra general Schreiber. Som det ligger i navnet, kombineres hver enkelt retning med samtlige andre. Vi forutsetter at det totale antall retninger er i , og skal i det etterfølgende utlede det totale antall vinkler som skal måles, og likeledes antall overskyttende målinger.

Den 1. retning gir	$i - 1$	kombinasjonsmuligheter
" 2. " "	$i - 2$	"
" 3. " "	$i - 3$	"
.....
" i " "	0	"

Det totale antall vinkler som skal måles, blir altså summen av en aritmetisk rekke. Vi kaller dette antallet s og har

$$s = \frac{1}{2}(i - 1 + 0)i = \frac{1}{2} i(i - 1)$$

For å få fastlagt de i retninger i forhold til hverandre trenges $i-1$ vinkler (vi kan jo f.eks. tenke oss retningene fastlagt ved å kombinere 1. retning med samtlige andre). Antall overskytende målinger blir folgelig lik

$$\frac{1}{2} i(i - 1) - (i - 1) = (i - 1)\left(\frac{i}{2} - 1\right)$$

Vinkelmåling i alle kombinasjoner er praktisk talt enerådende når det gjelder horisontalvinkelmålinger av høyeste presisjon, særlig ved triangulering av 1. orden. Metoden brukes bl.a. av N.G.O.

I feillæren skal vi gå nærmere inn på hvordan de overskytende målinger utnyttes til en såkalt stasjonsutjevning. Det vil da vise seg at stasjonsutjevningen resulterer i et produkt som i enhver henseende ekvivalerer en satsmåling.

4. Metoder for måling av enkeltvinkler.

Vi har foran behandlet de viktigste vinkelmålingsmetoder. Grunn-elementet i dem alle er måling av enkeltvinkler, og vi skal i det etterfølgende behandle de viktigste metoder for enkeltvinkelmåling.

a) Ved satsmåling.

Den enkelte vinkel måles på samme måte som ved satsmåling med bare to retninger. Dette er den metoden som spiller den største rolle i praksis. Metoden er bl.a. praktisk talt enerådende ved vinkelmåling i alle kombinasjoner.

b) Ved reiterasjon.

Denne metode har mye til felles med satsmåling. Forskjellen består i at mens vi ved satsmåling dreier sirkelen $\frac{2cc^g}{n}$ mellom hver helsats, blir dreiningen ved reiterasjon like stor som størrelsen av den vinkel som måles. Ved 2. gangs måling er avlesningen ved innstilling av venstre vinkelben tilnærmet den samme som avlesningen for høyre vinkelben ved 1. gangs måling. Hensikten med denne framgangsmåten er å få uskadeliggjort sirkeldelingsfeilene. Det framgår av den etterfølgende oppstilling.

1. gangs måling av vinkelen	$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_0 + u_0 \\ \bar{a}_1 + u_1 \end{array} \right.$	venstre vinkelben	
		høyre	"
2. " " " "	$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_1 + u_1 \\ \bar{a}_2 + u_2 \end{array} \right.$	venstre	"
		høyre	"
3. " " " "	$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_2 + u_2 \\ \bar{a}_3 + u_3 \end{array} \right.$	venstre	"
		høyre	"
.			
n. " " " "	$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_{n-1} + u_{n-1} \\ \bar{a}_n + u_n \end{array} \right.$	venstre	"
		høyre	"

idet vi forutsetter at vi måler vinkelen i alt n ganger. Her betyr u-ene sirkeldelingsfeil i forhold til nullstreken, mens \bar{a} -ene er de korrekte avlesninger som vi ville ha hatt dersom sirkelen ikke hadde hatt noen delingsfeil. Middeltallet av disse målinger blir

$$\alpha_m = \frac{1}{n} \{[(\bar{a}_1 + u_1) - (\bar{a}_0 + u_0)] + [(\bar{a}_2 + u_2) - (\bar{a}_1 + u_1)] + \dots\} = \bar{\alpha} + \frac{u_n - u_0}{n}$$

hvor $\bar{\alpha}$ er den verdi vi ville ha fått dersom instrumentet ikke hadde noen delingsfeil. Vi ser at det bare er første og siste delingsfeil som influerer på resultatet, og at virkningen blir sterkt redusert i forhold til de opprinnelige delingsfeil, idet $u_n - u_0$ blir dividert med n. Det er tilstrekkelig at de like avlesninger (f.eks. a_1 ved 1. måling og a_1 ved 2. måling) er omtrent like store. Reiterasjon kan nyttes både for enaksede og toaksede teodolitter. På de moderne instrumenter spiller delingsfeilene en underordnet rolle. Metoden blir derfor lite brukt i praksis.

c) Ved vanlig repetisjon.

Denne metode forutsetter en dobbeltakset teodolitt. Metoden går ut på at vinkelen avsettes fortløpende langs sirkelen så mange ganger som den skal måles. Målingen foregår på følgende måte.

Først innstilles på venstre siktepunkt og det avleses på horisontalsirkelen. Deretter innstilles på høyre siktepunkt ved dreining om alidaden. Derved har vi fått avsatt vinkelen én gang langs sirkelen. Vi dreier så tilbake om limbeaksen og innstiller på venstre siktepunkt. Deretter dreies om alidadeaksen til høyre siktepunkt, hvorved vinkelen fås avsatt på nytt langs sirkelen. På samme måte fortsettes så mange ganger som vinkelen skal måles i I. k.st. (i alt n ganger dersom vinkelen skal måles med en observasjonsstyrke svarende til n helsatser). Deretter slås kikkerten gjennom og venstre punkt innstilles ved dreining om limbeaksen, hvorefter målingen fortsetter på nøyaktig samme måte i II. k.st. med fortløpende avsetting av vinkelen langs sirkelen, like mange ganger i hver k.st. Når høyre siktepunkt er innstilt for siste gang, foretas avlesning på nytt. Dersom første avlesning er a_0 og siste a_{2n} , blir den søkte verdi

for vinkelen lik

$$\alpha = \frac{a_{2n} - a_0}{2n}$$

Har vi ved avsettingen av vinkelen passert α -streken en eller flere ganger, må det til a_{2n} adderes like mange ganger 400^g som α -streken er passert.

En bør gjøre seg til regel å lese av a_1 slik at en får tilnærmet kjennskap til vinkelens størrelse ($\alpha = a_1 - a_0$), bl.a. for å sikre seg mot grove feil.

Som huskeregel for utførelsen av repetisjonsmåling kan brukes at dreiningen med sølen alltid foregår om alidadeaksen (ved hjelp av alidadeens klem- og finskrue). Dreiningen mot sølen derimot skjer om linbeaksen (ved hjelp av limbens klem- og finskrue).

Vi tenker oss at avlesningen a_0 har avlesningsfeilen u_a og delingsfeilen u_d . De tilsvarende størrelser for sluttavlesningen a_{2n} er u'_a og u'_d . Vi har da når \bar{a}_0 og \bar{a}_{2n} betegner de feilfrie verdier:

$$\alpha = \frac{1}{2n}(\bar{a}_{2n} + u'_a + u'_d - \bar{a}_0 - u_a - u_d) = \frac{1}{2n}(\bar{a}_{2n} - \bar{a}_0) + \frac{1}{2n}(u'_a - u_a) + \frac{1}{2n}(u'_d - u_d)$$

hvor det første ledd angir den korrekte verdi av vinkelen, mens de to siste ledd representerer virkningen av avlesnings-, resp. sirkeldelingsfeilene. Det går fram av uttrykket ovenfor at metoden er særlig fordelaktig for instrumenter med grove avlesningsmidler og mindre nøyaktig sirkeldeling.

Repetisjonsmåling bygger på den forutsetning at sirkelen står i rø når alidade dreies separat, og dessuten at linbe og alidade ikke beveger seg i forhold til hverandre ved dreining om linbeaksen. Erfaringen viser at det er vanskelig å få disse fordringer eksakt oppfylt. Sirkelen har nemlig en tendens til å bli slept med ved dreining om alidadeaksen. Til en viss grad kan denne feilen motvirkes ved å skru klemskruen godt til for dreiningen om alidadeaksen.

En annen mangel ved repetisjonsmålingen består i at den ikke gir noen kontroll på hvor godt de enkelte målinger stemmer over ens innbyrdes.

For å motvirke de ensidige feil ved vanlig repetisjonsmåling, innførte Gauss en modifisert repetisjonsmetode.

d) Den Gaussiske repetisjonsmetode.

I I. k.st. repeteres vinkelen på samme måte som ved repetisjonsmåling. I II. k.st. derimot repeteres ikke vinkelen selv, men dens eksplement ($400^g - \alpha$). Vi forutsetter at vinkelen skal måles med en observasjonsstyrke svarende til n helsatser, dvs. vinkelen må i alt repeteres $2n$ ganger. Begynnelsesavlesningen mot pkt. A er a_0 . Når vinkelen er repetert n ganger

i I. k.st., leses av mot pkt. B a_1 . Kikkerten slås så gjennom og repeteringen fortsetter, men denne gang med pkt. B som venstre og A som høyre vinkelben. Sluttavlesningen etter n repeteringer av eksplementvinkelen i II. k.st. kaller vi a_2 . Den søkte vinkel er følgelig gitt ved:

$$\alpha_{I.k.st.} = \frac{a_1 - a_0}{n} \quad \text{og} \quad \alpha_{II.k.st.} = \frac{a_1 - a_2}{n}$$

dvs. $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha_I + \alpha_{II}) = \frac{a_1 - a_0}{2n} + \frac{a_1 - a_2}{2n}$

Uten målefeil og instrumentfeil skulle sluttavlesningen a_2 være lik begynnelsesavlesningen a_0 .

Dersom medslepningen er like stor ved målingen av vinkelen selv som ved måling av eksplementvinkelen, vil medslepingsfeilen bli eliminert av sluttresultatet. Den Gaussiske repetisjonsmetode er derfor gunstigere enn vanlig repetisjonsmåling.

Nedenfor følger eksempler på føring ved observering etter repetisjonsmetoden. Føringen forutsettes basert på en vanlig observasjonsbok for satsmåling med visse tillempninger.

Sta- sjon	Sikte til		I. k.st.		II. k.st.		Middel	Redusert middel	
			A	B	B	A			
a	1	I.k.st.	antall rep. { 0	0,31	,33	Middel 0,3200	Multiplum av vinkel 0,0000	Vinkel	
	(2)			{ (1)	(66,72)				
	2	II.k.st.	{ 2	133,15	,16	133,1550	132,8350		
	2			{ 4	265,98	,99	265,9850		132,8300
									132,8325

(Strengt tatt er det ikke nødvendig å foreta avlesning når en har repetert ferdig i I. k.st., men det er likevel å anbefale da en derved får et visst grunnlag for vurdering av målingens nøyaktighet.)

Eksempel på føring ved den Gaussiske repetisjonsmetode.

(observasjonsstyrke svarende til 6 fullsatser)

Sta- sjon	Sikte til		I. k.st.		II. k.st.		Middel	Redusert middel	
			A	B	B	A			
a	1	I.k.st.	antall rep. { 0	57,87	,88	Middel 57,8750	Multiplum av vinkel 0,0000	Vinkel	
	(2)			{ (1)	(200,33)				
	2	II.k.st.	{ 6	112,61	,63	112,6200	854,7450		
	1			{ 12	57,83	,85	57,8400		854,7800
									854,7625

Generelt kan en si at repetisjonsmåling er på sin plass når en tar sikte på å måle en vinkel med stor nøyaktighet med et lite instrument med grove avlesningsmidler og unøyaktig sirkeldeling. Metoden spilte tidligere en dominerende rolle når det var tale om nøyaktige vinkelmålinger, men har tapt mye av sin betydning etter at nøyaktigere avlesningsmidler og en fullkomnere sirkeldelingsteknikk har brakt avlesnings- og delingsfeilene ned til samme størrelsesorden som de øvrige feil som normalt opptrer ved vinkelmålingen.

5. Horisontalvinkelmålingens nøyaktighet.

I instrumentlæren har vi allerede behandlet virkningen av de forskjellige instrumentfeil på horisontalvinkelmålingen. Vi viste da at ved å observere i begge kikkertstillinger fås eliminert virkningen av samtlige instrumentfeil, bortsett fra sirkelens delingsfeil og den feil som skyldes at instrumentets vertikalkakse ikke er nøyaktig loddrettstilt under målingen. Foruten disse instrumentfeil opptrer ved horisontalvinkelmålingen en rekke andre feil, dels av tilfeldig og dels av systematisk natur.

a) Siktefeilen (innstillingsfeilen).

Med siktefeilen forstås vi den feil at observatoren ikke innstiller trådkorset nøyaktig på siktepunktet. Denne feil inneholder som regel komponenter både av tilfeldig og systematisk natur. Som eksempel på systematiske feilkilder ved siktingen, kan nevnes ensidig belysning av signalet, slik at bare høyre eller venstre halvpart av signalet er synlig (dette fenomen betegnes som fasebelysning). Hva størrelsen av den tilfeldige komponent angår, vil den i høy grad være avhengig av ytre forhold som luftens tilstand. Sitring i luften medfører utydelige og urolige bilder og nedsetter nøyaktigheten av vinkelmålingen vesentlig. De beste observasjonsforhold har vi i overskyet vær med vindstille. På solskinnsdager kan sitringen bli så sjenerende midt på dagen at målingene må henlegges til de tidlige morgentimer og sene ettermiddagstimer (vi forutsetter da at det dreier seg om vinkelmålinger som tar sikte på stor nøyaktighet). Ved triangulering av 1. orden observeres for det meste om natten mot elektriske lykter som signaler, fordi luften er roligere om natten enn om dagen.

En viktig feilkilde representerer siderefraksjonen, dvs. det optiske fenomen at lyskurven som forbinder to punkter ikke befinner seg i et vertikalt plan. Siderefraksjonen motvirkes ved å fordele observasjons-

arbeidet over et lengere tidsrom. Ved triangulering av 1. orden praktiseres den regel at målingene må utstrekkes i det minste over to dager (eller netter). Siderefraksjonen gjør seg mest gjeldende for sikter som stryker langs siden av fjellvegger, knauser, husvegger osv. Under planleggingen av triangelnettet må en være oppmerksom på dette forhold, og gå inn for å unngå sikter som kan antas å være predisponert for siderefraksjon.

Ellers vil nøyaktigheten av innsiktingen være avhengig av målerens øvelse og synsevne, kikkertens forstørrelse, trådkorsets og signalets utforming. Tykke trådkorsstreker er uheldig for så vidt som de ses under en stor synsvinkel, slik at nøyaktigheten av innsiktingen blir nedsatt. Dobbelstreker regnes for å være nøyaktigere enn enkeltstreker, særlig for signaler med en viss lateral utstrekning. Forsøk har vist at under gode ytre forhold kan vi regne med en siktefeil i betydning av middelfeil på ca. $\frac{10''}{\sqrt{\text{kikkertforst.}}}$.

b) Avlesningsfeilen.

Denne avhenger i første rekke av avlesningsmidlet, og i mindre grad av observatoren. Tidligere spilte også sirkelens diameter en stor rolle for avlesningsnøyaktigheten, idet stor diameter normalt betinger større avlesningsnøyaktighet enn liten diameter. I våre dager er imidlertid delingsteknikken drevet så langt og avlesningsmidlene blitt så fullkomne at det ikke lenger er noen grunn til å tillegge sirkelens størrelse noen særlig betydning. For gode nonier kan vi regne med en avlesningsnøyaktighet i betydning av middelfeil på ca. $1/4 - 1/3$ av noniens angivelse. Med skruemikroskoper og optiske mikrometer kan middelfeilen på en avlesning bringes ned til ca. $3''$.

c) Sentreringsfeil.

Denne feil omfatter såvel virkningen av eksentrisk instrument som eksentrisk signal. Vi skal først ta det tilfelle at instrumentet er eksentrisk oppstilt i forhold til det trigonometriske punkts sentrum.

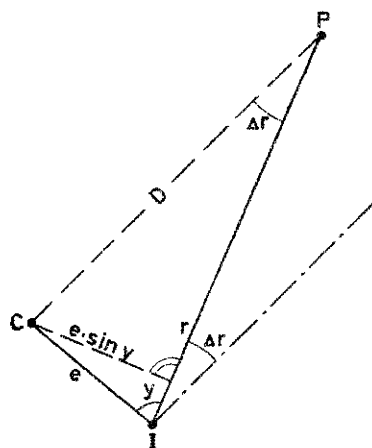


fig. 74

trisk oppstilt i forhold til det trigonometriske punkts sentrum. I fig. 74 betegner C det trigonometriske punkts sentrum og I er instrumentoppstillingspunktet. Sentreringsfeilen er lik e . Retningsavlesningen mot et punkt P er r . Den riktige retningsverdi som vi ville ha hatt i pkt. C med samme orientering av sirkelen, er lik $r + \Delta r$ (den strek-prikkede linje fra I er parallell med linjen C-P). Av figuren ser vi at Δr er gitt ved:

$$\sin \Delta r = \frac{e \sin y}{D}$$

som kan forenkles til

$$\Delta \hat{r} = \frac{e \sin y}{D} \rho$$

idet vi tar hensyn til at Δr vanligvis blir en meget liten vinkel. Maksimumsverdien for Δr blir: $\Delta \hat{r}_{\text{maks.}} = \frac{e}{D} \rho$.

Dersom signalet i det tilsiktede punkt er eksentrisk, fås en tilsvarende feil. Fig. 75 viser situasjonen i det tilsiktede punkt. I stasjonspunktet P observeres retningen r mot signalet S, mens den riktige retningsverdi mot det tilsiktede punkts sentrum C er $r + \Delta r$. Vi får samme uttrykk som ferrige gang

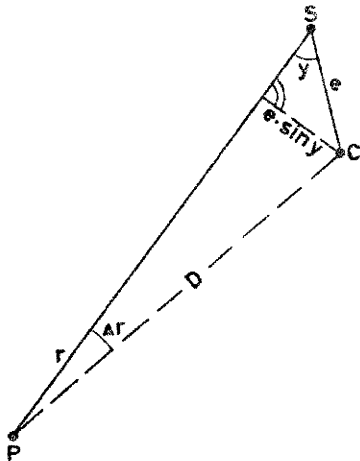


fig. 75

$$\Delta \hat{r} = \frac{e \sin y}{D} \rho$$

Av de to uttrykkene for sentreringsfeilenes innvirkning på retningsmålingene går det fram at disse feil betyr mest ved korte sikteavstander. Ved polygenering spiller sentreringsfeilene en stor rolle nettopp på grunn av at sidelengdene her er så korte.

B. Måling av vertikalvinkler.

1. Generelle betraktninger.

Måling av vertikalvinkler foregår i prinsippet på samme måte som måling av horisontalvinkler, bare med den forskjell at vertikalvinkelmålingene foretas på en vertikalt anbrakt sirkel, vertikalsirkelen. I praksis er det særlig to konstruksjonsanordninger som dominerer: 1. Vertikalsirkelen er fast og avlesningsmidlet (vertikalalidaden) er bevegelig. 2. Vertikalsirkelen er bevegelig, mens avlesningsmidlet er fast. I det første tilfelle er avlesningsmidlet fast forbundet med kikkerten (sikteaksen) og deltar følgelig i dennes dreining i vertikalplanet. Sirkelen er her som regel fast forbundet med en såkalt vertikalsirkellibelle (se fig. 76). I det andre tilfelle derimot er sirkelen fast forbundet med kikkerten, mens vertikalalidaden befinner seg i ro, og er tilkøpelt en såkalt vertikalalidadelibelle (se fig. 77). Som fellesbetegnelse for de to libelletyper brukes vertikallibeller.

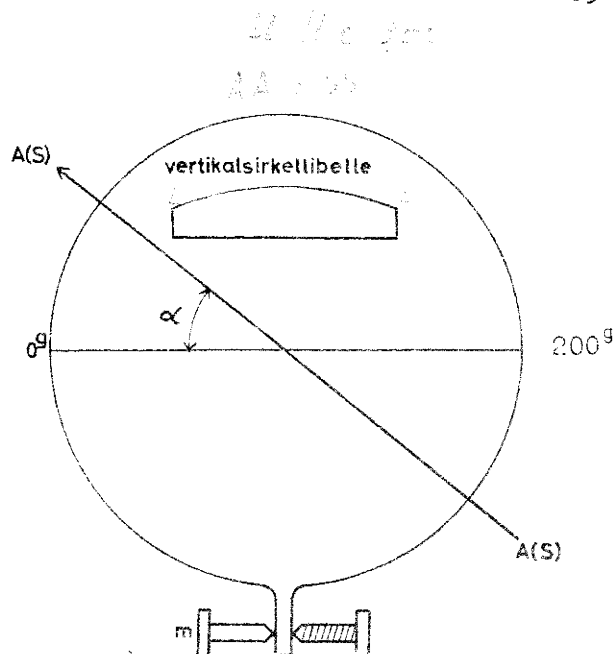


fig. 76

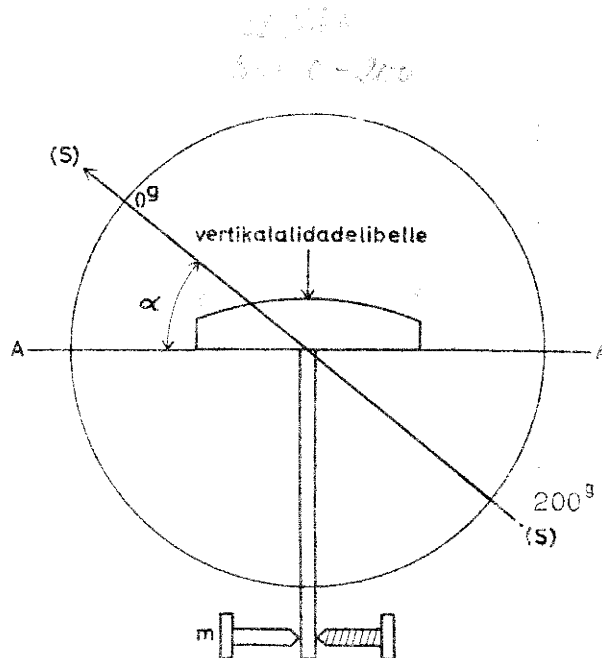


fig. 77

Fig. 76 viser anordningen med fast vertikalsirkel. Ved hjelp av mikrometerskruen m kan sirkelen og følgelig også vertikalsirkellibellen dreies. Betingelsen for korrekte vertikalkvinkler er at libellens akse og sirkelens $0-200^g$ diameter er parallelle. Dessuten må kikkertens siktelinje SS falle sammen med alidade-diameteren AA . (På eldre norske instrumenter av denne konstruksjonsart finnes ikke noen egen mikrometerskrue for dreining av sirkelen. Denne dreining må da foretas ved hjelp av fotskruene. Heller ikke har disse instrumenter egen vertikalsirkellibelle, men den av alidadelibellene som er parallel med vertikalsirkelens plan, nyttes som vertikalsirkellibelle.)

Fig. 77 tar sikte på å anskueliggjøre anordningen med fast alidade. Ved håndtering av mikrometerskruen m dreies alidaden AA og den dermed fast forbundne vertikalalidadelibelle. Betingelsen for korrekte vertikalkvinkler er denne gang at vertikalalidadelibellens akse er parallel med AA , og videre at kikkertens sikteakse SS faller sammen med $0-200^g$ diameteren.

Anordningen med fast vertikalsirkel og bevegelig alidade var tidligere det vanligste, men er på moderne instrumenter stort sett avløst av anordningen med bevegelig vertikalsirkel og fast vertikalalidade.

2. Bestemmelse av vertikalkvinkler.

Vi skal så se nærmere på prinsippet for vertikalkvinkelmåling og tar vårt utgangspunkt i anordningen med fast vertikalsirkel og bevegelig vertikalalidade. Videre forutsettes at instrumentet er innrettet for måling av zenitdistanser.

I. kikkertstilling

II. kikkertstilling

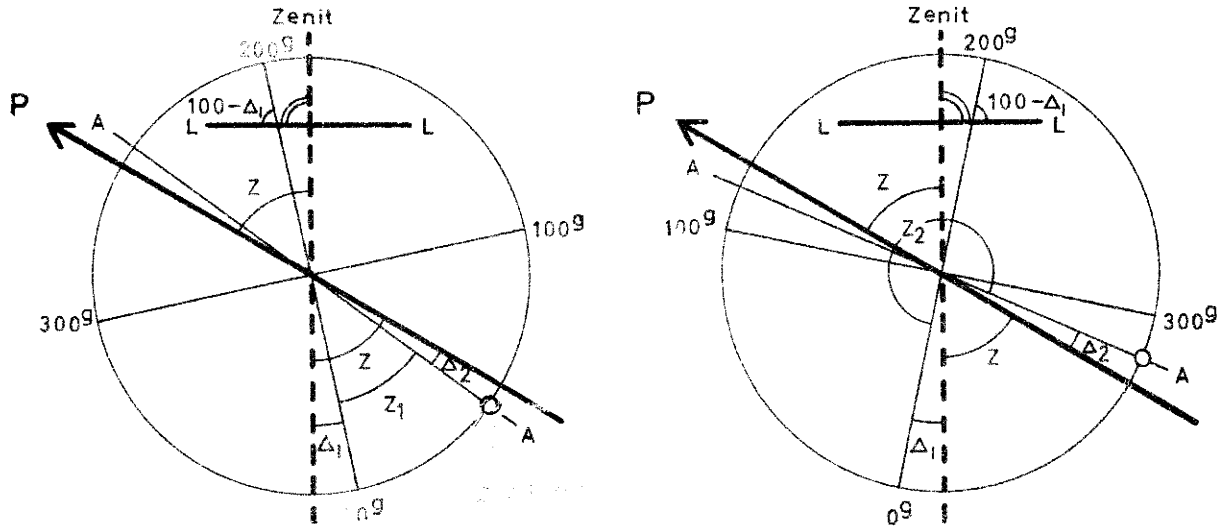


fig. 78

I fig. 78 tenker vi oss siktelinjen rettet mot et punkt P i begge kikkertstillinger. LL forestiller vertikalsirkellibellens akse som inntar en fast stilling i forhold til vertikalsirkelen, mens AA er vertikalalidaden. Vertikalsirkellibellen bringes til innspilling for hver innsikting av siktelinjen. Vi forutsetter at libelleaksen og sirkelens 0-200^g diameter danner vinkelen 100^g-Δ₁ med hverandre. Følgelig vil 0-200^g diameteren danne vinkelen Δ₁ med loddretningen gjennom sirkelens sentrum (stiplet linje i figuren) når libellen spiller inn. Videre forutsettes at AA danner vinkelen Δ₂ med siktelinjen. I fig. 78 betyr z den korrekte verdi av zenitdistansen til P mens z₁ og z₂ er de målte verdier i henholdsvis I. og II. k.st. Av fig. 78 ser vi at

$$z_1 = z - (\Delta_1 + \Delta_2) = z - i$$

$$z_2 = 400^g - (z + \Delta_1 + \Delta_2) = 400^g - z - i$$

idet vi har innført betegnelsen i for størrelsen $\Delta_1 + \Delta_2$, som går under navn av indeksfeil. Vi subtraherer og adderer de to ligninger og får

$$z = \frac{1}{2}(400^g + z_1 - z_2)$$

og
$$2i = 400^g - (z_1 + z_2)$$

Av den første av disse ligningene går det fram at vi får eliminert virkningen av indeksfeilen ved å observere i begge kikkertstillinger og ta middeltallet. (Vi kommer til samme konklusjon om vi gjennomfører en tilsvarende undersøkelse for anordningen med fast vertikalalidade

og bevegelig vertikalsirkel).

Den siste ligning representerer den såkalte indeksfeilprøve, som generelt gir uttrykk for at summen eller differensen av observasjonene i de to kikkertstillinger skal ha en gitt verdi. I foreliggende tilfelle skal summen av z_1 og z_2 være lik 400^g dersom instrumentet ikke hadde noen indeksfeil. Ellers vil uttrykket for indeksfeilprøven og utledningen av z være avhengig av sirkelens besifring, om det er høydevinkler, zenitdistanser eller nadirdistanse som måles.

Vi skal ved et eksempel vise føring og utregning av vertikalvinkler (zenitdistanser)

I. k.st.	II. k.st.	Indeksfeilprøve	z_1	Middeltall
93,0631 ^g	306,9160 ^g	399,9791 ^g	209 ^{cc}	93,0736 ^g
92,2588	307,7210	399,9798	202	92,2689
97,8457	302,1335	399,9792	208	97,8561
98,1972	301,7836	399,9808	192	98,2068

Indeksfeilen skal holde seg konstant under målingene i samme stasjon. Indeksfeilprøven gir derfor et godt bilde av målingenes nøyaktighet og instrumentets stabilitet. Dessuten er indeksfeilprøven nødvendig av hensyn til sikring mot grove feil. Særlig ved måling av vertikalvinkler i bare en sats, er det viktig at indeksfeilprøven blir foretatt. Måles i flere satser, fås kontroll ved sammenlikning av middeltallene. Indeksfeilprøven letter også utregningen av middeltallene for I. og II. k.st., idet disse middelverdier er lik resultatet av målingene i I.k.st. med tillegg (eller fradrag) av i.

3. Vertikalvinkelmålingens praktiske utførelse.

Hva den praktiske utførelse av målingene angår, vil framgangsmåten være avhengig av om vertikalsirkel- eller vertikallibellens er tilkopp- let egen mikrometerskrue (slik som forutsatt i fig. 76 og 77) eller ikke. Enklest blir det når vertikallibellen er tilkopp- let egen mikrometerskrue. Framgangsmåten blir da:

1. Skarp innsikting av objektet
2. Vertikallibellen bringes til innspilling ved hjelp av libel- lens mikrometerskrue
3. Avlesning på vertikalsirkelen.

Uten mikrometerskrue for innspilling av vertikallibellen, slik som tilfellet er for de fleste norske instrument-konstruksjoners vedkommende, blir framgangsmåten:

1. Grovinnsikting av objektet
2. Vertikallibellen bringes til innspilling ved hjelp av fetskruene.
3. Skarp innsikting av objektet ved hjelp av høydefinskruen
4. Avlesning på vertikalsirkelen.

Resultatet av målingene i en kikkertstilling betegnes som en halvsats. Observeres i begge k.st., betegnes resultatet som en helsats. Halvsatser kan bare nyttes dersom nøyaktighetskravene er små, f.eks. ved tachymetrering.

Skal det observeres vertikalvinkler i helsatser mot flere objekter, går en fram på den måten at en objektvis observerer ferdig de enkelte helsatser. Nyttles flere helsatser, er det viktig at satsene mot ett og samme punkt får en viss tidsspredning. Denne foranstaltning er diktert av hensynet til refraksjonens svingninger. Saken er nemlig den at ved den trigonometriske høydeberegning har en ikke annen mulighet enn å basere seg på gjennomsnittsverdier for refraksjonen, nemlig verdien 0,13 for den såkalte refraksjonskoeffisient. Det er da klart at ved spredning av målingene er det større sannsynlighet for at middel-tallet av målingene vil samsvare med den gjennomsnittlige refraksjon, enn om målingene utføres innenfor et kortere tidsintervall.

Det er viktig å ha klart for seg at ved enhver vertikalvinkelmåling skal en bestemt libelle (vertikallibellen) bringes til å spille inn. Dette har riktignok ikke gyldighet for de instrumentkonstruksjoner med automatisk innstilling av vertikalsirkelens indeks, som er brakt på markedet i den senere tid. Betingelsen for at denne automatiske regulering av indeksen skal tre i funksjon, er at vertikalaksen er tilnærmet loddrettstilt. Denne type instrumenter er raskere i bruk fordi manuell innspilling av vertikallibellen blir overflødig. Dessuten innebærer de utsjaltning av den farlige feilkilde som en forglemmelse av denne innspilling representerer.

4. Justering for indeksfeil.

Som allerede vist, elimineres virkningen av indeksfeilen ved måling i begge kikkertstillinger. I mange tilfelle, f.eks. ved tachymetrering, observeres i bare én k.st., hvilket forutsetter at instrumentet er tilstrekkelig verifisert for indeksfeil.

Framgangsmåten ved verifiseringen blir forskjellig alt etter vedkommende instruments konstruksjonsart. Det avgjørende for framgangsmåten er om vertikallibellen er tilkopleet egen mikrometerskrue eller ikke.

I begge tilfeller baserer verifiseringen seg på kjennskapet til den korrekte verdi for vertikalvinkelen til et punkt. Vi skaffer oss en slik verdi ved vertikalvinkelmåling i begge k.st. til et punkt som tillater en nøyaktig vertikal innsiktning (av det som tidligere er sagt, følger at middeltallet av de to verdier for vertikalvinkelen vil være korrekt uten hensyn til om instrumentet har indeksfeil eller ikke).

For instrumenter med egen mikrometerskrue for vertikallibellen foregår så selve korrigeringen på den måten at først innstilles horisontaltråden på punktet, og den korrekte verdi av vertikalvinkelen innstilles ved hjelp av libellens mikrometerskrue, hvorefter libellen bringes til innspilling ved hjelp av libellens korreksjonsskruer.

For instrumenter uten egen mikrometerskrue for vertikallibellen, slik som tilfellet er for de fleste norske instrumenters vedkommende, grovinn siktes så mot punktet, vertikallibellen (den av horisontallibellene hvis akse er parallell med sikteaksen) bringes til innspilling ved hjelp av fetskruene, hvorefter horisontaltråden innstilles nøyaktig på punktet og den korrekte verdi av vertikalvinkelen innstilles ved hjelp av vertikalsirkelens justeranordning som tillater egenbevegelser av vertikalsirkelen.

Til slutt kontrolleres justeringen ved måling av en vertikalvinkel i begge k.st.

NB! Dersom horisontalalidadelibellen(e) er i ulage, må den (de) korrigeres før verifiseringen for indeksfeil.

K a p i t e l V.

AREALBEREGNING, GRENSEREGULERING m.v.

A. Arealberegning.

1. Innledning.

Bestemmelse av flateinnhold er ofte et av de viktigste formål med et oppmålingsarbeid.

Beregning av arealer kan enten skje direkte på grunnlag av mål tatt i terrenget, eller indirekte på grunnlag av et kart over vedkommende område.

I det første tilfelle kan arealbestemmelsen enten foretas med utgangspunkt i de umiddelbare terrengmål, eller på grunnlag av herav beregnede koordinater til arealfigurenes hjørnepunkter.

Det andre tilfelle omfatter arealbestemmelse på grunnlag av mål tatt på kartet og arealbestemmelse ved måling på kartet med mekaniske hjelpemidler.

Å gå omvegen om et kart minsker nøyaktigheten. Det henger sammen med at unøyaktigheter ved karttegningen og usikkerhet i bestemmelsen av kartkrympningen kommer i tillegg til målefeilene. Arealberegning på grunnlag av måletall anvendes derfor særlig hvor grunnen har høy verdi, f.eks. i byer og bymessig bebygde strøk, og likeså for små parseller, tomter osv. I de fleste tilfelle er vi likevel henvist til å basere arealbestemmelsen på kart, enten fordi figurene har uregelmessig form, eller fordi at direkte mål som grunnlag for bruk av tallmetoden, mangler.

2. Arealbegrepet i landmålingen.

Før vi går over til den egentlige arealberegning, skal vi se litt nærmere på selve arealbegrepet. Som det vil framgå av de etterfølgende arealdefinisjoner, er arealbegrepet i landmålingen knyttet til en eller annen projeksjonsflate, dvs. en markfigurs areal er lik arealet av samme figur på vedkommende projeksjonsflate. Alt etter hvilke projeksjonsflater

som det kan komme på tale å overføre markfiguren til, fås forskjellige arealbetegnelser. Med utgangspunkt i de tidligere innførte avstandsdefinisjoner (se side 23) kan følgende arealdefinisjoner avledes: Med en markfigurs midlere areal forstår vi det arealet som framkommer ved projisering av figuren på en parallellflate til referensflaten i figurens middelhøyde. Videre har vi begrepet ellipsoidisk areal, som er arealet som fås når den betraktede figur projiseres på selve referensflaten. Endelig har vi begrepet en figurs kartprojeksjonsareal som er arealet av figuren i kartprojeksjonsplanet.

Vi skal så se nærmere på den funksjonelle forbindelse mellom de forskjellige arealbegreper, som setter oss i stand til beregningsmessig å gå over fra en arealangivelse til en annen.

a) Den funksjonelle forbindelse mellom ellipsoidisk og midlere areal.

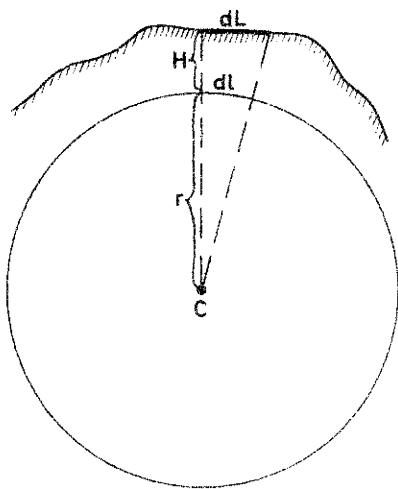


fig. 79

I fig. 79 betrakter vi et linjeelement dL på den fysiske jordoverflate i høyden H over referensflaten (ellipsoiden), som vi tenker oss erstattet av en kuleflate med radius lik ellipsoidens middelkrumningsradius for linjeelementets midtpunkt. På denne kuleflaten er lengden av projeksjonen av dL lik dL , som ifølge figuren er gitt ved:

$$\frac{dL}{dL'} = \frac{r}{r+H} = \frac{1}{1 + \frac{H}{r}} \approx \left(1 - \frac{H}{r}\right)$$

hvor $\frac{dL}{dL'}$ er lik forholdet mellom linjeelementets ellipsoidiske og midlere lengde. N^o er som bekjent arealnålestokken lik kvadratet av den

lineære målestokk, dvs.

$$\frac{A_e}{A_m} = \left(1 - \frac{H}{r}\right)^2 \approx \left(1 - \frac{2H}{r}\right)$$

som gir oss relasjonen mellom en figurs midlere areal A_m og samme figurs ellipsoidiske areal A_e idet vi forutsetter at H er lik figurens middelhøyde. For H uttrykt i km og $r = 6390$ km går formelen over til

$$A_e = A_m (1 - 0,000313 H_{\text{km}})$$

b) Den funksjonelle forbindelse mellom ellipsoidisk areal og kartprojeksjonsareal.

Når det gjelder arealbestemmelse på grunnlag av kart eller plane

koordinater, kommer det også inn feil som følge av den benyttede kartprosjeksjons forvanskning. Som tidligere omtalt, vil nemlig overføringen av et flateelement fra referensflaten til kartprosjeksjonsplanet betinge en deformasjon av originalfiguren, som for de fleste kartprosjeksjoners vedkommende også innebærer en arealforvanskning. Denne forvanskning vil være forskjellig for de forskjellige kartprosjeksjoner. For den Gauss-Krügerske kartprosjeksjon som nyttes her til lands, er arealforvanskningen gitt ved:

$$A_o = A_e \left(1 + \frac{y^2}{r^2}\right)$$

Her betyr r jordradien, A_o arealet i kartprosjeksjonsplanet, mens y er den midlere ordinatverdi for vedkommende figur. For y uttrykt i km og $r = 6390$ km går formelen over til

$$A_o = A_e (1 + 0,000000245 y_{\text{km}}^2)$$

Slik som det Gauss-Krügerske projeksjonssystem er utformet i Norge, kan y -ene ikke overstige 90 km. Den maksimale arealforvanskning som følge av kartprosjeksjonen, blir folgelig

$$\frac{A_o}{A_e} = (1 + 0,000000245 \cdot 90^2) = 1,002$$

dvs. om lag 0,2 ‰.

3. Beregning av arealer på grunnlag av originale mål eller derav utledede koordinater.

a) Trekanter.

I sjeldne tilfelle, f.eks. hvor det dreier seg om lokale målinger som bygger på en linjetriangulering, vil det opptre en kjernefigur som består av et system av trekanter med kjente sidelengder. Arealberegningen kan da enten utføres direkte ved hjelp av Herons formel

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

hvor a , b og c er de kjente trekantsider og $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Eller det kan komme på tale å gå vegen om trekant høydene. Det skjer enklest på følgende måte (se fig. 8c):

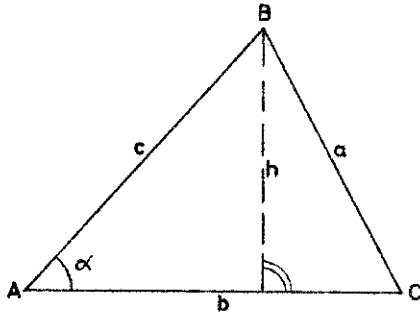


fig. 80

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \text{ (etter cos.setningen)}$$

$$\text{dvs. } \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Deretter finnes h, som er gitt ved:

$$h = c \sin \alpha$$

og til slutt arealet

$$A = \frac{1}{2} bh$$

b) Sluttet polygon.

Vi setter oss så til oppgave å beregne arealet av en vilkårlig mangekant hvis hjørner foreligger koordinatbestemt i et rettvinklet akse-system.

Før enkelhets skyld baserer vi utledningen på en trekant (se fig. 81), men de formlene vi kommer fram til, har gyldighet for vilkårlige

n-kanter. Vi legger før det første merke til at akse-systemet i fig. 81, som er identisk med det som anvendes i landmålingen, er annerledes enn det vi er vant til fra matematikken. Videre fester vi oss ved at positiv omløpsretning er med urviseren (det siste gjelder ikke bare for nummerering av polygonhjørnepunkter, men også for vinkler).

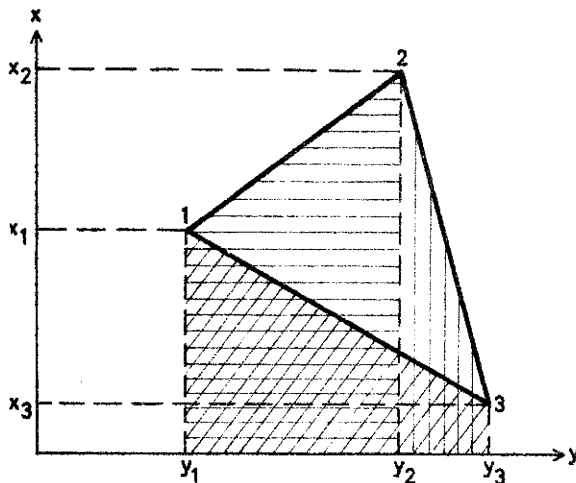


fig. 81

Vi har da før arealet av trekanten, idet vi danner trapeser med

abscisser som parallelle sider og ordinatdifferenser som høyder:

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(x_2 + x_1)(y_2 - y_1)}_a + \underbrace{\frac{1}{2}(x_3 + x_2)(y_3 - y_2)}_b + \underbrace{\frac{1}{2}(x_1 + x_3)(y_1 - y_3)}_c$$

hvor a er lik arealet av det horisontalskraverte trapes, b lik arealet av det vertikalskraverte trapes og c lik arealet av det skråskraverte trapes.

Med innføring av summetegn antar uttrykket før A formen

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (x_i + x_{i-1})(y_i - y_{i-1})$$

som for en vilkårlig n-kant går over til

$$A = \frac{1}{2} \sum_1^n (x_i + x_{i-1}) (y_i - y_{i-1}) \quad (1)$$

Ved å danne trapeser med ordinatene som parallelle sider og abscissedifferensene som høyder fås på tilsvarende måte

$$A = \frac{1}{2} \sum_1^n (y_i + y_{i-1}) (x_i - x_{i-1}) \quad (2)$$

I sin nåværende form er de to formlene for A upraktiske å bruke. Vi kommer fram til gunstigere formler ved å multiplisere ut (1) eller (2). Vi utvikler (1) for n=3 og får:

$$\begin{aligned} 2A &= (x_1 + x_3)(y_1 - y_3) + (x_2 + x_1)(y_2 - y_1) + (x_3 + x_2)(y_3 - y_2) \\ &= \underline{x_1 y_1} + x_3 y_1 - x_1 y_3 - \underline{x_3 y_3} + \underline{x_2 y_2} + x_1 y_2 - x_2 y_1 - \underline{x_1 y_1} + \underline{x_3 y_3} + x_2 y_3 - x_3 y_2 - \underline{x_2 y_2} \end{aligned}$$

hvor de understrekede ledd opphever hverandre. De resterende ledd kan trekkes sammen på følgende to måter:

$$2A = -y_1(x_2 - x_3) - y_2(x_3 - x_1) - y_3(x_1 - x_2)$$

eller
$$2A = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$

dvs.
$$A = -\frac{1}{2} \sum_1^3 y_i (x_{i+1} - x_{i-1}) = \frac{1}{2} \sum_1^3 x_i (y_{i+1} - y_{i-1})$$

eller generelt:

$$A = -\frac{1}{2} \sum_1^n y_i (x_{i+1} - x_{i-1}) = \frac{1}{2} \sum_1^n x_i (y_{i+1} - y_{i-1}) \quad (3)$$

Disse formlene er bedre egnet for den praktiske regning. Fortegnene baserer seg på at figurens hjørner blir nummerert i rekkefølge med urviseren. De to formlene (3) er likeverdige. Ved den praktiske regning nyttes de begge to for kontrollens skyld.

Det kan ofte inntreffe i praksis at koordinatene har så store verdier at regningen vanskeliggjøres av den grunn. Det vil f.eks. ofte være tilfelle dersom koordinatene refererer seg til landsnettets akse-system. I slike tilfelle er det tillatt å foreta en parallellforskyvelse av akse-systemet, dvs. vi forminsker alle abscisser og ordinater med hvert sitt (eller samme) konstante tall.

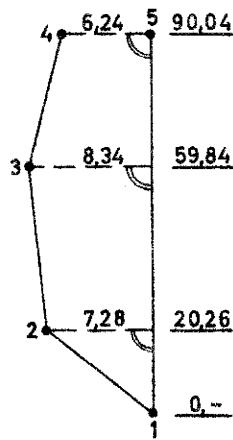


fig. 82

Vi skal vise bruken av formlene (3) ved et talleksempel som refererer seg til en poly-
gon med 5 hjørnepunkter (se fig. 82). Vi har
altså her en målelinje 1-5 som de øvrige
punkter er innlagt i forhold til ved rett-
vinkelmetoden. Måletallene kan oppfattes som
koordinater i et lokalt aksesystem med pkt.1
som origo og målelinjen 1-5 som x-akse.
Nedenfor følger arealberegningen på grunnlag
av (3). Alle lengdemål er angitt i meter.

pkt.	y	x	$y_{i+1} - y_{i-1}$	$x_{i+1} - x_{i-1}$	$y_i (x_{i+1} - x_{i-1})$	$x_i (y_{i+1} - y_{i-1})$
(5)	0,00	+90,04				
1	0,00	0,00	-7,28	-69,78	0	0
2	-7,28	+20,26	-8,34	+59,84	-435,6352	-168,9684
3	-8,34	+59,84	+1,04	+69,78	-581,9652	+ 62,2336
4	-6,24	+90,04	+8,34	+30,20	-188,4480	+750,9336
5	0,00	+90,04	+6,24	-90,04	0	+560,8496
(1)	(0,00)	(0,00)				
					-1206,0484	+1206,0484

dvs. $A = 603,024 \text{ m}^2$

*

Vi skal så se nærmere på det tilfelle at vi har en målelinje med innlagte grensepunkter og søker arealet mellom målelinjen og grenselinjen.

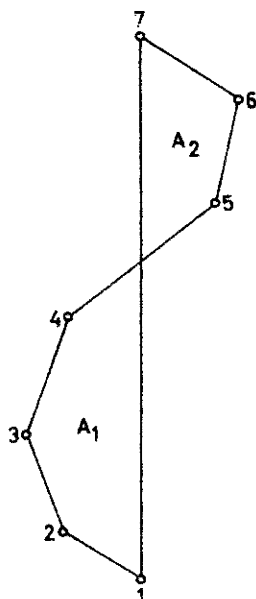


fig. 83

I fig. 83 er pkt. 2-6 grensepunkter som er innmålt i forhold til målelinjen 1-7. For den del av figuren som omfatter arealet A_1 , følger hjørnepunktene hverandre i positiv omløpsretning, mens omløpsretningen blir negativ for A_2 . Herav følger at arealformlene (3) anvendt på polygon 1-7 resulterer i differensen mellom A_1 og A_2 , dvs. arealformlene resulterer i

$$A = A_1 - A_2$$

Til slutt tar vi for oss det tilfelle at arealet av et område som er oppmålt ved polygonmåling, og hvis begrensningpunkter er innlagt i forhold til polygonsidene ved rettvinkelmetoden, skal bestemmes. I fig. 84 er 1,2,.....,6 hjørnepunkter i polygonen, mens den brutte linjen 1-a-b-c-2 er et stykke av det søkte areals begrensninglinje. Koordinatene til hjørnepunktene forutsettes beregnet.

Vi skal angi to måter å løse problemet på. For det første består den mulighet å koordinatberegne grensepunktene på grunnlag av deres abscisser og ordinater, og deretter anvende arealformlene (3) på "yttergrensepolygonen". Eller vi kan utføre arealberegningen i to trinn ved først å arealberegne selve hovedpolygonen ved arealformlene (3) og deretter sup-

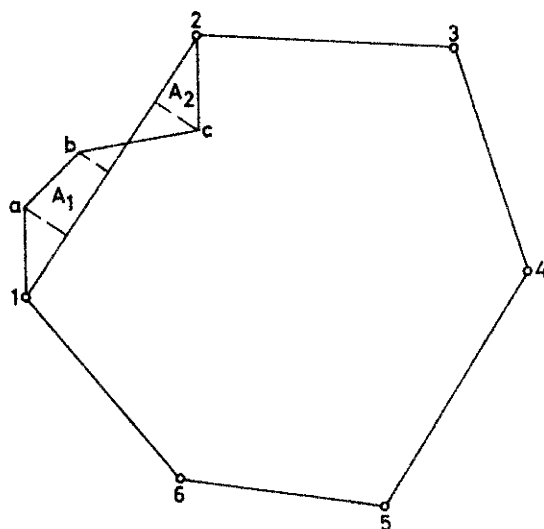


fig. 84

plere dette areal med arealet av de figurer som ligger mellom polygonsidene og området begrensninglinje. Da grensepunktene etter forutsetningen er innmålt i forhold til polygonsidene ved rettvinkelmetoden, kan også disse arealer utledes ved formelsettet (3) slik som vist tidligere i tilknytning til fig. 83, idet polygonsidene betraktes som lokale x-akser. Beregningen av suppleringsarealene byr ikke på noen problemer dersom selve polygonpunktene inngår i begrensninglinjen, slik som tilfellet er i fig. 84. Vi får da direkte suppleringsarealet $A_1 - A_2$ som blir å addere til arealet av selve hovedpolygonen. Litt mer komplisert blir det dersom ikke polygonpunktene inngår i området begrensninglinje. Vi må da sørge for å måle en del tilleggsdata i "skjøtene" mellom to og to polygonsider, slik at arealberegning etter foregående metode fremdeles blir mulig. Fig. 85 viser et eksempel på hvordan vi må innrette oss i slike tilfelle. Her er i og j to polygonpunkter, mens 1,2 og 3 er grensepunkter. Foruten grensepunktene som innmåles på vanlig måte i forhold til polygonsiden, må også punktene a og b som er skjæringspunktene mellom polygonsidenes forlengelse og begrensninglinjen, innmåles i forhold til begge sammenstøtende polygonsider. Som suppleringsareal til polygonsiden mellom i og j gir da arealformlene (3) det skraverte areal i fig. 85.

plere dette areal med arealet av de figurer som ligger mellom polygonsidene og området begrensninglinje. Da grensepunktene etter forutsetningen er innmålt i forhold til polygonsidene ved rettvinkelmetoden, kan også disse arealer utledes ved formelsettet (3) slik som vist tidligere i tilknytning til fig. 83, idet polygonsidene betraktes som lokale x-akser. Beregningen av suppleringsarealene byr

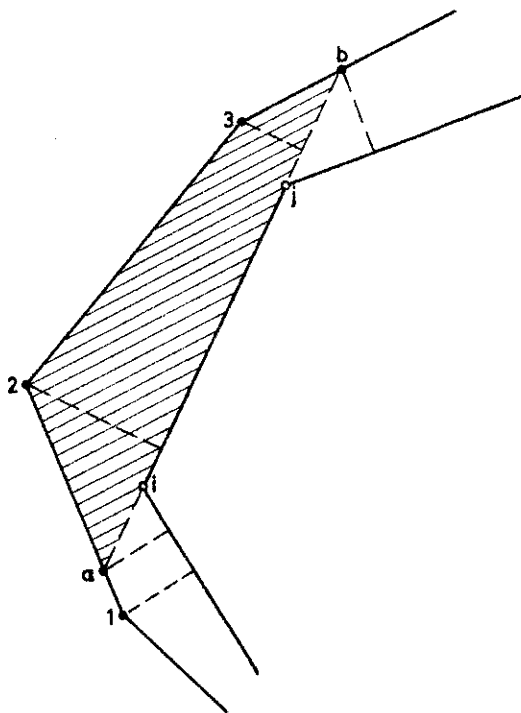


fig. 85

Arealberegning på grunnlag av koordinater egner seg godt for elektronisk databehandling. Metoden har bl.a. fått utstrakt anvendelse innen fotogrammetrien. Det foregår på den måten at det i forbindelse med kartkonstruksjonen f.eks. foretas en automatisk registrering av koordinatene til figurens hjørnepunkter. Utrekningen av arealene skjer så på grunnlag av disse koordinater ved hjelp av elektroniske regnemaskiner.

4. Arealberegning på grunnlag av kart.

I dette tilfelle kan arealbestemmelsen utføres på følgende måter:

- a. På grunnlag av mål tatt på kartet.
- b. Ved rutetelling (skritting).
- c. Ved planimetermåling.

a. Arealberegning på grunnlag av kartmål foregår på den måten at den opprinnelige figur inndeles i trekanter og firkanter, hvoretter de nødvendige data for de enkelte figurers beregning måles ut på selve kartet. Firkantens areal beregnes ved måling av en diagonal og høydene på samme (se fig. 86, hvor $A = \frac{1}{2} d \{h_1 + h_2\}$).

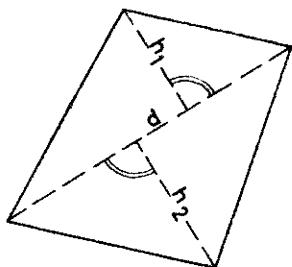


fig. 86

Til sikring mot grove feil bør figurene beregnes dobbelt. Trekanten kontrolleres på den måten at vi benytter to forskjellige sett grunnlinjer og høyder, mens firkanten kontrolleres ved benyttelse av begge diagonaler og tilsvarende høyde-sett. Som endelig verdi benyttes middel-tallet av begge målinger forutsatt at overensstemmelsen er tilstrekkelig god (se side 107 under feilgrenser ved arealberegning).

Vi skal så anstille noen betraktninger over spørsmålet om den heldigste form for trekantene og firkantene når de skal arealberegnes etter sistnevnte metode. Vi tar først for oss trekanten

$$A = \frac{1}{2} gh$$

En feil dg på g og dh på h bevirker en feil på arealbestemmelsen gitt ved

$$dA = \frac{1}{2} h dg + \frac{1}{2} g dh$$

Hva måling av linjers lengde på et kart angår, kan vi regne med at nøyaktigheten er uavhengig av linjens lengde forutsatt at linjelengden ikke overstiger lengden av målelinjalen. Vi kan følgelig forutsette at $dg = dh$, hvorved uttrykket for dA går over til:

$$dA = \frac{1}{2} (h + g) dg$$

Nå lar det seg bevise generelt at for et bestemt areal har $(h+g)$ minimum for $h=g$, dvs. den heldigste trekantform har vi når grunnlinje og høyde er om lag like store.

For firkanten kan det på tilsvarende måte vises at den gunstigste form oppnås ved å gjøre begge høyder like store og om lag $2/3$ av diagonal-lengden.

Er området som skal arealbestemmes, uregelmessig av form, fås i tillegg til en kjernefigur - bestående av et system av trekanter og firkanter - en del mindre figurer av mer uregelmessig form som befinner seg langs feltets begrensningelinje. Disse figurer kan arealbestemmes ved skrittingsmetoden, som vi nå skal gå over til å behandle.

b. Skritting representerer en mekanisk løsning av trapesformlen. I sin enkleste utforming foregår denne form for arealbestemmelse ved hjelp av et gjennomsiktig papir med opptrukne parallelle linjer med konstant avstand. Dette papir legges over figuren som skal beregnes, hvorved figuren fås oppdelt i et system av smale strimler (trapeser) med den konstante høyde h (se fig. 87). Vi måler og summerer fortløpende med passerens trapesenes "middelsider" s_1, s_2, \dots . Totalarealet fås så ved å multiplisere

summen av middelsidene med den konstante høyde h , idet vi har

$$A = \sum hs = h \sum s$$

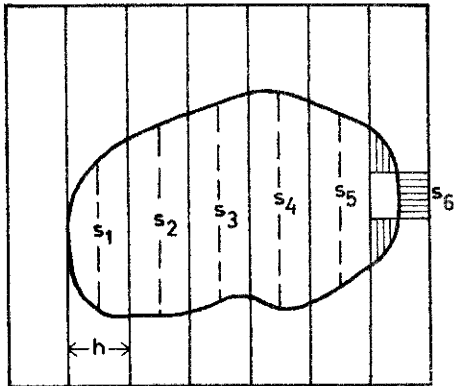


fig. 87

I den ene enden av figuren vil det vanligvis bli et arealelement hvis tilhørende s må bedømmes ved øyemål, idet vi tenker oss arealelementet omformet til et rektangel. I fig. 87 er arealelementet ytterst på høyre side ondannet til et rektangel, idet vi forutsetter at det horisontalskraverte areal er like stort som de vertikalskraverte arealer.

Ved annen gangs beregning legges papiret i en annen stilling i forhold til figuren.

Skrittingsmetoden blir nye brukt ved anleggsarbeider til måling av tverrprofiler og ved arealberegning av små figurer med stor omkrets i forhold til flateinnholdet, som bekker, vegger osv. Metodens nøyaktighet er heller liten.

c. Planimetermåling. Vi har tidligere gjennomgått planimetermålingens teori og skal derfor her begrense oss til en del mer generelle betraktninger.

Bare dersom nøyaktighetskravene er forholdsvis moderate, strekker det vanlige polarplanimeter til. Fordres derimot omtrent samme nøyaktighet som oppnås når arealbestemmelsen baseres på originale mål, må de mer nøyaktige planimeterformer som skivepolar- eller skiverulleplanimeteret, tas i bruk.

Det normale er at hver figur måles to ganger med "gjennomslag" for å få eliminert virkningen av eventuell rulleakseskjevhet. I hver stilling omfares figurene minst to ganger med avlesning etter hver omfaring.

Jordskifteverkets reglement åpner imidlertid også adgang til å utføre planimetermålingene i bare én polstilling med to omfaringer og ditto avlesninger. Frangangsmåten forutsetter at planimeteret ved prøve har godtgjort at rulleakseskjevhet av betydning ikke er til stede. Metoden kommer til anvendelse når kartet er sterkt detaljert, slik at figurene gjennomgående blir små. Dessuten forutsetter frangangsmåten at det sjaltes inn en ekstra kontroll - den såkalte lille nasseberegning - som består

i at en gruppe av figurer arealbestemmes under ett og sammenlignes med resultatet for samme gruppe på grunnlag av enkeltfigurberegningen. Hver gruppe bør som regel ikke overstige en rute (1 dm²) på kartet.

5. Den halvgrafiske metode.

Den halvgrafiske metode er, som navnet sier, en kombinert måletalls- og grafisk metode. Metoden bygger på det forhold at det for figurer med stor forskjell mellom grunnlinje og høyde, er av størst betydning for arealberegningens nøyaktighet at den minste faktor er nøyaktig bestemt. Det vil framgå av følgende betraktning, idet vi tar vårt utgangspunkt i et rektangel med grunnlinje g og høyde h og forutsetter at $g > h$. Vi har da:

$$A = g h$$

Dersom g og h har feilene dg og dh , resulterer herav en feil på arealbestemmelsen gitt ved:

$$dA = h dg + g dh$$

Settes her $dg=dh$, som holder stikk ved måling på kart, innses uten videre at det siste leddet etter forutsetningen vil være dominerende.

Vi har dermed vist at det gjelder å få bestemt den minste faktor med størst mulig nøyaktighet. Dette forhold utnyttes ved arealbestemmelse etter den halvgrafiske metode på den måte at den minste faktoren måles i marka, mens den største faktoren tas grafisk ut av kartet. Særlig for lange, smale, men regelmessig begrensede figurer som veger f.eks. egner denne metode seg godt, og en må for slike figurers vedkommende sørge for å få tatt de nødvendige mål under markarbeidet.

6. Kartkrympning.

På grunn av at tegnepapiret er hygroskopisk, vil det være utsatt for krympning når fuktighetsforholdene endres.

Erfaringen har godtgjort at for ett og samme kartblad er krympningen forholdsvis homogen i den forstand at vi for en bestemt retning vil finne at krympningen er praktisk talt den samme overalt på kartbladet (men den vil selvsagt variere fra retning til retning).

Krympningen har sin største og minste verdi i to retninger vinkelrett på hverandre som betegnes som papirets deformasjonsakser. Videre vil vi finne at summen av krympningen er konstant for alle retninger som står vinkelrett på hverandre.

Vi skal i det etterfølgende undersøke krympningens innvirkning på arealbestemmelsen, idet vi tar vårt utgangspunkt i to på hverandre vinkelrette retninger med krympningsprosentene p og q . For en linje parallell med p - eller q -retningen, som på kartet måles til l , er den korrekte lengde L følgelig gitt ved:

$$L = l + \frac{p \cdot l}{100} \quad , \quad \text{resp.} \quad l + \frac{q \cdot l}{100}$$

Virkingen på arealbestemmelsen utledes enklest ved å innføre et hjelpeaksesystem (u,v) hvis akser er parallelle med p - og q -retningen. I dette hjelpeaksesystemet fås arealet av en vilkårlig figur ved å utstrekke summeuttrykket

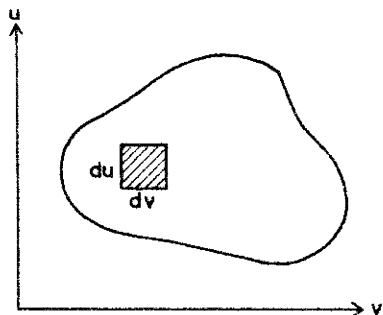


fig. 88

$$\Sigma du \, dv$$

over hele figuren, idet vi tenker oss vedkommende figur oppbygd av arealelementer - rektangler - av størrelse $du \cdot dv$. Her er ifølge forutsetningen både du og dv forfalsket på grunn av kartkrympning. De riktige verdier er

$$du \left(1 + \frac{p}{100} \right) \quad \text{og} \quad dv \left(1 + \frac{q}{100} \right)$$

Figurens korrekte areal, som vi betegner med \bar{A} , fås ved innføring av de korrekte verdier for du og dv , med andre ord

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \Sigma \left(1 + \frac{p}{100} \right) \left(1 + \frac{q}{100} \right) du \, dv = \left(1 + \frac{p}{100} \right) \left(1 + \frac{q}{100} \right) \Sigma du \, dv \\ &= \left(1 + \frac{p}{100} \right) \left(1 + \frac{q}{100} \right) A = A \left(1 + \frac{p}{100} + \frac{q}{100} + \frac{p \cdot q}{10000} \right) \end{aligned}$$

hvor altså $A = \Sigma du \cdot dv$ er den arealverdi som kartet gir. Det siste ledd i parentesen kan her settes ut av betraktning som forsvinnende lite i forhold til de andre leddene, dvs.

$$\bar{A} = A \left(1 + \frac{p+q}{100} \right) = A + A \frac{p+q}{100}$$

Vi har dermed vist at arealer beregnet på et kart med krympningsprosentene p og q , må gis et tillegg på $(p+q)a/c$.

Som tidligere nevnt, er summen av krympningene konstant for

alle retninger vinkelrett på hverandre. Det er derfor likegyldig hvilke to retninger som krympningen bestemmes for. I praksis velges vanligvis rutenettets hovedretninger.

7. Arealberegningens praktiske utførelse.

En arealberegning av et noe større område omfatter som regel ikke bare bestemmelse av totalareal, men også arealbestemmelse av områdets enkelte deler. Framgangsmåten blir som følger:

Først bestemmes totalarealet ved den såkalte store masseberegning, idet hele området betraktes som en enkelt kartfigur. Skjer arealberegningen etter metoden med mål tatt på kartet, må en ved store masseberegning ta sikte på å gjøre beregningsfigurenes antall minst mulig. Anvendes planimetermåling, utføres store masseberegning ved hjelp av rutenettet. De kvadrater som er helt utfylt, oppføres med det areal som de skal ha ifølge målestokken. For de kvadrater som bare delvis er utfylt, beregnes begge deler (både den dekkede og udekkede del) hver for seg. Forskjellen mellom summen av disse og kvadratets korrekte areal fordeles på de to deler proporsjonalt med deres areal. Derved elimineres virkningen av kartkrympningen. Resultatet av store masseberegning er følgelig ikke forfalsket på grunn av kartkrympning.

Kartbladets totalareal kan også beregnes av koordinatene til yttergrensens brekkpunkter. Koordinatene måles på kartet med støtte i rutenettet, og arealberegningen følger på grunnlag av de tidligere oppstilte arealformler (3).

Når totalarealet er bestemt, følger beregningen av områdets enkelte deler helt uavhengig av store masseberegning. Summen av alle disse delarealer skal stemme overens med totalarealet (når krympningen tas i betraktning). Forutsatt at differensen ikke er større enn tillatt (se side 107), fordeles den på de enkelte deler proporsjonalt med arealene, idet resultatet fra store masseberegning betraktes som feilfritt.

Begrunnelsen for denne framgangsmåte er at beregningen av totalarealet baserer seg på et betydelig mindre antall beregningsfigurer enn bestemmelsen av delarealene. Vi kan derfor regne ned at totalarealet er nøyaktigst bestemt.

8. Feilgrenser ved arealberegning.

Den største tillatte differens mellom to beregninger av en figur på kartet er for Jordskifteverkets målinger fastsatt til

$$dA_{m^2} = 0,0005 \cdot M \cdot \sqrt{A_{m^2}}$$

hvor M er identisk med M i uttrykket for kartets målestøkkforhold 1:M, mens A er markfigurens areal uttrykt i m².

Ved anvendelse av den oppstilte feilgrense må det tas hensyn til kartkrympningen, slik at de arealer som sammenlignes befinner seg i samme krympningstilstand, enten slik at begge er korrigert for, eller like nye forfalsket av krympning.

Som eksempel kan nevnes at summen av delfigurenes arealer først må korrigeres for krympning før vi undersøker om avviket fra store masseberegning holder seg innenfor feilgrensen.

Ved lille masseberegning derimot kan vi uten videre anvende feilgrenseformelen på avviket mellom resultatet av delfigurenes og hovedfigurenes arealberegning, fordi begge er identisk forfalsket av krympningen.

B. Grenseregulering, avsetning av arealer, m.v.

1. Grenseregulering.

a) Ensartet grunnverdi.

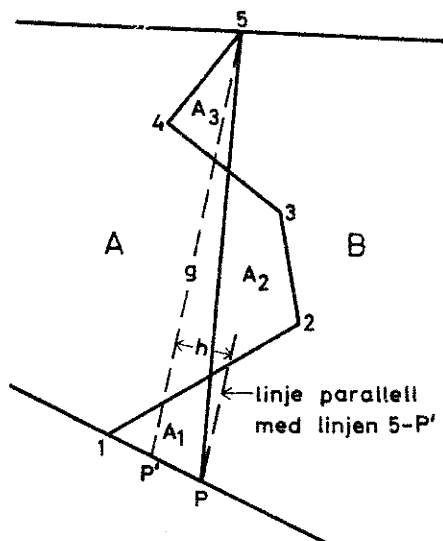


fig. 89

I fig. 89 skal den uregelmessige grenselinje 1-2-3-4-5 mellom eiendommene A og B erstattes av en rett linje fra pkt. 5. Vi tar først for oss det enkle tilfelle at de to eiendommers status med hensyn til arealer skal opprettholdes.

Dersom det foreligger et tilstrekkelig nøyaktig kart over grenseområdet, løses oppgaven på den måten at vi trekker en rett linje 5-P' som skjønnsmessig oppfyller nevnte arealbetingelse. Vi beregner så hva f.eks. A avgir og

mottar i forhold til denne provisoriske grenselinje. Er differensen F , betyr det at linjens endepunkte må forskyves stykket

$$h = \frac{2F}{g}$$

Trekkes en linje parallell med linjen 5-P' i avstanden h , finnes det korrekte endepunktet P for den nye grenselinjen som skjæringspunktet mellom den parallelle linjen og den grenselinjen gjennom pkt. 1 som ikke er felles for A og B (se fig. 89, hvor vi har forutsatt at A får mer enn han avgir i forhold til den provisoriske grenselinje). Til kontroll undersøkes om A avgir og mottar like meget i forhold til den endelige grenselinje 5-P.

Betingelsen for at den angitte framgangsmåte skal føre til et matematisk korrekt resultat, er at grenselinjen mellom punktene 1 og P er rettlinjert.

Dersom grensereguleringen skal utføres på grunnlag av målinger i marken, stikkes først skjønnsmessig en provisorisk grenselinje 5-P'. Den benyttes så som målelinje for innlegging av alle grenseknekkpunkter etter rettvinkelmetoden. Bestemmelsen av hva f.eks. A avgir og mottar i forhold til denne provisoriske grenselinje, foretas da enklest ved benyttelse av de tidligere oppstilte arealformler (3), som direkte gir oss differensen mellom hva eiendommene avgir og mottar. Dersom grenseknekkpunktene er nummerert som i fig. 89, betyr en positiv arealverdi F at A mottar mer enn han avgir, idet summen av A_1 og A_3 , som begge har positiv omløpsretning, da må være større enn A_2 , hvis omløpsretning er negativ. Vi har fremdeles

$$h = \frac{2F}{g}$$

*

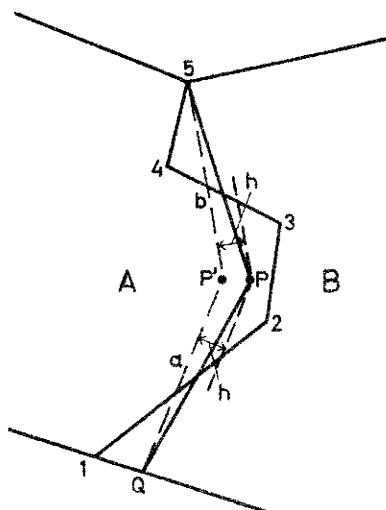


fig. 90

I fig. 90 skal den uregelmessige grenselinjen 1-2-3-4-5 erstattes av grenselinje 5-P-Q med bare ett brekkpunkt (i P). Vi forutsetter at den nye grenselinjes begge endepunkter 5 og Q (om pkt. Q faller sammen med pkt. 1 eller ikke er likegyldig) er gitt, og dessuten at de to eiendommers arealstatus skal opprettholdes.

Vi stikker først den provisoriske grenselinjen 5-P'-Q etter skjønn og beregner hva f.eks. A avgir og mottar.

Vi kaller differensen F og har for forskyvelsen h vinkelrett på linjen $5-P'$ og $P'-Q$

$$\frac{1}{2} ah_1 + \frac{1}{2} bh_2 = F$$

Avstanden h er velkommen til å være forskjellig, men

dvs.

$$h = \frac{2F}{a+b}$$

idet vi fastsetter at det endelige grensepunkt P skal ligge slik i forhold til P' at avstanden mellom P og de to seksjonene av prøvelinjen blir like store.

Vi får altså å trekke to linjer parallelle med $5-P'$ og $P'-Q$ i avstanden h fra begge, og finner det søkte grensepunkt P som skjæringspunktet mellom disse parallelle linjer.

b) Uensartet grunnverdi.

Vi har hittil forutsatt ensartet grunnverdi innen det området som blir berørt av grensereguleringen, slik at reguleringen skal ta sikte på opprettholdelse av de impliserte eiendommers arealstatus. Dersom boniteten eller grunnverdien innen grensereguleringsområdet er forskjellig, stiller saken seg annerledes. Skal de berørte eiendommer fremdeles holdes skadesløse ved grensereguleringen, må denne ta sikte på at eiendommens status med hensyn til $\Sigma g \cdot A$ (hvor A er areal og g boniteringsgrad eller grunnverdi) opprettholdes.

I det generelle tilfelle vil det ikke være mulig å løse oppgaven ved en eksakt beregning, men ved suksessive approksimasjoner kan oppgaven løses med så stor nøyaktighet som en måtte ønske.

I fig. 91 skal den brukkede grenselinje 1-2-3-4 mellom eiendommene A og B erstattes av en rett linje gjennom pkt. 4. De prikkede kurver er boniteringsfigureres begrensninger, mens g -ene er de tilhørende boniteringsgrader.

Først trekkes skjønnsmessig den provisoreriske grenselinje 4- P' , og vi beregner hvor nye A avgir og nottar uttrykt i ΣgA . Vi tenker oss at han avgir mer enn han mottar. Det betyr at

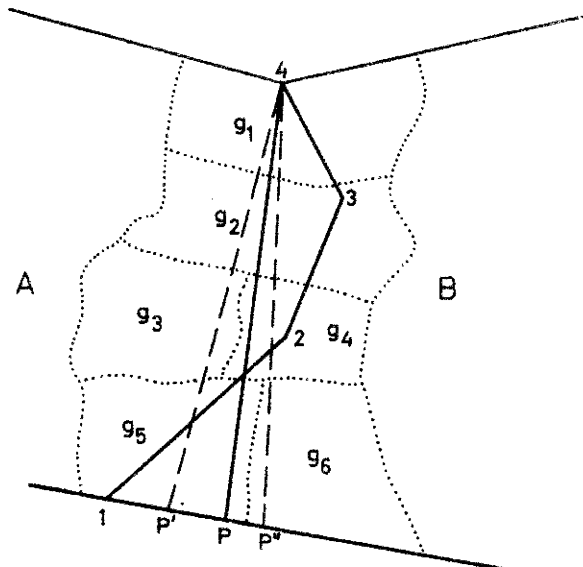


fig. 91

den prøviseriske grenselinje må forskyves til høyre. Vi velger nå et pkt. P'' så langt til høyre at A's ΣgA -status skifter fortegn. Det korrekte endepunkt P for grenselinjen finnes så ved interpolasjon. Til slutt må det kontrolleres ved ny ΣgA -beregning om den nye grensen 4-P oppfyller forutsetningen om uendret ΣgA -status.

Dersom avstanden mellom P' og P'' er forholdsvis stor og beniteringsfigurene uregelmessige, kan vi bli nødt til å gjenta prosessen for å oppnå et tilstrekkelig nøyaktig resultat.

Eksempel. Den prøviseriske grenselinje 4-P' fører til at A får et ΣgA -beløp som er 1000 mindre enn han avgir. Grenselinjen 4-P'' derimot fører til at han mottar 200 ΣgA -enheter mer enn han avgir. Avstanden mellom P' og P'' måles til 50 m. Den korrekte plassering av P er da gitt ved

$$\overline{P'P} = \frac{50 \cdot 1000}{1200} = 41,7 \text{ m}$$

som blir forflytningen fra P' i retning av P''.

2. Avsetting av arealer.

Problemet å avsette et bestemt areal vil ofte foreligge i den form at bare den ene av begrensingslinjene er variabel, mens de andre ligger fast. Videre forutsettes at den variable grenses retning er gitt.

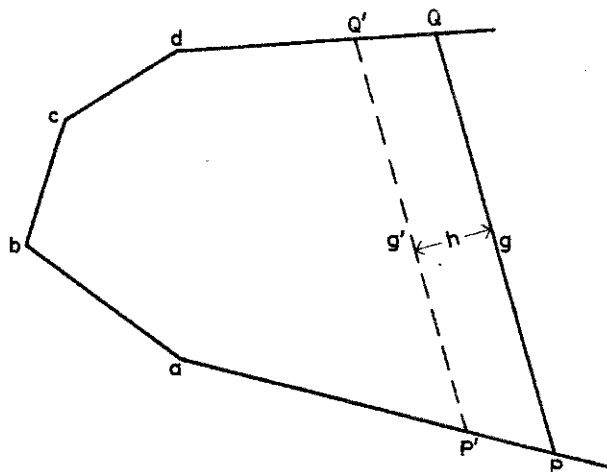


fig. 92

Også når det gjelder løsningen av dette problem, er vi - bortsett fra visse spesialtilfeller - henvist til metoder som bygger på successive approksimasjoner. Det skjer enklost på den måten at vi etter skjønn eller tilnærmet beregning trekker en prøvelinje i den variable grenselinjes gitte retning (se fig. 92, hvor P'-Q' forestiller den opptrukne prøvelinje), hvorefter arealet av polygonen P'abcdQ' beregnes. Vi tenker oss at dette areal er F for

lite. Den previsoriske grenselinje må følgelig forskyves til høyre. Utleddningen av denne forskyvelse foregår i to trinn. Først skaffer vi oss en tilnærmet verdi h' gitt ved

$$h' = \frac{F}{g}$$

Så trekker vi en linje parallell med $P'-Q'$ i avstanden h' og måler den tilhørende g -verdi, som vi kaller g'' . Vi får da som endelig verdi for h

$$h = \frac{F}{\frac{1}{2}(g' + g'')}$$

Denne verdi vil være praktisk talt korrekt forutsatt at ikke linjene dQ' og aP' konvergerer eller divergerer for sterkt. I så fall må prosessen gjentas med utgangspunkt i den g -verdien som foregående bestemmelse av h har resultert i.

Kontroll på riktig avsetning fås ved ny arealberegning etter at den nye grenselinje er endelig avlagt.

3. Forstørring eller forminsking av karter.

Den uten sammenligning nøyaktigste metode når det gjelder å overføre et kart fra en målestokk til en annen, er den fotografiske metode. Og da den fotografiske metode dessuten er den raskeste og billigste, har den funnet utstrakt anvendelse i reproduksjonsteknikken. Som mangler ved metoden kan nevnes at ved nedfotografering overføres originalkartets totale innhold, slik at det forminskede kart kan virke overlesset. Ved oppfotografering vil en få grove linjer.

Ellers kan målestokksendringer av plane avbildninger oppnås ved hjelp av et instrument som går under navn av pantograf. Som fig. 93

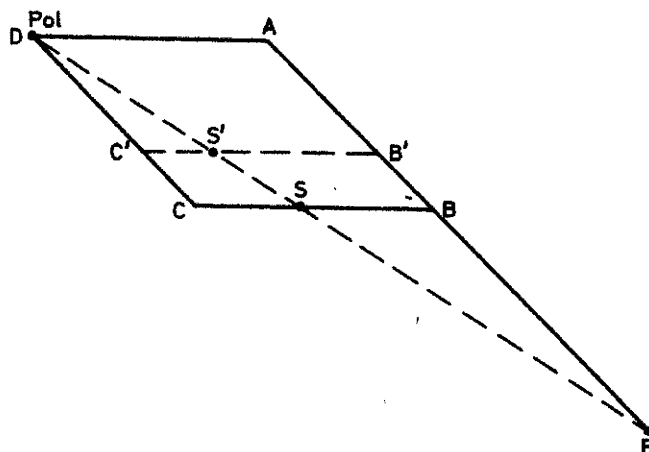


fig. 93

viser, består pantografen av fire inndelte linjaler som er forbundet ved bevegelige ledd og tilsammen danner et parallelogram. Punktene D, S og F befinner seg på en rett linje. Når førerstiften F føres langs konturen av en figur, vil stiften S beskrive en likedannet figur. Likedannethets-

forholdet vil være gitt ved

$$\frac{DS}{DF} = \frac{DC}{AF} = \frac{CS}{AD}$$

som blir konstant for en bestemt innstilling av linjalene og stiftene S . Stillingen C'B' representerer en ny innstilling av linjalene. Herunder forskyves S langs forbindelseslinjene mellom D og F . På denne måte er det mulig å oppnå vilkårlige målestokksendringer.

Når F brukes til forestift og S til reproduksjonsstift, virker instrumentet forminskende. Forstørrelse oppnås ved å la F og S bytte rolle. Instrumentet egner seg best når det er tale om forminskninger.

En tredje metode å oppnå målestokksendringer på er den såkalte rutenettsmetoden. På originalkartet inntegnes et rutenett og på kopipapiret et tilsvarende med den ønskede målestokksendring. Innholdet i de enkelte ruter overføres så til de tilsvarende på kopien dels ved måling, dels etter øyenål, alt avhengig av den nøyaktighet som fordres. Også denne metoden egner seg best når det er tale om forminskninger.

