

K. D.

INSTITUTT FOR LANDMÅLING
NORGES LANDBRUKSHØGSKOLE

Forelesninger
i landmåling

INSTRUMENTLÆRE

for jordskiftestudentene

Av
PROFESSOR DR. PAUL GLEINSVIK

VOLLEBEKK 1967

K. Dahl

Forelesninger

i

landmåling

I N S T R U M E N T L E R E

for

jordskiftestudentene ved
Norges Landbrukshøgskole

av

professor dr. Paul Gleinsvik

INSTITUTT FOR LANDMÅLING.

Vollebekk ~~1966~~.

1967

I n n h o l d s f o r t e g n e l s e .

	Side
Innledning.	1
I. ELEMENTER AV DEN GEOMETRISKE OPTIKK.	2
1. Litt om lysets natur og viktigste egenskaper.	2
a) Lysteorier.	2
b) Lysets refleksjon, refraksjon og absorpsjon.	3
2. Litt om linser i sin alminnelighet.	5
3. Bildedannelse hos linser.	7
a) Linsens tykkelse settes ut av betraktning.	7
b) Bildedannelse når linsetykkelsen tas i betraktning.	8
c) Bildekonstruksjon ved hjelp av hovedplan.	9
4. Brennvidder og beliggenhet av hovedplanene hos de forskjellige linsetyper.	11
a) Likesidede linser.	11
b) Plankonveks eller plankonkav linse.	12
c) Konkavkonveks eller konvekskonkav linse.	13
5. Linsekombinasjoner.	14
6. Newtons linseformel.	15
7. Feil ved bildedannelsen.	16
a) Den sfæriske aberrasjon.	16
b) Den kronatiske aberrasjon.	17
α) Akromatiske linser.	18
β) Akromatiske prizmer.	19
8. Litt om øyets anatomi og fysiologi	22
II. RETTVINKELAPPARATER.	25
1. Speilinstrumenter.	25
a) Vinkelspeilet.	25
b) Speilkorset.	27
c) Det dobbelte vinkelspeil.	28
2. Prismeinstrumenter.	28
a) Det tresidede vinkelprisme.	29
b) Pentagonprismet.	31
c) Wollastone-prismet.	32

	Side
d) Prismekorset.	32
3. Diopterinstrumenter.	33
a) Landmålerkorset.	33
b) Vinkeltrummelen.	33
4. Rettvinelapparatenes bruk i hellende terreng.	35
III. DE VIKTIGSTE BESTANDDELER AV MÅLEINSTRUMENTENE.	37
1. Lupen.	37
2. Libellen.	39
A. Rørlibellen.	40
a) Rørlibellens følsomhet og vinkelverdi	41
b) Bruken av rørlibellen.	42
B. Dåselibellen.	45
3. Siktekkikkerten.	46
A. Den astronomiske (Keplerske) kikkert.	46
a) Kikkertens forstørrelse.	49
b) Bestemmelse av kikkertens forstørrelse.	51
c) Kikkertens synsfelt.	52
d) Kikkertens lysstyrke.	53
e) Kikkertens siktelinje.	54
B. Wilds kikkert med indre fokusering.	55
C. Den terrestriske kikkert.	58
IV. NIVELLERINSTRUMENTER.	59
1. Innledning.	59
2. Nivellerinstrumenter som horisontalstilles ved hjelp av libeller.	59
3. Nivellerinstrumenter med automatisk horisontering av siktelinjen.	61
a) Pendelinstrumenter.	61
b) Instrumenter med automatisk horisontering ved hjelp av kompensator.	64
4. Verifisering av nivellerinstrumenter.	66
A. Innledning.	66
a) Å bringe libelleakse og vertikalakse vinkelrett på hverandre.	67

b)	Å gjøre siktelinje og libelleakse parallele.	67
B.	Verifiseringens utførelse for de for- skjellige instrumenttyper.	68
a)	Instrumenter uten høydefinnskrue.	68
b)	Instrumenter med høydefinnskrue.	69
c)	Instrumenter med automatisk horison- tering ved hjelp av kompensator.	69
d)	Instrumenter med ringakse.	69
C.	Verifisering ved hjelp av et verifisert instrument.	72
D.	Avlesningsanordninger.	74
a)	Det optiske mikrometer.	74
b)	Transversaldeling på nivellerstangen.	75
E.	Nivellerstenger.	76
V.	TEODOLITTEN.	77
1.	Teodolittens konstruksjon.	77
2.	Avlesningsmidler.	79
A.	Nonien.	80
B.	Avlesningsmikroskop.	81
a)	Strekmikroskopet.	81
b)	Skalamikroskopet.	82
c)	Noniemikroskopet.	84
d)	Skruemikroskopet.	84
e)	Planglassmikroskopet.	86
C.	Wilds koincidensavlesning.	87
3.	De viktigste instrumentfeil hos teodolitten.	89
a)	Kollimasjonsfeilen.	90
b)	Verifisering for kollimasjonsfeil.	91
c)	Horisontalakseskjevhet.	93
d)	Verifisering for horisontalakseskjevhet.	94
e)	Vertikalakseskjevhet.	95
f)	"Verifisering" for vertikalakseskjevhet.	97
g)	Samvirke mellom kollimasjonsfeil, horison- talakseskjevhet og vertikalakseskjevhet.	98
h)	Alidadens eksentrisitet.	99
i)	Kikkertens (siktelinjens) eksentrisitet.	101
j)	Sirkeldelingsfeil.	103

	Side
VI. AREALMÅLENDE INSTRUMENTER (PLANIMETRER).	105
1. Innledning.	105
2. Polarplanimeterets teori.	105
a) Polen befinner seg utenfor figuren som skal arealbestemmes.	107
b) Polen befinner seg innenfor figuren som skal arealbestemmes.	108
3. Kompensasjonsplanimeteret.	110
4. Nullavviklingskurver.	110
5. Kontroll av planimeteret.	111
6. De viktigste feil ved planimetermåling.	113
a) Systematiske feil.	113
b) Tilfeldige feil.	113
7. Planimetermålingens nøyaktighet.	114
8. Noen regler for bruk av planimeteret.	114

I N N L E D N I N G .

Som fag inndeles landmålingen i instrumentlære og målelære. Instrumentlæren omfatter de forskjellige slags instrumenter som anvendes innenfor landmålingen, deres bygning, bruk og verifisering. Med uttrykket verifisering forstår vi en undersøkelse for å få fastslått om instrumentene er beheftet med feil, og bortskaffelsen av samme. De instrumentfeil som det kan være tale om, er forskjellige for de forskjellige slags instrumenter og vil bli behandlet særskilt for hver enkelt instrumenttype.

Den etterfølgende instrumentlære er begrenset til å omfatte bare de vanligst forekommende instrumenter i den praktiske landmåling. En ytterligere begrensning av stoffmengden følger av at vi her hovedsakelig kommer til å befatte oss med de konstruktive fellestrekk ved de forskjellige instrumenttyper. Det finnes nemlig i dag en slik mangfoldighet av varianter innenfor de forskjellige områder, som oppviser visse individuelle særtrekk, at det ville føre for vidt å vie dem alle en særskilt omtale. I den utstrekning som slike individuelle konstruktive eiendommeligheter betinger modifisering av målemetoder, vil slike instrumenter bli gjennomgått i målelæren.

Hos den alt overveiende del av de instrumenter som nyttes i landmålingen, spiller det optiske "innslaget" en dominerende rolle. En behøver bare å tenke på instrumenter som nivellerkikkerten, teodolitten og de forskjellige rettvinkelapparater. Det faller derfor naturlig å innlede instrumentlæren med en rekapitulasjon av grunntrekkene i den geometriske optikk.

Kapitel I.

ELEMENTER AV DEN GEOMETRISKE OPTIKK.

1. Litt om lysets natur og viktigste egenskaper.

a) lysteorier.

Det har alltid stått sterk strid om lysets natur, og det har fremdeles ikke lyktes å stille opp en enhetlig teori som på tilfredsstillende måte kan forklare alle sider ved lysets natur og opptre på.

Newton lanserte den såkalte emisjonsteori. Ifølge denne er lyset av materiell natur, idet lysstrålene består av en strøm av partikler, de såkalte korpuskler.

Newtons samtidige, nederlandereren Huygens, hadde en annen oppfatning av lyset. Ifølge den bølgeteori som han stilte opp, er lyset å oppfatte som en mekanisk bølgebevegelse i eteren. Han forestiller seg nemlig eteren som en elastisk materie som fyller verdensrommet. Etter denne teori er lyset av samme natur som lyden, bare med mye mindre bølgelengde. I stedet for at lydets forplantning skjer med luften som medium, skjer forplantningen av lyset ved mekaniske svingninger i eteren.

Newtons emisjonsteori strekker til for å forklare refleksjon og optiske fenomener som refraksjon og brytning. Det samme er også tilfelle med Huygens bølgeteori, men i tillegg hertil er den siste også i stand til å gi forklaring på en del andre fenomener som lysets bøyning, interferens og polarisasjon, noe emisjonsteorien i den opprinnelige utforming ikke kunne gi tilfredsstillende forklaring på.

På et noe senere stadium lanserte Maxwell den såkalte elektromagnetiske lysteori, som brøt med Huygens teori, for såvidt som han forkastet Huygens antakelse om at lysbølgen berodde på mekaniske svingninger i lyseteren. Ellers overtok han Huygens forestillinger om lysets bølgekarakter, men antok at lysbølgene måtte være av elektromagnetisk natur.

Maxwells lysteori var riktignok i stand til å forklare flere foreteelser ved lyset enn de eldre lysteoriene, men heller ikke den formådde i den opprinnelige form å forklare mekanismen i lysemisjonen og lysabsorpsjonen, med andre ord hva som foregår i atomene når et legeme utstråler eller absorberer lys.

I 1890-årene stilte så Lorentz opp den såkalte elektronteorien.

Ifølge denne teori, som ble videre utbygget ved grunnleggende arbeider av Rutherford og Bohr, oppstår de elektromagnetiske lysbølger ved bevegelser av elektronene i atomet. Den videre utbygde elektronteori forutsetter nemlig at elektronene beveger seg i baner rundt atomkjernen. Til de forskjellige baner svarer bestemte energitilstander. Ethvert atom er normalt i en stasjonær tilstand med hensyn til energi, slik at ingen utstråling finner sted. Atomene kan gå over fra en stasjonær tilstand til en annen. Dersom den siste er energirikere enn den første, må energidifferensen tilføres utenfra. Er derimot slutt-tilstanden energifattigere enn begynnelses-tilstanden, frigjøres energi i form av elektromagnetiske bølger som oppfattes av det menneskelige øye som lys dersom bølgelengden ligger mellom 4000 - 8000 Å ($1\text{Å} = 10^{-7}\text{mm}$).

I virkeligheten har det vist seg at det ikke er mulig å forklare alle lysets egenskaper hverken på grunnlag av en ren emisjonsteori eller en ren bølge-teori. I visse tilfelle oppfører lyset seg som om det skulle bestå av en strøm av materielle partikler, mens det i andre tilfelle legger egenskaper for dagen som bedre lar seg forklare ved bølge-teorien. En er derfor blitt stående ved den oppfatning at lyset er "dualistisk", for så vidt som det inneslutter i seg såvel bølgenatur som egenskaper tilsvarende den Newtonske oppfatning av lyset som en strøm av materielle partikler. Det var tyskeren Planck som først nådde fram til denne erkjennelse, idet han betraktet lysstrålene som bølger og atomer på samme tid. Emisjons- og bølge-teorien har følgelig begge vist sin berettigelse.

Den neste milepel i fysikernes framstøt på lysteoriens område markeres ved den bølgemekanikken som ble lansert av Broglie, og som tar sikte på å smelte sammen emisjons- og bølge-teorien.

b) Lysets refleksjon, refraksjon og absorpsjon.

Vi skal så rekapitulere mekanismen i noen av de viktigste optiske fenomener.

Lysets forplantningshastighet er meget stor, men er til en viss grad avhengig av det medium som lyset utbrer seg i. I vakuum utgjør lyshastigheten om lag 300 000 km/sek, i luft noe mindre, i vann ca. 3/4 og i glass ca. 2/3 av hastigheten i det tomme rom.

Når lyset treffer overflaten av et legeme, vil én av følgende tre ting inntreffe:

1. Lyset blir reflektert, enten med samme eller med endret bølgelengde. Det optiske fenomen fluorescens oppstår når det reflekterte lys har en annen bølgelengde enn det innfallende.
2. Lyset trenger gjennom overflaten til legemet og fortsetter sin for-

plantning, men som regel med retningsforandring. Dette optiske fenomen går under navn av brytning eller refraksjon.

3. Lyset absorberes og går over til en annen energiform, vanligvis varme.

Lysets refleksjon. Den optiske refleksjon er karakterisert ved følgende data: Den innfallende stråle, innfallsloddet og den reflekterte stråle ligger i samme plan. Videre er innfallsvinkelen og refleksjonsvinkelen like store og ligger på hver sin side av innfallsloddet.

Lysets brytning eller refraksjon. For lysets brytning gjelder følgende lover:

a) Den innfallende stråle, innfallsloddet og den brutte stråle ligger i samme plan.

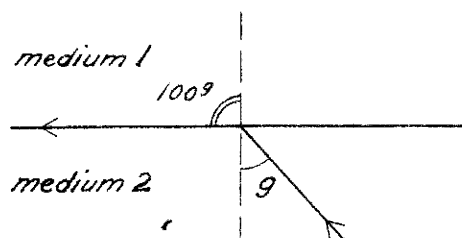
b) Størrelsen av brytningen er gitt ved ligningen $\frac{\sin i_1}{\sin b_2} = n_{12}$, hvor i_1 er innfallsvinkelen i medium 1, b_2 er brytningsvinkelen i medium 2 og n_{12} er brytningsindeksen som gjelder for overgangen fra medium 1 til 2.

Med absolutt brytningsindeks forstår vi den verdi for n som gjelder for lysets overgang fra vakuum til et annet medium. Det lar seg bevise at ved overgang fra et medium A til et medium B, er brytningsindeksen n_{AB} lik forholdet mellom B's og A's absolute brytningsindekser, dvs.

$$n_{AB} = \frac{n_B}{n_A}$$

hvor n_A og n_B står for absolute brytningsindekser. Luftens absolute brytningsindeks er 1,000 294. For lysets overgang fra luft til glass er $n \approx 1,5$.

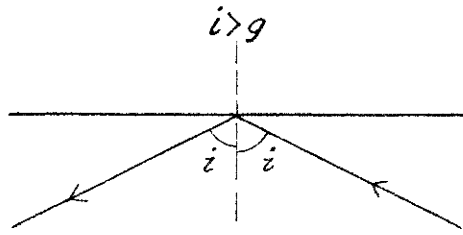
Dersom lyset brytes til innfallsloddet, sier vi at innfallsmediet er optisk tynnere enn brytningsmediet, og omvendt dersom lyset brytes fra innfallsloddet. Går lyset fra et optisk tettere til et optisk tynnere medium, f.eks. fra glass til luft, blir følgelig brytningsvinkelen større enn innfallsvinkelen. Den største verdi som brytningsvinkelen kan anta er 100° , og til denne verdi svarer en innfallsvinkel som kalles grensevinkelen, og den er bestemt ved (se fig 1):



$$\frac{\sin g}{\sin 100^\circ} = \frac{\sin g}{1} = n_{21} = \frac{1}{n_{12}}$$

hvor g betegner grensevinkelen. Dersom innfallsvinkelen overskrider g , blir ikke lyset brutt, men vi får totalrefleksjon (se fig. 2).

fig. 1



For overgang fra glass til luft får vi

$$\sin g = \frac{1}{1,5} = 0,67,$$

hertil svarer $g = 46,456^\circ$.

Totalrefleksjon kan bare inntreffe når lys går fra et optisk tettere til et optisk tynnere medium.

fig. 2
3 optiske instrumenter

Lysets absorpsjon. Denne opptrer, særlig ved refleksjon, men også ved lysets passasje gjennom medier, særlig når det dreier seg om medier av optisk tettere struktur. Ved speilrefleksjon må vi regne med at lysabsorpsjonen kan utgjøre ca. 30 o/o. Ved totalrefleksjon stiller saken seg langt gunstigere. Her er absorpsjonen bare en brøkdel av hva den er ved speilrefleksjon. Hva lysabsorpsjon som følge av gjennomtrengning av medier angår, vil denne avhenge både av vedkommende mediums karakter og av lengden av den veg som lyset tilbakelegger. I vanlige optiske instrumenter som nivellerkikkerter og teodolitter, kan lysabsorpsjonen utgjøre ca. 25 o/o.

Bildepunkter. I den geometriske optikk, som bygger på betraktningen av lyset som strålingsfenomen, forstår vi med bildepunktet til et objektpunkt det skjæringspunkt som strålene fra vedkommende objektpunkt danner. Dette skjæringspunkt kan enten befinne seg i selve strålegangen, eller det kan fås fram ved å forlenge strålene bakover. I første tilfelle betegnes bildepunktet som reelt, i siste tilfelle som virtuelt.

2. Litt om linser i sin alminnelighet.

Med en linse forstår vi et glasslegeme som er begrenset av to kuleflater. Denne definisjon dekker også det tilfelle at den ene begrensingsflaten er et plan, det betyr nemlig bare at den tilhørende krumningsradius er uendelig stor.

Forbindelseslinjen mellom sentrene til kuleflatene går under navn av linsens optiske akse, og lengden av den delen av den optiske akse som befinner seg mellom linsens begrensingsflater, representerer linsens tykkelse. Skjæringspunktene mellom linsen og den optiske akse går under navn av linsesnittpunkter.

Til framstilling av linser anvendes forskjellige glass-sorter, særlig kron- og flintglass. Disse to glassortene har forskjellige brytningsindekser. For kronglass varierer n mellom 1,5 og 1,6 og for flintglass mellom 1,6 og 1,8. Vi skal senere se hvordan denne forskjell i bryt-

ningsindeks kan utnytted til å konstruere såkalte akronatiske linsesystemer, dvs. linsesystemer uten fargespredning.

Vi skiller mellom to hovedtyper av linser. De som er tykkere på midten enn ved randen kalles konvekse linser, eller samlelinser, mens de som er tynnere på midten enn ved randen går under navn av konkave linser, eller spredelinser.

Konveksslinsene som også kalles positive linser, inndeles i bikonvekse, plankonvekse og konkavkonvekse linser

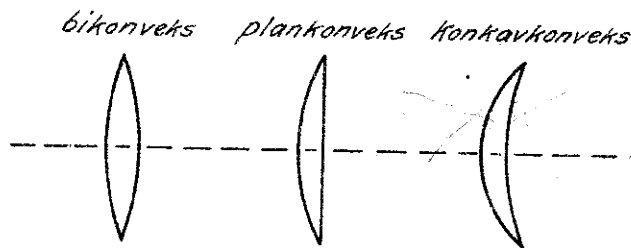


fig. 3

(se fig. 3). Hos de bikonvekse linser er begge begrensingsflater konvekse, og krumnings-sentrene befinner seg på hver sin side av linsen. Dersom begge krumningsradiene er like store, kalles linsen likesidet.

Hos de plankonvekse linsene er den ene av krumningsradiene uendelig stor. Den optiske akse til en slik linse faller sammen med perpendikulæren fra kuleflatens krumningsentrum på den plane begrensingsflate.

Hos de konkavkonvekse linser ligger begge krumnings-sentrene på samme side av linsen, og krumningsradien til den konkave flaten er større enn krumningsradien til den konvekse flaten.

De konkave linsene blir også betegnet som negative linser. De deles inn i bikonkave, plankonkave og konvekskonkave linser (se fig. 4). Hos de bikonkave linsene ligger krumnings-sentrene på hver sin side av linsen. Er begge radiene like store, kalles linsen likesidet.

Hos de konvekskonkave linsene derimot ligger begge krumnings-sentrene på samme side av linsen, og radien til den konvekse begrensingsflaten er større enn radien til den konkave flaten.

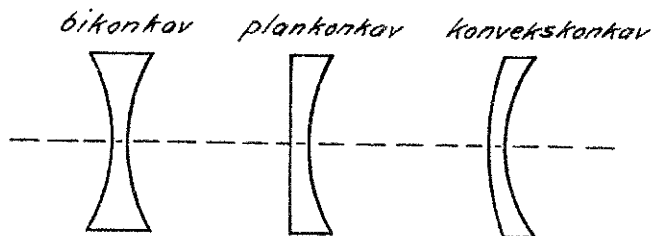


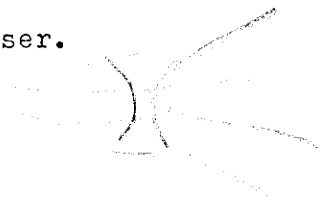
fig. 4

også som samlelinser. Det henger sammen med at disse linsene øker konvergensen i en strålebunt (eller minsker divergensen).

*Teorien
hølet er bunt
for uendelig
tynne linser*

Som allerede nevnt, betegnes de konvekse linsene

De konkave linsene derimot øker divergensen i en strålebunt (eller minsker konvergensen), og kalles derfor spredelinser.



3. Billedannelse hos linser.

a) Linsenes tykkelse settes ut av betraktning.

I tilfelle av at vi kan betrakte linsene som uendelig tynne, består meget enkle lover for billedannelsen, nemlig:

1. Stråler som treffer en linse parallell med den optiske akse, brytes mot brennpunktet.

2. Parallell stråler som faller inn mot en linse under vilkårlige vinkler med den optiske akse, brytes til et punkt i brennplanet. (brennplanet er det plan gjennom brennpunktet som står vinkelrett på den opt. akse).

3. Stråler som går gjennom det optiske midtpunkt til en linse, brytes ikke. I foreliggende tilfelle hvor vi ser bort fra linsens tykkelse, faller det optiske midtpunkt sammen med skjæringspunktet mellom linsen og den optiske akse.

4. Stråler som passerer gjennom brennpunktet, vil etter passasjen gjennom linsen forplante seg parallelt med den optiske akse.

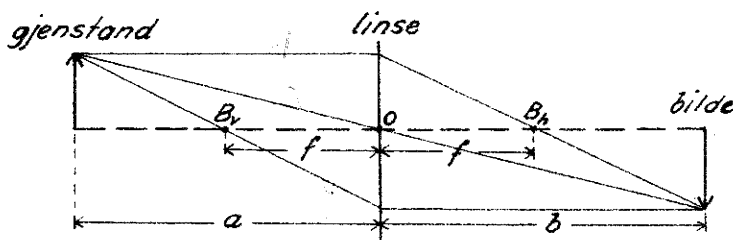


fig. 5

Fig. 5 viser hvordan konstruksjonen av bildet foregår. B_v og B_h er venstre, resp. høyre brennpunkt, og O er det optiske midtpunkt. Til konstruksjonen har vi benyttet en

stråle parallell med den optiske akse, en stråle gjennom det optiske midtpunkt og en stråle gjennom venstre brennpunkt.

For den matematiske undersøkelse av billedannelsen brukes linseformelen eller den dioptriske hovedformel, som den også kalles:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

b) Bilddannelse når linsetykkelsen tas i betraktning.

Vi skal først vise hvordan den virkelige strålegang i en bikonveks linse forløper. I fig. 6 er C_1 og C_2 krumningscentrene til de to kule-

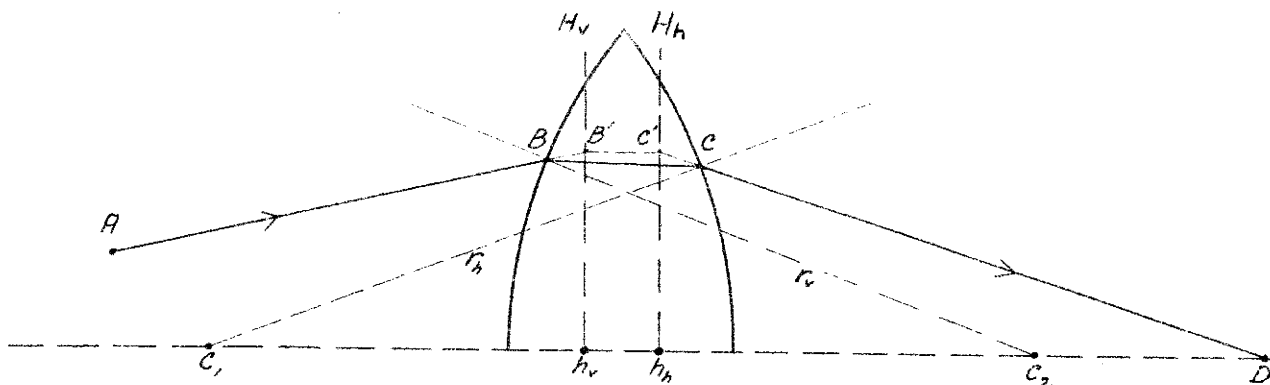


fig. 6

flatene som utgjør linsens begrensingsflater, mens r_h og r_v er krumningsradien til høyre, resp. venstre linseflate. Disse radiene blir innfallslodd i punktene B og C .

Den brutte linjen $ABCD$ representerer det faktiske forløp av en stråle. Den blir altså brutt i punktene B og C . En nærmere undersøkelse over strålegangen hos lenser viser at det er mulig å erstatte den faktiske strålegangen med en forenklet, fiktiv strålegang. Innfører vi nemlig de såkalte hovedplan H_v og H_h , som er plan vinkelrett på den optiske aksene, kan vi forestille oss at brytningen av strålene foregår i disse. Istedenfor den faktiske strålegangen $ABCD$ innfører vi den fiktive strålegang $AB'C'D$. Først går den innfallende stråle ubrutt til pkt. B' i venstre hovedplan (H_v). Her skjer en brytning og den brutte strålen fortsetter rettlinjjet, parallelt med den optiske aksene til den treffer det høyre hovedplanet (H_h). Her brytes strålen på nytt og fortsetter sin rettlinjede gang mot bildepunktet.

Denne betraktningssmåte har generell gyldighet. Det vil alltid være mulig å erstatte den virkelige strålegangen i en linse med en fiktiv strålegang, som erstatter den faktiske lysbrytning i linsens begrensingsflater med en ekvivalent brytning i hovedplanene. I virkeligheten har denne betraktningssmåten streng gyldighet kun for aksnære stråler, dvs. stråler som treffer linsen i nærheten av den optiske aksene, men også for mer aksefjerne stråler kan vi i praksis regne med at betraktningssmåten har gyldighet med tilstrekkelig tilnærming (når vi ser bort fra randstrålene).

Hovedplanene står som nevnt vinkelrett på den optiske aksene.

Skjæringspunktene mellom den optiske akse og hovedplanene (h_v og h_h i fig. 6) kalles hovedpunkter. Vi skal senere vise hvordan vi kan bestemme beliggenheten av hovedplanene. Vi nøyer oss foreløpig med å nevne at hos likesidede linser ligger hovedplanene symmetrisk i forhold til linsens begrensingsflater. Hos ulikesidede linser derimot er begge hovedplanene forskjøvet mot den begrensingsflaten som har den største krumning.

c) Bildekonstruksjon ved hjelp av hovedplan.

For den fiktive strålegang gjelder følgende lover:

1. En lysstråle som treffer linsen under en vilkårlig vinkel, går ubrutt til den treffer første hovedplan. Herfra fortsetter den parallelt med den optiske akse inntil den treffer det andre hovedplanet. Her bøyes strålen på nytt og fortsetter deretter rettlinjert mot bildepunktet.
2. Dersom den innfallende strålen er parallell med den optiske akse, vil den etter brytningen i det andre hovedplanet fortsette mot brennpunktet.
3. En stråle som treffer det første hovedpunktet, vil forlate det andre hovedpunktet under samme vinkel med den optiske akse som den innfallende strålen.
4. Parallell stråler vil etter brytningen i det andre hovedplanet forene seg i et bildepunkt i brennplanet.

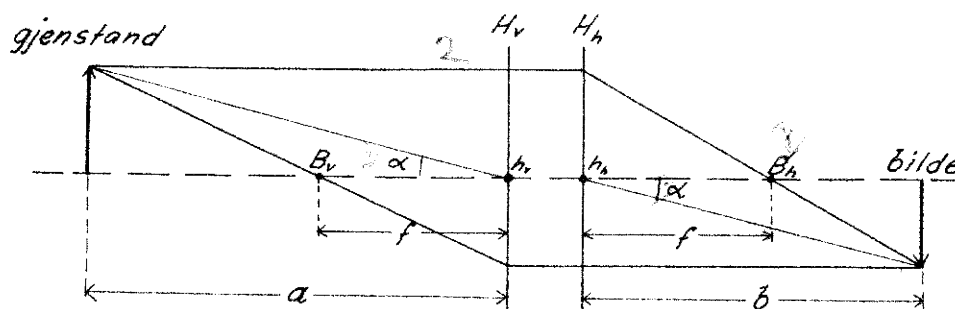


fig. 7

Fig. 7 viser bildedannelsen på grunnlag av den fiktive strålegang. Til konstruksjonen er benyttet strålen parallell med den optiske akse, strålen gjennom venstre hovedpunkt (h_v) og endelig strålen gjennom venstre brennpunkt.

Den tidligere oppstilte dioptriske ligning $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ har også gyldighet for den fiktive strålegang under forutsetning av at brenn-

viddene, objekt- og bildeavstandene regnes fra hovedplanene slik som antydnet i fig. 7.

I fig. 7 har vi forutsatt at begge brennviddene er like store. Det vil alltid være tilfelle når vi har med linser 2 gjøre som er angitt av samme medium såvel i objektrommet som i bilderommet.

Dersom brytningsindeksen ikke er den samme i objektrom og bilderom, vil de to brennviddene bli forskjellige og den dioptriske ligning vil anta formen:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{f_v}{a} + \frac{f_h}{b} = 1$$

hvor f_v og f_h er venstre, resp. høyre brennvidde.

Dersom vi har samme brytningsindeks i objekt- og bilderommet, blir brennviddene like store og gitt ved:

$$f = \frac{r_v r_h}{(n-1) \left\{ r_v + r_h - \frac{n-1}{n} d \right\}}$$

hvor d er linsens tykkelse og n er brytningsindeksen.

Beliggenheten av hovedplanene er gitt ved følgende uttrykk:

$$S_v H_v = \frac{d \cdot r_v}{nr_v + nr_h - (n-1)d} \quad \text{og} \quad S_h H_h = \frac{d \cdot r_h}{nr_v + nr_h - (n-1)d}$$

hvor betegnelsene refererer seg til fig. 8 og 6.

Avstanden mellom hovedplanene blir følgelig likt:

$$H_v H_h = d - S_v H_v - S_h H_h = d \left\{ 1 - \frac{r_v + r_h}{nr_v + nr_h - (n-1)d} \right\}$$

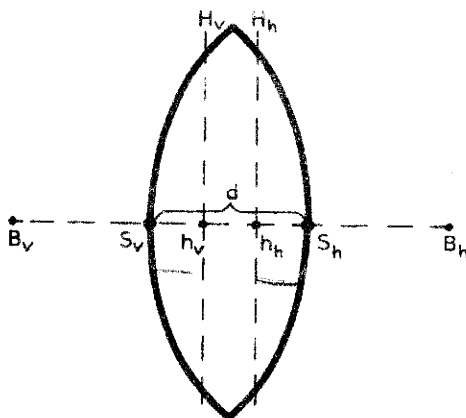


fig. 8

Vi finner en tilnærmet riktig verdi for $H_v H_h$ dersom vi i det siste uttrykket setter leddet $(n-1)d$, som blir lite i forhold til de andre størrelsene i formelen, ut av betraktning. Vi får da:

$$H_v H_h = d \frac{n-1}{n} = \frac{d}{3} \quad (\text{for } n = 1,5)$$

Vi har dermed vist at avstanden mellom hovedplanene med stor tilnærming er lik en tredjedel av linsetykkelsen.

De anførte formler for f og beliggenheten av hovedplanene har generell gyldighet under forutsetning av at krumningsradiene innføres med riktig fortegn. For konkave linsebegrensningsflater må de tilhørende krumningsradier følgelig innføres med negative fortegn. (En linsebegrensningsflate regnes som konkav dersom vedkommende flate og det tilhørende krumningsentrum befinner seg på samme side av lensens geometriske sentrum, og konveks dersom de befinner seg på hver sin side.)

Bliir en av radiene i formlene ovenfor uendelig stor, dvs. den tilhørende linsebegrensningsflate er plan, må vi først dividere teller og nevner med vedkommende radius, og deretter la den anta verdien uendelig. 26/9-68

4. Brennvidder og beliggenhet av hovedplanene hos de forskjellige linsetyper.

a) Likesidede linser.

Som tidligere anført, er brennvidden gitt ved den generelle formel:

$$f = \frac{r_v r_h}{(n-1)(r_v + r_h - \frac{n-1}{n} d)}$$

som for en likesidet linse antar formen:

$$f = \frac{r^2}{(n-1)(2r - \frac{n-1}{n} d)}$$

Ved tilnærmede beregninger kan vi sette leddet $\frac{n-1}{n} d$ ut av betraktning og får:

$$f = \frac{r}{2(n-1)} = r \quad (\text{for } n = 1,5)$$

Vi har følgelig vist at brennvidden til en likesidet linse med stor tilnærmelse er lik krumningsradien.

For en likesidet linse antar de tidligere anførte formlene for beliggenheten av hovedplanene formen:

$$S_v H_v = S_h H_h = \frac{d \cdot r}{2nr - (n-1)d} \approx \frac{d}{2n} = \frac{d}{3} \quad (\text{for } n = 1,5)$$

Vi har følgelig vist at i en likesidet linse ligger hovedplanene symmetrisk i forhold til linsesnittpunktene på en slik måte at linse-

tykkelsen blir delt i tre like store deler (se fig. 9).

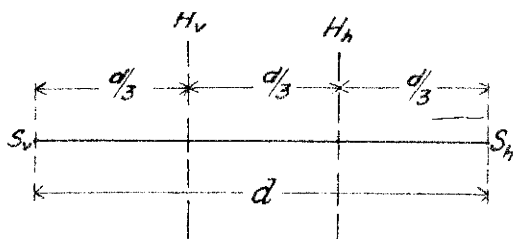


fig. 9

b) Plankonveks eller plankonkav linse.

I dette tilfelle er en av krumningsradiene uendelig stor. Vi inverterer linseformelen og får:

$$\frac{1}{f} = \frac{(n-1)(r_v + r_h - \frac{n-1}{n} d)}{r_v r_h} = (n-1) \left(\frac{1}{r_v} + \frac{1}{r_h} - \frac{n-1}{n} \frac{d}{r_v r_h} \right)$$

Setter vi her r_v eller r_h lik ∞ og innfører betegnelsen r for den av radiene som er forskjellig fra uendelig, fås:

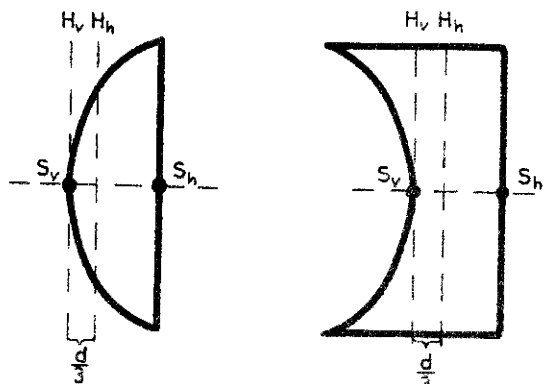
$$\frac{1}{f} = (n-1) \frac{1}{r}, \quad \text{dvs.} \quad f = \frac{r}{n-1} = 2r \quad (\text{for } n = 1,5)$$

Vi finner beliggenheten av hovedplanene ved å gå ut fra formelen

$$S_v H_v = \frac{d \cdot r_v}{nr_v + nr_h - (n-1)d}$$

Vi forutsetter at det er r_h som er uendelig. Vi dividerer derfor teller og nevner med r_h og lar så $r_h \rightarrow \infty$ og får:

$$S_v H_v = 0$$



dvs. venstre hovedplan går gjennom venstre linsesnittpunkt. For beliggenheten av det høyre hovedplan får vi på tilsvarende måte:

$$S_h H_h = \frac{d}{n} = \frac{2}{3} d \quad (\text{for } n = 1,5)$$

fig. 10

c) Konkavkonveks eller konvekskonkav linse.

Vi tar først for oss den konkavkonvekse linse. I fig. 11 er r_h negativ. Vi innfører

$$r_h = -q r_v$$

hvor q er en konstant som nå være større enn 1 fordi $|r_h|$ etter forutsetningen er større enn $|r_v|$, og får for brennvidden:

$$f \approx - \frac{2qr_v}{(1-q)}$$

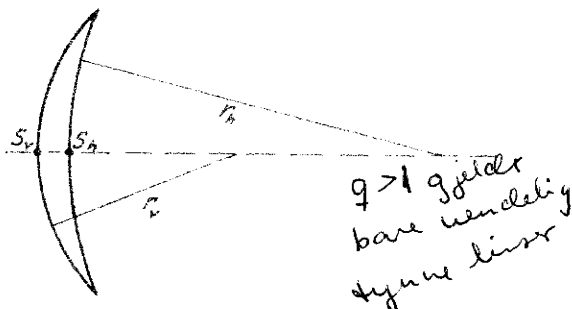


fig. 11

Herav ser vi at brennvidden alltid blir positiv da jo etter forutsetningen $q > 1$. Videre ser vi at f kan anta alle verdier mellom $2r_v$ (for $q = \infty$) og ∞ (for $q = 1$).

For beliggenheten av hovedplanene har vi:

$$S_v H_v = \frac{d \cdot r_v}{nr_v(1-q) - (n-1)d} \approx \frac{d}{n} \frac{1}{(1-q)} = \frac{2}{3} d \frac{1}{1-q} \quad (\text{for } n = 1,5)$$

På samme måte:

$$S_h H_h = - \frac{d r_v q}{nr_v(1-q) - (n-1)d} \approx - \frac{d}{n} \frac{q}{1-q} = - \frac{2}{3} d \frac{q}{1-q} \quad (\text{for } n = 1,5)$$

Av uttrykket for $S_v H_v$ ser vi at H_v under alle omstendigheter faller til venstre for S_v ($S_v H_v$ blir jo alltid negativ for $q > 1$). Av uttrykket for $S_h H_h$ ser vi at H_h alltid faller til venstre for S_h fordi $S_h H_h$ alltid blir positiv for $q > 1$. Betingelsen for at H_h også skal befinne seg til venstre for S_v , er at $S_h H_h > d$, dvs. at

$$- \frac{2}{3} \frac{q}{1-q} > 1$$

Herav utledes betingelsen: $q < 3$

m.a.o.: Dersom den største krumningsradius (i tallverdi) er mindre enn 3 ganger så stor som den minste, faller begge hovedplan utenfor linsen, til siden for begrensingsflaten med den minste krumningsradius.

Det resultat som vi er kommet fram til, har også gyldighet for konvekskonkave linser.

Vi setter også her:

$$r_h = -q r_v$$

gjelder bare i høyre halv

hvor q denne gangen er mindre enn 1. Vi får på tilsvarende måte som forrige gang:

$$S_v H_v = \frac{2}{3} d \frac{1}{1-q} = \text{positiv}$$

$$S_h H_h = -\frac{2}{3} d \frac{q}{1-q} = \text{negativ}$$

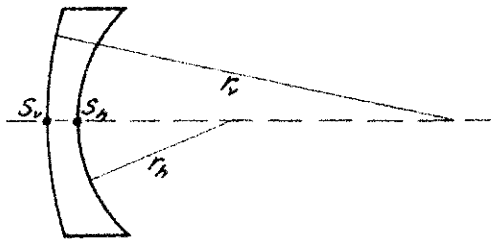


fig. 12

dvs. H_h befinner seg alltid til høyre for S_h , og H_v alltid til høyre for S_v . Betingelsen for

at H_v også skal ligge til høyre for S_h , er at $q > 1/3$. For $q > 1/3$ vil altså begge hovedplan falle utenfor linsen, til siden for begrensingsflaten med den minste krumningsradius.

5. Linsekombinasjoner.

*teodolitt ca. 2-3 ekv.
flykamera eq. 10-12*

I praksis blir det sjelden tale om å anvende en enkelt linse isolert. Som regel opererer vi med linsekombinasjoner av to eller flere linser. Som vi senere skal se, er det mulig ved å kombinere to linser å innrette seg slik at de to dominerende avbildingsfeil hos linsene, nemlig den sfæriske og den kromatiske aberrasjon, i stor utstrekning blir uskadeliggjort.

Også når det dreier seg om linsekombinasjoner, er det mulig å erstatte den faktiske strålegang med en fiktiv strålegang, hvis bøyning er henlagt til to hovedplan. Det fiktive systemet **ekvivalerer** de to enkeltsystemene med hensyn til bildedannelse og benevnes derfor det **ekvivalente system**.

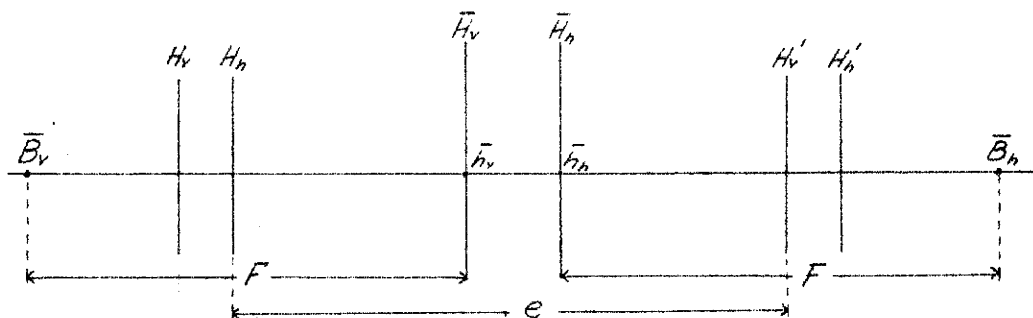


fig. 13

Fig. 13 viser forholdene ved en kombinasjon av to linser. De to enkeltlinserne som er anført ved hver sine to hovedplan (H_v , H_h , og H'_v , H'_h) kan erstattes av et ekvivalent optisk system med hovedplanene \bar{H}_v og \bar{H}_h og tilhørende brennpunkter \bar{B}_v og \bar{B}_h . Det fiktive systems ekvivalente brennvidde F er gitt ved:

$$F = \frac{f \cdot f'}{f + f' - e}$$

hvor f og f' er brennviddene til de to enkeltsystemene, mens e er avstanden mellom de to indre hovedplan i enkeltsystemene.

Beliggenheten av brennpunktene til det ekvivalente system er gitt ved:

$$\bar{B}_v H_v = \frac{ff' - ef}{f + f' - e} \quad \text{og} \quad \bar{B}_h H'_h = \frac{ff' - ef'}{f + f' - e}$$

Sammen med den ekvivalente brennvidde F fastlegger disse størrelsene beliggenheten av hovedplanene i det ekvivalente system.

På tilsvarende måte stiller saken seg ved kombinasjon av et vilkårlig antall enkeltlinser. Beregningsmessig løses problemet ved først å kombinere to linser, og til disse to linsers ekvivalente system å føye en tredje linse osv.

6. Newtons linseformel.

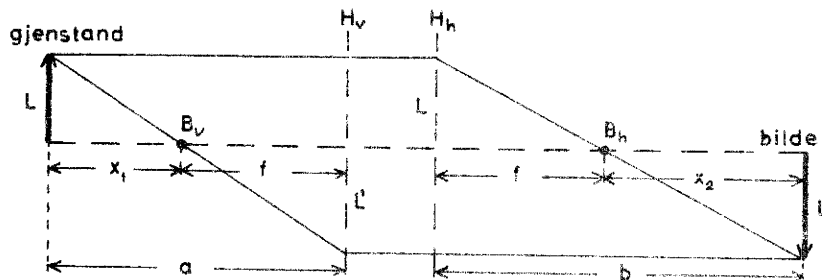


fig. 14

Med de betegnelsene som er brukt i fig. 14, lyder Newtons linseformel:

$$x_1 \cdot x_2 = f^2$$

Denne formel utledes direkte av fig. 14 med utgangspunkt i proporsjonene:

$$\frac{L}{L'} = \frac{x_1}{f} = \frac{f}{x_2}, \text{ dvs. } x_1 x_2 = f^2$$

*

Vi har i det foregående behandlet den strengt korrekte teori for avbildning ved linser, som altså betinger innføring av to hovedplan med tilhørende hovedpunkter. Imidlertid vil det for en hel rekke praktiske overveielser, hvor det ikke kommer an på den høyeste grad av eksakthet, holde med den tidligere behandlede forenklete betraktningssmåte som gjelder eksakt for uendelig tynne linser.

Denne betraktningssmåte som anvendt på linser av endelig tykkelse, bare har tilnærmet gyldighet, består altså i at vi tenker oss at linsens to hovedplan faller sammen, som samtidig innebærer at også de tilhørende hovedpunkter faller sammen og går over til det såkalte optiske midtpunkt, hvis geometriske tolkning blir den at stråler gjennom dette punkt passerer ubrutt.

7. Feil ved billedannelsen.

a) Den sfæriske aberrasjon.

De lover og formler for billedannelsen som ble oppstilt i det foregående, har strengt tatt gyldighet bare for aksiale stråler, dvs. for lysstråler som treffer linsen i umiddelbar nærhet av den optiske akse. I praksis vil det ikke være mulig å begrense strålegangen til de aksenære stråler. Det ville jo forutsette at de andre strålene måtte blendes vekk, dvs. at åpningen til linsen måtte gjøres meget liten i forhold til brennvidden, noe som igjen ville føre til at bildet ble lyssvakt.

De feil ved billedannelsen som skyldes at aksiale stråler og randstråler fra samme objektpunkt ikke resulterer i ett og samme bildepunkt, går under navn av sfærisk aberrasjon eller sfærisk avvik. Randstrålene blir avbøyd mer enn sentralstrålene, slik at brennvidden blir

forskjellig for de to slags stråler. I fig. 15 er B brennpunktet eller fokus for sentralstrålene, mens B' er brennpunktet for randstrålene (B' er nærmere linsen enn B). Av-

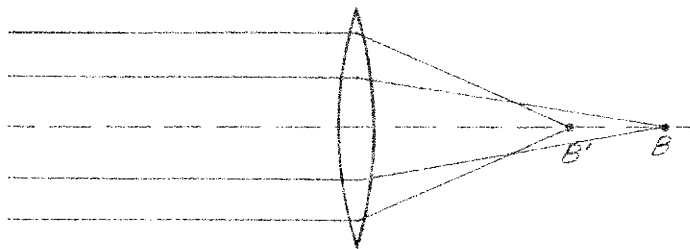


fig. 15

standen mellom B og B' representerer altså den suksessive minsking av brennvidden svarende til intervallet mellom sentralstrålene og randstrålene.

Dreier det seg om en enkelt linse, er det mulig ved hensiktsmessig valg av radier til de to begrensingsflatene å redusere denne avbildingsfeil en del. Ved linsekombinasjoner er mulighetene for reduksjon av den sfæriske aberrasjon langt større. Ved hensiktsmessig valg av krumningsradier, linseavstander og glassmaterialer er det da mulig i stor utstrekning å uskadeliggjøre denne avbildingsfeil.

b) Den kromatiske aberrasjon.

Vi har hittil forutsatt at lysstrålene er homogene med hensyn til brytningsindeks og optiske egenskaper forøvrig. Som bekjent er vanlig sollyst sammensatt av en rekke farger av forskjellig bølgelengde og brytningsindeks. Når en slik sammensatt lysstråle passerer en linse, vil vi få fargespredning som følge av at den sammensatte stråle løser seg opp i sine enkelte komponenter. Det henger sammen med at brytningsindeksene og dermed brennviddene ikke er ens for komponentstrålene. Resultatet blir at det til et bestemt objekt punkt vil tilsvare like så mange bildepunkter som vedkommende lysstråle inneholder komponentstråler (farger), dvs. bildet blir farget og uskarpt (se fig. 16 hvor vi betrakter avbildingen av et

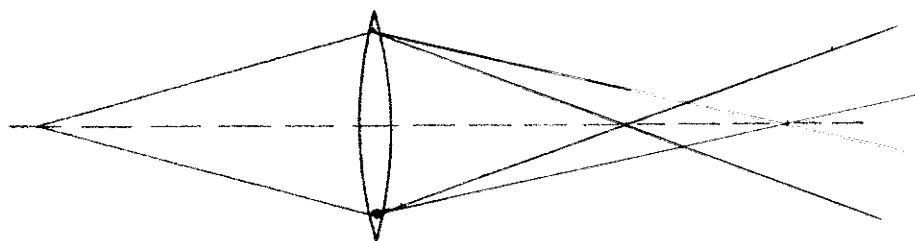


fig. 16

objektpt. som befinner seg på den optiske akse). Brytningsindeksen er størst for fiolett og minst for rødt lys, dvs. brenn-

vidden blir størst for rødt og minst for fiolett lys.

Brytningsindeksene for de forskjellige fargene som sollyset er sammensatt av, er kjent for de såkalte Fraunhoferske linjer. Det er f.eks. tilfelle med C-linjen i rødt, D-linjen i gult og F-linjen i blått. Brytningsindeksen for D-linjen, n_D , oppgis som midlere brytningsindeks for de forskjellige glassorter. Blir det f.eks. oppgitt at en glassort har brytningsindeksen 1,58, refererer altså denne n seg til D-linjen. Differensen mellom F-linjens og C-linjens brytningsindekser, altså $n_F - n_C = \Delta n$, betegnes som den midlere dispersjon.

For de vanligst forekommende typer av kron- og flintglass kan vi stille opp følgende oversikt:

	Kronglass	Flintglass
n_C	1,515	1,617
n_D	1,518	1,622
n_F	1,524	1,635
Δn	0,0086	0,0173

Ved å kombinere to eller flere linser er det mulig til en viss grad å oppheve den kromatiske aberrasjon. En fullstendig eliminasjon av fargespredningen er umulig å oppnå. Som regel nøyer vi oss med å få opphevd spredningen for rødt og blått, dvs. disse to fargene blir brakt til å dekke hverandre nøyaktig. Den spredning som da blir tilbake for de andre fargene, og som går under navn av det sekundære spektrum, er forholdsvis uskadelig. En slik sammensatt linse, hvis fargespredning er opphevd for rødt og blått, kalles en akromatisk linse, og teorien som angår dette problem, går under navn av akromasi. Vi skal i det etterfølgende gjennomgå akromasiens grunnleggende prinsipper.

α) Akromatiske linser.

Vi tar vårt utgangspunkt i formelen for brennvidden til en linse, idet vi setter linsetykkelsen ut av betraktning

$$f = \frac{r_h r_v}{(n-1)(r_h + r_v)}$$

I denne formelen refererer n seg til en bestemt farge. For en annen farge med brytningsindeks $n+dn$ fås den tilsvarende endring i brennvidden ved differensiasjon av formelen for f

$$df = -f \frac{dn}{n-1}$$

Vi tenker oss så en linsekombinasjon bestående av to linser med forskjellige brytningsindekser og brennvidder. Den ekvivalente brennvidde er gitt ved:

$$F = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - c}$$

idet vi betegner de to linsene med indeksene 1 og 2. Vi innfører så følgende betegnelser for brennvidder og brytningsindekser til de to komponentlinsene

	brennvidde	brytningsindeks
rødt lys	f_1 og f_2	n_1 og n_2
blått lys	$f_1 + df_1$ og $f_2 + df_2$	$n_1 + dn_1$ og $n_2 + dn_2$

I formelen for F refererer altså f_1 og f_2 seg til rødt lys (C-linjen). For blått lys er brennvidden lik $f_1 + df_1$ og $f_2 + df_2$. Endringen i den ekvivalente brennvidde svarende til endringene df_1 og df_2 er lik det totale differensial av F med hensyn til f_1 og f_2 :

$$dF = \frac{F^2}{f_1} \left(\frac{1}{f_1} - \frac{e}{f_1 f_2} \right) df_1 + \frac{F^2}{f_2} \left(\frac{1}{f_2} - \frac{e}{f_1 f_2} \right) df_2$$

Vi erstatter her df_1 og df_2 i sansvar med den tidligere utledede formel

$$df = -f \frac{dn}{n-1} \quad \text{og får}$$

$$dF = \left\{ -\frac{dn_1}{n_1-1} \left(\frac{1}{f_1} - \frac{e}{f_1 f_2} \right) - \frac{dn_2}{n_2-1} \left(\frac{1}{f_2} - \frac{e}{f_1 f_2} \right) \right\} F^2$$

dF gir altså uttrykk for forskjellen i ekvivalent brennvidde mellom røde og blå stråler. For å få opphevd fargespredningen for rødt og blått må vi altså forlange: $dF = 0$, dvs.

$$\frac{dn_1}{n_1-1} \left(\frac{1}{f_1} - \frac{e}{f_1 f_2} \right) + \frac{dn_2}{n_2-1} \left(\frac{1}{f_2} - \frac{e}{f_1 f_2} \right) = 0$$

som kan omformes til:

$$\frac{dn_1}{n_1-1} (f_2 - e) + \frac{dn_2}{n_2-1} (f_1 - e) = 0$$

Dette er den generelle akromasibetingelse ved kombinasjon av to linser. Dersom begge linsene er av samme slags glass, er $n_1 = n_2$ og $dn_1 = dn_2$, og akromasibetingelsen antar da formen:

$$f_2 - e + f_1 - e = 0, \quad \text{dvs.} \quad e = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$$

β) Akromatiske prismer.

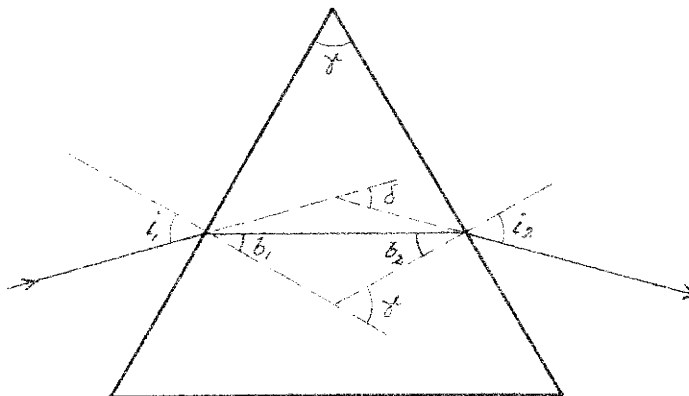


fig. 17

Vi skal først se nærmere på strålegangen i prismer. Fig. 17 forestiller et snitt vinkelrett på prismets kanter. En lysstråle i dette plan treffer den første prisneflaten under innfallsvinkelen i_1 . Det videre forløp av

strålen er gitt med ligningene:

$$\sin i_1 = n \sin b_1$$

$$\sin i_2 = n \sin b_2$$

Lysstrålens totale avbøyning er lik vinkelen δ , som blir lik

$$\delta = i_1 - b_1 + i_2 - b_2$$

Tar vi hensyn til at $b_1 + b_2 = \gamma$, fås

$$\delta = i_1 + i_2 - \gamma$$

En nærmere undersøkelse over strålegangen i prismer viser at avbøyningen δ har sitt minimum for $i_1 = i_2$, som har tilfølge at $b_1 = b_2$, dvs. minimum av δ inntreffer når lysstrålen har et symmetrisk forløp i forhold til prismets brytende kant.

For det tilfelle at prisnevinkelen γ er liten og videre at den innfallende lysstråle treffer den første prisneflaten under en tilnærmet rett vinkel, vil såvel i -ene som b -ene bli små vinkler, og de oppstilte generelle ligninger for strålegangen kan med tilstrekkelig tilnærkelse skrives på følgende måte:

$$i_1 = nb_1 \quad \text{og} \quad i_2 = nb_2$$

Derned går uttrykket for δ over til:

$$\delta = n(b_1 + b_2) - \gamma = (n-1)\gamma$$

Under de angitte forutsetninger er altså strålens avbøyning proporsjonal med prisnevinkelen γ .

*

Vi skal så utlede betingelsen for akromatisk prisme for det tilfelle at vi har med et prisme å gjøre som er satt sammen av to enkeltprismer. Vi forutsetter at begge prisnevinklene er små og dessuten at lysstrålene treffer det første prismet under en vinkel som bare avviker lite fra 100° . Bøyningen i det første prismet er folgelig gitt ved

$$\delta_1 = (n_1 - 1) \gamma_1$$

og tilsvarende i det andre prismet

$$\delta_2 = (n_2 - 1) \gamma_2$$

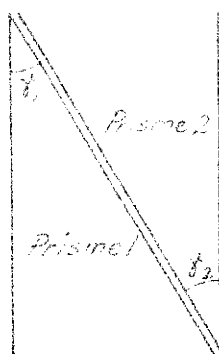


fig. 18

Den totale avbøyning av lysstrålene blir følgelig

$$\delta = \delta_1 - \delta_2 = (n_1 - 1)\gamma_1 - (n_2 - 1)\gamma_2$$

At δ er lik differensen mellom avbøyningen i de to enkeltprismene, følger av at enkeltprismenes brytende kanter er motsatt rettet.

Dersom n_1 og n_2 refererer seg til rødt lys, mens brytningsindeksene for blått lys er $n_1 + dn_1$ og $n_2 + dn_2$, får vi en fargespredning mellom rødt og blått lys lik det totale differensial av δ med hensyn til n_1 og n_2 :

$$d\delta = \gamma_1 dn_1 - \gamma_2 dn_2$$

Betingelsen for akromasi er altså at $d\delta = 0$, som resulterer i

$$\gamma_1 dn_1 = \gamma_2 dn_2$$

I mange tilfelle innen landmålingen, f.eks. når prismet skal nyttes til franskaffelse av distansemålende vinkler, foreligger oppgaven i den form at prismet foruten å være akromatisk også skal ha en gitt avbøyningsvinkel δ . Oppgaven går så ut på å bestemme de tilhørende verdier av γ_1 og γ_2 . Vi går tilbake til ligningen

$$\delta = (n_1 - 1)\gamma_1 - (n_2 - 1)\gamma_2$$

og innfører her betingelsen for akromasi ($\gamma_2 = \frac{dn_1}{dn_2} \gamma_1$) og får

$$\delta = (n_1 - 1)\gamma_1 - (n_2 - 1) \frac{dn_1}{dn_2} \gamma_1, \text{ dvs.}$$

$$\gamma_1 = \frac{\delta}{dn_1} \cdot \frac{1}{\frac{n_1 - 1}{dn_1} - \frac{n_2 - 1}{dn_2}}$$

som sammen med $\gamma_2 = \frac{dn_1}{dn_2} \gamma_1$ representerer løsningen av det forelagte problem.

8. Litt om øyets anatomi og fysiologi.

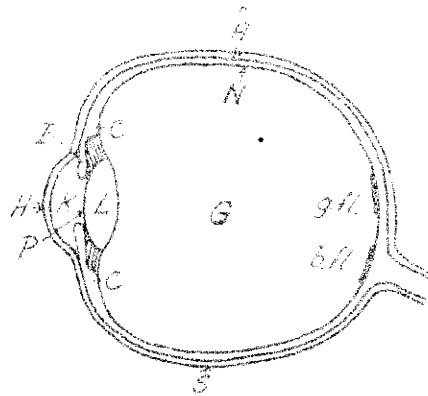


fig. 19

- H - hornhinne
- Å - århinne
- S - senehinne
- N - netthinne
- I - iris eller regnbuehinne
- G - glasslegene
- L - linse
- P - pupille
- K - øyekammer (fylt med kammer-
væske)
- C - ciliarmuskler
- g.fl. - den gule flekk
- b.fl. - den blinde flekk

Fig. 19 viser et horison-
talt snitt gjennom et øye sett
ovenfra. Linsen og alle de
andre delene som lyset passerer,
virker til sammen som en samle-
linse hvis bakre brennpunkt
normalt ligger i den gule flekk.
Linsens brytningsindeks er om-
lag den samme som hos glass,
mens kammervæskens og glass-
legenets brytningsindeks er
ontrent som hos vann.

Synsinntrykk oppstår på den
måten at strålene fra et lys-
ende punkt passerer pupillen,
brytes i øyet og forener seg i
et bildepunkt på netthinnen.
Dette bildepunkt pirrer syns-
nervene som sender pirringen i
form av synsinntrykk til hjer-
nen. Netthinnen er ikke like
ømfintlig over alt. På det

stedet hvor synsnerven går inn i øyet (den blinde flekk), er netthinnen full-
stendig uimottagelig for synsinntrykk. På et bestemt punkt av netthinnen, som
går under navn av den gule flekk, er netthinnen mest ømfintlig. Når vi skal
betrakte et eller annet objekt, sørger vi uvilkarlig for å dreie øyet slik
at bildet faller i sentrum av den gule flekk.

For at bildene for forskjellige objektavstander alltid skal
dannes på den gule flekk, dvs. med konstant bildeavstand, er øyet utstyrt
med evnen til å forandre brennvidde. Det skjer ved endring av linsens
krumning. Dette fenomen går under navn av akkomodasjon, og oppnås ved hjelp
av ciliarmuskulene. Evnen til akkomodasjon er begrenset. Det er f.eks. ikke
mulig å få bildet til å falle på netthinnen når objektavstanden går under en
viss grense. Denne grense representeres ved det såkalte nærpunkt som i ung
alder befinner seg ca. 10 cm, og hos eldre mennesker vanligvis ca. 50 cm fra øyet.

Av større betydning er den såkalte gunstigste synsvidde, som er
den avstand vi bringer et objekt i for å se det tydeligst mulig. For et
normalt øye kan den gunstigste synsvidde settes til ca. 25 cm.

Befinner øyet seg i hviletilstand med avslappede ciliarmuskler, ender linsen hos et normalt menneske en slik krumning at et uendelig fjernt punkt blir avbildet på netthinnen. Hos det kortsynte øyet er avstanden mellom hornhinne og netthinne større enn normalt. Som følge herav vil strålene fra et uendelig fjernt punkt forene seg i et bildepunkt foran netthinnen. Øyet er således ikke i stand til å se fjerne punkter skarpt. Hos det ^{over}langsynte øye er avstanden mellom hornhinne og netthinne for kort. I dette tilfelle vil bildepunktet av uendelig fjerne punkter falle bakenfor netthinnen, slik at heller ikke det ^{over}langsynte øye kan se tydelig på lange avstander, *uten akkomodasjon.*

I begge tilfeller vil det hos øyet i hviletilstand, istedenfor et uendelig fjernt punkt, avbildes et annet punkt på netthinnen, det såkalte fjernpunkt.

*

Vi skal så vise hvordan øyet fungerer som optisk system. Fig. 20 frem-

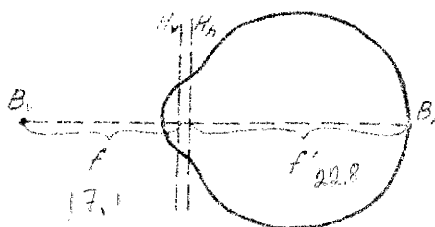


fig. 20

stiller øyets ekvivalente system ved hjelp den faktiske strålegang kan erstatte med en "idealisert" sådan. Begge hovedplaner befinner seg i det forreste øyekammer. Beliggenheten av hovedplanene og brennpunktene, og likeså størrelsen av de ekvivalente brennviddene, vil variere litt med akkomodasjonstilstanden, og vil også være litt forskjellig hos de forskjellige mennesker. For det akkomodasjonsfrie øye har en funnet følgende gjennomsnittlige verdier for det ekvivalente systems konstanter

$$f = 17,1 \text{ mm} \quad \text{og} \quad f' = 22,8 \text{ mm}$$

Med hensyn til beliggenheten av hovedplanene, så befinner H_v seg 1,35 mm bak hornhinnens forreste punkt, og avstanden mellom dem er 0,25 mm.

Hvordan skjer så bildedannelsen i øyets ekvivalente system? For å besvare dette spørsmål blir det nødvendig å anstille noen generelle betraktninger over bildedannelsen når brennvidden i bilderommet er forskjellig fra brennvidden i objektrommet.

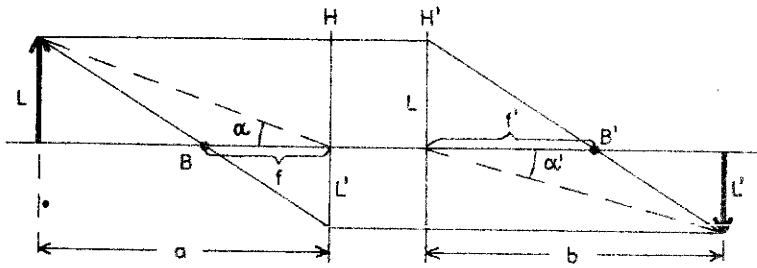


fig. 21

I fig. 21 betrakter vi avbildningen L' av gjenstanden L. Billedannelsen følger den tidligere angitte generelle dioptriske ligning

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{b} = 1, \text{ dvs. } b = \frac{af'}{a-f}$$

Av figuren framgår relasjonen

$$\frac{L}{f'} = \frac{L'}{b-f'}, \text{ dvs. } \frac{L}{L'} = \frac{f'}{b-f'} = \frac{a-f}{f}$$

Til bestemmelse av α og α' har vi

$$\alpha = \frac{L}{a} \text{ og } \alpha' = \frac{L'}{b}, \text{ dvs. } \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{L}{L'} \frac{b}{a}$$

som ved innsetting for $L:L'$ og b går over til

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{f'}{f}$$

I dette tilfelle gjelder altså ikke lenger at α i objektrummet er lik α i bilderommet, slik tilfellet er når de to brennviddene er like store.

*

Vi skal så gå nærmere inn på øyets fysiologi. Den grunnleggende betingelse for at en gjenstand skal avstedkomme synsinntrykk, er at øyet mottar en viss minstemengde lys fra gjenstanden og dessuten at bildet av gjenstanden på netthinnen har en viss minsteutstrekning. Ved forsøk har en funnet at den minste lineære utstrekning er ca. $0,1 \mu$.

En annen av øyets viktigste fysiologiske egenskaper er opløsnings-evnen, dvs. evnen til å oppfatte to atskilte objekter separat. Forsøk har vist at denne "separasjon" er avhengig av at bildene av de to objektene på netthinnen ikke faller nærmere hverandre enn 5μ . Blir avstanden mindre enn 5μ , vil ikke øyet være i stand til å oppfatte de to objektene som atskilte gjenstander, dvs.

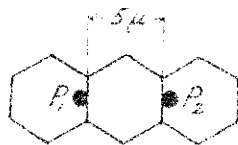


fig. 22

de flyter sammen til en enkelt gjenstand. Forklaringen på dette fenomen ligger i netthinnens anatomi. Nervetrådene ender nemlig i lysfølsomme celler med sekskantet tverrsnitt og åpning på ca. 5μ . Det ligger derfor nær å trekke den slutning at betingelsen for at øyet skal oppfatte bildene av to gjenstander atskilt, er at det i det minste er

$$\alpha^2 = \frac{b}{r} f$$

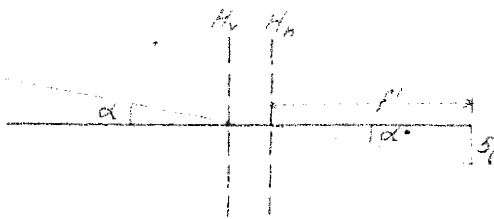


fig. 23

én fri celle mellom de to bildene (se fig. 22). Med de verdier for øyekonstantene som vi har angitt tidligere, svarer hertil en vinkel α gitt ved (se fig. 23):

$$\alpha = \frac{f'}{f} \alpha' = \frac{22,8}{17,1} \frac{5}{22800} \cdot 636620 = 190^{\circ} \approx 2^{\circ}$$

dvs. Betingelsen for at to objekter skal kunne oppfattes atskilt av øyet, er at deres angulære avstand er om lag 2° .

Vi har tidligere berørt spørsmålet om øyets synsskarphet som kommer til uttrykk ved minstestørrelsen av netthinnebildet av en gjenstand for at øyet overhodet skal kunne oppta synsinntrykk fra gjenstanden. Som nevnt er denne nedre grense ca. $0,1 \mu$. Hertil svarer vinkelen

$$\beta = \frac{22,8}{17,1} \frac{0,1}{22800} 636620 \approx 4^{\circ}$$

Denne grenseverdi er nærmest kun av teoretisk interesse, for så vidt som den forutsetter at de andre forhold som også innvirker på synsinntrykket, er optimale, bl.a. forutsettes at den betraktede gjenstand utstråler en optimal lysmengde. Vinkelen β vil derfor ha gyldighet ved betraktning av lysende gjenstander som stjerner, f.eks. Når det gjelder øyets evne til å registrere synsinntrykk under normale forhold, dvs. ved betraktning av ikke-lysende objekter, stiller saken seg langt ugunstigere. Forsøk har vist at vi i praksis da må regne med samme verdi som for oppløsningsevnen, nemlig ca. 2° .

Det er av betydning å skille mellom absolutt og relativ synsskarphet. Øyets absolutte synsskarphet kommer til uttrykk ved den tidligere angitte verdi på 2° . Med relativ synsskarphet forstår vi evnen til å registrere gjenstanders relative beliggenhet, og sistnevnte er langt større enn den absolutte synsskarphet, nemlig om lag $30-50^{\circ}$. Dette er forklaring på den store nøyaktighet som oppnås f.eks. ved nonieavlesning, koinsidens innstilling og ved innstilling av to streker i forhold til en midtstrek.

De i det foregående angitte data for synsskarphet og oppløsningsevne refererer seg til monokular betraktning. Ved binokular og enda mer ved stereoskopisk betraktning kan regnes med gunstigere forhold. I fotogrammetrien regnes med at såvel synsskarphet som oppløsningsevne er om lag dobbelt så stor ved stereoskopisk som ved ikke-stereoskopisk betraktning.

K a p i t e l II .

R E T T V I N K E L A P P A R A T E R .

Hermed forstår vi instrumenter som er konstruert med tanke på avsetning av rette vinkler. Vi har 3 hovedtyper av rettvinkelapparater, nemlig speil-, prisme og diopterinstrumenter.

1. Speilinstrumenter.

Hos disse skaffes den rette vinkel ved reflektering mot speilende flater. De viktigste speilinstrumenter er:

a) Vinkelspeilet.

Det består av to plane speil som er anbrakt i en metallinnfatning. De to speilende plan som danner en vinkel på 50° med hverandre, skal være vinkelrett på ett og samme tredje plan. Fig. 23 viser et snitt

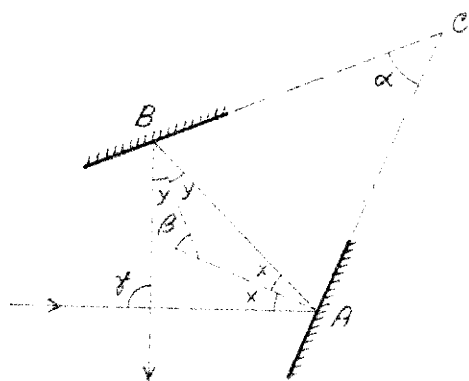


fig. 23

gjennom vinkelspeilet vinkelrett på skjæringslinjen mellom de to speilende plan. Vi betrakter en innfallende stråle som treffer det ene speilet i pkt. A hvorefter den reflekteres mot pkt. B i det andre speilet, hvorfra den på nytt reflekteres. Av fig. 23 ser vi at

$$\beta = x + y = \alpha$$

Det at $\beta = \alpha$, følger av at vinkelbenene til vinkelen β står vinkelrett

på de speilende plan. Som utvendig vinkel er

$$\gamma = 2x + 2y = 2\alpha$$

Herav følger at vinkelen mellom den innfallende og uttredende stråle vil være 100° dersom α gjøres lik 50° .

Beliggenheten av den rette vinkels toppunkt varierer alt etter

vinkelspeilets stilling. Under bruken blir instrumentet sentrert i forhold til håndtaket eller hylsen. Det oppstår derved en sentreringsfeil som følge av at topp-punktet for den rette vinkel og speilets sentrum (håndtak) ikke faller sammen. Som regel er denne feil betydningsløs, da speilets dimensjoner er små. Under vanlig bruk vil toppunktet av den rette vinkel falle tett ved speilets åpning og her bør håndtaket eller hylsen være anbrakt.

Vinkelspeilets bruk. Rettvinkelapparatene nyttes innen landmålingen enten til å oppreise perpendikulærer på en gitt linje i gitte punkter, eller fra gitte punkter utenfor linjen å nedfelle perpendikulærer på denne. Skal det i et pkt. C på linjen AB oppreises en perpendikulær, brukes speilet enten i samsvar med fig. 24 eller 25.

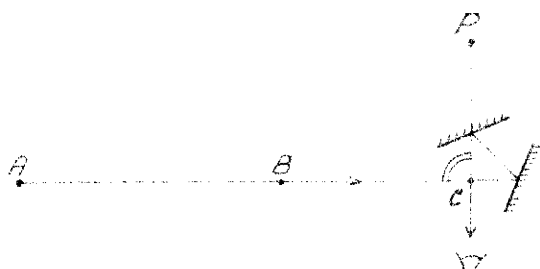


fig. 24

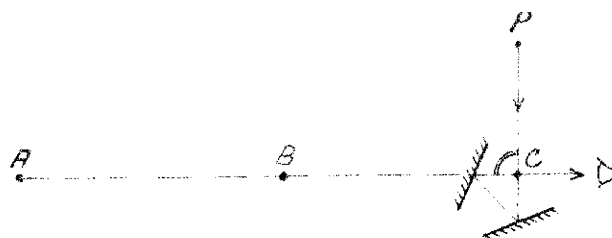


fig. 25

I det første tilfelle ser vi i speilet bildet av stokken B, som skal dekke A dersom speilet holdes riktig. Over speilet er det mulig samtidig å se ut i terrenget og sikte inn en stokk P som sammen med pkt. C vil danne en perpendikulær på linjen AB. Eller oppreisning av perpendikulæren kan skje i samsvar med fig. 25, som vel neppe trenger noen nærmere forklaring.

Skal det fra P nedfelles en perpendikulær på den gitte linjen, har fig. 24 og 25 fremdeles gyldighet, bare med den forskjell at pkt. P blir fast og pkt. C variabelt. Speilet må derfor bevegges i linjen inntil avbildningen av linjen og pkt. P faller sammen (fig. 24), eller inntil bildet av P faller i linjen (fig. 25).

Framgangsmåten etter fig. 24 brukes dersom linjen ABC er horisontal, mens perpendikulæren CP ligger i helning. Ligger derimot linjen i helning, mens perpendikulæren er forholdsvis horisontal, er metoden etter fig. 25 å foretrekke.

For å oppnå et så nøyaktig resultat som mulig, er det av betydning at stokken B ikke befinner seg for nær speilet. Ellers vil B sees under for stor synsvinkel, slik at innsiktningen blir mindre skarp.

Vinkelspeilets verifisering. Betingelsen for å få avsatt en rett vinkel med vinkelspeilet er at de speilende plan danner en vinkel på 50° med hverandre. En kan få brakt på det rene om denne betingelse er oppfylt ved å gå fram på følgende måte:

På noenlunde flat mark stikkes en rett linje med minst fire stokker ABCD (se fig. 26). I en lag 50 meters avstand fra linjen anbringes en stokk P, slik at fotpunktet til perpendikulæren fra P på linjen faller omtrent midt mellom B og C. Vi nedfeller så perpendikulæren fra P på

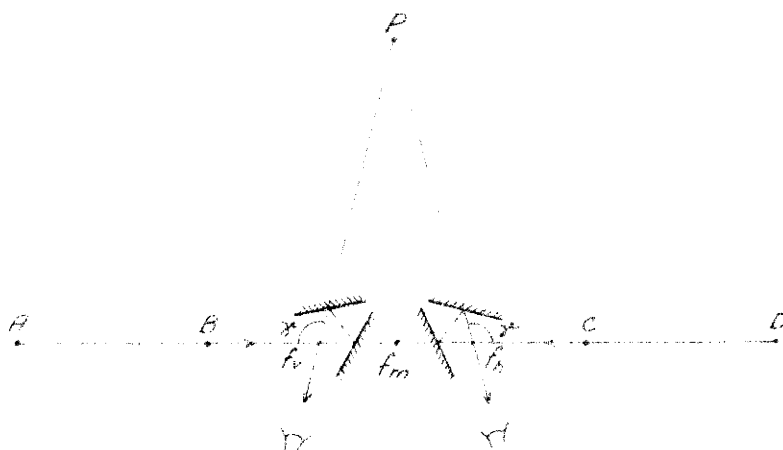


fig. 26

linjen, én gang med speilåpningen vendt mot høyre, og én gang med åpningen til venstre. Dersom vi begge ganger får samme fotpunkt, er speilet riktig. Fallers ikke fotpunktene sammen, skyldes det at vinkelen mellom

de speilende plan er forskjellig fra 50° . Det riktige fotpunkt f_m ligger midt mellom f_v og f_h . Etter at det riktige fotpunkt er bestemt i marken, holdes speilet nøyaktig loddrett over dette, og speilet korrigeres ved hjelp av korreksjonsskruene inntil f_m fås som fotpunkt for perpendikulæren fra P enten speilåpningen vendes til høyre eller venstre. Før en går i gang med å rette på korreksjonsskruene, må en ha klart for seg om speilvinkelen er for stor eller for liten. Dersom forholdene ligger slik an som antydnet i fig. 26, er vinkelen for stor. Det følger av at vinkelen γ er for stor, og da γ er lik den dobbelte verdi av speilvinkelen, må også den siste være for stor.

b) Speilkorset.

Speilkorset består av to speilflater som er anbrakt vinkelrett på hverandre. Instrumentet tjener til å oppsøke punkter på den rette linje mellom to gitte punkter. Fig. 27 gir beviset for at de to strålene fra de gitte punktene A og B forener seg til én stråle når speilkorset befinner

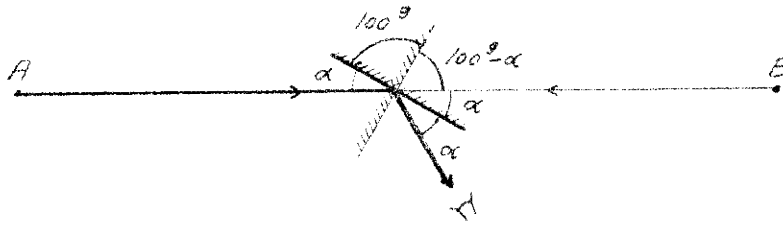


fig. 27

endres, slik at øyet må dreies.

c) Det dobbelte vinkelspeil.

Det består av to vinkelspeil som er anbrakt over hverandre og dreiet en rett vinkel i forhold til hverandre (se fig. 28). Alle fire

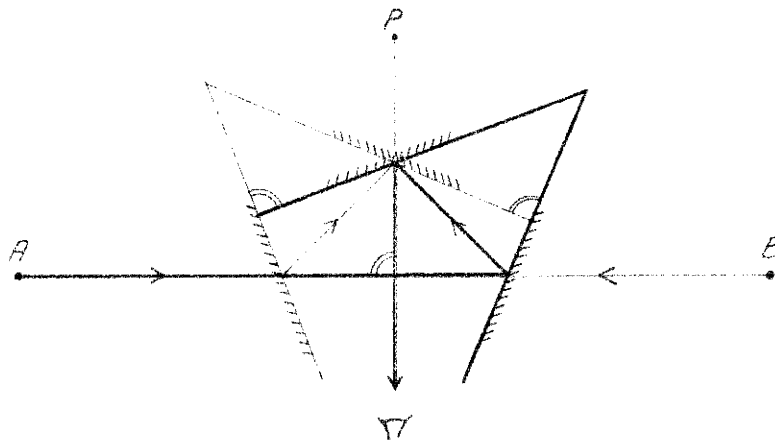


fig. 28

av at den uttredende resultantstråle står vinkelrett på linjen AB.

seg på den rette linjen mellom A og B. En dreining av instrumentet om dets akse vil ikke influere på dette forhold, men bare føre til at retningen av den uttredende stråle

speils plan må være vinkelrett på ett og samme plan.

Ved hjelp av dette instrument er det mulig samtidig å innstille seg i den rette linje mellom to gitte punkter og oppreise en perpendikulær på linjen. Det følger

2. Prismeinstrumenter.

Disse består av glassprismer med parallelle kanter vinkelrett på grunnflaten. Hos prismeinstrumentene opptrer foruten speil- og totalrefleksjon også bøyning av lysstrålene. Det finnes mange forskjellige typer av slike instrumenter.

a) Det tresidede vinkelprisme.
(Bauernfeind's vinkelprisme.)

Dette består av et rett glassprisme med grunnflate av form som et rettvinklet, likebent triangel (se fig. 29). Hypotenusflaten er forsynt med speilbelegg. Prismet er montert i en metallinnfatning, slik at bare de to katetflatene er udekket. Hva strålegangen angår, opptrer det i dette prismet både bevegelige og faste stråler (bilder). Fig. 29 viser hvordan de bevegelige bilder oppstår. En lysstråle treffer den ene

Bevegelig stråle.

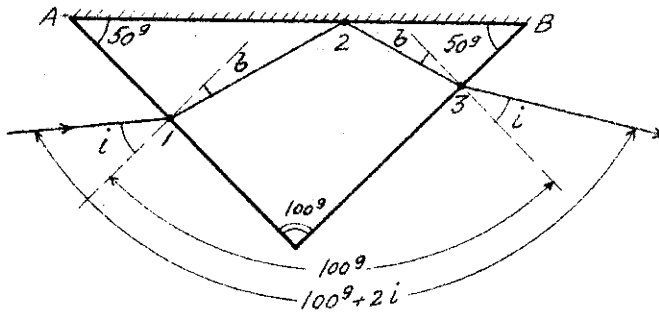


fig. 29

katetflaten i pkt. 1 under innfallsvinkelen i , hvor den brytes og treffer hypotenusflaten i pkt. 2, hvorfra den speilreflekteres mot den andre katetflaten som den treffer i pkt. 3 under vinkelen $100^\circ + b$. (At vinkelen i pkt. 3 blir $100^\circ + b$ følger av at i trekantene $1A2$ og $2B3$ er to vinkler like store: $\angle A = \angle B$ og $\angle 12A = \angle 32B$, følgelig må også vinklene i 1 og 3 være like store og lik $100^\circ + b$.) Vinkelen mellom den innfallende og uttredende stråle blir følgelig lik $100^\circ + 2i$.

Dersom vi lar den innfallende stråle treffe pkt. 1 på den andre siden av innfallsloddet under vinkelen i , kan vi på tilsvarende måte vise at $\alpha = 100^\circ - 2i$. I sin alminnelighet gjelder derfor

$$\alpha = 100^\circ \pm 2i$$

α er m.a.o. en funksjon av innfallsvinkelen. Når prismet dreies, endres innfallsvinklene og dermed også retningen til de uttredende stråler. For en iakttaker vil det forhold at de uttredende stråler endrer retning, fortone seg som om de tilhørende bilder beveger seg.

De bevegelige bildene oppstår når strålegangen inne i prismet omfatter bare én refleksjon. Imidlertid har vi også mulighet for en mer komplisert strålegang, omfattende to refleksjoner, og det er på denne måten at de faste bildene oppstår (se fig. 30). I stedetfor etter brytningen i pkt. 1 å treffe hypotenusflaten, går den strålen som gir opphav til det faste bildet, først mot den andre katetflaten, hvorfra den totalreflekteres

Fast stråle.

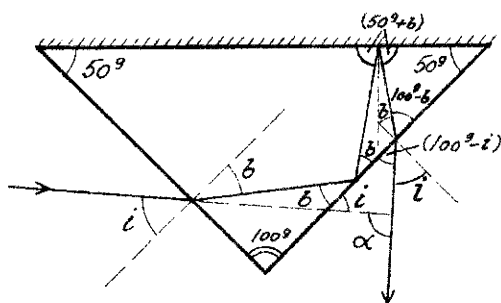


fig. 30

$\alpha = i + 100^\circ - i = 100^\circ$. Vinkelen mellom den innfallende og uttredende stråle er altså konstant lik 100° , uavhengig av innfallsvinkelen i . Om prismet dreies, endres ikke retningen for den uttredende stråle, bildet er fast.

Som det framgår av det foranstående, er det de faste bildene vi må nytte når prismet skal brukes som rettinkelapparat. Holdes øyet i \emptyset

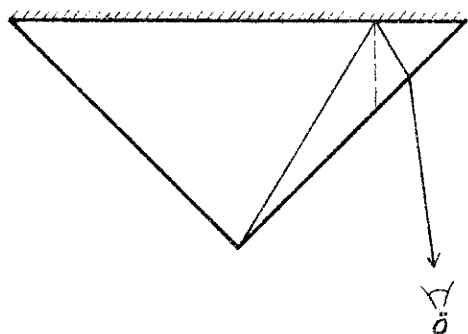


fig. 31

(se fig. 31), vil brukeren se både bevegelige og faste bilder. Grenselinjen mellom det faste og det bevegelige bildefeltet dannes av det lett synlige bildet av prismets forreste kant. De faste bildene sees til høyre, de bevegelige til venstre for bildet av denne kanten. Generelt gjelder at de faste bildene finnes i nærheten av prismets hjørner.

Av fig. 30 går det fram at **toppunktet** for den rette vinkel faller utenfor prismet. Som regel er håndtaket eller hylsen sentrisk anbrakt i forhold til prismet. Den feil som skyldes at den rette vinkels toppunkt og oppstillingspunktet (håndtaket eller hylsen) ikke faller sammen, er uten noen praktisk betydning, da prismets dimensjoner vanligvis er små.

Dessuten har Bauernfeind's prisme - som allerede vist - ulempen med faste og bevegelige bilder. Som følge av at de bevegelige stråler har en enklere optisk passasje gjennom prismet enn de faste stråler, nemlig bare en refleksjon for de bevegelige mot to refleksjoner for de faste, vil lysabsorpsjonen bli større for de siste enn for de første. Det resulterer igjen i at de bevegelige bildene blir lyssterkere enn de faste og virker derved atskillig forstyrrende under bruken av prismet. Denne ulempe er ved

enkelte konstruksjoner søkt motvirket derved at prismet er forsynt med blen-
der som stenger ute mesteparten av de strålene som resulterer i bevegelige
bilder (se fig. 32).

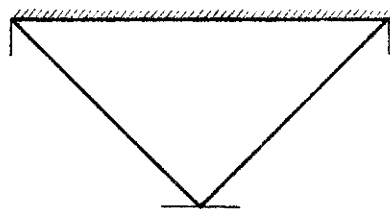


fig. 32

Bruken av det Bauernfeindske prisme
ved avsetting av rette vinkler er ana-
log med vinkelspeilets.

b) Pentagonprismet.

Dette er et rett glassprisme med grunnflate som en femkant (se
fig. 33). Prismet har to speil-

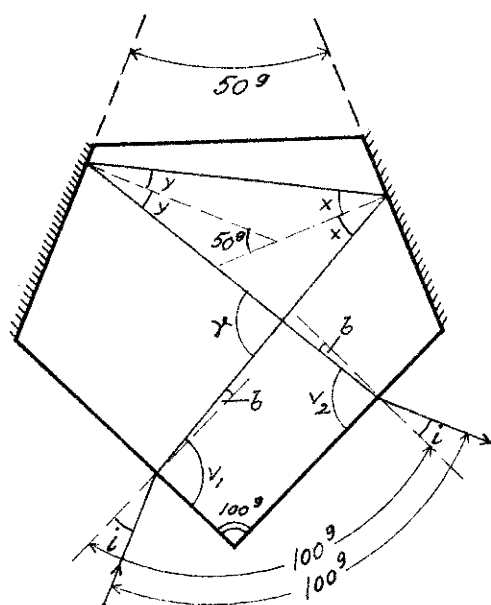


fig. 33

ende flater som danner en vinkel
på 50° med hverandre. Den mot-
stående vinkel til vinkelen på
 50° er rett. Prismet er anbrakt
i en metallinnfatning, slik at
sideflatene som støter til den
rette vinkels toppunkt, er
udekkede.

At den uttredende stråle er
vinkelrett på den innfallende,
følger av at strålegangen inne i
selve prismet blir den samme som
hos vinkelspeilet, dvs.

$$\gamma = 2x + 2y = 2(x + y) = 2 \cdot 50^\circ = 100^\circ$$

Videre ser vi at vinklene
 v_1 og v_2 har en sum lik 200° , dvs. dersom den ene er lik $100^\circ \pm b$, er den
andre $100^\circ \mp b$. De danner altså like store vinkler med innfallsloddet, men
ligger på hver sin side av dette. Ved overgangen mellom glass og luft vil
derfor den ene strålen brytes like meget til innfallsloddet som den andre
fra, slik at vinkelen mellom den innfallende og uttredende stråle blir den
samme som mellom de to innfallsloddene, nemlig lik 100° .

Som fig. 33 viser, faller den rette vinkels toppunkt innenfor
prismet. Håndtaket eller hylsen kan derfor anbringes meget nær toppunktet,

slik at sentreringsfeilen blir helt ubetydelig.

Teoretisk sett skulle pentagonprismet være lyssvakere enn det Bauernfeindske prisme fordi strålegangen i det første omfatter to speilrefleksjoner (mot én speilrefleksjon og én totalrefleksjon hos det likesidede prismet), og som tidligere omtalt, betinger speilrefleksjoner større lystap enn totalrefleksjoner. På den annen side forekommer praktisk talt ingen forstyrrende bevegelige bilder i pentagonprismet, slik at bildene av den grunn virker klarere og tydeligere enn de ellers ville ha gjort.

Sammenlignet med det tresidede prisme, har pentagonprismet den fordel at det har større synsfelt, det er praktisk talt ikke genert av bevegelige bilder og den rette vinkels toppunkt faller innenfor selve prismet.

c) Wollastone-prismet.

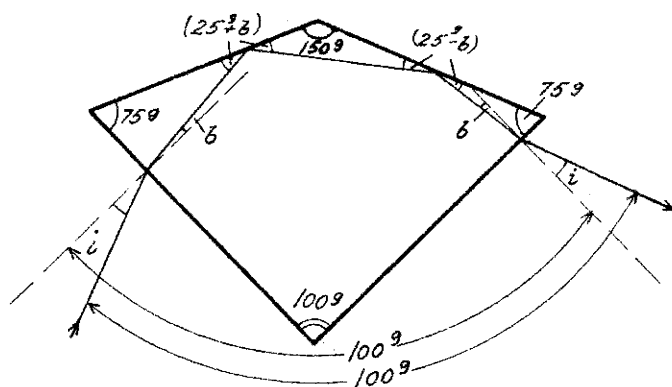


fig. 34

Dette prismet har ingen speilflater. All refleksjon foregår som totalrefleksjon. Lystapet blir derfor redusert til det minst mulige, slik at prismet blir meget lyssterkt.

d) Prismekorset.

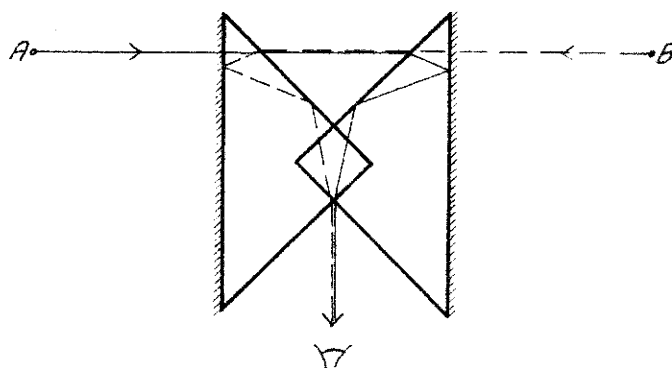


fig. 35

Det er satt sammen av to tresidede glassprismer, som er anbrakt over hverandre (se fig. 35). Instrumentet har samme misjon som det dobbelte vinkelspeil, nemlig samtidig innsikting i en gitt rett linje og oppreisning av perpendikulærer (eventuelt nedfelling) på samme.

På tilsvarende måte er det mulig å kombinere to pentagonprismer eller to Wollastone-prismer med samme effekt.

Prismeinstrumentene har den store fordel framfor speilinstrumentene at de er uforanderlige. Er glassprismet først riktig slipt, vil det for all framtid være riktig. En eventuell feil kan ikke rettes av brukeren. Undersøkelse av prismeinstrumenter for å få fastslått om de er riktige, foregår på samme måte som anført for vinkelspeilet.

Med hensyn til nøyaktigheten av speil- og prismeinstrumenter, så viser erfaringen at vi må regne med en middelfeil på utsettingen av den rette vinkel på ca. $400''$. For en perpendikulær av 50 meters lengde vil hertil svare en feil i fotpunktets beliggenhet på 3 cm. I hellende terreng må vi regne med noe større feil.

3. Dioptrinstrumenter.

Av slike instrumenter kan nevnes landmålerkorset og vinkel-trommelen.

a) Landmålerkorset.

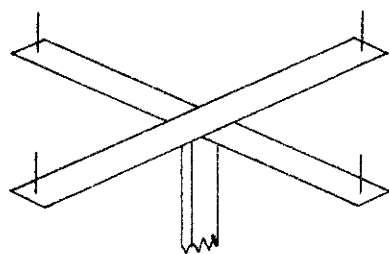


fig. 36

Landmålerkorset er et brett eller kors (se fig. 36). Ved hjelp av stifter eller dioptere fås to siktelinjer som står vinkelrett på hverandre. I linjenes skjæringspunkt er det anbrakt en hylse eller et hull, slik at apparatet under bruken kan settes på en stokk.

b) Vinkeltrommelen.

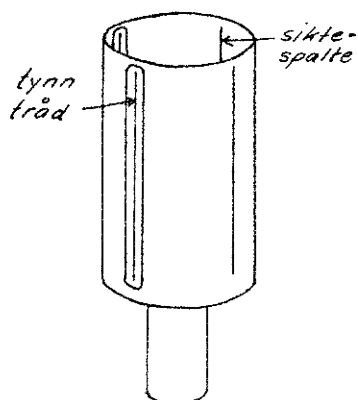


fig. 37

Vinkeltrommelen er en hul metall-sylinder. I veggene er det anbrakt dioptere, slik at vi får to siktelinjer som står vinkelrett på hverandre (se fig. 37). Undertiden er vinkeltrommelen også innrettet for avsetting av vinkler på $50''$.

*

Diopterinstrumentene kan brukes både til avsetting av perpendikulærer på en gitt linje og til nedfelling av perpendikulærer fra gitte punkter på linjen. Det sier seg selv at de ikke egner seg så godt til nedfelling av perpendikulærer som speil- og vinkelinstrumentene, idet brukeren må forsøke seg fram inntil han finner en slik plassering av instrumentet at den ene siktelinje faller sammen med den gitte linje, mens den andre treffer vedkommende gitte punkt.

På den annen side har de den fordel at de like lett kan brukes i hellende som i horisontalt terreng. Forutsetningen er at de stilles opp slik at siktemerkene, diopterne er loddrette. Derved fås to sikteplan som etter forutsetningen danner en rett vinkel med hverandre.

*

Undersøkelse av om diopterinstrumentenes to siktelinjer står vinkelrett på hverandre, foregår på følgende måte:

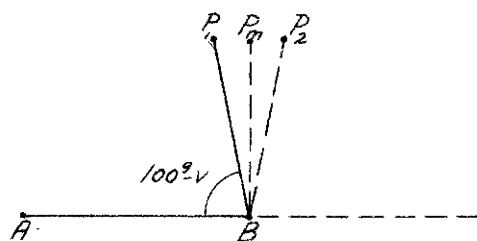


fig. 38

svarer den rette vinkel (P_m i fig. 38) midt mellom P_1 og P_2 .

Denne framgangsmåten for å kontrollere om instrumentet er riktig, går altså ut på å undersøke om to nabovinkler er like store. Metoden forutsetter at diopterne tillater sikting begge veger. Dersom ikke det er tilfelle, må foruten punktene A og B også et tredje pkt. C på linjen AB mar-

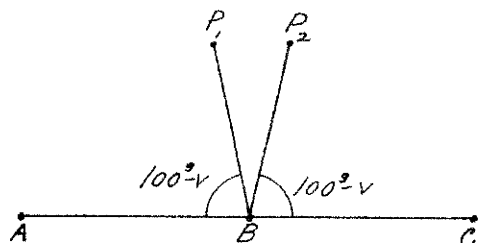


fig. 39

Instrumentet stilles opp i et pkt. B og den ene siktelinjen rettes mot pkt. A, hvoretter den andre siktelinjen markeres med en stokk i P_1 . Så dreies trommelen slik at siktelinjen BP_1 rettes mot A. Dersom nå den andre siktelinjen treffer P_1 , er instrumentet riktig. Treffer derimot siktet et annet pkt. P_2 , ligger det pkt. som til-

keres. Det ene diopteret rettes inn mot A, og P_1 markeres. Deretter dreies trommelen inntil siktelinjen BP_1 treffer C. Dersom trommelen er feilaktig ($100^\xi - v$ istedenfor 100^ξ), vil nå siktelinjen BA ikke treffe P_1 , men punktet P_2 .

4. Rettvinkelapparatenes bruk i hellende terreng.

Ved bruk av rettvinkelinstrumenter vil den avsatte rette vinkel referere seg til et plan vinkelrett på speil- eller prismekantene. Nå er det underforstått i landmålingen når vi taler om å sette ut rette vinkler, at den rette vinkel skal referere seg til det horisontale plan. Herav følger at rettinkelapparatene må holdes i loddrett stilling under bruken. Omvendt kan vi si at dersom apparatene kan brukes i loddrett stilling, vil vi alltid få avsatt riktige vinkler. Imidlertid kan vi i hellende terreng bli utsatt for at høydeforskjellen mellom instrumentet og de pkt. som markerer den rette vinkels ben, er så stor at det ikke vil være mulig samtidig å få inn det ene vinkelben ved direkte betraktning og bildet av det andre vinkelbenet når vi holder speilet eller prismet i loddrett stilling, men blir nødt til å helle apparatet for å få dette til.

Vi skal i det etterfølgende undersøke hvilken feil som begås dersom vinkelspeilet eller prismet under bruken avviker fra den loddrette stilling. Planet ABC i fig. 40 representerer det hellende plan, dvs. planet

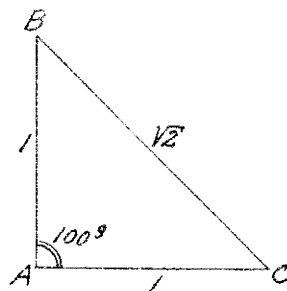


fig. 40

vinkelrett på rettinkelapparatets akse. I dette plan blir den rette vinkel riktig avsatt, mens den skulle ha vært riktig avsatt i horisontalplanet. Feilen finner vi følgende ved å utlede projeksjonen av den rette vinkel BAC på horisontalplanet.

I det hellende plan velger vi ut en likebent trekant ABC med katetlengder lik én. Fig. 41 viser projeksjonen av denne trekant på det horisontale plan, idet vi har forutsatt at apparatets helningsvinkel i de to retninger som tilsvarer den rette vinkels ben, dvs. linjereeringen og perpendikulærretningen, er α_1 og α_2 . Følgelig er katetlengdene i den projiserte trekant $\cos \alpha_1$ og $\cos \alpha_2$. I den projiserte trekant er vinkelen i A' ikke lenger rett, men lik $100^\circ + v$, dvs. v representerer den feil som begås derved at apparatet brukes i hellende stilling. Cosinussetningen anvendt på den

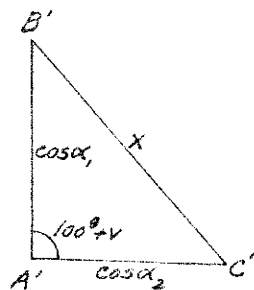


fig. 41

projiserte trekant gir

$$x^2 = \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 - 2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos (100^\circ + v), \text{ dvs.}$$

$$\cos(100^\circ + v) = -\sin v = \frac{\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 - x^2}{2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2}$$

Det gjelder så å finne et uttrykk for x^2 , og det oppnår vi ved hjelp av fig. 42 som viser situasjonen i et vertikalkplan gjennom B og C. Den horisontale linje representerer horisontalplanet gjennom A. Av fig. 42 ser vi uten videre at:

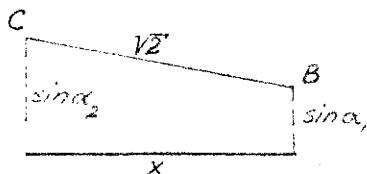


fig. 42

$$x^2 = 2 - (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)^2$$

som innført i foregående ligning

resulterer i:

$$\sin v = \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2$$

Av denne ligning kan vi lese oss til hvilke muligheter som består med hensyn til å bruke rettinkelapparatene i hellende stilling uten å begå feil. Det framgår at vi oppnår riktig resultat selv om apparatet helles i én retning (linjereetningen eller perpendikularretningen) forutsatt at det ingen helning har i retningen vinkelrett på denne.

Det er også konstruert prismer som i loddrett stilling gir bilder av gjenstander med stor høydeforskjell i forhold til standplassen. Det er oppnådd på den måten at disse prismers endeflater er slipt vinkelrett på sideflatene og forsynt med speilbelegg.

K a p i t e l III .

DE VIKTIGSTE BESTANDDELER AV MÅLEINSTRUMENTENE.

Vi skal i det etterfølgende behandle en del av de viktigste bestanddeler av de vanligst forekommende instrumenter i landmålingen. Noen av disse bestanddeler kan godt oppfattes som selvstendige instrumenter, men det vanligste i landmålingen er at de opptrer som tilbehør eller bestanddeler til sammensatte instrumenter som teodolitten og nivellerkikkerten, f.eks. som middel til å forhøye avlesningsnøyaktigheten, eller til vertikal- resp. horisontalstilling av visse instrumentakser.

1. Lupen.

Den tjener til å skaffe forstørrede bilder av nærliggende gjenstander. I sin enkleste form består lupen av en enkelt samlelinse med

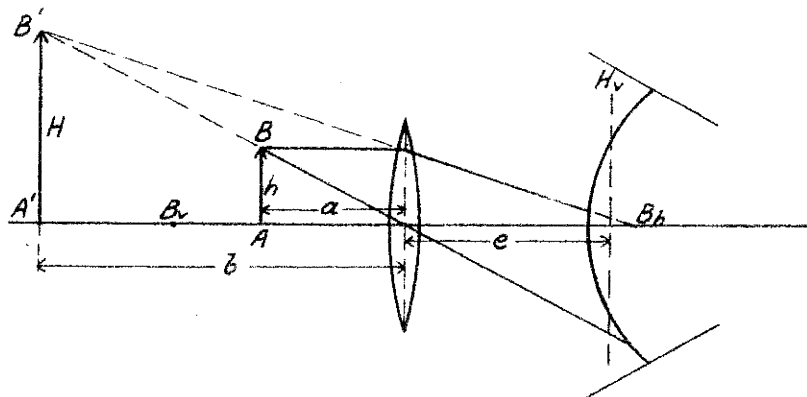


fig. 43

liten brennvidde. Betingelsen for å få forstørrede bilder er at de betraktede gjenstander befinner seg innenfor det objektsidige brennpunkt, dvs. at $a < f$. Fig. 43 viser hvordan billedannelsen foregår. Under den

angitte forutsetning fås et virtuelt, forstørret bilde $A'B'$ av gjenstanden AB . Konstruksjonen bygger på den tilnærmede betraktning at linsens to hovedplan faller sammen.

Med forstørrelsen til en lupe forstår vi forholdet mellom den synsvinkelen som vi ser gjenstanden under ved bruk av lupen, og den synsvinkel vi ville se gjenstanden under når denne anbringes i en avstand svarende til tydelig synsvidde, som vi betegner med w . Uten lupe blir altså synsvinkelen $\beta = \frac{h}{w}$. Ved bruk av lupen vil det virtuelle bilde av gjenstanden

ses under en synsvinkel $\alpha = \frac{H}{b+e}$ hvor e er avstanden fra linsen til øyets forreste hovedplan. Ifølge definisjonen på forstørrelse hos lupen, blir forstørrelsen v gitt ved

$$v = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{H \cdot w}{(b+e)h}$$

Av fig. 43 ser vi at $\frac{H}{h} = \frac{b}{a}$, følgelig

$$v = \frac{b \cdot w}{a(b+e)}$$

Erfaringen viser at øyet tilstreber en slik stilling av gjenstanden i forhold til lupen at det virtuelle bilde faller i uendelig stor avstand (eller rettere sagt i en avstand svarende til øyets fjernpunkt). Det svarer igjen til en avstand mellom gjenstand og linse tilnærmet lik brennvidden, dvs. $a \approx f$, hvorved uttrykket for v går over til:

$$v = \frac{w}{f(1+\frac{e}{b})} \approx \frac{w}{f}$$

idet e blir en liten størrelse i forhold til b .

Av denne ligning ser vi at betingelsen for at lupen skal virke forstørrende, er at f er mindre enn den tydelige synsvidde.

*

Begrepet virtuelle bilder er innført for å lette den geometriske forestilling ved bildedannelsen. I virkeligheten arter bildedannelsen seg på samme måte som når vi har med reelle bilder å bestille. Vi skal i det etterfølgende klargjøre de faktiske forhold ved bildedannelsen når en linse brukes som lupe. Øyet og lupelinsen i fig. 44 setter seg sammen til et ekvivalent system hvis objektsidige brennvidde er gitt ved

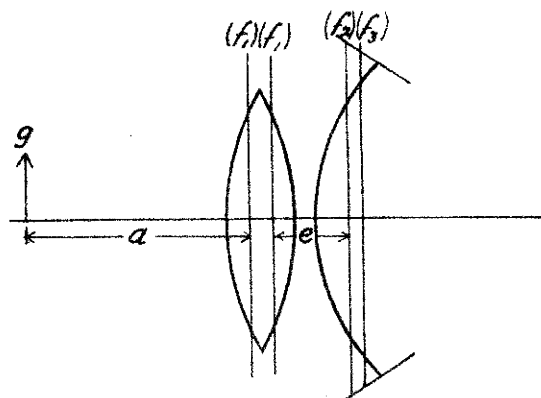


fig. 44

$$F = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - e}$$

og bildesidige brennvidde:

$$F' = \frac{f_1 f_3}{f_1 + f_2 - e}$$

hvor altså f_1 er linsens brennvidde, mens f_2 og f_3 er øyets objektsidige, resp. bildesidige brennvidde. Under bruken holdes øyet

så nær lupen at størrelsen e blir meget liten i forhold til f_1 og f_2 . Vi kan derfor sette

$$F \approx \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$$

Hovedplanene til det ekvivalente system vil under samme forutsetning falle sammen med linsens forreste og øyets bakerste hovedplan. Skal øyet oppfatte gjenstanden g , må det reelle bilde av g falle på netthinnen. Det betinger en objektavstand a gitt ved:

$$\frac{F}{a} + \frac{F'}{b} = 1$$

hvor altså b må være lik f_3 dersom det reelle bilde skal falle på netthinnen. Innfører vi her for F og F' etter foregående ligninger, og dessuten $b=f_3$, og løser ligningen med hensyn til a , får vi:

$$a = f_1$$

Dermed får vi forklaringen på at øyet "forlanger" å få gjenstanden i en avstand fra lupen svarende til lupens brennvidde. Forklaringen er rett og slett den at det er betingelsen for at det reelle bilde av gjenstanden skal falle på netthinnen, noe som en ikke kan slutte seg til ut fra forestillingen om virtuell bildedannelse.

2. Libellen.

Loddretningen spiller en fundamental rolle innen den praktiske og teoretiske landmåling. Det henger for det første sammen med at høydebegrepet i landmålingen er knyttet til loddretningen, og dernest at måling av horisontalvinkler og bestemmelse av avstander refererer seg til horisontalplanet som står vinkelrett på loddretningen. Instrumenter som er i stand til å angi loddretningen, spiller derfor en særdeles viktig rolle i landmålingen.

Loddretningen kan anskueliggjøres, eller om vi vil, materialiseres ved hjelp av en loddsnor. Større nøyaktighet oppnås ved hjelp av libeller. Av libeller finnes det to hovedtyper, nemlig rørlibellen og dåselibellen.

A. Rørlibellen.

Rørlibellen består av et glassrør som er slipt slik innvendig at skjæringslinjen med et plan lagt gjennom rørets lengdeakse, blir en sirkelbue med svak krumning. Radien til denne sirkelbuen kalles libellens krumningsradius. Glassrøret er delvis omsluttet av en innfatning, og er på den frie del forsynt med en inndeling som enten kan være gjennomløpende eller symmetrisk om midten.



fig. 45

På libeller med symmetrisk deling mangler som regel delestrekene på midt-partiet.

De like store avstander mellom delestrekene kalles libelledeler, og er enten lik én pariserlinje = 2,26 mm, eller lik 2 mm.

Tangenten til sirkelbuen i inndelingens midtpunkt, enten inndelingen er fortløpende eller går ut fra midten, går under navn av libelleakse (se fig. 46).

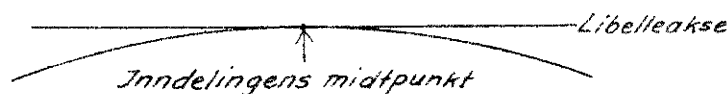


fig. 46

Røret er nesten fylt med en lett-flytende væske, alkohol eller eter. I denne væske er dannet en gassfylt blære eller boble.

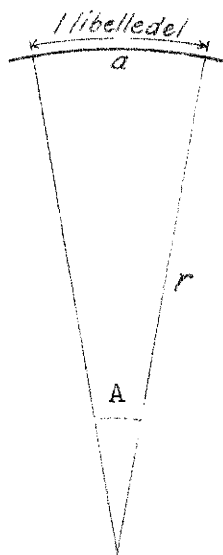
Ifølge lovene som gjelder for væskers likevekt, vil denne blæren alltid søke å stille seg så høyt som mulig, og da glassrøret innvendig har form som en sirkelbue, er det klart at tangenten til boblens midtpunkt, som vi kaller bobletangenten, vil være horisontal når boblen er i likevekt, dvs. i ro. Faller boblens midtpunkt sammen med inndelingens midtpunkt, sier vi at libellen spiller inn. Libelleaksen vil da være horisontal. Faller ikke boblens og inndelingens midtpunkt sammen, sier vi at libellen gjør utslag. Utslagets størrelse angis i libelledeler, og er altså lik avstanden mellom boblens midtpunkt og inndelingens midtpunkt uttrykt i libelledeler. Utslaget kan også angis i vinkelmål, nemlig som vinkelen mellom libelleaksen

og bobletangenten. Denne vinkel er lik utslaget uttrykt i libelledeler multiplisert med vinkelverdien av én libelledel.

a) Rørlibellens følsomhet og vinkelverdi.

Libellens følsomhet kommer til uttrykk ved dens vinkelverdi, som er den vinkel som libellen må helles for at boblen skal flytte seg én libelledel. Er f.eks. libellens vinkelverdi 50° , betyr det at libelleaksen dreier seg 50° når boblen forskyver seg én libelledel. Med en libelles følsomhet forstår vi størrelsen av boblens utslag ved dreining av libellen. Stor følsomhet betyr at boblen gjør stort utslag for en viss vinkeldreining, og omvendt. Følsomhet og vinkelverdi er altså omvendt proporsjonale.

Følsomheten og dermed også vinkelverdien er avhengig av libellens krumningsradius. Sammenhengen mellom vinkelverdi (A), krumningsradius (r) og den lineære utstrekning (a) av én libelledel er gitt ved følgende ligning (se fig. 47):



$$A = \frac{a}{r} \rho$$

Av denne ligning ser vi at stor følsomhet, dvs. liten vinkelverdi, er betinget av stor krumningsradius, og omvendt. På geodetiske instrumenter brukes sjelden libeller med større følsomhet enn 15° . Instrumenter beregnet på astronomiske målinger, er som regel utstyrt med enda følsommere libeller, til dels helt ned til 3° .

Libellens følsomhet må tilpasses instrumentet forøvrig. Det ville f.eks. være urasjonelt å utstyre et ellers usøyaktig nivellerinstrument med en meget følsom libelle. For det første vil en følsom libelle falle kost-

bar i anskaffelse, og dernest vil den være sen å arbeide med fordi den trenger lengere tid til å innstille seg enn en mindre følsom libelle.

*

Libellens vinkelverdi kan bestemmes ved å måle sammenhørende verdier av libelleutslag og dreiningsvinkler. Det er konstruert spesielle libelleprøvere til dette formål. Ellers er det mulig å foreta denne bestemmelse ved hjelp av stangavlesninger. Siktekikkerten stilles opp i 40 - 60

meters avstand fra stangen. Vi foretar så avlesning på libellen og på stangen. Libelleavlesningen er n_1 og stangavlesningen er a_1 . Deretter dreies kikkerten i vertikalplanet ved hjelp av en fotskrue eller høydefin-skruen, og vi leser av n_2 og a_2 . Vi må også kjenne avstanden L mellom instrument og stang. Den vinkel α som siktelinjen har beskrevet i vertikalplanet, er da gitt ved:

$$\alpha = \frac{a_2 - a_1}{L} \rho$$

Til dreiningsvinkelen α svarer $n_2 - n_1$ libelledeler, dvs. vinkelverdien av én libelledel er lik:

$$A = \frac{\alpha}{n_2 - n_1} = \frac{a_2 - a_1}{n_2 - n_1} \cdot \frac{\rho}{L}$$

Vi kan ikke regne med å oppnå noen særlig stor nøyaktighet ved denne metode, fordi at små feil i bestemmelsen av a-ene og n-ene vil gi store utslag på A .

b) Bruken av rørlibellen.

Libellen brukes enten frittstående eller fast forbundet med et instrument. I begge tilfelle tar vi sikte på å stille en bestemt linje horisontal eller vertikal. Av frittstående libeller forekommer tre hovedtyper, nemlig:

- 1) Settelibellen. Navnet viser til at libellen kan settes på en akse eller et plan. Linjen markert ved libellens understøttelsespunkter, går under navn av settelinjen. Libellen er utstyrt med en korreksjonsinnretning, slik at libellens akse kan reguleres i forhold til settelinjen. Dersom libellen er riktig justert,

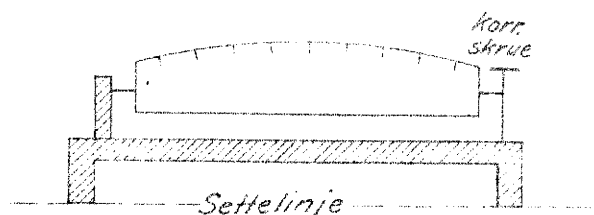


fig. 48

skal libelleaksen og settelinjen være parallelle.

Ved bruk av settelibelle kan vi horisontalstille en linje (akse) AB ved å gå fram på følgende måte, idet vi forutsetter at libellen er feilaktig, for såvidt som at vinkelen mellom libelleakse og settelinje har verdien

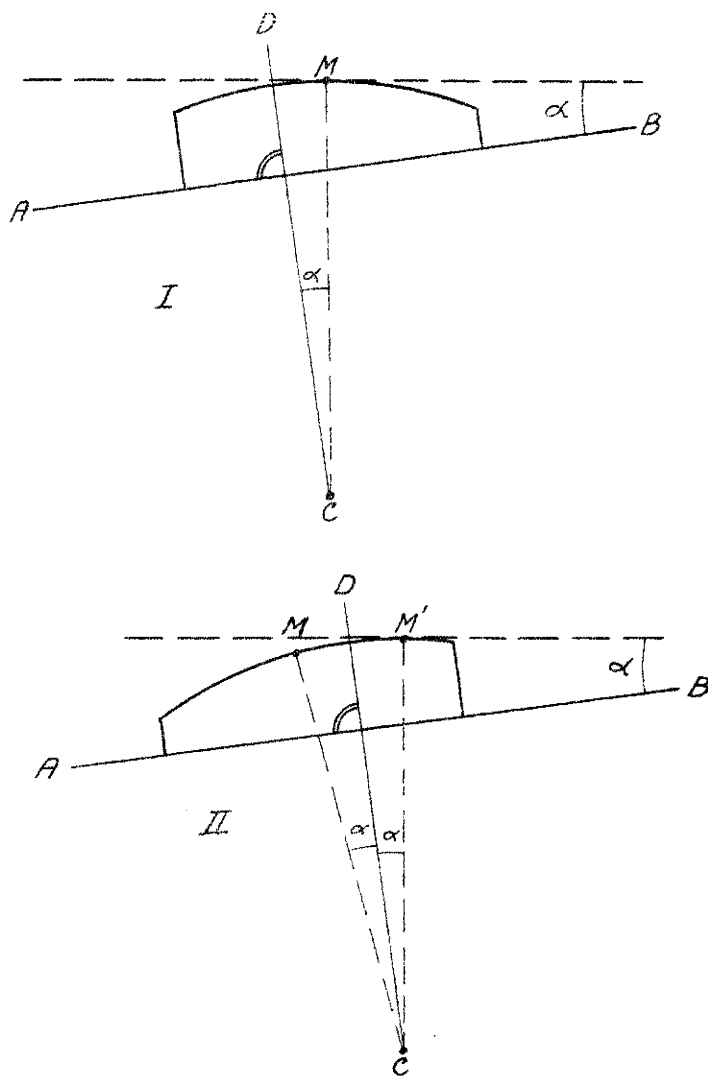


fig. 49

α istendenfor null:

I stillingen I bringes libellen til å spille inn (se fig. 49). Linjen AB danner da vinkelen α med horisontalplanet som faller sammen med tangeringsplanet til inndelingens midtpunkt M. Så endevendes libellen til stilling II. Denne 200° endevending kan vi tenke oss er skjedd ved dreining av libellen om aksene CD som står vinkelrett på AB. Den hertil svarende stilling av boblens midtpunkt er M'. Av figurene ser vi at vi får et libelleutslag MM' svarende til vinkelen 2α . Ved å oppheve det halve utslaget

ved hjelp av libellens korreksjonsskrue og den andre halvparten ved regulering av underlaget, altså av linjen AB, oppnår vi for det første å få linjen AB horisontal, og dessuten at libelleaksen blir parallell med settelinjen.

Dersom oppgaven tar sikte på å bestemme underlagets helning, foretas avlesninger på libellen i stilling I og II. Helningen er da lik halvparten av differensen mellom de to avlesninger.

- 2) Rytterlibellen er i prinsippet ikke noe annet enn en settelibelle, som er spesielt konstruert med henblikk på horisontalstilling av instrumentakser. Det samme er også tilfelle med
- 3) Hengelibellen. Den vesentligste forskjell består i at rytterlibellen settes på aksene, mens hengelibellen henges på.

Alle disse typene er som nevnt frittstående libeller. Hva an-

vendelsen av libeller på landmålingsinstrumenter angår, er det vanligst at libellen er fast forbundet med instrumentet, og vi skal i det etterfølgende vise hvordan det er mulig ved hjelp av en libelle å stille en akse vertikal (eller horisontal) når libellen er fast forbundet med vedkommende akse. Vi tar for oss det generelle tilfelle at libellens akse danner en vinkel med vedkommende instrumentakse som avviker litt fra en rett vinkel (eller verdien null).

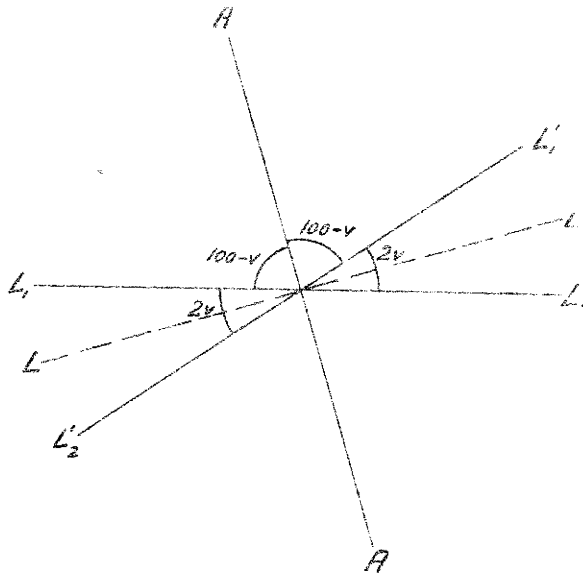


fig. 50

I fig. 50 betegner L_1, L_2 libelleaksen. Videre er AA den akse som skal loddrettstilles. Dersom libelleaksen og instrumentaksen AA hadde stått vinkelrett på hverandre, ville ikke vertikalstillingen av AA ha bydd på noe problem. Vi hadde nemlig da bare behøvd å bringe libellen til å spille inn, og instrumentaksen ville ha vært vertikal. Imidlertid tenker vi oss at libelleaksen danner vinkelen $100^\circ - v$ med AA istedenfor 100° . Vi bringer først libellen til å

spille inn. Hertil svarer den horisontale stilling L_1, L_2 av libelleaksen. Vi dreier så instrumentet og dermed også libellen 200° om aksene AA. Herved kommer libelleaksen i stillingen L'_1, L'_2 som med libelleaksens utgangsstilling L_1, L_2 danner vinkelen $2v$. Vi får følgelig et utslag på libellen lik $2v$. Rettes nå det halve utslaget med libellens korreksjonsskruer, kommer libelleaksen i stillingen LL som danner en rett vinkel med AA. Korrigeres så AA tilsvarende den andre halvparten av utslaget, går LL over til stillingen L_1, L_2 , altså til horisontal stilling, og aksene AA blir samtidig vertikal i figurens plan. Ved denne framgangsmåten har vi altså samtidig oppnådd: 1. å få brakt libelleaksen vinkelrett på instrumentaksen, og 2. å vertikalstille instrumentaksen.

I mange tilfelle er det hverken nødvendig eller hensiktsmessig å korrigere libellen for å oppnå at libelleaksen blir brakt vinkelrett på den aksene som skal loddrettstilles. En innretter seg da på den måten at en bestemmer det såkalte spillepunkt, som er det punkt på libelledelingen hvis tangent er vinkelrett på den aksene som skal vertikalstilles. Spillepunktet faller midt mellom boblesentrets beliggenhet for de to stillinger av libellen som svarer til at libellens ender bytter plass, og bestemmes ved avlesning av libellen i de to stillinger med etterfølgende middeltallsdannelse. Det er ikke nødvendig at libellen spiller inn i utgangsstillingen, men den må heller

ikke være så meget i ulage at libellens ender før eller etter endevendingen faller utenfor libelledelingen.

Eksempel.

	Avlesn. av de to bobleender	Middelavlesn. svarende til boblens sentrum.
Stilling I (o-punkt til venstre):	19,5 36,5	28,0
" II(" " høyre) :	12,5 29,5	21,0

Spillepunktet blir følgelig lik $\frac{1}{2}(28 + 21) = 24,5$.

Aksen AA reguleres altså slik at libelleavlesningen svarende til boblens sentrum blir 24,5, og aksene vil da være vertikaltstilt. Metoden med å vertikaltstille aksene ved hjelp av libellens spillepunkt brukes som regel bare når det dreier seg om fine libeller med gjennomløpende deling.

B. Dåselibellen.

Dåselibellen innebærer en utvidelse av prinsippet som ligger til grunn for rørlibellen, idet dåselibellen innvendig er slipt kuleformet. Istedenfor strekdeling hos rørlibellen opptrer en konsentrisk sirkeldeling hos dåselibellen. Tangeringsplanet i sirkelens sentrum betegnes som "libellens akse". Mens rørlibellen bare viser helningen i én retning, viser dåselibellen helningen like godt i alle retninger. Dåselibellens funksjon betyr følgelig en utvidelse av rørlibellens, idet vi ved hjelp av en dåselibelle kan bringe en akse eller et plan vertikalt eller horisontalt ved en eneste oppstilling. Dåselibellen er som regel grovere enn rørlibellen med vinkelverdi ofte på flere minutter. De brukes derfor bare når det forlanges forholdsvis liten nøyaktighet, f.eks. ved grovinnstilling av instrumentakser. Dåselibellen kan på samme måte som rørlibellen opptre løs som settelibelle, og brukes da til horisontalstilling av et plan, f.eks. målebordsplate. Forutsetningen for å oppnå en slik horisontalstilling er at setteplanet, dvs. libellens understøttelsesflate, er parallell med "libellens akse". Av hensyn til justering av mulige feil når det gjelder disse to plans gjensidige beliggenhet, bør også dåselibellen være korrigerbar. Den prøves ved endevending for settelibellens vedkommende og ved 200^g.s dreining om instrumentaksen for ståkselibellens vedkommende.

*

Med hensyn til den nøyaktigheten som kan oppnås ved innspilling av en libelle, kan vi regne med 0,1 libelledeler for vanlige libeller hvor innspillingen skjer ved å bedømme libelleendenes stilling i forhold til en

inndeling. Denne innspillingsfeil vil bevirke en feil i horisontal - resp. vertikalstillingen av en instrumentakse lik

$$m_{\alpha} = 0.1 A$$

hvor A er libellens vinkelverdi.

*

På de nyere typer av nivellerinstrumenter forekommer en spesiell utforming av libellen som skriver seg fra den kjente instrumentkonstruktør Wild. Libellen har ingen strekinndeling. Ved et eget prismesystem avbildes den ene halvparten av libellen, og avbildningen av de to libelleendene faller ved siden av hverandre. Libellen spiller inn når de to libelledelene slutter seg sammen til en halvsirkel (se fig. 51). Da utslaget ved libelleendene er

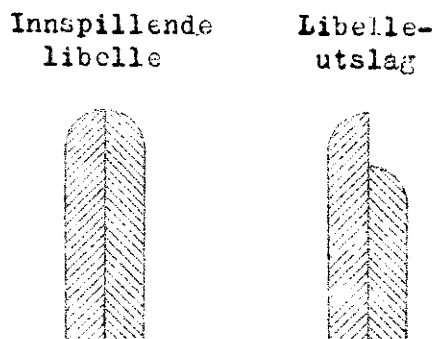


fig. 51

et mål for det dobbelte libelleutslag, er det mulig ved hjelp av dette prinsippet å oppnå en fordobling av libellens nøyaktighet, slik at vi for denne libellestype kan regne med en nøyaktighet i horisontal - resp. vertikalinnstilling av en akse lik

$$m_{\alpha} = 0,05A$$

3. Sikteikkerten.

Ved hjelp av siktekikkerten er det mulig å bringe en fast linje i instrumentet - sikteaksen - til å falle sammen med rette linjer i terrenget. Sikting er en av de mest grunnleggende måleoperasjoner i den praktiske landmåling, spesielt ved vinkelmåling og nivellering. Prinsipielt er det ingen ting i veien for å utforme alle forekommende kikkerttyper til siktekikkerter, men i praksis er det bare noen få typer som anvendes til dette formål i landmålingen, nemlig den astronomiske kikkert, Wilds kikkert med indre fokusering og den terrestriske kikkert.

A. Den astronomiske (Keplerske) kikkert.

Denne består av to samlelinser - eller rettere sagt av to linsekombinasjoner som hver har samme effekt som samlelinser. Den linsen som er nærmest objektene, og derfor går under navn av objektiv, har stor brennvidde

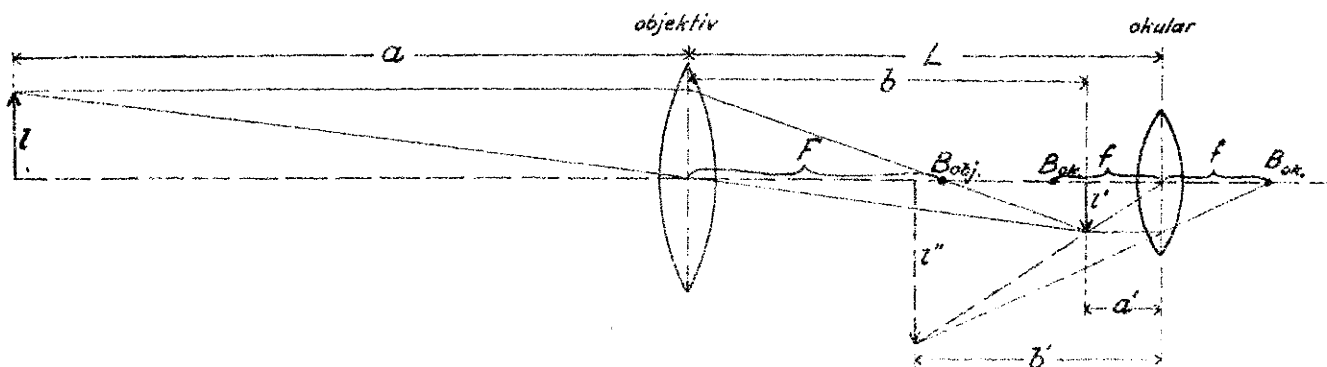


fig. 52

og leverer et reelt, omvendt bilde av gjenstanden (1'). Dette bildet (1') betraktes så gjennom den andre linsen som er nærmest øyet og derfor går under navn av okular. Okularet virker som lupe og leverer følgelig et virtuelt, forstørret bilde (1'') av gjenstanden, et bilde som fremdeles er omvendt. (Det vises forøvrig til den i matematisk henseende mer eksakte betraktningssmåte av lupens virkemåte som ble omtalt til slutt under "Lupen".)

I fig. 52 har vi gjort den forenkling at vi tenker oss at de to linsers hovedplan (og følgelig også at hovedpunktene) faller sammen, og de etterfølgende utledninger bygger på denne tilnærmelse til de faktiske forhold. Ved å bruke linseformelen på objektiv og okular fås:

$$\text{Objektiv: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}, \quad \text{dvs. } b = \frac{aF}{a-F} = \frac{F}{1 - \frac{F}{a}}$$

$$\text{Okular : } \frac{1}{a'} - \frac{1}{b'} = \frac{1}{f}, \quad \text{dvs. } a' = \frac{b'f}{b'+f} = \frac{f}{1 + \frac{f}{b'}}$$

Av fig. 52 ser vi at

$$L = b + a'$$

Følgelig

$$L = \frac{F}{1 - \frac{F}{a}} + \frac{f}{1 + \frac{f}{b'}}$$

For alle de i praksis forekommende sikteavstander vil $\frac{F}{a} \approx 0$. Under behandlingen av lupen ble nevnt at den naturlige innstilling som øyet alltid tilstreber, er den som svarer til at det virtuelle bildet faller sammen med øyets fjernpunkt, dvs. $b' \approx \infty$, følgelig:

$$L \approx F + f$$

dvs. kikkertens lengde er tilnærmet lik summen av objektivets og okularets brennvidder. Dette gjelder strengt tatt kun for uendelig store sikteavstander. Når a avtar, blir bildeavstanden b og dermed også L større. Av landmålingsinstrumenter forlanges det i regelen at de skal kunne innstilles

for avstander helt ned til 3 m.

Skal kikkerten kunne benyttes som sikteapparat, må vi ha to faste punkter i kikkerten, som fikserer en siktelinje. Det ene av disse to punktene er objektivets optiske midtpunkt, og det andre skaffer vi oss ved i kikkerten å anbringe et såkalt trådkors. Uttrykket optisk midtpunkt bygger på den tilnærmede betraktningssmåte at objektivsystemets to hovedpunkter faller sammen, og det er dette sammenfallende punkt som betegnes som objektivets optiske midtpunkt. Punktet får altså den egenskap at alle stråler passerer det uten avbøyning. (Ser vi strengt matematisk på problemet, må siktelinjen defineres som linjen mellom objektivets okularsidige hovedpunkt og trådkorsets skjæringspunkt.)

Trådkorset består enten av to tråder som er spent ut over en plate, trådkorsplaten, eller av en tynn glassplate som har innrisset to streker. De to strekene, trådkorsstrekene, skal stå vinkelrett på hverandre. Ved korrekt oppstilling av instrumentet skal den ene tråd være horisontal og den andre vertikal.

Når kikkerten brukes, skal vi gjennom okularet samtidig se tydelig både trådkorset og bildet av vedkommende objekt som vi sikter mot. Det vil bare være mulig dersom trådkors og objektivbilde befinner seg i samme plan. Dessuten forutsetter det at okularet er riktig innstilt i forhold til det felles trådkors- og bildeplan. For å kunne tilfredsstille disse fordringer er den vanlige astronomiske kikkert innrettet på følgende måte: Den består av tre rør, nemlig kikketrøret eller objektivrøret som inneholder objektivet i



fig. 53

den forreste enden, videre trådkorsrøret med trådkorset og endelig okularrøret. Okularrøret kan forskyves i trådkorsrøret, slik at brukeren kan bringe trådkors og okular i en slik stilling i forhold til hverandre at trådkorset ses tydeligst mulig.

Som allerede nevnt, virker okularet

som lupe. Øyet vil derfor uvilkårlig tilstrebe en slik innstilling av okularet i forhold til trådkorset at det virtuelle bilde av trådkorset faller sammen med øyets fjernpunkt. Fjernpunktets beliggenhet vil avhenge av brukersens øyne (om han er normalsynt, langsynt eller nærsynt), men er konstant for ett og samme øye. Innstillingen av okularet i forhold til trådkorset skjer derfor én gang for alle for samme bruker. Det skjer på den måten at brukeren retter kikkerten mot en klar bakgrunn, f.eks. himmelen, og forskyver okularet inntil han finner den stilling som betinger den tydeligste avbildning av trådkorset. Moderne instrumenter er utstyrt med en innstillingsinnstilling på okularet, hvor punktet null refererer seg til det normale øye. Enhver bruker bør skaffe seg rede på hvilken innstilling som passer for hans

øyne, slik at han kan innstille okularet riktig ved hjelp av denne inndeling uten å måtte behøve å kaste bort tid til å prøve seg fram.

Skal brukeren, foruten å se trådkors^{et} tydelig gjennom okularet, samtidig se objektivet tydelig, må det siste falle i samme plan som trådkors^{et}. Det er klart at objektivet^s bildeavstand vil variere med gjenstandens avstand. Trådkors^{et} med okularet må derfor kunne forskyves sammen i forhold til objektivet, slik at det blir mulig for hver innsiktning å bringe trådkors^{et} - som altså under denne bevegelse følges av okularet - i samme plan som objektivet.

Om trådkors og bilde faller i samme plan, undersøkes ved å bevege øyet foran okularet. Befinner trådkors og bilde seg ikke i samme plan, vil

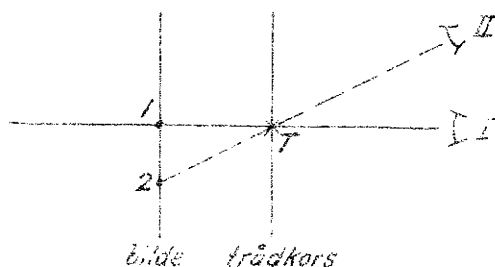


fig. 54

en da ha inntrykk av at de beveger seg i forhold til hverandre. Fig. 54 viser hvordan denne "trådkorsbevegelse" kommer i stand. Holdes øyet i posisjon I, vil brukeren ha inntrykk av at trådkors^{ets} skjæringspunkt T faller sammen med pkt. 1 i objektivet. I posisjon II derimot synes det som om T faller sammen med pkt. 2. Den suksessive bevegelse av øyet fra I til II følges

altså av en tilsvarende bevegelse av T fra 1 til 2, dvs. brukeren har inntrykk av at trådkors og bilde beveger seg i forhold til hverandre. Det her omtalte fenomen at punkter, hvis gjensidige beliggenhet i et plan skal konstateres ved iakttagelse i virkeligheten befinner seg i forskjellige plan, betegnes som parallaks og den hitrørende feil for parallaksfeil.

Av hensyn til instrumentets verifisering må trådkors^{platen} kunne forskyves i sitt eget plan, så vel horisontalt som vertikalt. Dessuten må en kunne dreie platen, slik at horisontalstrecken blir horisontal. For å gjøre seg uavhengig av om den horisontale tråd virkelig er horisontal og den vertikale tråd er vertikal, bør brukeren alltid innstille i nærheten av trådens skjæringspunkt.

a) Kikkertens forstørrelse.

En av de egenskaper hos kikkerten som interesserer mest, er forstørrelsen. Med et optisk instruments forstørrelse forstår vi i sin alminnelighet forholdet mellom den synsvinkelen som vi ser gjenstanden under ved bruk av instrumentet og synsvinkelen uten bruk av instrumentet.

Vi skal i det etterfølgende utlede en formel for kikkertens forstørrelse.

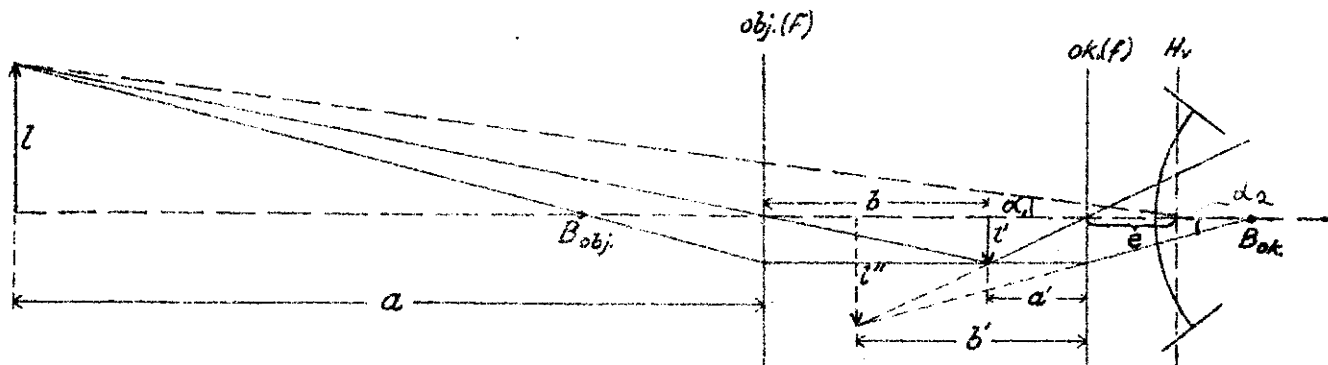


fig. 55

Vi har i samsvar med fig. 55:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \quad , \quad \text{dvs. } b = \frac{aF}{a-F}$$

Uten kikkert ses l under vinkelen $\alpha_1 = \frac{l}{a+b+a'+e}$

Som tidligere nevnt, vil a' være lik f når okularet brukes som lupe, dvs.

$$\alpha_1 = \frac{l}{a+b+f+e} \quad \text{som ved innsetting for } b \text{ går over til } \frac{l(a-F)}{a^2+af-fF+ae-eF}$$

1 Ved bruk av kikkerten ses det virtuelle bilde l'' under synsvinkelen

$$\alpha_2 = \frac{l''}{b'+e} \quad , \quad \text{hvor } l'' = \frac{b'}{f} l'$$

dvs.

$$\alpha_2 = \frac{b'l'}{f(b'+e)} = \frac{l'}{f(1+\frac{e}{b'})}$$

På grunn av a' = f vil b' være uendelig stor, dvs.

$$\alpha_2 = \frac{l'}{f}$$

Av fig. 55 ser vi at $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$, dvs. $l' = \frac{b}{a} l$ som ved innsetting for b går over til $\frac{F}{a-F} l$

følgelig

$$\alpha_2 = \frac{F}{f} \frac{l}{a-F}$$

Kikkertforstørrelsen er med andre ord lik

$$v = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{F}{f} \frac{(a^2+af-fF+ae-eF)}{(a-F)^2}$$

I praksis vil avstanden e mellom øyets forreste hovedplan og okularet være så liten at vi kan neglisjere e i formelen og får:

$$v = \frac{F}{f} \frac{(a^2 + af - fF)}{(a-F)^2} \sim \frac{F}{f} \frac{a^2}{(a-F)^2}$$

Herav ser vi at forstørrelsen blir en funksjon av gjenstandens avstand a . Forstørrelsen har sin minimumsverdi $v_{\infty} = \frac{F}{f}$ for $a = \infty$, og det er denne minimumsverdien som oppgis av instrumentfirmaene som kikkertforstørrelse. Hos de vanligste typer av landmålingsinstrumenter varierer v mellom 10 og 35. Hos riktig store instrumenter kan den gå opp til 40 - 60.

b) Bestemmelse av kikkertens forstørrelse.

Vi kan skaffe oss kjennskap til forstørrelsen ved å bestemme F og f hver for seg, men det forutsetter at en har spesielt utstyr til disposisjon. Ellers kan vi skaffe oss kjennskap til forstørrelsen ved følgende to framgangsmåter:

1. En inndelt stang stilles opp i ca. 20 - 30 m avstand fra kikkerten. Med det ene øyet betrakter brukeren stangdelingen gjennom kikkerten, og med det andre øyet betrakter han stangdelingen med det blotte øye til siden for kikkerten. De to bildene av stangdelingen bringes til å falle like ved siden av hverandre. Dersom da én del av kikkertbildet svarer til n deler på stangen, er forstørrelsen lik n . Fig. 56 viser et eksempel på bestemmelse av

kikkertforstørrelse etter denne metoden. I fig. 56 er forstørrelsen lik 9,5. Dette er den aktuelle forstørrelse for den avstand som stangen befinner seg i i forhold til instrumentet. Vi kaller denne forstørrelse for v_0 . For å komme over til den forstørrelse som gjelder for uendelig stor avstand, må v_0 korrigeres. Vi har tidligere utledet formelen for den aktuelle forstørrelse:

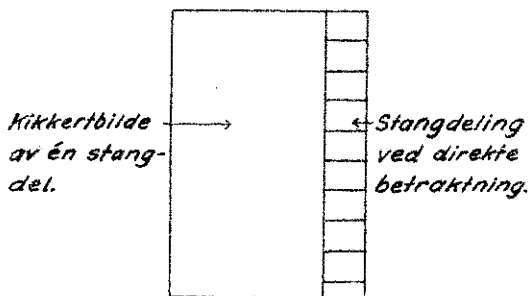


fig.56

$$v_0 = \frac{F}{f} \frac{a^2}{(a-F)^2} = v_{\infty} \frac{a^2}{(a-F)^2} \text{ , følgelig}$$

$$v_{\infty} = v_0 \frac{(a-F)^2}{a^2}$$

2. En annen metode som kan brukes til bestemmelse av forstørrelsen, består i å bestemme forholdet mellom diameteren til objektivets frie åpning og diameteren til avbildningen av samme. Kikkerten innstilles først

på vanlig. For et normalt øye vil da brennpunktene til objektiv og okular falle sammen. Parallell lysstråler som passerer objektivet, vil da brytes til

brennpunktet og danner etter passeringen av okularet et parallelt stråleknippe, som kan fanges opp på en skjerm. I fig. 57 er D objektivdiameteren (den nyttige del) og d diameteren til bildet av objektivåpningen, som begge kan bestemmes ved måling. Av

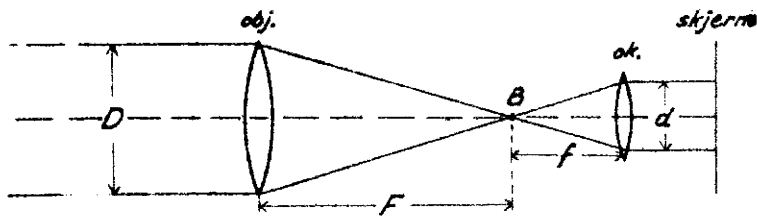


fig. 57

fig. 57 ser vi at:

$$v_{\infty} = \frac{F}{f} = \frac{D}{d}$$

Som regel vil en del av objektivet være skjernet ved hjelp av én eller flere blendere, slik at bestemmelsen av D , som altså representerer objektivets nyttige diameter, kan bli problematisk. En kan omgå denne vanskelighet ved å anbringe en kunstig blende, f.eks. et papir med et sirkelrundt hull i, foran objektivet. Vi må da sørge for at diameteren i denne blende blir mindre enn diameteren i objektivets nyttige åpning. I formelen for v er det da diameteren i den kunstige blende som skal brukes. Denne diameter må måles med størst mulig nøyaktighet. * Metodens nøyaktighet er i første rekke avhengig av hvor nøyaktig vi kan måle diameteren d .

c) Kikkertens synsfelt.

Kikkertens synsfelt er definert som åpningsvinkelen i det kjegleformede utsnitt som på en gang kan iakttas gjennom kikkerten, og som har sitt toppunkt i objektivets forreste brennpunkt. I fig. 58 representerer altså

vinkelen γ kikkertens synsfelt. Synsfeltet kan bestemmes ved avlesning på en stang. I fig. 58 representerer L det maksimale stangavsnitt som på en gang kan iakttas gjennom kikkerten. Vi finner da for kikkertens synsfelt γ :

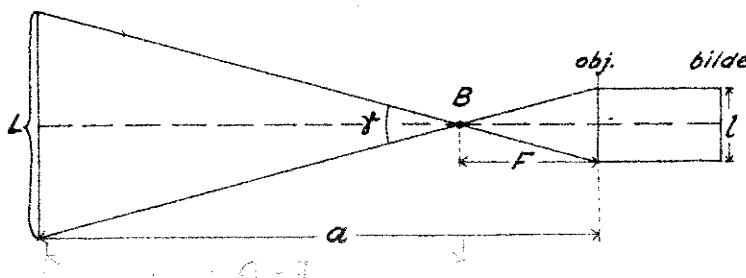


fig. 58

$$\gamma = \frac{L}{a-F} \rho = \frac{1}{F} \rho$$

Vinkelen γ blir lik vinkelen mellom randstrålene gjennom objektivets optiske midtpunkt når kikkerten er innstilt på uendelig (se fig. 59 som viser at γ også i dette tilfelle er $\frac{1}{F} \varrho$, altså det samme som i fig. 58). Størrelsen av synsfeltet blir

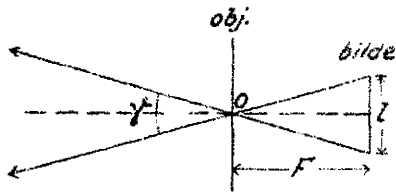


fig. 59

innsnevret av objektivblenderen som har til formål å stenge randstrålene ut fordi disse gir mindre gode bilder. Landmålingsinstrumentene har vanligvis en åpningsvinkel på ca. 2° . Åpningsvinkelen er minst hos kikkerten med stor forstørrelse.

d) Kikkertens lysstyrke.

Med lysstyrken til en lysende gjenstand forstår vi generelt forholdet mellom den lysmengde L som øyet mottar fra en gjenstand og flaten N^2 på netthinnen som denne lysmengde fordeler seg på. Vi får altså som uttrykk for lysstyrken, som vi kaller H :

$$H = \frac{L}{N^2}$$

dvs. H er lik lysmengde pr. flateenhet av netthinnen.

Betraktes samme gjenstand gjennom en kikkert, får vi på tilsvarende måte: (Når vi ser bort fra lystap ved lysets passasje gjennom selve kikkerten.)

$$H' = \frac{L'}{N'^2}$$

hvor L' er den lysmengde som faller på objektivets, og N'^2 er den flaten på netthinnen som denne lysmengde fordeler seg på etter å ha passert kikkerten.

Med lysstyrken til en kikkert forstår vi forholdet

$$h = \frac{H'}{H} = \frac{L'}{L} \frac{N^2}{N'^2}$$

Vi skal først se nærmere på forholdet $L':L$, dvs. forholdet mellom den lysmengde som faller på objektivets og det ubevegnede øye. Hva L' angår, så er den proporsjonal med objektivflaten, dvs.

$$L' = \lambda D^2$$

hvor λ er en konstant og D er objektivets diameter. På tilsvarende måte er den lysmengde L som faller på øyet, proporsjonal med pupilleflaten, dvs. $L = \lambda p^2$, hvor p er pupillediameteren, følgelig

$$\frac{L'}{L} = \frac{D^2}{p^2}$$

Kvotienten $\frac{N^2}{N'^2}$ som uttrykker forholdet mellom størrelsene av netthinnebildene uten kikkert og med kikkert, er gitt ved:

$$\frac{N^2}{N'^2} = \frac{1}{v^2}$$

hvor v er kikkertforstørrelsen. Følgelig får vi for kikkertens lysstyrke:

$$h = \frac{D^2}{p^2 v^2}$$

formelen gjelder egentlig bare når $p \geq d$
geometrisk lysstyrke $h \cdot p^2 = \frac{D^2}{v^2}$

Lysstyrken er altså proporsjonal med kvadratet til objektivets diameter og omvendt proporsjonal med kvadratet til forstørrelsen.

I tilfelle av at pupillens diameter er lik diameteren i den lyssylinderen som forlater kikkerten, har vi i følge fig. 60

$$\frac{D^2}{p^2} = \frac{F^2}{f^2} = v^2, \text{ dvs. } h = 1$$

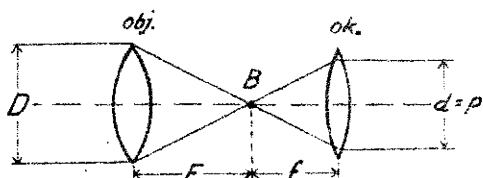


fig. 60

som er den største verdi for lysstyrken som overhodet kan inntreffe. Er nemlig $p < d$, vil en del lys bli stengt ute.

Et annet forhold som virker inn på lysstyrken til en kikkert, er det lystap som skyldes absorpsjon og refleksjon ved lysets passering gjennom kikkerten.

Vanligvis vil dette lystap utgjøre ca. 20 o/o.

e) Kikkertens siktelinje.

Vi har tidligere definert kikkertens siktelinje som forbindelseslinjen mellom trådkorsets skjæringspunkt og objektivets optiske midtpunkt. Som vi allerede har konstatert, må vi ved hver innsiktning bevege trådkorsderson sikteavstandene er forskjellig. Når kikkerten brukes som sikteapparat, er den første betingelse for å oppnå riktige resultater at denne siktelinje er konstant, dvs. at den ikke foretar egenbevegelser når trådkorset forflyttes. Vi skal vise at betingelsen for at siktelinjen skal være uforanderlig i forhold til kikkerten, er at trådkorsot under sine forflytninger følger en rett linje, og denne rette linje må gå gjennom objektivets optiske midtpunkt.

Fig. 61 anskueliggjør siktelinjens egenbevegelse ved innsiktning av punkter som befinner seg i forskjellig avstand fra kikkerten. I figuren er O objektivets optiske midtpunkt, den strek-prikkede linje er objektivets optiske akse, B_1 og B_2 er to stillinger av trådkorsot, mens linjene B_1O og B_2O med forlengelser representerer siktelinjen før de to trådkorsstillinger. Til de to trådkorsstillingene B_1 og B_2 svarer en egenbevegelse av siktelinjen lik α . Derson vi forutsetter at fig. 61 representerer forholdene i horisontalplanet, ville vi ved horisontalvinkelmåling not to objekter som har slike avstander at objektivbildene av dem faller i B_1 og

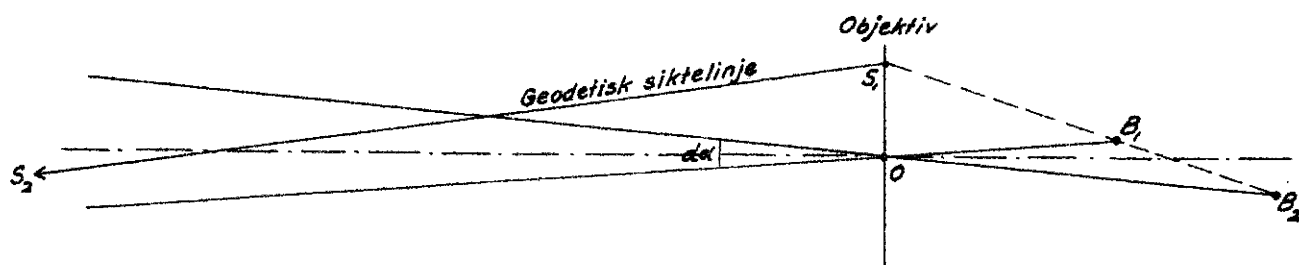


fig. 61

B_2 , begå en feil i vinkelmålingen lik α .

Av fig. 61 kan vi slutte oss til at betingelsen for konstant siktelinje er at trådkorset under sin bevegelse følger linjen B_1B_2 , og dessuten må forlengelsen av linjen gå gjennom objektivets optiske midtpunkt.

Oppfatter vi linjen B_1B_2 som gjenstand, vil den avbildes gjennom objektivet som en rett linje. I fig. 61 representerer den rette linjen S_1S_2 bildet av linjen B_1B_2 . Linjen S_1S_2 går under navn av den geodetiske siktelinje. Denne har, som vi ser, en uforanderlig stilling i forhold til instrumentet. Innsiktningen av kikkerten mot et punkt består i å bringe den geodetiske siktelinje til å gå gjennom punktet. Betingelsen for at kikkerten skal ha en rettlinjete geodetisk siktelinje er, som vi ser, at trådkorset under sin bevegelse følger en rett linje. Dersom okularet med trådkors har en usikker føring, slik at trådkorsets bevegelse blir uregelmessig, vil den geodetiske siktelinje bli en krum linje.

Vi har i det foregående betraktet siktelinjebegrepet under to forskjellige synsvinkler. I første tilfelle blir siktelinjen variabel, mens den blir konstant i siste tilfelle. Men slutteffekten blir den samme. I første tilfelle oppstår nemlig feil som følge av siktelinjens egenbevegelse, mens i det andre tilfelle opptrer den samme feil som følge av eksentrisk siktelinje.

B. Wilds kikkert med indre fokusering.

Hos den astronomiske kikkert blir trådkorset forskjøvet i forhold til objektivbildet, slik at trådkors og objektivbilde blir brakt i samme plan. Hos kikkerter med indre fokusering derimot går en den motsatte veg, idet trådkorset her er fast, mens bildet bringes til å falle sammen med trådkorset, og det skjer ved hjelp av en fokuserlinse som befinner seg inne i kikkertøret.

Som fig. 62 viser, består objektivsystemet av to linser, nemlig den egentlige objektivlinse L_1 og den forskyvbare negativlinse L_2 . Trådkorset T

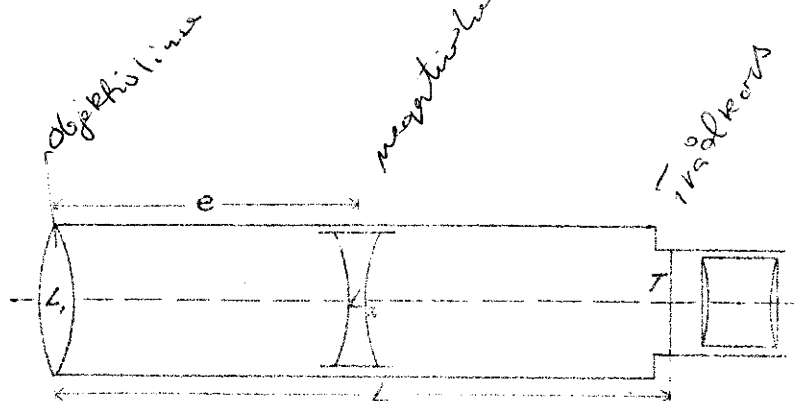


fig. 62

er fast, slik at avstanden L mellom L_1 og T blir konstant. Når et punkt skal innsiktes, forskyves L_2 inntil bildet av vedkommende punkt faller i trådkorsets plan. Avstanden e mellom objektivsystemets

to linser blir følgelig variabel, avhengig av sikteavstanden.

Denne kikkertform, som skriver seg fra Wild, er nå meget alminnelig på landmålingsinstrumenter. En stor fordel med denne kikkertkonstruksjon består i at kikkertroret kan gjøres tett, slik at støv og fuktighet blir hindret i å trenge inn. Dessuten har Wilds kikkert den fordel at den kan gjøres kortere enn den astronomiske kikkert. Det henger sammen med at objektivsystemets to hovedplan faller utenfor og foran objektivlinsen hos kikkert med indre fokusering. Hos den astronomiske kikkert derimot faller objektivets hovedplan i selve objektivet. Vi skal belyse dette forhold ved et talleksempel, som refererer seg til en kikkert med indre fokusering og følgende linsekonstanter:

$$f_1 = 136 \text{ mm} , f_2 = - 101 \text{ mm} \text{ og } L = 155,9 \text{ mm}$$

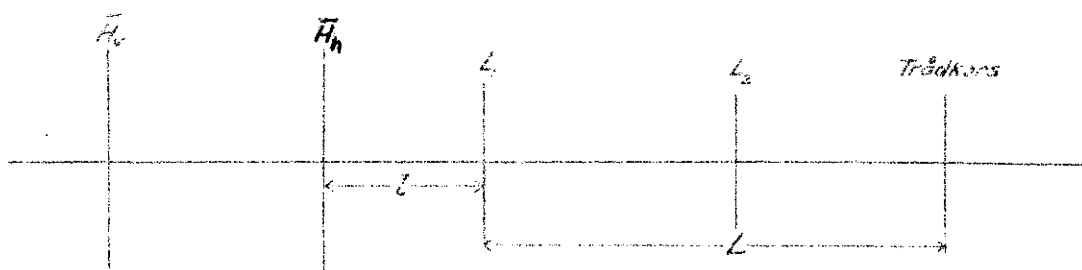


fig. 63

Innstilt for ∞ er $e = 100 \text{ mm}$, dvs. $F_{\infty} = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - e} = + 211,3 \text{ mm}$

For avstanden mellom L_1 og \bar{H}_h , altså størrelsen l i fig. 63, finner vi når kikkerten er innstilt på uendelig:

$$l_{\infty} = F_{\infty} - L = 55,4 \text{ mm}$$

dvs. det bakerste hovedplan faller i dette tilfelle $55,4 \text{ mm}$ foran objektivlinsen. Ser vi bort fra okularets lengde, måtte en astronomisk kikkert med

samme brennvidde ha vært ca. 211 mm lang, mens det altså klarer seg med ca. 156 mm for en kikkert med indre fokusering.

Når avstanden forandres mellom de to linsene som sammen utgjør objektivsystemet, forandres også kikkertens brennvidde. Det følger av at objektivsystemets ekvivalente brennvidde i foreliggende tilfelle er gitt ved:

$$F = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - e}$$

hvor e er en variabel størrelse. Forstørrelsen som vi tidligere har utledet til $v = \frac{F}{f} \frac{a^2}{(a-F)^2}$, vil altså variere med avstanden, idet både F og a endrer seg med sikteavstanden.

Den etterfølgende tabell tjener til å belyse variasjonene i F og v for kikkerter med indre fokusering. Tabellens angivelser refererer seg til kikkerten i fig. 63, idet vi forutsetter at okularets brennvidde er 10 mm.

Sikteavstand (i forhold til objektivet)	F	v	v'
100 m	210,3 mm	21,1	21,2
50 "	209,3 "	21,1	21,3
20 "	206,2 "	21,0	21,6
10 "	201,3 "	20,9	22,1
5 "	191,6 "	20,6	23,0
2 "	164,0 "	19,7	26,4

I siste kolonne er anført forstørrelsen for en astronomisk kikkert med $F = 211,3$ mm og $f = 10$ mm. Det går fram av tabellen at variasjonene i forstørrelsen er mindre for den Wildske enn for den astronomiske kikkert.

Den Wildske kikkerts anvendelighet til optisk avstandsbestemmelse vil senere bli gjort til gjenstand for en separat undersøkelse. Vi kan nemlig ikke på forhånd tå for gitt at kikkerter med indre fokusering kan nyttes til optisk avstandsbestemmelse. Det vil gå fram av følgende betraktning, idet vi tar for oss grunnligningen for den optiske avstandsbestemmelse ved horisontal siktelinje

$$D = kl + c$$

hvor k er den såkalte multiplikasjonskonstant og c er addisjonskonstanten, mens l er stangavsnittet. Her er k lik forholdet mellom objektivsystemets brennvidde og avstanden mellom trådkorsstrekene. Kaller vi den siste p , har vi altså at:

$$k = \frac{F}{p}$$

Nå har vi allerede konstatert at F er variabel hos kikkerter med indre fokusering, folgelig blir også k variabel. Vi kan derfor ikke uten videre ta for gitt at kikkerter med indre fokusering kan brukes til optisk avstandsbestemmelse. Når det likevel er tilfelle, skyldes det at også addisjonskonstanten blir variabel hos den Wildske kikkert, og variasjonene i k og c er slik avstemt til hverandre at virkningen av dem på avstandsbestemmelsen med tilstrekkelig tilnærmelse kan settes ut av betraktning.

Hva siktelinjen hos den Wildske kikkert angår, er forholdet noe mer komplisert enn hos den astronomiske kikkert. Når det dreier seg om kikkerter med indre fokusering, er det mest praktisk å holde seg til den geodetiske siktelinje, som etter sin definisjon er det geometriske sted for alle bildepunkter av trådkorsets skjæringspunkt når trådkorsset avbildes ved objektivsystemet. Betingelsen for at den geodetiske siktelinje skal bli rettlinjet, er at fokuserlinsens optiske midtpunkt under sin bevegelse følger den rette linje mellom objektivets optiske midtpunkt og trådkorsets skjæringspunkt. Dersom denne betingelse ikke er strengt oppfylt, blir den geodetiske siktelinje en krum kurve. Men det lar seg vise at avvikene fra en rett linje blir ubetydelige selv om ikke den oppstilte betingelse er strengt oppfylt.

C. Den terrestriske kikkert.

Den terrestriske kikkert leverer opprette bilder. Den består i sin

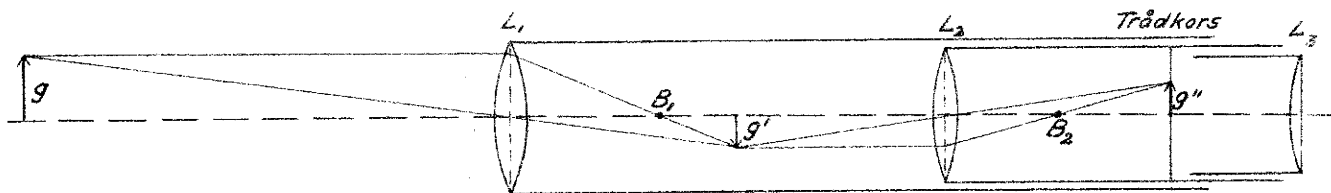


fig. 64

enkleste form av tre samlelinser. Den forreste linse L_1 danner et omvendt, reelt bilde g' av gjenstanden g . Linsen L_2 danner av dette på nytt et reelt bilde g'' , som folgelig blir opprett i forhold til gjenstanden. Dette opprette bilde betraktes så gjennom okularlinsen L_3 som virker som lupe.* I den senere tid går utviklingen markert i retning av terrestriske kikkerter.

Den samme effekt kan også oppnås ved å la lyset passere et såkalt Porro-prismesystem i stedet for linse L_2 . Dermed undgås at kikkerter blir unødlig lange som i fig. 64

K a p i t e l . IV .

NIVELLERINSTRUMENTER.

1. Innledning.

Et nivellerinstruments primære oppgave er å skaffe en horisontal siktelinje. Den horisontale siktelinje skaffer vi oss hovedsakelig på følgende to måter: Enten ved å gjøre oss nytte av at en fri væskes overflate overalt stiller seg vinkelrett på tyngderetningen (loddretningen) eller vi bygger på at linjen mellom tyngdepunktet til en fritthengende gjenstand og dennes opphengningspunkt, faller sammen med tyngderetningen. Det første prinsippet har, i hvert fall hittil, uten sammenligning vært det mest benyttede ved konstruksjon av nivellerinstrumenter. Den horisontale siktelinje oppnås her ved en kombinasjon av libelle og siktekikkert. Det andre prinsippet er utnyttet i det såkalte Wredes nivellerspeil og likeledes (med visse modifikasjoner) hos de typer av nivellerinstrumenter som er konstruert i de siste årene, hvor horisontalstillingen av siktelinjen skjer ved hjelp av såkalte kompensatorer. Hos libelleinstrumentene skjer horisontalstillingen av siktelinjen for hånden, mens horisonteringen av siktelinjen hos de instrumenter som sogner til den andre gruppen, i hvert fall innenfor visse grenser, skjer automatisk.

2. Nivellerinstrumenter som horisontalstilles ved hjelp av libeller.

Av instrumenter som hører inn under denne gruppe, gis det et utall av konstruksjoner som oppviser større eller mindre forskjeller. Fig. 65 og 66 viser skjematisk de vanligst forekommende former.

Vi kan skille mellom tre akser hos nivellerinstrumenter, nemlig vertikalaksen eller omdreiningaksen VV , videre sikteaksen eller siktelinjen SS som også går under navn av kollimasjonsaksen, og endelig libelleaksen LL .

Fig. 65 representerer den enkleste og derfor også den billigste konstruksjon. Den har ingen høydefinnskrue, slik at den eneste mulighet som består for regulering av siktelinjen i forhold til vertikalaksen, er

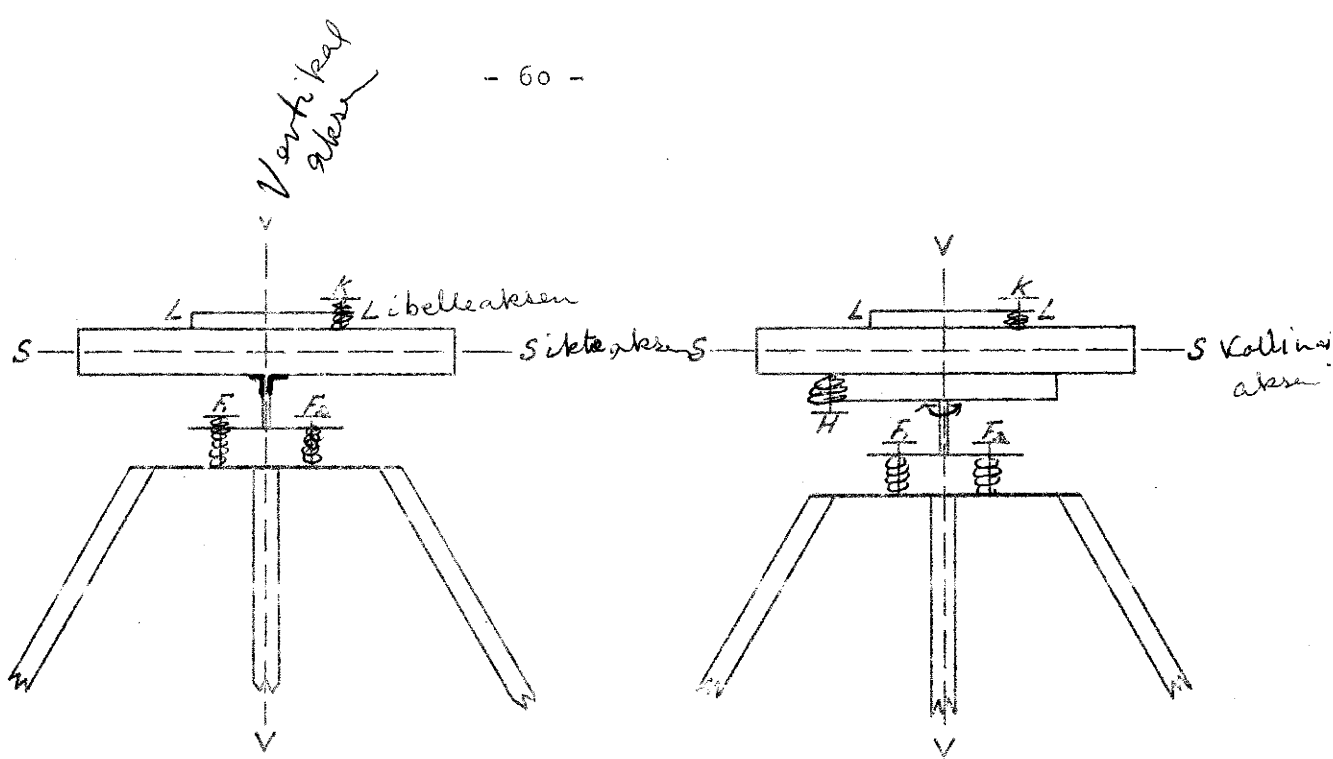


fig. 65

fig. 66

forflytning av trådkorset ved hjelp av trådkorsets justeringsskruer. Hos den nyere konstruksjon som fig. 66 gir et eksempel på, forekommer en høydefinnskruer H som tillater bevegelse av siktelinjen i forhold til vertikalaksen.

Ellers fester vi oss ved at libellene er utstyrt med korreksjonskruer (K), slik at libelleaksen kan reguleres i forhold til siktelinjen og vertikalaksen. Loddrettstillingen av vertikalaksen skjer ved hjelp av fotskruene F, som det vanligvis er tre stykker av.

Skal nivellerkikkerten kunne brukes til nivellering av høydeforskjeller, er det tilstrekkelig at følgende fundamentale fordring er oppfylt: Libelleaksen og siktelinjen må være fast forbundet med hverandre. Av hensyn til den praktiske utførelse av nivelleringen er det hensiktsmessig å sørge for at en del tilleggsfordringer er oppfylt, i hvert fall tilnærmet:

1. Libelleaksen bør være parallell med sikteaksen. Som vi skal se senere, er det mulig å oppnå riktige resultater ved nivelleringen selv om denne fordring ikke er oppfylt. Det forutsetter inidlertid at vi nytter like lange sikteavstander ved hver oppstilling, eller sørger for at summen av sikteavstandene til samtlige baksikter og framsikter blir like store.
2. Det er fordelaktig at libelleaksen er vinkelrett på vertikalaksen. Dersom ikke denne fordring er oppfylt, vil vi få utslag på libellen ved dreining om vertikalaksen. Libellen vil følgelig ikke spille inn uten videre både ved fram- og tilbakesiktet. Hos instrumenter uten høydefinnskruer må en da gå fram på den måten at libellen bringes til å spille inn ved hjelp av en høvelig beliggende fotskruer. Hos instrumenter med høydefinnskruer oppnås innspillende libelle for hvert stangsikte ved hjelp av høydefinnskruen.

Som allerede nevnt, gjelder som absolutt fordring til nivellerkikkerten at libelleaksen må være fast forbundet med sikteaksen. Fordringene 1 og 2 behøver ikke å være oppfylt, men av hensyn til den praktiske utførelse av

nivelleringen er det fordelaktig at fordring 1 er best mulig tilfredsstillt. Derved gjør en seg uavhengig av å nivellere fra midten (eller å gjøre summen av sikteavstandene til bak- og framsiktene like store). Fordring 2 derimot er mer uvesentlig.

Med hensyn til aksenes innbyrdes regulering består følgende muligheter: Libelleaksen kan reguleres i forhold til vertikalaksen og siktelinjen ved hjelp av libellens korreksjonsskrue, eller også ved bruk av høydefinnskruer dersom instrumentet er forsynt med en sådan. I siste tilfelle vil libelleaksen og siktelinjen bevege seg sammen.

Libelleaksen og siktelinjen kan reguleres i forhold til hverandre på to måter, nemlig enten ved bruk av libellens korreksjonsskrue eller ved forskyvning av trådkorset. Libellens korreksjonsskrue brukes til dette formål dersom instrumentet har høydefinnskruer, mens forskyvelse av trådkorset brukes på instrumenter uten høydefinnskruer. Her er vi nemlig henvist til å disponere libellens korreksjonsskrue til å bringe libelleaksen vinkelrett på vertikalaksen.

3. Nivellerinstrumenter med automatisk horisontering av siktelinjen.

Til denne gruppe av nivellerinstrumenter hører de såkalte pendelinstrumenter og en forholdsvis ny instrumenttype med automatisk horisontalstilling av siktelinjen ved hjelp av kompensator.

a) Pendelinstrumenter.

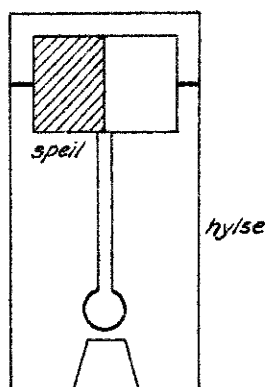


fig. 67

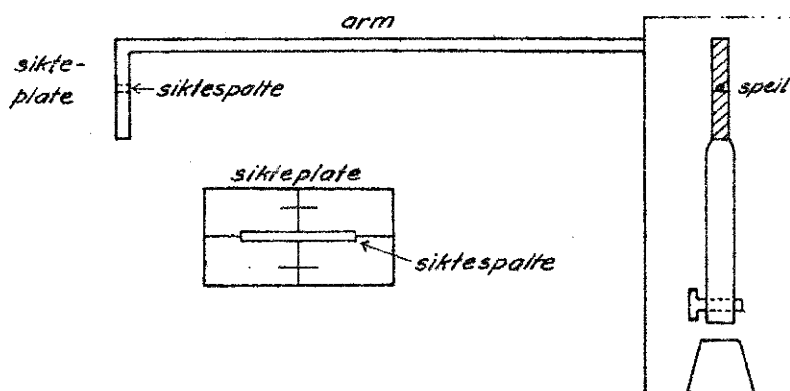


fig. 68

Det viktigste nivellerinstrument som bygger på pendelprinsippet, er Wredes nivellerspeil. Det består i sin enkleste utforming av en hylse som enten er en liten firkantet kasse av tre, eller en hul metallsylander. I denne hylsen er det opphengt en pendel som øverst er utformet som en ramme. Den ene halvdel av rammen er forsynt med et plant speil. Hylsen har åpninger foran og bak slik at det er mulig å sikte forbi speilet (gjennom den ikke speilbelagte halvdel av pendelrammen) ut i terrenget. Til hylsen er festet en arm (se fig. 68 som viser et snitt vinkelrett på den speilende flate). I enden av denne armen er festet en liten sikteplate. På den siden av denne plate som vender mot speilet, er anbrakt en horisontal strek som på midten er omdannet til en siktespalte. Instrumentets siktelinje er fiksert av denne spalte og bildet av samme i speilet når brukeren sikter gjennom spalten. Fra fysikken vet vi at forbindelseslinjen mellom et punkt og punktets speilbilde står vinkelrett på det speilende plan. Når speilet henger fritt, vil det innta en vertikal stilling, og siktelinjen vil følgelig bli horisontal. Brukeren vil ved å sikte gjennom spalten mot bildet av samme kunne forlenge siktelinjen ut i terrenget og avlese hvor siktelinjen treffer en oppstilt nivellerstang.

Nivellerspeilets verifisering.

Av nivellerspeilets teori følger at betingelsen for at siktelinjen skal være horisontal, er at speilet henger vertikalt når pendelen henger fritt. Om så er tilfelle, kan undersøkes på flere måter:

1. Dersom vi har adgang til en stillestående vannflate, kan verifiseringen foretas ved å stille opp instrumentet like ved vannkanten. Vi foretar så avlesning på en nivellerstang oppstilt i vannoverflaten like ved instrumentet. Deretter flyttes stangen så langt som det er mulig å se tydelig (ca. 40 m) og stilles igjen i vannoverflaten med ny avlesning. De to avlesningene skal da stemme overens innenfor målenøyaktigheten. Dersom ikke det er tilfelle, må det skyldes at speilet ikke henger vertikalt. Instrumentet må da korrigeres slik at siktelinjen treffer stangen i samme høyde som ved første gangs oppstilling. Korreksjonen foretas ved hjelp av spesielle korreksjonsskruer, eller ved å endre pendelens stilling ved forskyvning av pendelens tyngdepunkt. Det siste oppnås ved hjelp av en større skrue som er anbrakt i enden av pendelen (se fig. 68).

2. På noenlunde flat mark anbringes to stokker i ca. 30 m avstand. På den ene (B i fig. 69) anbringes i passende høyde et merke m_1 . Observatøren beveger så instrumentet langs stokken A inntil siktelinjen treffer m_1 , og den hertil svarende stilling m_2 av instrumentet merkes av. Deretter tas oppstilling ved B, og instrumentet flyttes langs stokken til siktelinjen treffer m_2 .

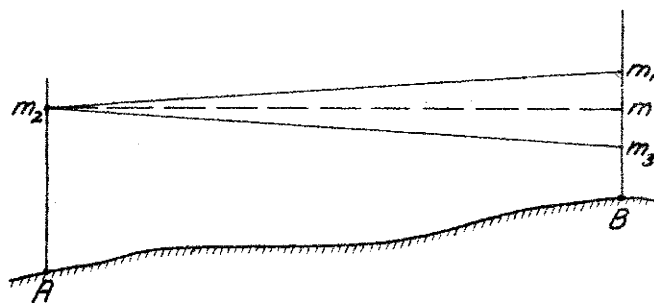


fig. 69

Derved fås pkt. m_3 . Da siktelinjens helning er den samme i begge tilfelle, vil den strekede linjen markert av m_2 og midtpunktet m mellom m_1 og m_3 , være horisontal. Instrumentet holdes derfor i m og korrigeres inntil siktelinjen fra m treffer m_2 .

Nivellerspeilet som stigningsmåler.

Ved hjelp av nivellerspeilet er det også mulig å skaffe seg siktelinjer med vilkårlig helning. Det skjer på den måten at sikteplaten forsynes med flere horisontale streker. Siktelinjen markert av midtspalten og speilbildet av en av disse strekene, vil da ha en bestemt helning (se fig. 70).

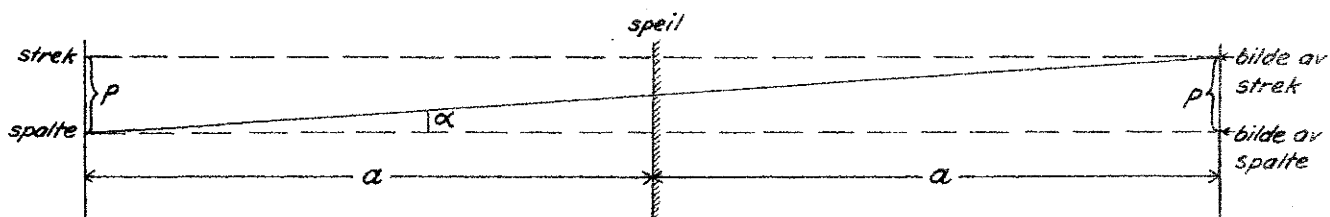


fig. 70

Av fig. ser vi at siktelinjens helning er gitt ved $\text{tg} \alpha = \frac{p}{2a}$, hvor p er strekens avstand fra midtspalten og a er avstanden mellom sikteplate og speil. Ved hjelp av ligningen ovenfor er vi i stand til å regne ut p for vilkårlige stigningsforhold.

Wredes nivellerspeil anvendes i stor utstrekning ved vegstikking til å gå opp såkalte stigningslinjer, dvs. linjer med konstant helning. Det foregår på den måten at nivellerspeilet anbringes på en stokk og medhjelperen utstyres med en stokk hvis lengde er lik avstanden mellom siktelinje og underkant av den stokken som nivellerspeilet anbringes på. Toppenden til medhjelperens stokk markeres med en tydelig tverrflis. I fig. 71 forutsetter vi at stigningslinjen skal gå ut fra pkt. A. Nivellerspeilet stilles opp i A. Med den foreskrevne stigning siktes framover i terrenget, og medhjelperen skal så med stokken sin oppsøke punkter i terrenget som ligger slik til at sikte-

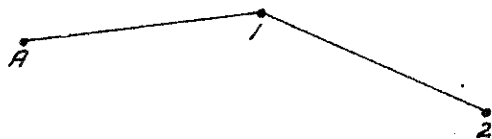


fig. 71

linjen treffer tverrflisen til medhjelperens stokk. I fig. 71 tenker vi oss at 1 er et slikt pkt. Nivellerspeilet flyttes så til pkt. 1, og den foran beskrevne prosess gjentas til en når stigningslinjens endepunkt.

Nivellerspeilet som avstandsmåler.

Wredes nivellerspeil kan også brukes til indirekte avstandsbestemmelse. Instrumentet stilles opp i A, og vi leser av hvor den horisontale siktelinje treffer en stang oppstilt i B.

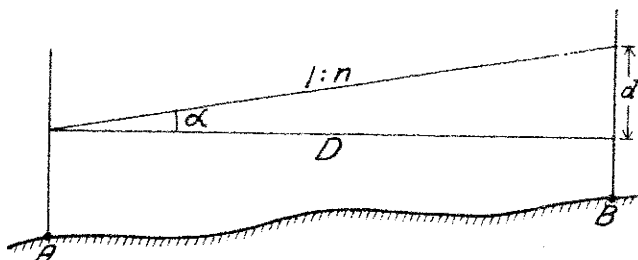


fig. 72

Deretter leses av hvor siktelinjen med stigning 1:n (dvs. med en høydevinkel hvis $\text{tg} = \frac{1}{n}$) treffer stangen. Differensen mellom disse avlesninger er d. Vi har da:

$$\text{tga} = \frac{1}{n} = \frac{d}{D}, \text{ dvs. } \underline{D = nd}$$

b) Instrumenter med automatisk horisontering ved hjelp av kompensator.

Instrumenter av denne konstruksjonsart er av forholdsvis ny dato. Det første instrument ble konstruert av instrumentfirmaet Zeiss i 1951 og har fått betegnelsen Ni 2. Instrumentet har hverken rørlibelle eller finskrue. Horisontalstillingen av siktelinjen foregår automatisk ved hjelp av en kompensator.

Vi skal se nærmere på prinsippet som ligger til grunn for denne instrumenttype.

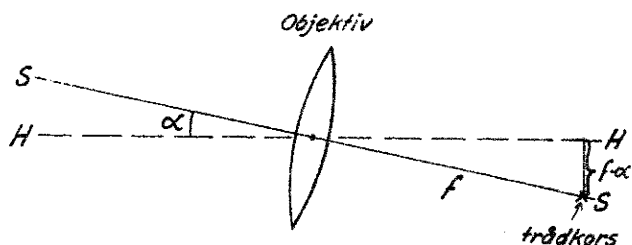


fig. 73

I fig. 73 er HH den horisontale linje gjennom objektivets optiske midtpunkt. Siktelinjen SS markert ved objektivets optiske midtpunkt og trådkorsets skjæringspunkt, danner vinkelen α med

den horisontale linje. Avstanden mellom trådkorset og HH er lik $f \cdot \alpha$ når trådkorset befinner seg i brennplanet (idet vi forutsetter at α er en liten vinkel). Ved å gi den horisontale linje HH en passende avbøyning er det mulig å få den til å treffe trådkorsets skjæringspunkt x . Det oppnås ved hjelp av en kompensator anbrakt i pkt. A (se fig. 74) som gir HH avbøyningen β . Kompensatoren har den faste avstand s fra trådkorset. Av figuren ser vi at betingelsen for at den avbøyde horisontale linje skal gå gjennom trådkorsets skjæringspunkt, er at:

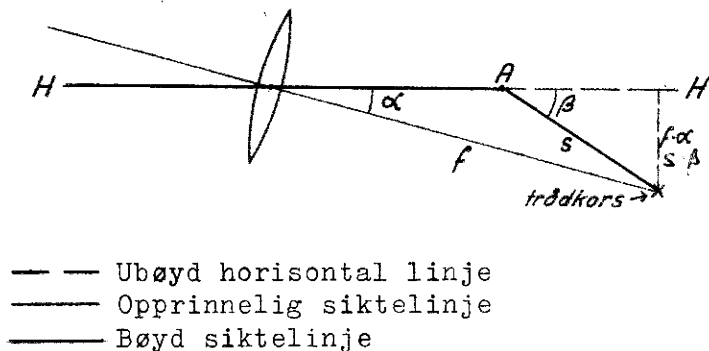


fig. 74

$$s \cdot \beta = f \cdot \alpha$$

Den avbøyde horisontale linje, som er tegnet med rødt i figuren, blir altså instrumentets effektive siktelinje, og denne blir horisontal dersom betingelsen $s \cdot \beta = f \cdot \alpha$ er oppfylt.

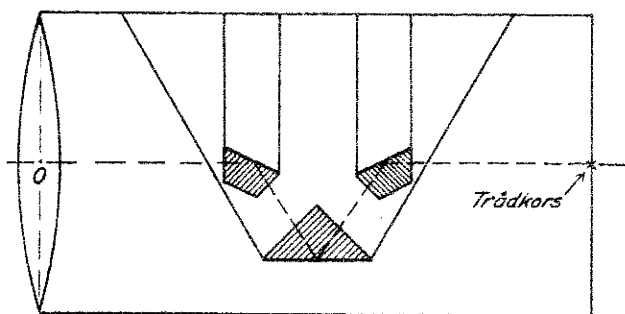


fig. 75

Fig. 75 viser hvordan kompensatoren virker. De to ytre firkantede prismene er fast forbundet med kikkerten. Det midtre tresidede prismet er fritthengende. Ved passende valg av prisme vinkler og dimensjoner er det mulig å få fram et optisk system som nettopp tilfredsstiller fordringen $s \cdot \beta = f \cdot \alpha$. Av det som er sagt foran om kompensatorens virkemåte, følger at

den har til effekt at den horisontale linje gjennom objektivets optiske midtpunkt alltid treffer samme punkt på trådkorsflaten, selv om instrumentet har en liten helning. Dersom vi sørger for å la trådkorsets skjæringspunkt falle sammen med dette uforanderlige punkt på trådkorsflaten, oppnår vi altså en automatisk horisontering av siktelinjen. Kompensatorens "aksjonsområde" er begrenset slik at den automatiske horisontering av siktelinjen bare er mulig for forholdsvis små kikkerthelninger. For instrumentet Ni 2 er kompensatorens aksjonsområde begrenset til $\pm 0,28^\circ$. Den automatiske horisontering av siktelinjen forutsetter følgelig at instrumentets vertikalakse loddrettstilles med en nøyaktighet på ca. $0,28^\circ$. En slik nøyaktighet er lett å oppnå ved hjelp

av en dåselibelle. Slike instrumenter er derfor utstyrt med dåselibelle til grovhorisontering av siktelinjen.

Forsøk har vist at nøyaktigheten av den horisontering av siktelinjen som oppnås ved hjelp av den beskrevne kompensatorstype, beløper seg til $\pm 1,5^{\circ}$.

4. Verifisering av nivellerinstrumenter.

A. Innledning.

Denne verifisering vil arte seg litt forskjellig avhengig av instrumentets konstruksjonsart. Spesielt er det av betydning om instrumentet har høydefinnskrue eller ikke. Før vi setter i gang med å behandle detaljer i forbindelse med nivellerinstrumentenes verifisering, skal vi vise at vi får riktige høydeforskjeller ved nivellement fra midten uten hensyn til om instrumentets siktelinje og libelleakse er parallelle eller ikke. Med nivellement fra midten forstår vi at sikteavstandene i et stasjonspunkt er like store (men

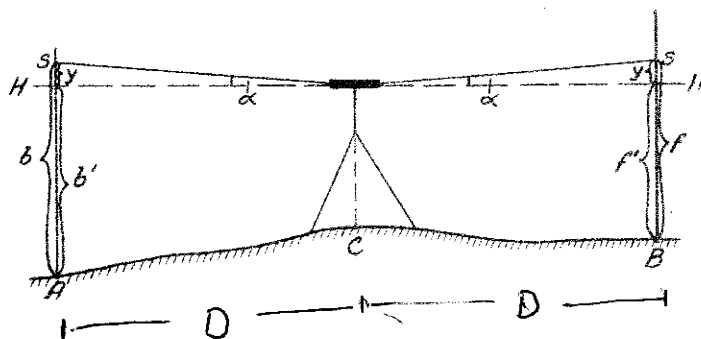


fig. 76

behøver selvsagt ikke være den samme for alle stasjonspunkter). I fig. 76 er avstanden mellom A og C, og B og C like store, lik D. Vi antar at siktelinjen og libelleaksen danner vinkelen α med hverandre. Det har til følge at siktelinjen SS ved innspillende libelle danner vinkelen α med den

horisontale linje HH. Vi får avlesningene b og f som begge er forfalsket med størrelsen $y = D \cdot \tan \alpha$. Med horisontal siktelinje ville vi ha hatt avlesningene $b' = b - y$ og $f' = f - y$. Den riktige høydeforskjell mellom A og B er lik:

$$\Delta h = b' - f' = (b - y) - (f - y) = b - f$$

Vi har dermed vist at vi kommer fram til riktige høydeforskjeller ved nivellement fra midten uansett hvilken stilling siktelinje og libelleakse inntar i forhold til hverandre. Det eneste som vi må forutsette er at de to aksene er fast forbundet med hverandre slik at α blir konstant.

Da verifiseringen har korrekt verdi for Δh som absolutt forutsetning, må en være meget omhyggelig med denne innledende høydebestemmelse. Som ufravikelig regel gjelder derfor at bestemmelsen skal kontrolleres ved ny oppstilling (instrumentet flyttes et lite stykke, men slik at sikteavstandene fremdeles blir like store).

Vi skal så gå over til å behandle de justeringer som det kan bli spørsmål om å foreta på nivellerinstrumentene.

a) Å bringe libelleakse og vertikalakse vinkelrett på hverandre.

Det foregår, som tidligere omtalt, på den måten at vi etter den vanlige prosedyre for loddrettstillingen av vertikalaksen (i virkeligheten vil ikke vertikalaksen da være loddrettstilt dersom vinkelen mellom vertikal- og libelleakse er forskjellig fra 100^g) bringer libellen til å spille inn i den stilling som fig. 77 antyder. Deretter dreies instrumentet 200^g om vertikalaksen. Dersom libelleakse og vertikalakse ikke står

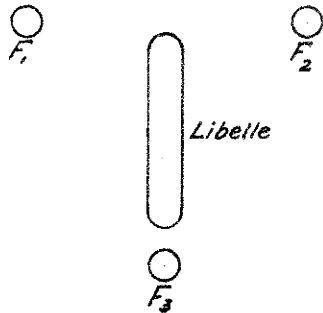


fig. 77

vinkelrett på hverandre, får vi da et libelleutslag lik den dobbelte feil. Det halve utslag rettes med libellens korreksjonsskrue og det andre med fotskruen F_3 . I stedet for å korrigere med libellens korreksjonsskrue kan høydefinskruen nyttes til samme formål, men vi må da være oppmerksomme på at siktelinjen endrer seg samtidig med libelleaksen.

b) Å gjøre siktelinje og libelleakse parallelle.

Ved nivellement fra midten finnes den riktige høydeforskjell mellom to punkter A og B, som befinner seg i 60-70 m avstand. Punktene må markeres med solide peler. Deretter tas oppstilling i det ene endepunktet (som vi i det etterfølgende forutsetter er A) og foretar avlesning mot en stang oppstilt i A. Vi kan da regne oss til den riktige avlesning når stangen flyttes til B, dvs. den avlesning som vi skal ha med horisontal siktelinje.



fig. 78

Vi kaller avlesningen mot stangen i A for b_A og den avlesningen som vi skal ha i B for f_B og har da:

$$\Delta h = b_A - f_B, \text{ dvs.}$$

$$f_B = b_A - \Delta h$$

Selve justeringen kan nå foretas på to måter:

1. Enten ved å stille inn på korrekt avlesning ved hjelp av finskrue eller fotskruene og deretter bringe libellen til å spille inn ved hjelp av libellens korreksjonsskruer, eller

2. ved innspillende libelle å justere trådkorset til vi får den riktige avlesning. Under den senere behandling av verifiseringens utførelse for de forskjellige instrumenttyper skal vi komme nærmere inn på i hvilke tilfelle den ene eller den andre framgangsmåte blir å benytte.

Som tidligere nevnt, skal instrumentet stilles opp over det ene endepunktet. Avlesningen på stangen foregår da på den måten at en ser gjennom

instrumentet fra objektivsiden. En vil da ikke kunne se trådkorset, men synsfeltet er så lite at en blyantspiss eller nål kan fikseres midt i feltet og avleses på stangen etterpå. Ellers er det å bemerke at det i praksis ikke betyr noe om instrumentet, istedenfor å stille opp i selve punktet, stilles opp i en avstand på ca. 2-3 m, slik at vi kan foreta normal avlesning mot stangen oppstilt i selve punktet. Vi kan likevel betrakte denne avlesningen som feilfri, slik at ligningen $f_B = b_A - \Delta h$ fremdeles får gyldighet. (Dersom siktelinje og libelleakse avviker svært meget fra parallellitet, kan det i siste tilfelle bli aktuelt å gjenta verifiseringsprosessen med samme instrumentoppstilling. Etter første gangs verifisering vil da feilen være blitt så liten at forutsetningen om feilfri avlesning mot det nærliggende punkt vil være oppfylt med tilstrekkelig tilnærming.) Frangangsmåten med å stille opp litt utenfor punktet er den mest praktiske og absolutt å foretrekke.

B. Verifiseringens utførelse for de forskjellige instrumenttyper.

Som allerede nevnt, vil verifiseringen arte seg noe forskjellig alt etter de forskjellige instrumenters konstruksjonsart, og den vil også til dels være avhengig av hvordan instrumentet brukes under nivelleringen.

a) Instrumenter uten høydefinnskrue.

Den mest praktiske måte å bruke instrumenter av denne type på er å nytte fotskrueene til høydefinnskrue, idet vi ved hver stangavlesning bringer libellen til å spille inn ved hjelp av den fotskruen som ligger høyest til. Verifiseringen av instrumentet behøver da ikke ta sikte på noe annet enn å gjøre siktelinje og libelleakse parallelle. Det oppnås på den måten at kikkerten innstilles på riktig stangavlesning, hvoretter libellen bringes til innspilling ved hjelp av libellens korreksjonsskruer (en oppnår selvsagt det samme ved med innspillende libelle å justere trådkorset til riktig avlesning, men det er mer tungvint).

Imidlertid består også den mulighet å nytte denne instrumenttype uten noen som helst form for høydefinnskrue. Det forutsetter at libelleaksen er vinkelrett på vertikalaksen, og videre at libelleakse og siktelinje er parallelle. Justeringen foregår i to trinn. Først bringes libelleaksen vinkelrett på vertikalaksen ved hjelp av libellens korreksjonsskruer. Deretter gjøres libelleakse og siktelinje parallelle ved forflytning av den horisontale trådkorsstrek.

Den første måte å bruke instrumenter uten egen høydefinnskrue på er den mest rasjonelle, fordi en da klarer seg med en provisorisk loddrettstilling av vertikalaksen i oppstillingspunktene.

b) Instrumenter med høydefinnskrue.

Her er, ihvertfall innenfor visse grenser, libelleaksens og vertikalaksens gjensidige stilling likegyldig. Ved hver innsiktning bringes nemlig libellen til innspilling ved hjelp av høydefinnskruen. Det er derfor tilstrekkelig å forlange at libelleakse og siktelinje er parallelle. Justeringen foregår enten ved å bringe libellen til skarp innspilling og deretter regulere trådkorset til vi får den riktige stangavlesning, eller ved å innstille på riktig stangavlesning og deretter bringe libellen til innspilling ved hjelp av libellens korreksjonsskruer. Den siste framgangsmåten er den enkleste og blir derfor foretrukket i praksis.

Instrumenter med høydefinnskrue er praktisk talt uten unntagelse utstyrt med dåselibelle, som har til oppgave å sørge for den tilnærmede horisontering av siktelinjen som er nødvendig for at den endelige horisontering kan foretas med høydefinnskruen. Det er da av betydning at dåselibellens "akse" er tilstrekkelig loddrett på vertikalaksen, ellers risikerer vi å komme utenfor høydefinnskruens "aksjonsområde", slik at det ikke blir mulig med utgangspunkt i den tilnærmede horisontering ved dåselibellen å bringe libellen til innspilling ved hjelp av høydefinnskruen. Det blir da nødvendig med en justering av dåselibellen, slik at dens akse blir mest mulig vinkelrett på vertikalaksen.

c) Instrumenter med automatisk horisontering
ved hjelp av kompensator.

Ved nivellement fra midten skaffer vi oss rede på den riktige høydeforskjell mellom A og B . Deretter stilles opp i det ene endepunktet, og på grunnlag av den riktige høydeforskjellen og stangavlesningen i oppstillingspunktet utleder vi den korrekte stangavlesning i det andre endepunktet. Ved hjelp av trådkorsets korreksjonsskrue forskyves trådkorset til vi får den korrekte avlesning.

Dersom kompensatoren på en eller annen måte kommer i ulage , slik at den ikke fungerer som den skal, må instrumentet sendes til instrumentmaker.

d) Instrumenter med ringakse.

For fullstendighetens skyld skal vi også ta med litt om verifisering av instrumenter med ringakse og dobbeltlibelle, selv om denne konstruk-

sjonsart er blitt mer sjelden i våre dager. Med ringakse forstår vi en akse som tillater dreining av instrumentet om sin lengdeakse. Slike nivellerkikkert er forsynt med en dobbeltlibelle, dvs. et instrument som er utformet som en libelle både på over- og undersiden. Dobbeltilibellen er fast forbundet med kikkerten slik at den følger med under dreiningen om ringaksen. Undersøkelse og justering av slike instrumenter skjer på følgende måte:

1. Først undersøkes om ringaksen RR og siktelinjen SS er parallelle.

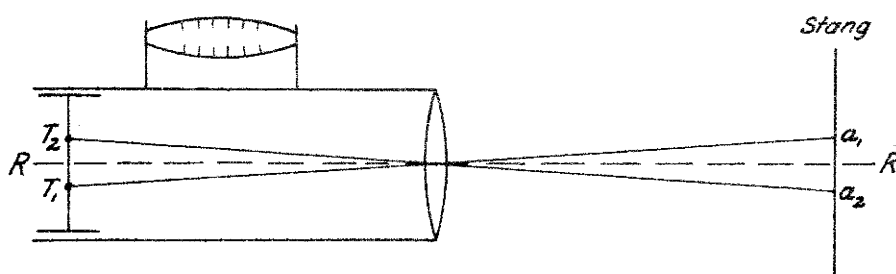


fig. 79

I fig. 79 svarer T_1 til trådkorsets stilling i utgangsposisjonen. I denne utgangsstilling rettes kikkerten mot en nivellerstang i 60-70 m avstand og vi

leser av med tilnærmet innspillende libelle a_1 . Kikkerten dreies så om ringaksen 200^g hvorved trådkorset inntar stillingen T_2 , og vi leser av a_2 . Middeltallet av de to avlesninger faller sammen med det punkt på stangen hvor den forlengede ringakse treffer stangen. Ved bruk av trådkorsets korreksjonsskruer flyttes nå trådkorset til stangavlesningen blir lik dette middeltall. Vi har dermed gjort siktelinje og ringakse parallelle.

2. Deretter undersøkes om siktelinjen (og følgelig også ringaksen) er parallelle med libelleaksen. Det skjer på den måten at vi bringer libellen til å spille inn og dreier så 200^g om ringaksen. Dersom libellen da gjør utslag, er utslaget et mål for den dobbelte feil. Det halve utslaget rettes med libellens korreksjonsskruer og den andre halvparten med fotskruene.

3. Endelig undersøkes på vanlig måte om libelleaksen er vinkelrett på vertikalaksen. Dersom det her blir spørsmål om noen justering, må denne foretas på en slik måte at libelleaksens og siktelinjens gjensidige stilling opprettholdes, dvs. en evt. regulering må foretas ved hjelp av høydefinskruen. Som vi senere skal se, er det for bruken av instrumentet av liten betydning om libelleaksen står vinkelrett på vertikalaksen eller ikke.

Vi har under behandlingen av verifisering av ringakseinstrumenter gjort tre viktige forutsetninger, nemlig 1. at ringaksen går gjennom objektivet optiske midtpunkt og 2. at dobbeltlibellens to libelleakser er parallelle og endelig som 3. at horisontalprojeksjonen av libelleaksen og ringaksen er parallelle. Dersom den siste forutsetning ikke er oppfylt, sier vi at det er libellekrysning til stede. Libellen har spesielle korreksjonsskruer til å skaffe bort denne feil med. Fig. 80 anskueliggjør effekten av libellekrysning.

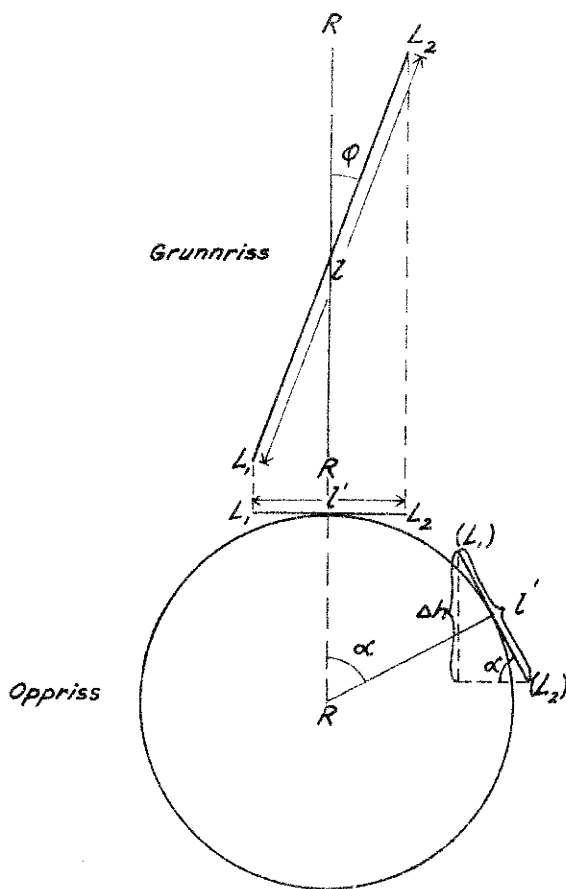


fig. 80

er gitt ved:

$$v = \frac{\Delta h}{l} = \frac{l \sin\phi \sin\alpha}{l} = \sin\phi \sin\alpha$$

Her opptreer v i absolutt vinkelmål. Vi går over til gradmål og tar samtidig hensyn til at ϕ vanligvis er en meget liten vinkel og får:

$$\hat{v} = \rho \phi \sin\alpha = \hat{\phi} \sin\alpha$$

hvor \wedge står for gradmål.

Av det foregående følger at kriteriet på libellekrysning er at vi får libelleutslag ved dreining om ringaksen.

*

Ved å utføre nivelleringen med ringakseinstrumenter på den måten at vi avleser på nivellerstangen i begge kikkertstillinger, dvs. før og etter dreining om ringaksen, og bringer libellen til å spille inn i begge tilfelle, gjør vi oss uavhengige av ringaksens, siktelinjens og libelleaksens gjensidige stilling. Det framgår av fig. 81.

Den øverste fig. viser situasjonen i grunnriss. Libellekrysningen er lik vinkelen ϕ . I nederste figur som viser forholdene i et snitt vinkelrett på ringaksen, markerer L_1L_2 libelleaksens utgangsstilling med innspillende libelle. Vi dreier så instrumentet om ringaksen vinkelen α . Hertil svarer stillingen $(L_1)(L_2)$ av libelleaksen. Av fig. ser vi at libelleenden L_1 da kommer høyere enn L_2 ,

Av fig. følger at $l' = l \sin\phi$. Høydeforskjellen mellom libelleaksens endepunkter etter dreiningen om ringaksen blir da lik:

$$\Delta h = l' \sin\alpha = l \sin\phi \sin\alpha$$

Libelleaksens helning v, som blir et mål for libelleutslaget,

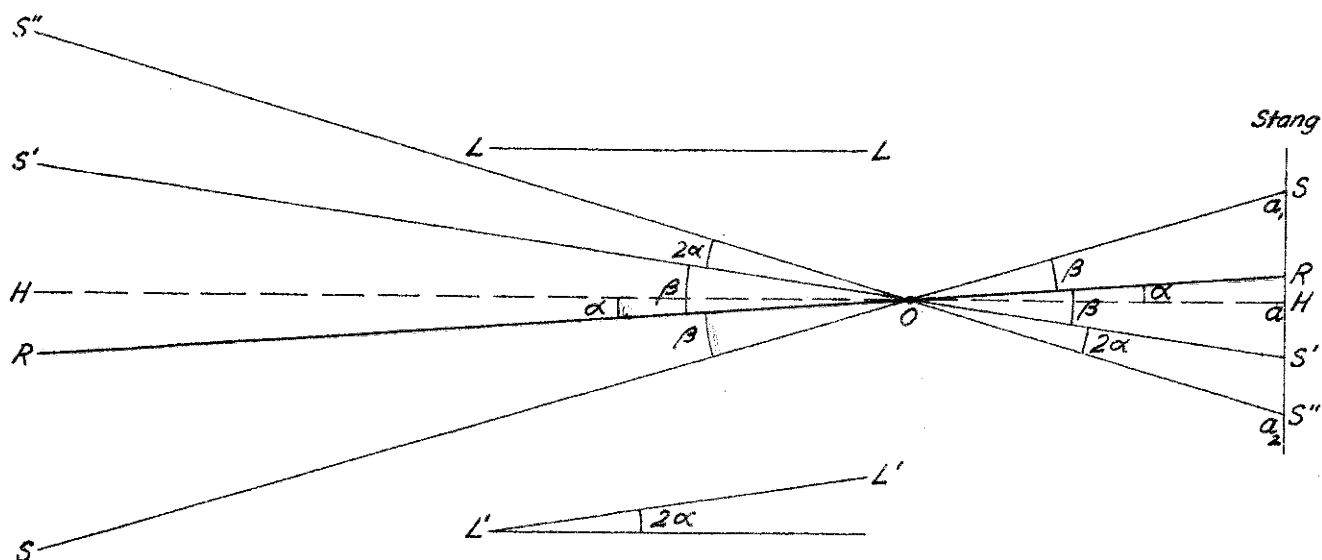


fig. 81

I figuren er HH den horisontale linje og O objektivets optiske midtpunkt. De umerkede størrelsene refererer seg til første kikkertstilling og de enkelt merkede størrelser til andre kikkertstilling. Vinkelen mellom RR og HH er α , og mellom RR og SS β . I første kikkertstilling har vi avlesningen a_1 på stangen. Etter dreiningen om ringaksen får vi libelleutslaget 2α . Vi bringer så libellen til å spille inn ved hjelp av høydefinskruen slik at siktelinjens sluttposisjon i den andre kikkertstillingen blir S'S'', og den hertil svarende stangavlesning er a_2 . I første kikkertstilling er siktelinjens avvik fra HH lik $\alpha + \beta$, og i den andre kikkertstilling lik $\beta - \alpha + 2\alpha = \alpha + \beta$ med motsatt fortegn. Følgelig vil middeltallet av avlesningene a_1 og a_2 være identisk med avlesningen a svarende til horisontal siktelinje. Vi har dermed vist at ved å avlese i begge kikkertstillinger får vi riktig resultat selv om hverken SS, RR eller LL er parallelle.

C. Verifisering ved hjelp av et verifisert instrument.

Vi skal til slutt behandle en innendørs metode til verifisering av nivellerinstrumenter. Metoden forutsetter at vi har til disposisjon et verifisert instrument, dvs. et instrument hvis libelleakse og siktelinje er parallelle.

Instrumentene stilles opp i om lag samme høyde med få desimeters mellomrom. Begge kikkertene fokuseres på uendelig, og begge libellene bringes

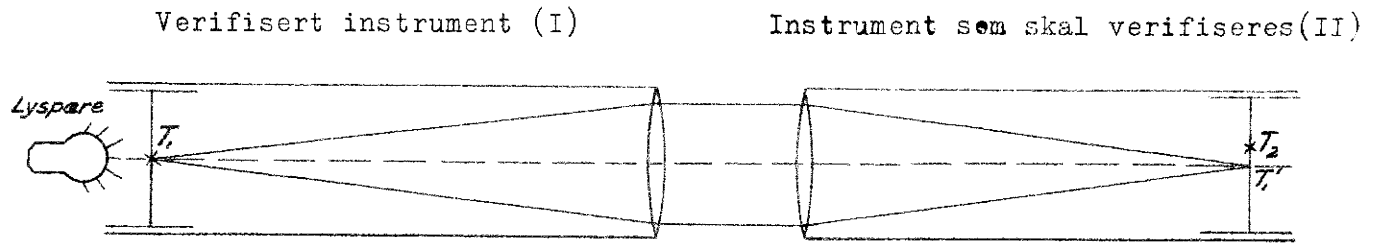


fig. 82

til å spille inn med regulering av høydefinskruene eller fotskruene. Bak trådkors til det verifiserte instrumentet anbringes en lyskilde. De strålene som skrives fra trådkorsets skjæringspunkt T_1 blir da parallelle og horisontale. (At strålene som forlater I's objektiv er parallelle, følger av at T_1 befinner seg i brennplanet til objektivet. At stråleknippet er horisontalt følger av at siktelinjen markert ved T_1 og det optiske midtpunkt til I's objektiv også inngår i dette stråleknippet, og etter forutsetningen skal I's siktelinje være horisontal når libellen til I spiller inn.) Som følge av at alle strålene fra T_1 er parallelle, vil avbildningen av T_1 falle i brennplanet til instrumentet II. I figuren forestiller T_1' avbildningen til T_1 , mens T_2 er trådkorsets skjæringspunkt hos det instrumentet som skal verifiseres. Det er klart at linjen markert ved T_1' og II's optiske midtpunkt da blir horisontal. Det følger av at også denne linjen inngår i den parallelle, horisontale strålebunten som faller inn mot objektivet til II.

Selve justeringen skjer da enten ved å regulere finskruen eller fotskruene til II inntil T_2 og T_1' faller sammen og deretter bringe II's libelle til å spille inn ved hjelp av libellens korreksjonsskruer, eller ved å forflytte II's trådkors inntil T_2 og T_1' dekker hverandre.

*

Det er viktig å skaffe seg kontroll på verifiseringens riktighet. Denne kontroll vil arte seg forskjellig for de ulike verifiseringsmetoder. Vi begrenser oss her til metoden med bestemmelse av verifiseringsstrekningens høydeforskjell ved oppstilling på midten og deretter oppstilling i nærheten av strekningens ene endepunkt. Kontroll på verifiseringen fås da ved å foreta en ny oppstilling av instrumentet og undersøke om en får samme verdi for høydeforskjellen. Denne kontrollens evne til å avsløre eventuelle feil vil være avhengig av at forholdet mellom sikteavstandene til verifiseringsstrekningens to endepunkter, ($s_A : s_B$) endres tilstrekkelig. Den maksimale endring av forholdet $s_A : s_B$ oppnås ved å ta kontrolloppstillingen i nærheten av det andre endepunktet. Ut fra dette blir altså kontrollen å utføre på den måten at en ved ny oppstilling i nærheten av det andre endepunktet undersøker om en får den tidligere funne verdi for Δh .

D. Avlesningsanordninger.

Bedømmelsen av hvor siktelinjen treffer stangen, eller om vi vil, stangavlesningen, representerer det største usikkerhetsmoment ved nivelleringen. Det gis en rekke anordninger som tar sikte på å øke avlesningsnøyaktigheten. Denne nøyaktighetsøkning kan oppnås enten ved å foreta "manipulasjoner" med instrumentet eller med stangen. Vi skal i det etterfølgende behandle én karakteristisk representant for hver av disse to muligheter.

a) Det optiske mikrometer.

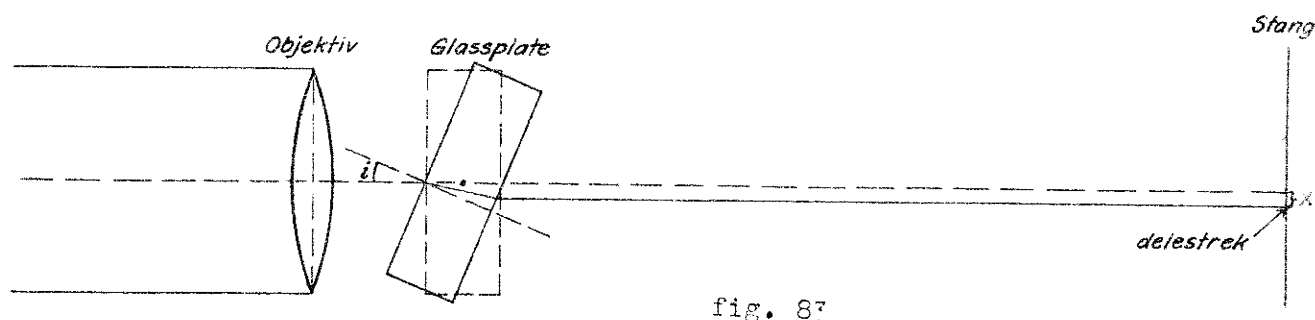


fig. 83

Foran objektivet anbringes en planparallell glassplate som er dreibar om en horisontal akse loddrett på figurens plan. Glassplaten er koplet til en mikrometerskrue som tillater dreining av glassplaten om nevnte akse. Som det framgår av figur 83, oppstår derved en parallellforskyvelse av siktelinjen. Den stiplede posisjon av glassplaten representerer nullstillingen. Glassplaten står da vinkelrett på den optiske aksen, og siktelinjen går følgelig ubrutt gjennom platen. Avlesningen på stangen foregår ved å dreie mikrometerskruen inntil siktelinjen faller sammen (koinsiderer) med nærmeste lavere delestrek på stangen. Forskyvelsen x leses så av på den inndelte mikrometertrommel.

Avlesningseksempel.

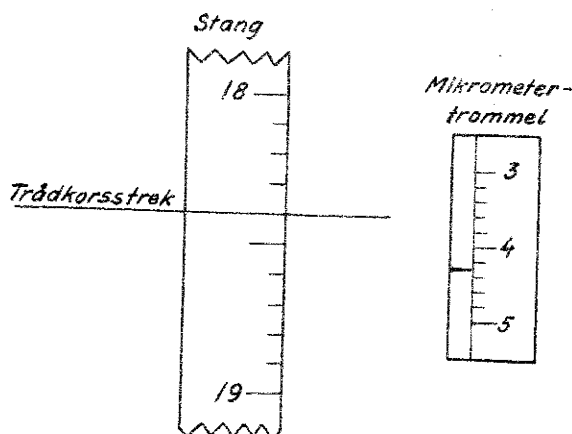


fig. 84

Den horisontale strek i fig. 84 forestiller horisontaltrådens posisjon etter koinsidensinnstillingen. Avlesningen blir:

Stang:	1,8400 m
Trommel:	43 "
Totalavl.:	1,8443 m

Vi skal så se nærmere på den matematiske side ved virkemåten til det optiske mikrometeret. Det vi tar sikte på, er å utlede funksjonsforbindelsen mellom parallellforskyvelsen x og dreiningsvinkelen i (se fig. 85). Vi har ifølge figuren:

$$\cos b = \frac{d}{l} \sin(i-b) = \frac{x}{l}$$

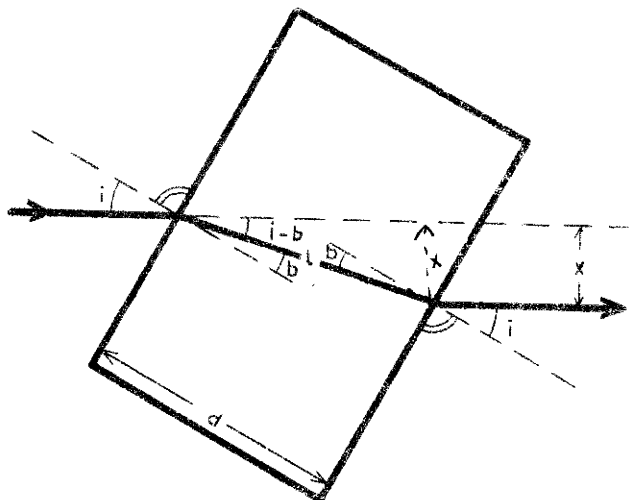


fig. 85

$$\begin{aligned} x &= l \sin(i-b) \\ &= \frac{d}{\cos b} \sin(i-b) \\ &= d \sin i - d \cos i \operatorname{tg} b \end{aligned}$$

Vi innfører så:

$$\frac{\sin i}{\sin b} = n, \text{ dvs.}$$

$$\operatorname{tg} b = \frac{\sin b}{\sqrt{1-\sin^2 b}} = \frac{\sin i}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}, \text{ som}$$

innført i uttrykket for x resulterer i:

$$x = d \sin i - d \cos i \frac{\sin i}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}} = d \sin i \left(1 - \frac{\cos i}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}} \right)$$

Den kjente instrumentkonstruktør Wild var den første til å påvise at det er mulig med tilstrekkelig nøyaktighet å erstatte denne eksakte, men kompliserte formel med følgende tilnærmedelsesformel:

$$x = d \frac{n-1}{n} \operatorname{tg} i$$

For $i < 30^\circ$ vil avvikene mellom denne formel og det eksakte uttrykk holde seg under 0,65 o/oo. For $i < 30^\circ$ er det altså tillatt å regne med at parallellforskyvelsen av lysstrålene er proporsjonal med tangens til dreiningsvinkelen.

Det optiske mikrometeret spiller en viktig rolle som avlesningsmiddel på landmålingsinstrumenter. Vi vil bl.a. støte på det optiske mikrometer som et av de viktigste avlesningsmidler når det dreier seg om sirkelavlesning på teodolitten.

b) Transversaldeling på nivellerstangen.

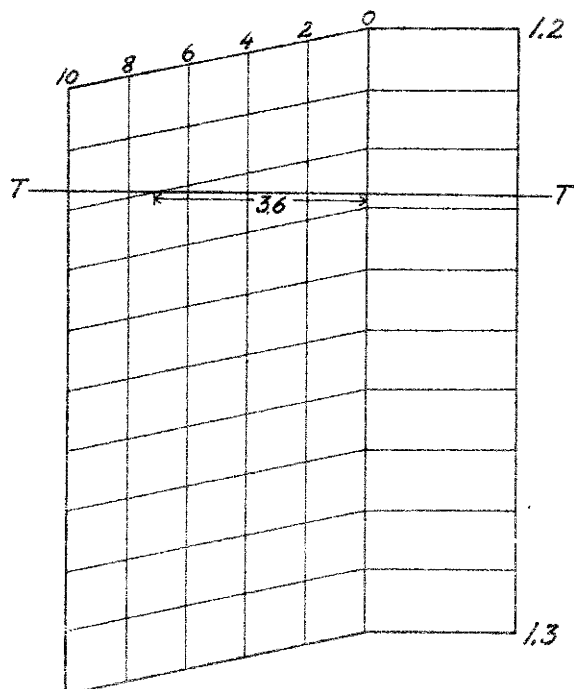


fig. 86

En annen metode som tar sikte på å øke avlesningsnøyaktigheten, består i å utforme stangfeltene på en spesiell måte. I fig. 86 representerer feltdivingen til venstre en hjelpedeling konstruert etter transversalmålestokkprinsippet. TT er trådkorsets posisjon for en aktuell innstilling. Avlesningen blir da:

$$1,22 + 2(3,6) = 1,2272$$

E. Nivellerstenger.

Ved hjelp av nivellerkikkerten skaffer vi oss en horisontal siktelinje. For å kunne bestemme høydeforskjeller må vi ha et instrument i tillegg som gjør det mulig å avlese siktelinjens, eller rettere sagt sikteplanets, høyde over terrengpunktene. Denne måletransaksjon, som blir en lengdemåling langs loddretningen til terrengpunktene, skjer ved hjelp av en nivellerstang.

Nøyaktigheten av nivelleringen vil i høy grad være avhengig av nøyaktigheten av denne lengdemåling, idet feil her overføres til de nivellerte høydeforskjeller med sin fulle verdi. Nøyaktigheten av lengdemålingen avhenger av nivellerstangens kvalitet som lengdemålingsredskap betraktet, og om den brukes (holdes) riktig. Eventuelle feil som knytter seg til stangen eller til bruken av samme, er så mye farligere som de forfalsker måleresultatene i systematisk retning. I motsetning til de tilfeldige feil ved nivelleringen opptrer nemlig disse med konstant fortegn. Det er f.eks. tilfelle med de feil som skyldes at stangens nominelle lengde ikke er i samsvar med den virkelige, at stangen synker under bruken, at stangen ikke holdes loddrett osv.

Den vanligst forekommende lengde av nivellerstenger er 3 eller 4 meter. For å lette transporten blir de som regel laget i to deler som kan slås sammen eller skyves inn i hverandre. Men skjøten vil alltid representere et svakt punkt. Denne konstruksjonsmåte brukes derfor ikke på stenger til presisjonsnivellering.

Til instrumenter som Wredes nivellerspeil brukes 2 m lange stenger forsynt med en skyver. Denne innstilles etter vink eller tilrop fra nivelløren der hvor siktelinjen treffer stangen, hvoretter avlesningen foretas av stangbæreren.

Nivellerstenger lages av tre, helst av rettvoksen gran. Da trematerialer er hygroskopiske, vil lengden variere en del med fuktighetsgraden. Til presisjonsnivellering blir brukt spesialstenger. Selve inndelingen er på et bånd av legeringen invar, som er spent ut over stangen under et konstant strekk.

Fotenden av nivellerstengene er som regel forsynt med stålbeslag. Disse må være planslipt vinkelrett på stangens lengdeakse.

Til dels brukes reversjonsstenger med deling på begge sider. Det vanligste er at de to delingene går i samme retning. Vi får da kontroll på avlesningene ved at differensen mellom avlesningen på stangens for- og baksida skal være konstant. Går delingene i motsatt retning, skal summen av avlesningene være konstant. Reversjonsstengenes hovedhensikt er å sikre mot grove feil. Dessuten vil de betinge en viss nøyaktighetsøkning, idet vi jo får dobbelt sett avlesninger i hvert stangoppstillingspunkt.

K a p i t e l V .

TEODOLITTEN.

Teodolitten er et instrument som tillater måling og avsetting av vilkårlige horisontal- og vertikalvinkler. Teodolitten innebærer følgelig en vesentlig utvidelse av rammen for måleoperasjoner innen den praktiske landmåling.

1. Teodolittens konstruksjon.

Så vel for bestemmelsen av horisontal- som vertikalvinkler består prinsippet i at vi har en graddelt sirkel forbundet med en kikkert som kan dreie seg om en akse vinkelrett på sirkeldelingens plan. Denne akse er sentrisk anbrakt i forhold til sirkeldelingen. Denne anordning tillater avlesning av vilkårlige dreiningsvinkler, idet avlesningsmidlene er fast forbundet med kikkerten og utfører følgelig samme vinkelbevegelse som denne.

I det etterfølgende skal vi begrense oss til det som angår bestemmelse av horisontalvinkler, idet anordningen for måling av vertikalvinkler gir seg ved en enkel "utvidelse" av prinsippet som ligger til grunn for horisontalvinkel-måling.

Vi skiller mellom 3 akser hos teodolitten, nemlig vertikalaksen, horisontalaksen og sikteaksen eller siktelinjen, som også går under navn av kollimasjonsaksen. Hos enkelte instrumenter forekommer to vertikalakser. De går under navn av dobbeltaksede teodolitter eller repetisjonsteodolitter. Instrumenter med bare én vertikalakse kalles enaksede. Fig. 87 representerer

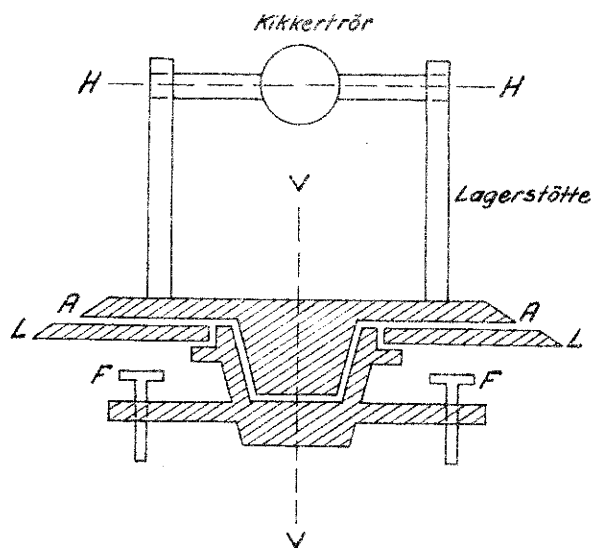


fig. 87

en skjematisk framstilling av en enaksset teodolitt. Den bevegelige del, alidaden A (som også omfatter selve kikkerten), dreies i horisontalplanet om vertikalaksen VV. Instrumentets horisontalsirkel, som er merket med L i fig. 87, er forsynt med en graddeling. Horisontalsirkelen, som går under navn av limbe, kan løsnes og dreies direkte med hånden eller ved hjelp av en spesiell skrue. I tilknytning til den bevegelige del, alidaden, er det anbrakt en viser eller indeks, og det er dennes stilling som angir avlesningene på sirkelen. Indeksen er i praksis utformet som spesielle avlesningsmidler (nonius, mikroskop osv.). Navnet alidade er av arabisk opprinnelse og betyr

arm. Kikkerten kan dreies i vertikalplanet om horisontalaksen HH.

Denne teodolittkonstruksjon tillater to hovedbevegelser: For det første en dreining av alidaden om vertikalaksen og dernest en dreining i vertikalplanet av siktelinjen om horisontalaksen.

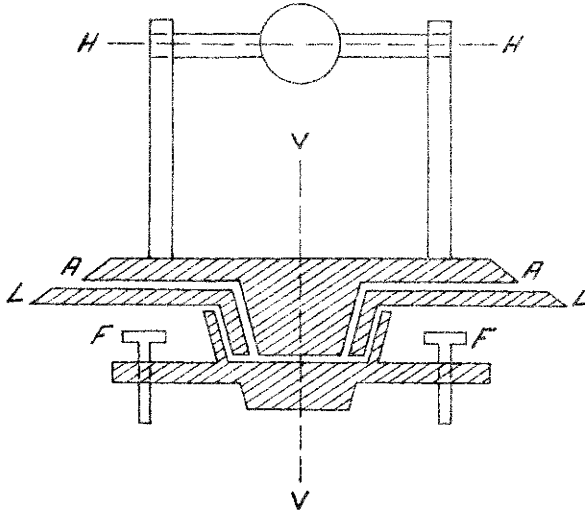


fig. 88

Fig. 88 viser skjematisk bygningen av en toakset teodolitt (repetisjonsteodolitt). Vi kan her skille mellom to vertikalakser, nemlig alidadeaksen og limbeaksen. Alidaden dreier seg om den første, mens alidaden sammen med limben kan dreies om limbeaksen. Denne konstruksjonsform innebærer en viss utvidelse av "aksjonsområdet" i forhold til den enaksede teodolitt, idet vi her har muligheten til å dreie alidaden og limben i fellesskap om vertikalaksen. I måle-

læren skal vi komme nærmere inn på hvilke tilleggsmuligheter som denne toaksede konstruksjon innebærer med hensyn til måling av horisontalvinkler.

Lagerstøttene er i alminnelighet så høye at kikkerten kan slås gjennom, slik at okularende og objektivende bytter plass. Vi snakker derfor om I. og II. kikkertstilling. I. kikkertstilling er den stilling av kikkertrommelen som tillater en direkte avlesning av høydevinkelen eller zenitdistansen til siktepunktet (i I. kikkertstilling vil brukeren ha vertikalsirkelen til venstre for kikkertrommelen).

Tidligere var det vanlig at kikkerten kunne legges om i lagrene, slik at horisontalakseendene bytter plass. Denne konstruksjonsform blir lite brukt på moderne instrumenter.

For sikteaksens, horisontalaksens og vertikalaksens gjensidige stilling gjelder følgende fordringer: 1. Siktelinjen skal være vinkelrett på horisontalaksen. 2. Vertikalaksen skal forlenget skjære horisontalaksen under en rett vinkel.

Dersom disse fordringer er oppfylt, vil horisontalaksen være horisontal når vertikalaksen er loddrettstilt. Når kikkerten da dreies om horisontalaksen, vil siktelinjen beskrive et vertikalt plan, sikteplanet, som vil gå gjennom vertikalaksen dersom kikkerten er sentrisk. Sikteplanets dreining i horisontalplanet måles på den inndelte horisontalsirkel, hvis sentrum også forutsettes å falle i vertikalaksen. Avlesningsmidlene som er festet til alidaden, vil da utføre samme vinkelbevegelse som kikkerten eller sikteplanet.

Av det som er sagt foran, følger at det er horisontalvinkler som blir målt med teodolitten forutsatt at aksene inntar den riktige stilling i forhold til hverandre.

De aksefeil som skriver seg fra at de to nevnte fordringene ikke er oppfylt, går under navn av kollimasjonsfeil resp. horisontalakseskjevhet.

Vi skal senere behandle virkningen av disse aksefeil. Det vil da vise seg at ved å innrette målingene på en spesiell måte, er det mulig å få opphevet virkningen av aksefeilene. Ved å observere i begge kikkertstillinger vil nemlig middeltallet av de to avlesningene være befridd for virkningen av både kollimasjonsfeil og horisontalakseskjevhet + en rekke andre feil som kikkertens og alidadens eksentrisitet.

De to nevnte aksefordringer er derfor ikke å oppfatte som absolutte i den forstand at deres oppfyllelse er en betingelse for å oppnå riktige resultater av vinkelmålingen. Derimot gjelder som absolutt fordring at vertikalaksen må være loddrett under bruken. Det er nemlig ikke mulig å anordne utføringen av målingene på en slik måte at feil ved vinkelmålingen som skriver seg fra vertikalakseskjevhet, blir eliminert.

For å kunne innstille en teodolitts siktelinje nøyaktig på et objekt har vi anordningen med klemskrue og tilhørende mikrometerskrue eller finskrue som den vanligvis benevnes. Fig. 89 anskueliggjør hvordan klem- og finskruen

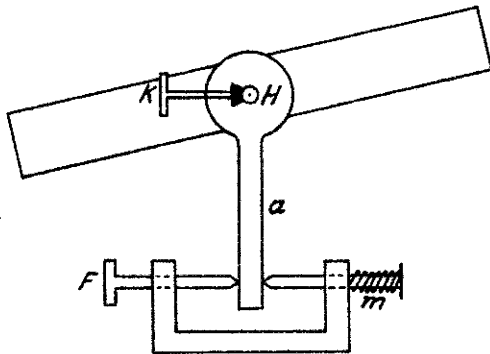


fig. 89

virker ved dreining av kikkerten om horisontalaksen. Ved hjelp av klemskruen koples en arm a til horisontalaksen H. Ved finskruen F med motvirkende fjær m kan denne armen beveges, og kikkerten følger da med. Som alminnelig regel for bruk av finskruen gjelder at den siste innstilling alltid skal skje med urviseren slik at den motvirkende fjæren spennes. Denne regel tar sikte på å redusere effekten av den elastiske ettervirkning.

2. Avlesningsmidler.

Som nevnt, har vi i forbindelse med alidaden en fast indeks som markerer alidadens stilling i forhold til sirkelen. Generelt kan en si at det å lese av på sirkelen, består i å bestemme denne indeks' stilling i forhold til nærmest lavere delestrek. Som regel er nøyaktighetskravene så store at det ikke er tilstrekkelig å bedømme indeksstrekens stilling i forhold til sirkelen

ved øyemål. Teodolitten er derfor utstyrt med spesielle avlesningsanordninger, og vi skal i det etterfølgende behandle noen av de viktigste.

A. Nonien.

Nonien er utformet som en hjelpedeling som er fast forbundet med alidaden. Denne hjelpedelingen befinner seg utenfor sirkeldelingen og kan forskyves i forhold til denne. Intervallene på de to delingene (nonie- og sirkeldelingen) er litt forskjellig. Ønsker vi å lese av $\frac{1}{n}$ av sirkelintervallet L, gjøres hele noniens lengde lik $(n-1)L$ og deles i n like store deler. Hver noniedel, som vi betegner med N, får følgelig lengden

$$N = \frac{1}{n}(n-1)L$$

Forskjellen mellom sirkelintervallene L og nonieintervallene N blir følgelig lik:

$$L - N = L - \left(L - \frac{L}{n}\right) = \frac{L}{n} = a$$

Størrelsen $a = \frac{L}{n}$ kalles noniens angivelse.

Vi skal så ved et eksempel vise hvordan nonieprinsippet kan utnyttes til sirkelavlesning. For det første må vi ha klart for oss at det er

noniens nullpunkt som representerer indeksen.

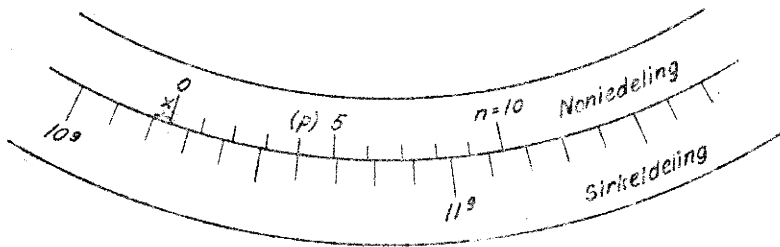


fig. 90

Selve avlesningen foregår på følgende måte: Vi oppsøker først den nærmest lavere sirkeldelingsstrek i forhold til indeksen og leser av denne. Dette er den

såkalte grovavlesning, som i fig. 90 blir $10,2^g$. Den fullstendige avlesning blir følgelig $10,2^g + x$. Stykket x bestemmes ved hjelp av nonien, og det foregår på den måten at vi oppsøker den noniestrek som faller sammen, koinserer, med en sirkeldelingsstrek. Vi forutsetter at det er tilfelle med den p.te noniestrek. Vi har da ifølge fig. 90:

$$x = \overline{pL} - \overline{pN} = p \frac{L}{n} = p \cdot a$$

Her er sirkelintervallene L lik $\frac{1}{10} \cdot 1^g = 0,1^g$. Noniens angivelse er følgelig gitt ved:

$$a = \frac{L}{n} = 0,01^g = 1^c, \text{ dvs. } x = 4^c$$

Den fullstendige avlesning blir følgelig lik $10,24^9$.

Ved ufullstendig koinsidens tas middeltallet av de to strekparene som faller best sammen. Noniens avlesningsnøyaktighet blir således lik om lag fjerdeparten av noniens angivelse. Forsøk har bekreftet at så er tilfelle, idet det har vist seg at middelfeilen på en enkelt nonieavlesning kan settes til $1/3$ á $1/4$ av nonieangivelsen.

De to delingene, nonie- og sirkeldelingen, må ligge i samme plan. Dersom denne betingelse ikke er oppfylt, vil bedømmelsen av koinsidensen bli avhengig av øyets stilling, dvs. av synsstrålenes retning. Vi får med andre ord samme parallakseeffekt som vi påviste når det reelle bilde av objektet ikke falt i trådkorsplanet (se side 49). Ved avlesningen bør en derfor gjøre seg til regel å holde øyet slik at synsretningen til de sammenfallende streker er mest mulig vinkelrett på delingenes plan.

Som regel anvendes 2 diamentralt anbrakte nonier. For å øke avlesningsnøyaktigheten brukes lupe.

B. Avlesningsmikroskop.

Mikroskopet er i prinsippet innrettet som en kikkert og virker i optisk henseende på samme måte (se fig. 91). Forskjellen mellom mikroskop og kikkert refererer seg egentlig bare til bruken. Mens kikkerten brukes til å betrakte fjerne gjenstander (derav navnet teleskop, idet tele som bekjent betyr fjern), brukes mikroskopet til å betrakte nærliggende og små gjenstander, i foreliggende tilfelle sirkeldelingen. Ved mikroskoper tar en sikte på å gjøre det reelle bilde av gjenstanden større enn gjenstanden selv. Det oppnås når objektavstanden oppfyller betingelsen

$$f < a < 2f$$

hvor f er mikroskopobjektivets brennvidde.

Skal mikroskopet kunne brukes som avlesningsmiddel, må det anbringes en indeks, svarende til kikkertens trådkors, i det plan hvor det reelle bilde av sirkeldelingen dannes. Alt etter hvilken metode som nyttes til å bestemme indeksens stilling i forhold til sirkeldelingen, inndeles avlesningsmikroskopene i strek-, skala-, nonie-, skrue- og planglassmikroskop.

a) Strekmikroskopet.

Strekmikroskopet er den enkleste type av avlesningsmikroskoper. Indeksen består her av en enkelt strek, anbrakt i det reelle bildes plan. Fig. 91 anskueliggjør mikroskopets virkemåte.

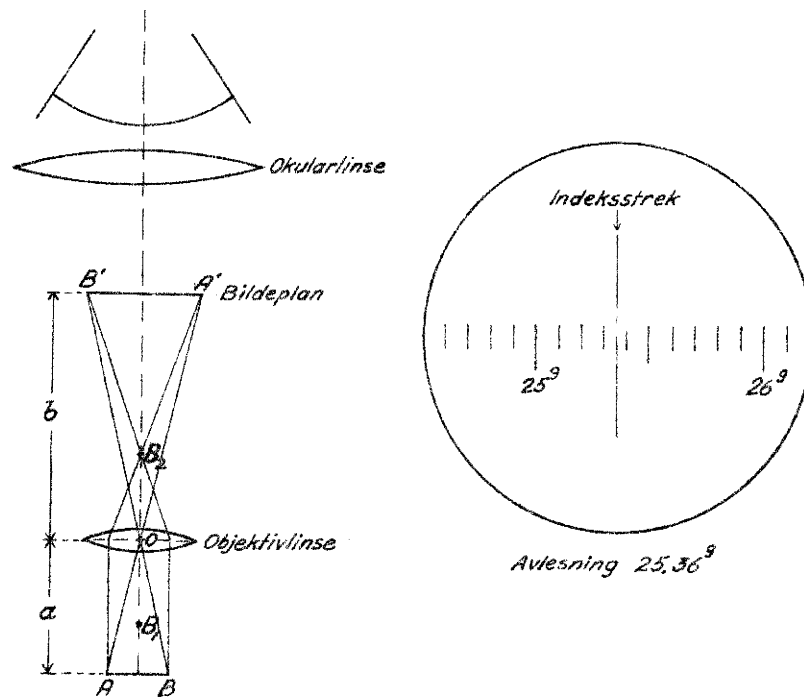


fig. 91

I fig. 91 representerer AB sirkeldelingen. Av denne dannes et reelt bilde $A'B'$ i samme plan som indeksstreken er anbrakt i.

Når strekmikroskopet skal nyttes som avlesningsmiddel, må følgende fordringer være oppfylt:

1. Indeksstreken må ses tydelig. Følgelig må okularlinsen være forskyvbar. Denne innstilling foretas én gang for alle for samme bruker.

2. Det reelle bilde må falle i indeksstrekens plan. Det kan oppnås ved forskyvning av hele mikroskopet, slik at a og dermed også b endres. Det gis også konstruksjoner som tillater en felles bevegelse av okular og indeksstrek på samme måte som vi har det hos siktekikkerten.

3. Indeksstreken må være parallell med sirkeldelingens streker. En feil her kan rettes ved å dreie mikroskoprøret.

Strekmikroskopet er enkelt bygget, lett og raskt å avlese, lett å justere, men ikke særlig nøyaktig.

b) Skalamikroskopet.

Skalamikroskopet har i bildeplanet en hjelpedeling hvis hele lengde er lik lengden av avbildningen av et sirkeldelingsintervall. Skalaens nullstrek representerer indeksen. I fig. 92 er avlesningen lik $22,64^{\circ}$. Hva bruken av skalamikroskopet angår, gjelder de samme 3 fordringene som anført ovenfor under strekmikroskopet, men i tillegg til disse kommer en 4. fordring:

Det reelle bilde B som objektivet danner av sirkelintervallet L, må være like stort som skalaens lengde S (se fig. 93), dvs. skalaen og sirkelen må være avstemt etter hverandre.

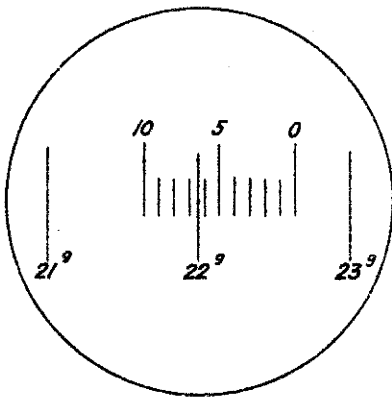


fig. 92

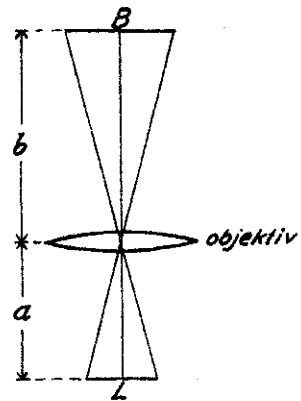


fig. 93

Den 4. fordring kan uttrykkes matematisk ved følgende to ligninger:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad \text{og} \quad \frac{a}{b} = \frac{L}{B}$$

Av disse ligninger fås:

$$a = f\left(1 + \frac{L}{B}\right) \quad \text{og} \quad b = f\left(1 + \frac{B}{L}\right)$$

hvor altså B er den korrekte lengde av bildet til L. Vi tenker oss så at vi istedenfor lengden B har B_0 , slik at

$$B = B_0 + dB$$

De tilsvarende endringer i a og b finnes ved differensiasjon:

$$da = -\frac{f \cdot L}{B^2} dB = -\frac{a}{b} f \frac{dB}{B} \quad \text{og} \quad db = \frac{f}{L} dB = \frac{b}{a} f \frac{dB}{B}$$

For å kunne foreta en slik avstemming mellom skala og sirkeldeling må mikroskopprøret som helhet kunne forskyves langs sin akse i forhold til sirkelen, og videre må objektivet kunne forskyves innen mikroskopprøret. Forskyvelsen av mikroskopet som helhet, er gitt ved:

$$da + db = \left(\frac{b^2 - a^2}{ab}\right) f \frac{dB}{B} = (b-a) \frac{dB}{B}$$

Som tidligere nevnt, er $B > L$, dvs. $b > a$. Følgelig blir uttrykket i parenteser alltid positivt, dvs. forskyvelsen av mikroskopet får samme fortegn som dB.

En avstemming kan utføres "analytisk" ved hjelp av formelene for da og db, men i praksis skjer det som regel ved å prøve seg fram, idet en holder seg til følgende regel, som følger av formelen for da+db:

Er bildet av sirkelintervallene for lite, må mikroskopet som helhet fjernes fra sirkelen og omvendt. Deretter forskyves objektivet innenfor mikroskoprøret inntil bildet av sirkeldelingen faller i mikroskopets indeksplan.

c) Noniemikroskopet.

Hos noniemikroskopet forekommer også en hjelpedeling, men den er her utformet som noniedeling. Noniedelingens nullstrek representerer indeksen.

I fig. 94 er avlesningen lik $16,66^{\circ}$.

Den 4. fordring som vi stilte opp for skalamikroskopets vedkommende, må her formuleres på følgende måte: Bildet av et sirkelintervall må være slik avstemt til nonieintervallene at differensen mellom dem er lik noniens angivelse, dvs. vi må ha

$$L - N = \frac{L}{n}$$

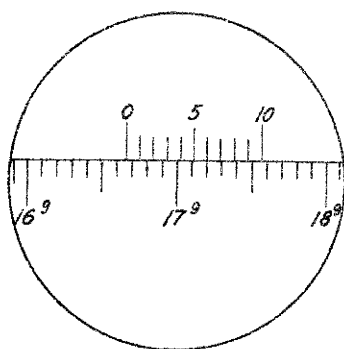


fig. 94

Den mekaniske innretning er den samme som hos skalamikroskopet, og justeringen foregår på samme måten.

d) Skruemikroskopet.

Skruemikroskopet skiller seg ut fra de andre avlesningsmikroskopet derved at utmålingen av stykket x på det reelle bilde utføres ved hjelp av en mikrometerskrue. I det planet hvor det reelle bilde dannes, er det anbrakt en ramme med en dobbeltråd. Denne dobbeltråd kan forskyves ved hjelp av en mikrometerskrue, som står i forbindelse med en trommel som angir forskyvelsen. En hel omdreining av skruen svarer til en forskyvelse av dobbeltrådene lik ett sirkelintervall. Fig. 95 viser hvordan innstilling og avlesning foregår.

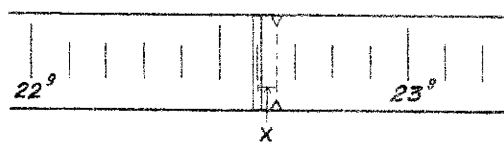


fig. 95

Indeksen representeres her av den stilling av dobbeltråden som svarer til nullavlesning på trommelen. Denne utgangsstilling av dobbeltråden er markert med to pilespisser. Avlesningen skjer på følgende måte: Ved hjelp av mikrometerskruen stilles dobbeltråden symmetrisk om den delestrek på sirkelen som er den nærmest lavere i forhold til indekspilene. Den sirkelstreken som dobbeltråden da stilles over, representerer

grovavlesningen. I tillegg kommer så trommelavlesningen svarende til stykket x . I fig. 95 er altså avlesningen lik:

$$22,6^9 + \text{trommelavlesning.}$$

Ofte er skruemikroskopet innrettet slik at det svarer flere hele omdreininger av mikrometertrommelen til ett sirkelintervall. I bildeplanet er det da anbrakt en tannrekke som har til oppgave å markere antall hele omdreininger av skruen. Fig. 96 viser et eksempel på avlesning når skruemikroskopet

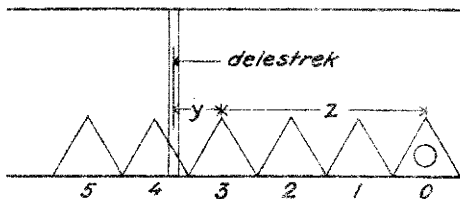


fig. 96

er innrettet på denne måte. Spissen til nulltaggen (eller rettere sagt den stilling dobbeltstreken inntar over nulltaggen ved nullavlesning på trommelen) representerer indeksen. Den fullstendige avlesning setter seg her sammen av 3 komponenter:

1. Grovavlesning svarende til den delestrek som dobbelttråden anbringes over.
2. Stykket z svarende til vinkelverdien av 3 tagger.
3. Stykket y som leses av på mikrometertrommelen.

Også når det dreier seg om skruemikroskopet, må de 3 tidligere oppstilte grunnleggende fordringer være oppfylt. I tillegg kommer som 4. fordring: Mikroskopet må være avstemt slik at en hel trommelomdreining (eller et helt antall trommelomdreininger dersom mikroskopet er anordnet som i fig. 96) bevirker en forflytning av dobbeltstreken lik et sirkelintervall.

En eventuell justering skjer ved forskyvning av hele mikroskopet i forhold til sirkelen og etterfølgende forskyvning av objektivet i mikroskoprøret etter de samme regler som ble anført for skalamikroskopet.

Ved å foreta to innstillinger og tilhørende avlesninger, én med dobbelttråden stilt over delestreken til venstre for indeksen og deretter stilt over delestreken til høyre for indeksen, skaffer vi oss grunnlag til å korrigere avlesningene, slik at vi oppnår riktig resultat selv om mikroskopet ikke er avstemt. De to innstillingene skal resultere i samme trommelavlesning dersom mikroskopet er avstemt. En eventuell differens mellom de to avlesninger er følgelig kriteriet på at mikroskopet ikke er avstemt. Differensen går under navn av run.

Vi skal i det etterfølgende vise hvordan vi kan korrigere for run. I fig. 97 representerer v og h de to innstillinger av dobbelttråden over venstre resp. høyre delestrek i forhold til indeksen. De tilhørende avlesninger

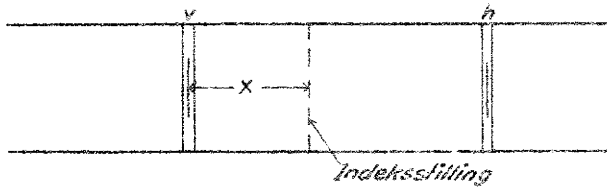


fig. 97

verdi for trommelenheten, som vi betegner med t , er følgelig gitt ved:

$$t = \frac{T}{T + \delta} = \frac{1}{1 + \frac{\delta}{T}} \approx 1 - \frac{\delta}{T}$$

Den korrekte verdi for stykket x er følgelig lik

$$x = V \cdot t = \underline{\underline{y - V \frac{\delta}{T}}}$$

Eksempel:

$$V = 872^{cc}$$

$$H = 852^{cc} \quad T = 1000^{cc} \quad , \quad x = 872 - 872 \frac{20}{1000} = \underline{\underline{854,6^{cc}}}$$

$$\delta = +20^{cc}$$

En oppnår ingen eliminasjon av runfeilen ved å ta middeltallet av V og H , slik som det blir hevdet i enkelte lærebøker.

Av andre justeringer som det kan bli tale om å foreta med skruemikroskopet, skal her omtales indeksregulering. Denne kommer på tale dersom dobbelttråden ikke faller sammen med indekspilen når trommelen er stilt på null. Korrigeringen skjer på den måten at dobbelttråden stilles på indekspilen, trommelskruen holdes fast og en dreier trommelen, som bare sitter ved friksjon, til dens nullstilling.

Med hensyn til bruken av skruemikroskopet gjelder regelen at den siste innstilling av dobbeltstreken alltid skal skje i samme retning og slik at rammens motvirkende fjær spennes. Regelen tar sikte på å motvirke den såkalte "dødgang".

e) Planglassmikroskopet.

Planglassmikroskopet er i virkeligheten ikke noe annet enn et optisk mikrometer. I det reelle bildeplan er anbrakt en fast enkelt- eller dobbeltstrek. Stykket x måles ved hjelp av en planparallell glassplate som står i forbindelse med en inndelt mikrometertrommel. Fig. 98 anskueliggjør prinsippet. I nullstillingen er den planparallelle glassplates sideflater vinkelrett

er V og H . Vi innfører betegnelsen δ for run og har definisjonsmessig:

$$\delta = V - H$$

Vi innfører betegnelsen T for det antall trommelenheter som sirkelintervallet skal inneholde. Den ~~korrekte~~ ^{aktuelle} verdi for trommelenheten, som vi betegner med t , er følgelig gitt ved:

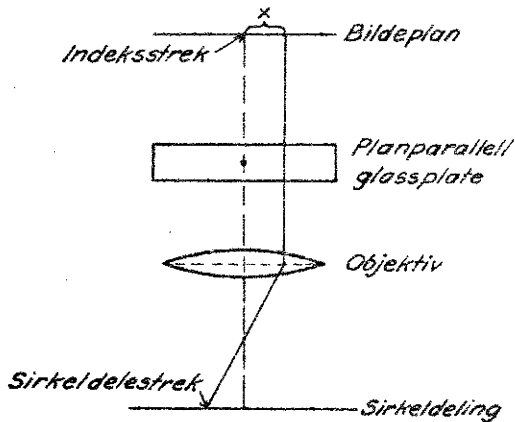


fig. 98

Det finnes en hel rekke konstruksjoner som bygger på dette prinsippet.

C. Wilds koinsidensavlesning.

Som regel er teodolittene utstyrt med to diamentralt anbrakte avlesningsmidler. Ved å lese av begge og ta midlet oppnår vi for det første å øke observasjonsnøyaktigheten, og dernest - som vi senere skal vise under behandlingen av de forskjellige instrumentfeil hos teodolitten - å eliminere virkningen av den instrumentfeil som går under navn av alidadens eksentrisitet. Det sier seg selv at det er tungvint og tidskrevende å avlese på to steder. Instrumentkonstruktørene har derfor satt mye inn på å komme fram til en løsning som muliggjør avlesning på de to diamentrale sirkelstedene i ett og samme avlesningsmiddel. Problemet ble først løst av den norske instrumentmaker Bålsrud. Ved å la lysstrålene passere gjennom prizmer lyktes det ham å få bildene av to diamentrale steder på sirkelen til å falle ved siden av hverandre i samme bildeplan. Bildene av de to sirkelstedene kan så betraktes gjennom ett og samme okular.

Wilds koinsidensavlesning representerer en videre utvikling av prinsippet som lå til grunn for Bålsruds avlesningsmikroskop. Også her avbildes to diamentrale steder på sirkelen like over hverandre, bare atskilt ved en tynn strek, med besifringen hver sin veg (se fig. 99). Som indeks opptrer en enkelt indeksstrek i det felles bildeplan.

I fig. 99 er avlesningene $228,3^g + a_1$ og $28,3^g + a_2$. Det som her interesserer, er middeltallet av de to avlesningene, som blir lik:

$$A = 228,3^g + \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$$

på objektivets optiske akse. Ved å dreie den planparallelle glassplaten får vi en parallellforskyvelse av den avbildningsstråle fra den aktuelle sirkeldelingsstrek som går gjennom objektivets brennpunkt B og er parallell med objektivets optiske akse etter passasjen av objektivet. Mikrometertrommelen dreies til bildet av denne sirkeldelingsstrek og indeksstreken faller sammen, koinsiderer, og stykket x avleses direkte på trommelen.

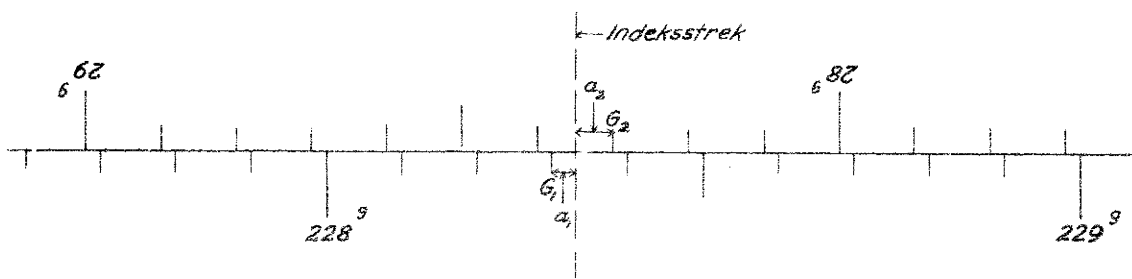


fig. 99

idet vi holder på gradtallene i den nederste delingen. Bestemmelsen av mid-
deltallet $\frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ skjer automatisk ved hjelp av et optisk mikrometer som
består av to planparallele glassplater. De to glassplatene er festet til en
felles akse og kan dreies ved hjelp av en trommel. Når trommelen dreies,
dreier platene seg hver sin veg. Ved å la lysstrålene fra de to delestrekene
som begrenser stykkene a_1 og a_2 , og som i fig. 99 er kalt G_1 og G_2 , passere
gjennom hver sin av de to glassplatene, er det mulig å bringe de to delestrek-
ene G_1 og G_2 til å koincidere (se fig. 100). Når glassplatene dreies i for-

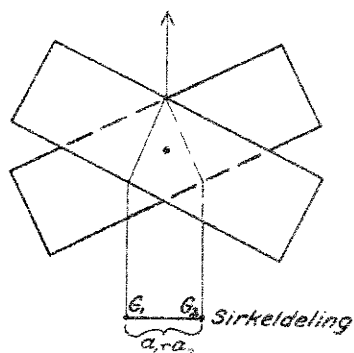


fig. 100

hold til hverandre, blir nemlig strålene fra
 G_1 og G_2 parallellforskjøvet mot hverandre.
Når de to delestrekene er brakt til koinsi-
dens, kan parallellforskyvelsen $\frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ av-
leses direkte på en trommel som står i for-
bindelse med glassplatenes felles omdreining-
akse. Det er klart at den koinsidens som er
oppnådd for delestrekene G_1 og G_2 , også vil
omfatte samtlige to og to korresponderende
delestreker i de to sirkelbildene. Etter
koinsidensinnstillingen vil derfor de to sir-
keldelingene ligge slik i forhold til hverandre som fig. 101 viser.

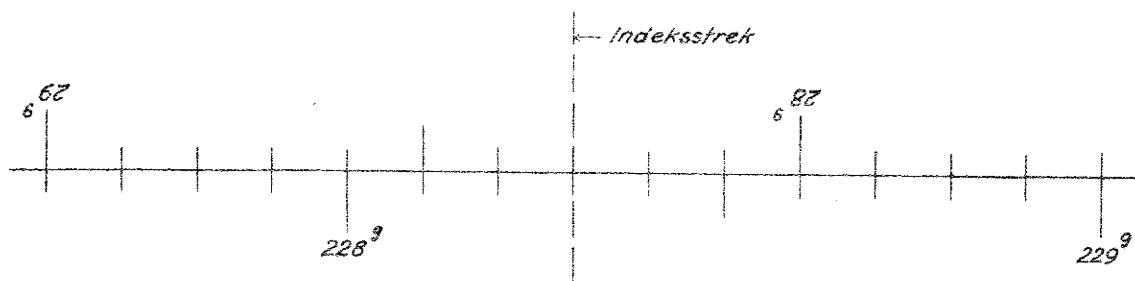


fig. 101

Avlesningen blir altså: $228,3^9 +$ trommelavlesning. Av fig. 101 ser

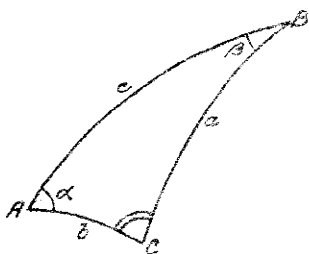
vi at det strengt tatt ikke er nødvendig med noen indeksstrek. Vi kommer jo nemlig også fram til $228,3^g$ ved å gå ut fra 228^g og telle intervaller inntil det korresponderende 200^g .s forskjellige gradtall i den andre delingen (i foreliggende tilfelle 28^g), og dividere med to. Som regel finnes likevel en indeksstrek for å lette grovavlesningen. Ellers er det å bemerke at gradintervallene som regel er inndelt i 5 når den Wildske koincidensavlesning benyttes, slik at første desimal i gradtallet er lik antall intervaller mellom det hele gradtall og indeksstreken multiplisert med to, eller om vi vil lik antall intervaller mellom det hele gradtall og det korresponderende 200^g .s forskjellige gradtall i den delingen som står på hodet.

3. De viktigste instrumentfeil hos teodolitten.

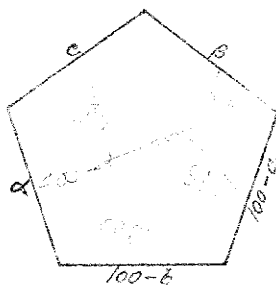
Vi skal i det etterfølgende behandle de viktigste instrumentfeil, deres virkning på målingene, hvordan vi kan konstatere deres tilstedeværelse, og hvordan vi kan justere instrumentene for samme:

Utledningen av virkningen av de forskjellige slags instrumentfeil på målingene faller enklest ved sfærisk betraktning. Regningen forenkles derved at de søkte størrelsene inngår i rettvinklede trekanter. Av formler fra den sfæriske trigonometri får vi derfor bare bruk for slike som angår rettvinklede trekanter, og dette formelkompleks er lett å huske fordi det hele rommes i Nepers regel. Når vi skal praktisere Nepers regel (hvis gyldighet altså er begrenset til rettvinklede sfæriske trekanter), setter vi av elementene i den rettvinklede sfæriske trekant fortløpende som sider i en hjelpefemkant, idet vi utelater den rette vinkel og innfører katetenes komplementer istedenfor katetene selv (se fig. 102).

Sfærisk trekant.



Hjelpefemkant.



Nepers regel sier da:
Cosinus til en hvilken som helst side i femkanten er lik produktet av sinus til de to motstående sider, eller lik produktet av ctg til de to hosliggende sider.

fig. 102

Ved regning med sfæriske trekanter må en ha klart for seg at

trekantsidene a , b og c ikke er sidelengder, men sentralvinkler. Kaller vi tilhø

de tilhørende sidelengder for \bar{a} , \bar{b} og \bar{c} , har vi:

$$a = \frac{\bar{a}}{r}, \quad b = \frac{\bar{b}}{r} \quad \text{og} \quad c = \frac{\bar{c}}{r}$$

hvor r er kulens radius.

a) Kollimasjonsfeilen.

SS / HH

Dersom siktelinjen danner vinkelen $100^g \pm c$ med horisontalaksen, betegnes c som instrumentets kollimasjonsfeil. Dreies kikkerten om horisontalaksen, vil siktelinjen beskrive en kjegleflate med åpningsvinkel $200^g - 2c$ istedenfor et plan som den skulle dersom siktelinje og horisontalakse sto vinkelrett på hverandre. Fig. 103 anskueliggjør forholdene. Figuren er fram-

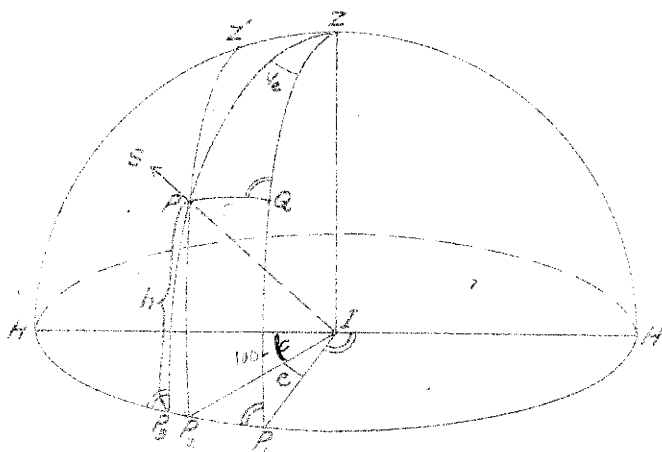


fig. 103

zenit, IZ er loddlinjen, HH er horisontalaksen og IS er siktelinjen som er rettet mot et punkt P . Det korrekte sikteplan, som vi vil ha hatt dersom c hadde vært null, er planet gjennom I , P_1 og Z , som er et stor-sirkelplan vinkelrett på horisontalaksen. På grunn av kollimasjonsfeilen c vil siktelinjen skjære kule langs småsirkelen P_2, P og Z' .

Det vertikale planet gjennom I , Z og siktelinjen representerer sikteplanet. Av det som er sagt foran, følger at sikteplanet ikke er konstant, men foretar egenbevegelser når kikkerten dreies om horisontalaksen.

Vi betrakter så den stilling av siktelinjen, som svarer til innsiktning mot et vilkårlig punkt P under høydevinkelen h . Det vertikale plan gjennom I , P og Z representerer det aktuelle sikteplan, dvs. det sikteplan som gjelder for innsiktningen mot P . Uten kollimasjonsfeil ville, som tidligere anført, planet gjennom I , P_1 og Z ha vært sikteplan. Virkningen av kollimasjonsfeilen er lik vinkelen mellom det aktuelle og det korrekte sikteplan, altså lik vinkelen v_c i fig. 103. Av den rettvinklede sfæriske trekant PZQ finner vi ved bruk av Nepers regel (se fig. 104):

$$\sin c = \cos h \sin v_c$$

dvs.

$$\sin v_c = \frac{\sin c}{\cos h}$$

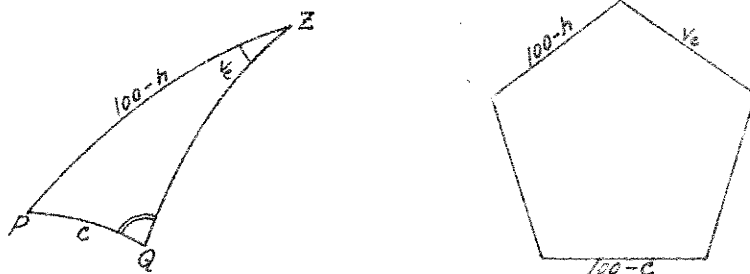


fig. 104

c vil alltid være en liten vinkel. Vi kan derfor for alle rimelige verdier av h sette:

$$v_c = \frac{c}{\cos h}$$

Virkningen av kollimasjonsfeilen vokser

altså med høydevinkelen. Formelen for v_c gir virkningen på en enkelt avlesning. Virkningen på en vinkel, observert i bare én kikkertstilling, er følgende gitt ved:

$$v'_c = \frac{c}{\cos h_2} - \frac{c}{\cos h_1} = c \frac{\cos h_1 - \cos h_2}{\cos h_1 \cos h_2}$$

idet vinkelen jo framkommer som differens mellom to avlesninger.

Av denne formel framgår det at virkningen av kollimasjonsfeilen på en vinkelmåling blir null dersom høydevinklene til de to objektene som representerer vinkelens ben, er like store i tallverdi.

Slås kikkerten gjennom og innstilles på samme punkt, vil c opptre med motsatt fortegn. Ved å observere i begge kikkertstillinger og ta middel-tallet av de to målinger vil vi følgelig få eliminert virkningen av kollimasjonsfeilen.

b) Verifisering for kollimasjonsfeil.

Verifiseringen for kollimasjonsfeil må legges slik an at vi får isolert kollimasjonsfeilen fra eventuelle andre instrumentfeil. Det siktes her til horisontalakseskjevhet og vertikalakseskjevhet. Som vi senere skal vise, er virkningen av begge disse instrumentfeilene proporsjonale med tg til høydevinklene, dvs. virkningen av horisontalakse- og vertikalakseskjevhet faller bort når høydevinkelen til de tilsiktede punkter er null, mens kollimasjonsfeilen da gir seg tilkjenne med sin korrekte verdi. Herav følger at vi ved verifisering for kollimasjonsfeil må operere med horisontal siktelinje. Verifiseringen kan utføres på følgende 3 måter:

1. Ved omlegning i lagrene. Vi tilsikter et fjernt punkt P valgt således at høydevinkelen til P blir liten. Kikkerten legges så om i sine lagre. Dersom nå siktelinjen ikke treffer P, skyldes det at instrumentet har kollimasjonsfeil. Vinkelen mellom siktelinjen etter omlegningen og retningen til P er lik den dobbelte kollimasjonsfeil (se fig. 105). Instrumentet justeres ved å

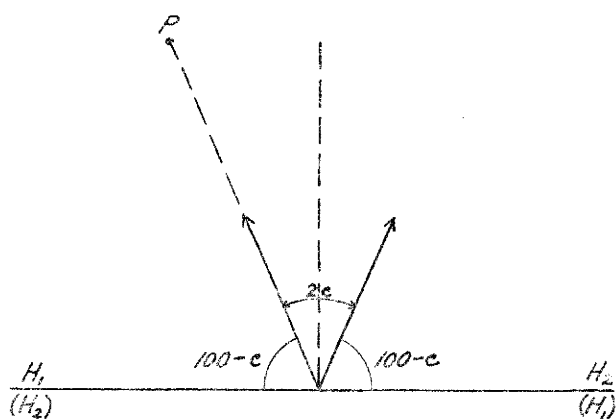


fig. 105

flytte trådkorset inntil den vertikale tråd halverer vinkelavstanden mellom retningen til P og siktelinjens retning etter omlegningen. Denne justering utføres ved hjelp av trådkorsets korreksjonsskruer.

Denne metodes anvendelighet er begrenset til den type instrumenter som kan legges om i sine lagre. Denne konstruksjonsart blir sjeldnere etter hvert, slik at metoden ikke spiller noen stor

praktisk rolle.

2. Ved dobbelt gjennomslag. Kikkerten siktes inn som under 1 og slås så gjennom og pkt. M_1 fikseres (f.eks. ved avlesning på en horisontalstilt nivålerstang). Kikkerten innsiktes så igjen mot P ved dreining om vertikalaksen

og slås igjennom på nytt, hvorved siktelinjen peker mot pkt. M_2 . Av fig. 106 ser vi at avstanden M_1M_2 kan betraktes som buen til vinkelen $4c$. Justeringen skjer ved å forskyve siktelinjen ved hjelp av trådkorsets korreksjonsskruer $1/4$ av avstanden M_1M_2 i retning mot M_1 .

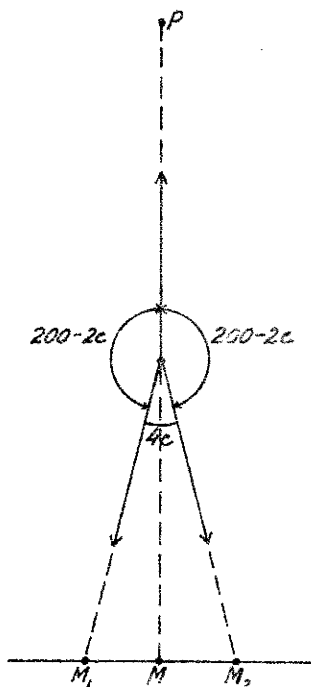


fig. 106

Av figuren går det også fram hvordan stikking av en rett linje ved hjelp av en teodolitt med kollimasjonsfeil kan utføres. Midtpunktet M mellom M_1 og M_2 befinner seg nemlig på den rette linjen mellom P og instrumentets oppstillingspunkt.

3. Ved gjennomslag og avlesning på sirkelen. Kikkerten siktes inn mot et punkt P, og vi leser av på sirkelen a_1 . Kikkerten slås så gjennom og siktes på nytt inn mot P_1 , og vi leser av a_2 . Av fig. 107 ser vi at denne transaksjon betinger en vinkelbevegelse lik $200^g \pm 2c$. Differensen mellom de to avlesningene vil følgelig bli lik $200^g \pm 2c$. Som tidligere omtalt, blir virkningen av kollimasjonsfeilen eliminert ved å observere i begge kikkertstil-

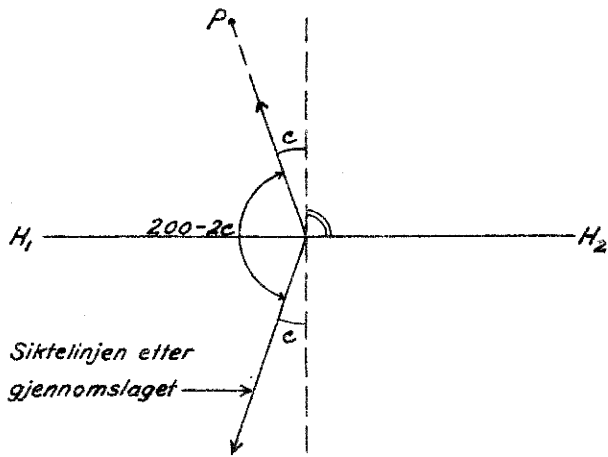


fig. 107

Av de betraktninger som ligger til grunn for siste metode, følger at en ved å observere i begge kikkertstillinger vil merke om instrumentet har kollimasjonsfeil og hvor stor den er, idet avlesningen i de to kikkertstillingene vil avvike $2c$ fra hverandre (bortsett fra 200^g). Det siste forutsetter riktignok at høydevinklene er tilnærmet lik null.

c) Horisontalakseskjevhet.

Dersom horisontalaksen danner vinkelen $100^g \pm i$ med vertikalaksen, betegnes i som horisontalakseskjevhet. Med loddrettstilt vertikalakse vil da horisontalaksen danne vinkelen $\pm i$ med horisontalplanet. Ved dreining om horisontalaksen vil siktelinjen beskrive et plan som avviker vinkelen i fra

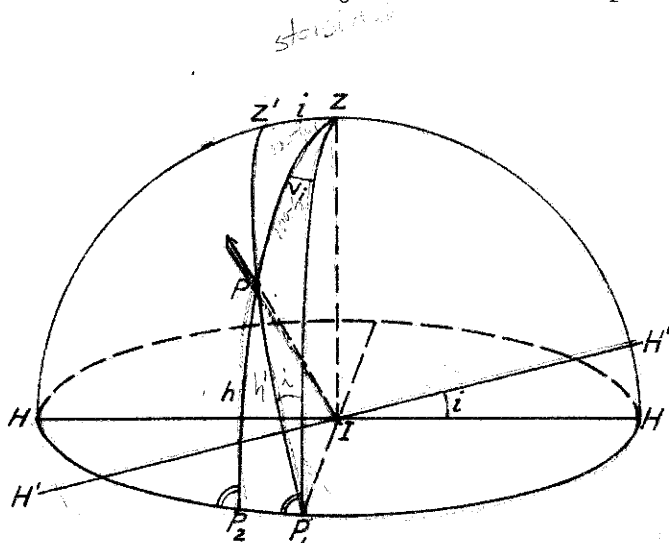


fig. 108

vertikalplanet. I fig. 108 skjærer vertikalaksen kulen i Z . HH som står vinkelrett på IZ er følgelig den korrekte stilling av horisontalaksen, mens $H'H'$ er den skjeve stilling, som danner vinkelen i med HH . Horisontalakseskjevheten er følgelig lik i . Ved dreining om horisontalaksen $H'H'$ beskriver siktelinjen IS storsirkelen P_1PZ' . Ved dreining om HH , som alt-

så er horisontalaksens korrekte stilling, ville siktelinjen ha beskrevet storsirkelplanet IP_1Z , som følgelig blir det korrekte sikteplan.

linger og danne middeltallet. Følgelig vil middeltallet av a_1 og a_2 representere den avlesning vi ville ha hatt dersom instrumentet var uten kollimasjonsfeil. Vi innstiller derfor avlesningsmidlet på middeltallet av a_1 og a_2 (bortsett fra 200^g), og bringer siktelinjen til å treffe P ved forskyvning av trådkorset.

Denne metode er den enkleste og derfor mest brukte metode til verifisering for kollimasjonsfeil.

Vi betrakter så den stilling av siktelinjen som svarer til innsiktning mot et vilkårlig punkt P under høydevinkelen h . Det vertikale plan gjennom I, P og Z representerer det aktuelle sikteplan under innsiktningen mot P. Virkningen av horisontalakseskjevheten er lik vinkelen mellom det aktuelle og det korrekte sikteplan, altså lik vinkelen v_i i fig 108. v_i kan bestemmes på grunnlag av den rettvinklede sfæriske trekanten PZ'Z (se fig. 109)

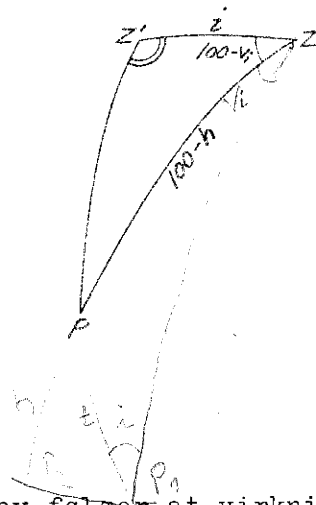
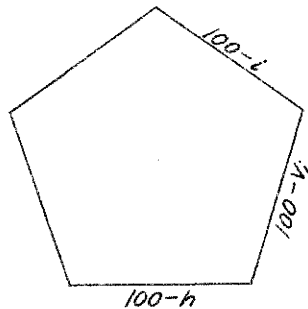


fig. 109



$$\sin v_i = \operatorname{tg} i \operatorname{tg} h$$

Da i forutsettes å være en liten vinkel, er det tillatt for moderate verdier av h å sette:

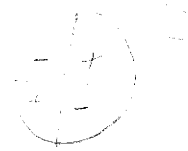
$$v_i = i \operatorname{tg} h$$

I den andre kikkertstilling vil i få motsatt fortegn. Her-

av følger at virkningen av horisontalakseskjevhet elimineres ved å observere i begge kikkertstillinger og ta middeltallet av de to avlesninger.

Uttrykket for v_i refererer seg til feilen på en enkelt avlesning. Feilen på en vinkel mellom punktene P_1 og P_2 med høydevinklene h_1 og h_2 , observert i bare en kikkertstilling, blir følgende lik:

$$v_i' = i(\operatorname{tg} h_2 - \operatorname{tg} h_1)$$



Som det framgår av denne formel, er det ikke tilstrekkelig at punktene har samme vinkelavstand fra horisonten for å få eliminert virkningen av horisontalakseskjevheten, slik som tilfellet var for kollimasjonsfeilens vedkommende, men høydevinklene må også ha samme fortegn.

d) Verifisering for horisontalakseskjevhet.

Vi skal i det etterfølgende behandle to verifiseringsmetoder for horisontalakseskjevhet:

1. Nedføring av høytliggende punkt. Vi tilsikter et høytliggende punkt P, fører kikkerten ned i tilnærmet horisontal stilling og leser av på en horisontalt anbrakt stang. Kikkerten slås gjennom, hvorefter det samme gjentas i den andre kikkertstillingen med stangavlesning M_2 . Punktet $M = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)$ befinner seg da i det vertikale plan gjennom instrumentet og P. Justeringen skjer ved å sikte inn kikkerten mot M, hvorefter den dreies til P kommer inn i synsfeltet. Ved å justere det korrigerbare akselager bringes så siktelinjen til å treffe P.

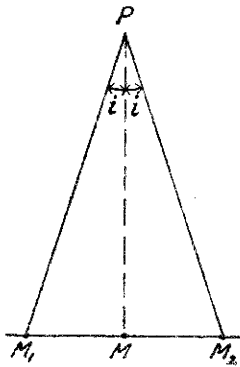


fig. 110

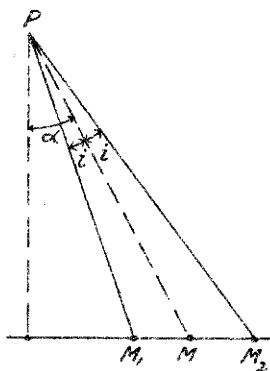


fig. 111

Ved denne metode er det strengt tatt ikke nødvendig at vertikalaksen er fullstendig loddrettstilt. Det ser vi av fig. 111, hvor α er vertikalaksens avvik fra loddlinjen gjennom P. Av praktiske grunner er det imidlertid fordelaktig med tilnærmet loddrettstilt vertikalakse under denne prøve.

2. Med rytterlibelle. Med nøyaktig loddrettstilt vertikalakse foretar vi avlesning av boblens stilling. Deretter endevendes libellen med ny avlesning av libellen. Differensen mellom de to avlesningene er lik den dobbelte horisontalakseskjevhet. Halvparten av differensen fjernes ved hjelp av horisontalakselagerets korreksjonsskruer.

Moderne instrumenter er som regel slik konstruert at det ikke er mulig for brukeren å foreta korrigeringskorreksjon for horisontalakseskjevhet.

e) Vertikalakseskjevhet.

Vertikalakseskjevhet er egentlig ikke noen instrumentfeil slik som kollimasjonsfeil og horisontalakseskjevhet. Den hører derfor heller ikke inn under de systematiske feil, da den etter sin opprinnelse er av tilfeldig natur. Den veksler nemlig både med hensyn til størrelse og retning fra oppstilling til oppstilling. Når det likevel faller naturlig å behandle den sammen med instrumentfeilene, er det fordi at selv om vertikalakseskjevheten med hensyn til opprinnelsen er en tilfeldig feil, så forholder den seg systematisk hva virkningen angår. Som vi senere skal se, er det nemlig mulig beregningsmessig å fiksere virkningen av den. Det henger igjen sammen med at feilen er konstant mellom hver justering av instrumentets vertikalstilling. Nøyaktigheten av loddrettstillingen av vertikalaksen vil hovedsakelig avhenge av den anvendte libelles finhet.

Vi skal i det etterfølgende undersøke virkningen av vertikalakseskjevhet på horisontalvinkelmålingene. I fig. 112 peker den feilaktig oppstilte vertikalakse mot Z' og ikke mot Z som den skulle. Vertikalaksens avvik fra loddlinjen er lik vinkelen u , som altså blir vertikalakseskjevheten. Tegneplanet faller sammen med planet gjennom I , Z og Z' , altså i samme planet som horisontalakseskjevheten u . Horisontalplanet faller sammen med planet gjennom 1, 2, 3 og 4. Når vi dreier instrumentet om vertikalaksen $I Z'$ vil hori-

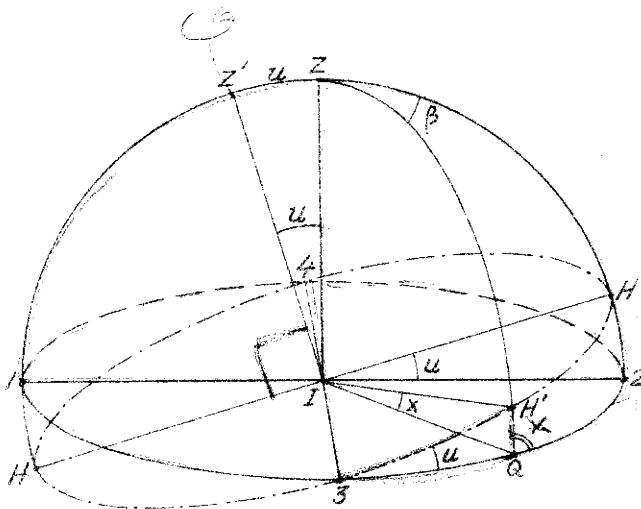


fig. 112

horisontalaksens helning lik u , mens den i retningen vinkelrett på tegneplanet, altså i retningen 3-4 er lik null. Mellom disse to yttergrenser vil altså horisontalaksens helning variere.

Vi betrakter så en vilkårlig stilling $I H'$ av horisontalaksen svarende til vinkelen β i forhold til figurens plan. I denne stilling har horisontalaksen en helningsvinkel i forhold til horisontalplanet som vi betegner med x , hvor x kan utledes av den rettvinklede sfæriske trekant $3H'Q$.

cos beta = ctg u tg x

$$\cos \beta = \text{ctg } u \text{ tg } x, \text{ dvs.}$$

$$\text{tg } x = \text{tg } u \cos \beta \text{ eller}$$

$$x = u \cos \beta$$

idet vi forutsetter at u er en liten vinkel. Da vi utledet virkningen av horisontalakseskjevhet på målingene, viste vi at denne var gitt ved:

$$v_i = i \text{ tg } h$$

I det foreliggende tilfelle er horisontalakseskjevheten gitt ved $x = u \cos \beta$. Vi kan derfor uten videre sette virkningen av vertikalakseskjevheten lik:

$$v_u = x \text{ tg } h = u \cos \beta \text{ tg } h$$

som blir feilen på en enkelt avlesning. Vi ser at v_u blir en periodisk funksjon mellom grenseverdiene null og $\pm u \text{ tg } h$. Verdiene $\pm u \text{ tg } h$ inntreffer når horisontalaksen befinner seg i samme plan som vertikalakseskjevheten u , mens verdien null inntreffer i planet vinkelrett på u -planet.

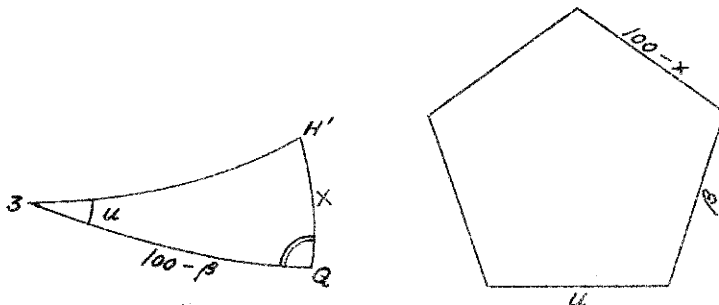


fig. 113

Målefeilen på en vinkel mellom to punkter P_1 og P_2 under høydevinklene h_1 og h_2 er gitt ved:

$$v_u' = u(\cos \beta_2 \operatorname{tg} h_2 - \cos \beta_1 \operatorname{tg} h_1)$$

hvor β_1 og β_2 er de tilsvarende to stillinger av horisontalaksen i forhold til u-planet.

Målefeil som følge av vertikalakseskjevhet, lar seg ikke eliminere ved å observere i begge kikkertstillinger slik som tilfellet var med virkningen av kollimasjonsfeil og horisontalakseskjevhet.

f) "Verifisering" for vertikalakseskjevhet.
(Loddrettstilling av vertikalaksen)

Uttrykket verifisering hører egentlig ikke hjemme her fordi vertikalakseskjevhet ikke er noen instrumentfeil i og for seg. Loddrettstillingen av vertikalaksen skjer ved hjelp av en libelle som er fast forbundet med alidaden og som derfor kalles alidadelibelle, og foregår på følgende måte: Først

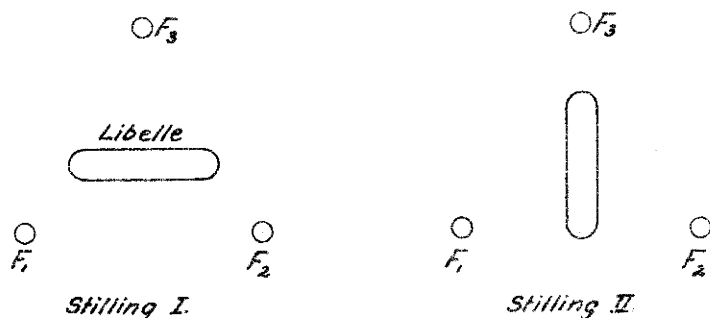


fig. 114

stilles libellen parallell med 2 fotskruer og bringes til å spille inn ved hjelp av disse (stilling I). Kikkerten dreies så 100° til stilling II, og libellen bringes til å spille inn ved hjelp av skruen F_3 . I praksis vil forutsetningen om at libellens lengdeakse

og linjen mellom F_1 og F_2 skal være parallell i stilling I og vinkelrett på hverandre i stilling II, bare tilnærmedesvis være oppfylt. Det har til følge at vi kan bli nødt til å gjenta prosessen: først tilbake til stilling I og så på nytt til stilling II.

Dersom libelleakse og vertikalakse danner en rett vinkel med hverandre, vil vertikalaksen nå være loddrettstilt. Det undersøkes ved å dreie kikkerten 200° fra stilling II (i utgangsstillingen skal libellen spille inn). Gjør libellen et utslag etter omdreiningen, skyldes det at libelleaksen ikke er vinkelrett på vertikalaksen, og utslaget er lik det dobbelte avvik fra den rette vinkel. Den ene halvparten av utslaget rettes ved libellens korreksjonsskruer og den andre halvparten ved fotskruen F_3 . Deretter dreies kikkerten 100° , og hele libelleutslaget fjernes ved hjelp av fotskruene F_1 og F_2 .

Istedenfor å korrigere libellen kan det også komme på tale å be-

stemme spillepunktet, dvs. det punkt på libellen hvis tangent er vinkelrett på vertikalaksen (se side 44). Metoden med spillepunkt har mest for seg når det dreier seg om fine libeller med gjennomløpende deling.

Til loddrettstillingen av vertikalaksen kan brukes en hvilken som helst libelle som følger med alidaden under dreiningen, f.eks. også en nivå-lerlibelle eller rytterlibelle.

g) Samvirke mellom kollimasjonsfeil, horisontalakseskjevhet og vertikalakseskjevhet.

Vi har hittil betraktet virkningen av de tre aksefeilene hver for seg. Det melder seg nå spørsmålet om den resulterende virkning av alle tre aksefeil for det tilfelle at de opptrer samtidig. I feillæren vil vi senere stifte bekjentskap med den såkalte superposisjonslov for små feil, som sier at virkningen av en enkelt feil på en størrelse er uavhengig av tilstedeværelsen av eventuelle andre feil som samtidig influerer på vedkommende størrelse, dvs. hver enkelt feil har den samme virkning som om den opptrådte alene. Herav følger at den resulterende virkning av et feilkompleks som opptrer ved bestemmelsen av en størrelse, er lik summen av enkeltfeilenes virkning. I foreliggende tilfelle blir altså den resulterende virkning av kollimasjonsfeil, horisontalakseskjevhet og vertikalakseskjevhet lik:

$$V = \frac{c}{\cos h} + i \operatorname{tg} h + u \cos \beta \operatorname{tg} h$$

Her kan de enkelte ledd virke i samme eller motsatt retning avhengig av fortegnene til c , i , $\operatorname{tg} h$ og $\cos \beta$ (u skal alltid regnes positiv). Av formelen går det uten videre fram at vi får isolert kollimasjonsfeilen fra horisontal- og vertikalakseskjevhet ved å operere med horisontale siktelinjer.

*

Når det gjelder rekkefølgen av verifiseringene for de forskjellige aksefeil, vil denne kunne modifiseres en del avhengig av hvilke verifiseringsmetoder som brukes. Den rekkefølgen som angis nedenfor, har den fordel at den alltid fører fram uten hensyn til hvilke metoder og hjelpemidler som nyttes:

1. Loddrettstilling av vertikalaksen med justering av alidadelibellen.
2. Verifisering for kollimasjonsfeil.
3. Verifisering for horisontalakseskjevhet.

Da virkningen både av kollimasjonsfeil og horisontalakseskjevhet elimineres ved å observere i begge kikkertstillinger, er det bare på sin plass å korrigere dem dersom de er så store at middeltallsberegningen faller tungvint. Observeres bare i én kikkertstilling, slik som tilfellet er ved tachymetrering f.eks., må de to instrumentfeilene holdes så små at virkningen av dem holder seg innenfor den nøyaktighet som forlanges av målingene.

Virkningen av vertikalakseskjevhet derimot lar seg ikke eliminere ved å observere i begge kikkertstillinger og heller ikke på annen måte. Da virkningen (målefeilen) vokser proporsjonalt med tg til siktelinjens høydevinkel, må vi være særlig omhyggelig med loddrettstillingen av vertikalaksen i bratt lende.

h) Alidadens eksentrisitet.

Vertikalaksen (alidadeaksen) skal gå gjennom sirkelens sentrum.

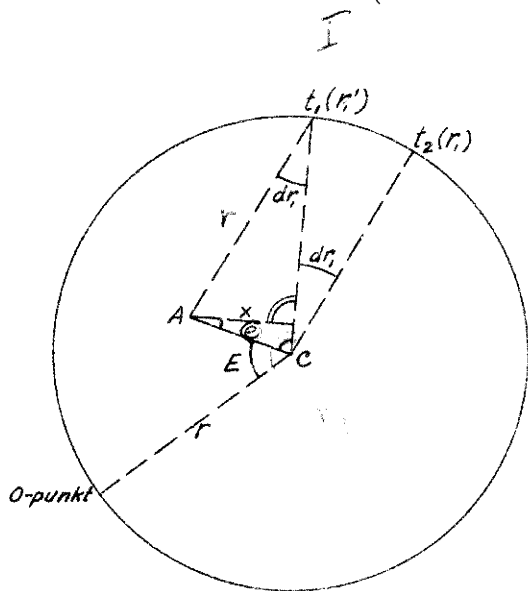


fig. 115

Dersom ikke det er tilfelle, har vi en instrumentfeil som går under navn av alidadens eksentrisitet, og vi skal i det etterfølgende undersøke virkningen av denne instrumentfeil. I fig. 115 betegner C sirkelens sentrum og A alidadeaksens skjæringspunkt med sirkelens plan. Avstanden AC=e er altså alidadens eksentrisitet. Vinkelen i pkt. C som retningen til sirkelens nullpunkt danner med linjen CA, er lik E. Sirkelens radius er r.

Vi betrakter så en innsiktning av et punkt svarende til stillingen t_1 av alidaden. Hertil svarer retningsavlesningen r_1' .

Uten alidadeeksentrisitet ville alidaden ved samme innsiktning ha befunnet seg i et punkt t_2 , som er skjæringspunktet mellom linjen At_1 og sirkelen når sirkelen "parallelforskyves" slik at dens sentrum C faller sammen med A (linjen Ct_2 er følgelig parallell med linjen At_1), og vi ville ha hatt en retningsavlesning r_1 lik:

$$r_1 = r_1' + dr_1$$

hvor dr_1 ifølge fig. 115 er gitt ved:

$$\sin dr_1 \approx \frac{x}{r} = \frac{e \sin (r_1' - E)}{r}$$

Handwritten notes:
 $\sin (r_1' - E) \approx \frac{x}{e}$
 $x = e \sin (r_1' - E)$

I praksis vil dr_1 være en meget liten vinkel. Vi kan derfor sette:

$$dr_1 = \frac{e \sin(r'_1 - E)}{r} \rho = \epsilon_m \sin(r'_1 - E)$$

idet vi har kalt den konstante del av uttrykket for ϵ_m , dvs.:

$$\epsilon_m = \frac{e}{r} \rho$$

Den korrekte retningsavlesning er altså gitt ved:

$$r_1 = r'_1 + \epsilon_m \sin(r'_1 - E)$$

På tilsvarende måte får vi for en annen retning:

$$r_2 = r'_2 + \epsilon_m \sin(r'_2 - E)$$

ϵ_m konst.

Vi summerer de to avlesningene og får:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= r'_1 + r'_2 + \epsilon_m \{ \sin(r'_1 - E) + \sin(r'_2 - E) \} \\ &= r'_1 + r'_2 + \epsilon_m \left\{ 2 \sin \frac{r'_1 + r'_2 - 2E}{2} \cos \frac{r'_1 - r'_2}{2} \right\} \end{aligned}$$

For $r'_2 - r'_1 = 200^g$ ser vi at:

$$r_1 + r_2 = r'_1 + r'_2$$

idet $\cos \frac{1}{2}(r'_2 - r'_1)$ da blir lik null. Det samme vil også med tilstrekkelig tilnærming være tilfelle selv om ikke betingelsen $r'_2 - r'_1 = 200^g$ er strengt oppfylt. Herav følger at virkningen av alidadens eksentrisitet blir eliminert i følgende to tilfelle:

1. Ved å bruke to diametralt anbrakte avlesningsmidler og ta middeltallet av de to avlesningene.
2. Ved å observere i begge kikkertstillinger når instrumentet er utstyrt bare med ett avlesningsmiddel.

I begge tilfelle er nemlig $r'_2 - r'_1$ tilnærmet lik 200^g .

Vi forutsetter nå at instrumentet har to diametralt anbrakte avlesningsmidler og setter oss til oppgave å vise hvordan vi kan utlede alidadens eksentrisitets-elementer på grunnlag av avlesninger i de to avlesningsmidler.

Dersom vi ikke hadde noen alidadeeksentrisitet, ville differensen mellom de to avlesningene være nøyaktig lik 200^g . Har instrumentet alidadeeksentrisitet, blir differensen forskjellig fra 200^g , nemlig lik:

$$r_2' - r_1' = (r_2 - r_1) - \epsilon_m \{ \sin(r_2' - E) - \sin(r_1' - E) \}$$

$$= (r_2 - r_1) - \epsilon_m \left\{ 2 \sin \frac{r_2' - r_1'}{2} \cos \frac{r_2' + r_1' - 2E}{2} \right\}$$

som for $r_2' - r_1' \approx 200^\circ$ forenkler seg til:

$$r_2' - r_1' = (r_2 - r_1) - \epsilon_m 2 \cos(r_1' + 100^\circ - E)$$

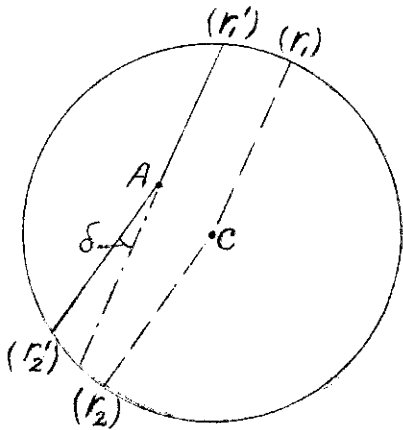
$$= (r_2 - r_1) + 2\epsilon_m \sin(r_1' - E)$$

$r_2' - r_1' \approx 200^\circ$
 $\frac{r_2' + r_1' - 2E}{2}$

Vi innfører betegnelsen d for avviket mellom r_1' og r_2' fra 200° , idet vi setter:

$$r_2' - r_1' = 200^\circ + d$$

og får: $d = -200^\circ + (r_2 - r_1) + 2\epsilon_m \sin(r_1' - E)$



I virkeligheten kan vi ikke regne med at de to avlesningsmidler og alidadens omdreiningspunkt befinner seg nøyaktig på en rett linje. Vi innfører derfor en knekkvinkel som vi kaller δ (se fig. 116, hvor den fullt optrukne, brukkede linje forestiller alidaden, mens den strekede linje forestiller den tilsvarende sentriske plassering av alidaden). Differensen mellom de sentriske avlesninger r_1 og r_2 er følgelig gitt ved: $r_2 - r_1 = 200^\circ + \delta$. Vi får da som sluttuttrykk for d :

fig. 116

$$d = \delta + 2\epsilon_m \sin(r_1' - E)$$

dvs. avviket fra 200° mellom de to avlesningsmidlene blir en periodisk funksjon av avlesningsmidlenes stilling på sirkelen. Det maksimale avvik antar verdien $|\delta| + 2\epsilon_m$. Da ligningen for d inneholder 3 ukjente (δ , ϵ_m og E), vil det være tilstrekkelig med 3 d -observasjoner for å få bestemt de ukjente eksentrisitetselementer.

i) Kikkertens (siktelinjens) eksentrisitet.

Vi har hittil forutsatt at siktelinjen går gjennom vertikalaksen. I det etterfølgende skal vi undersøke nærmere det tilfelle at siktelinjen er eksentrisk i forhold til vertikalaksen. I fig. 117 betegner A vertikalaksen.

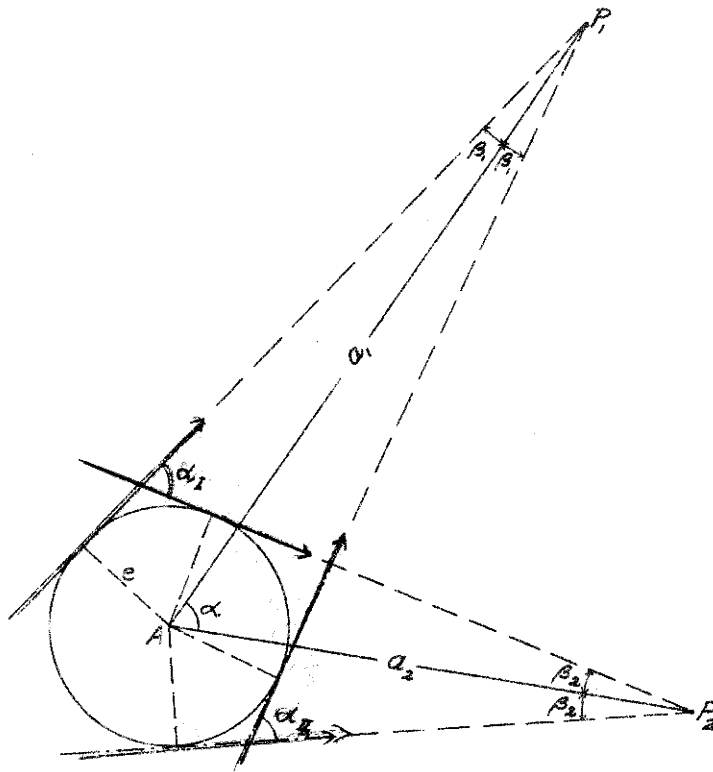


fig. 117

Siktelinjen eller sikteplanet har en avstand e fra vertikalaksen. Det har til følge at når vi dreier kikkerten om vertikalaksen vil siktelinjen hele tiden tangere en sirkel om A med radius lik e . Vi forutsetter at vinkelen mellom P_1 og P_2 skal bestemmes. Vinkelens korrekte verdi er α . De helt optrukne pilene angir siktelinjens innsiktning mot P_1 og P_2 i I. k.st. Den til disse innsiktninger svarende vinkelbevegelse er α_I , som følgende blir den observerte verdi av vinkelen α i I. k.st. De strekprikkede

piler angir de tilsvarende innsiktninger i II. k.st. Den hertil svarende observerte verdi for α er α_{II} .

Av figuren ser vi at:

$$\alpha + \beta_2 = \alpha_I + \beta_1$$

$$\alpha + \beta_1 = \alpha_{II} + \beta_2$$

Vi summerer de to ligningene og får:

$$2\alpha = \alpha_I + \alpha_{II}, \quad \text{dvs.} \quad \alpha = \frac{\alpha_I + \alpha_{II}}{2}$$

Vi har med andre ord vist at ved å observere i begge kikkertstillinger og ta middeltallet får vi eliminert virkningen av kikkertens eksentrisitet.

Vi skal så utlede virkningen av siktelinjens eksentrisitet når vi observerer en vinkel bare i én kikkertstilling. Vi har ifølge fig. 117:

$$\sin \beta_1 = \frac{e}{a_1} \quad \text{og} \quad \sin \beta_2 = \frac{e}{a_2}$$

hvor a -ene er avstandene til de to objektpunktene. Da e alltid vil være liten i forhold til sikteavstandene a , kan vi sette:

$$\beta_1 = \frac{e}{a_1} \rho \quad \text{og} \quad \beta_2 = \frac{e}{a_2} \rho$$

Virkningen på bestemmelsen av α i I. k.st. er lik differensen mellom den observerte verdi α_I og den korrekte verdi α , som ifølge den første av de oppstilte grunnligninger er lik:

$$\alpha - \alpha_I = \beta_1 - \beta_2 = e \rho \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right)$$

Herav ser vi at virkningen gjør seg mest gjeldende på små avstander, og er ellers avhengig av differensen mellom avstandene. Virkningen forsvinner dersom de to sikteavstandene er like store.

Vanlige teodolitter har som regel så liten kikkerteksentrisitet at vi kan se bort fra målefeil som skrives seg fra denne instrumentfeil. Det forekommer imidlertid også konstruksjoner, hvor en med vitende og vilje har lagt inn en viss kikkerteksentrisitet (e kan f.eks. være 10 cm.). Slike konstruksjoner er vanlig på instrumenter til astronomiske målinger, og her er forholdet det at virkingen av kikkerteksentrisiteten faller bort fordi sikteavstandene er så store. Nyttetes derimot et instrument med eksentrisk kikkert til ikke-astronomiske målinger, vil det oppstå feil, hvis utsjalling forutsetter at målingene utføres i begge kikkertstillinger.

j) Sirkeldelingsfeil.

En viktig forutsetning for korrekte resultater av vinkelmålingene er at sirkelen er riktig inndelt. Deling av sirkler foretas som regel ved hjelp av automatisk virkende delemaskiner, som utfører delingen med meget stor presisjon. Vi må likevel regne med at delingen kan oppvise små uregelmessigheter, som dels er av systematisk og dels av tilfeldig natur.

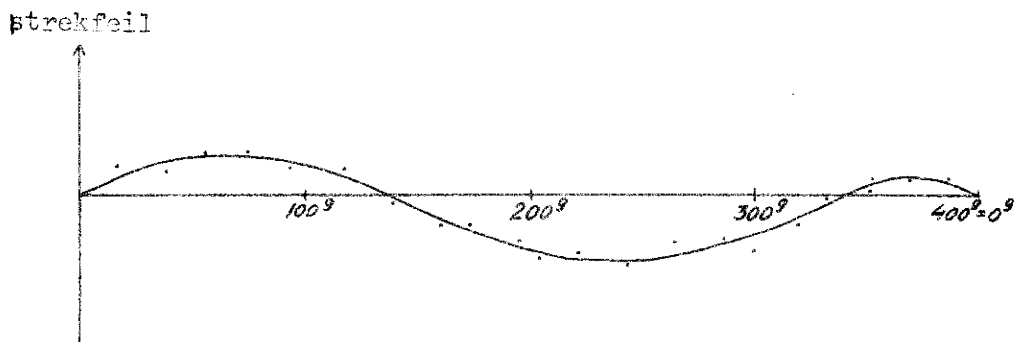


fig. 118

Den grafiske framstilling i fig. 118 tar sikte på å anskueliggjøre forholdet. De avsatte prikker angir de virkelige strekfeil i forhold til sirkelens nullpunkt på forskjellige steder av sirkelen. Vi trekker så en utjevningskurve som har den egenskap at den smyer seg så nær inntil punktsystemet som mulig. Derved framkommer den helt opptrukne kurve, som representerer de

periodiske eller systematiske delefeil. Avstanden mellom punktene og utjevningsskurven representerer de tilfeldige delefeil, som har den karakteristiske egenskap at de like lett opptrer med positivt som med negativt fortegn.

For å motvirke innflytelsen av sirkeldelingsfeilene fordeles vinkelmålingene jevnt på sirkelen. Skal en vinkel observeres n ganger, forskyves sirkelen $\frac{200^g}{n}$ mellom hver måling.

I våre dager kan deling av sirkler foretas med så stor nøyaktighet at virkningen av sirkeldelingsfeilene vanligvis vil holde seg under de tilfeldige observasjonsfeil. Det er særlig ved større teodolitter med meget nøyaktige avlesningsmidler at delingsfeilene kan spille noen praktisk rolle.

*

Vi har dermed behandlet de viktigste instrumentfeil. Med hensyn til å sjalte ut virkningen av dem på vinkelmålingene, står i prinsippet følgende 3 muligheter åpne:

1. Vi kan skaffe oss kjennskap til størrelsen av selve instrumentfeilene. Vi kan da beregne virkningen av dem, og er dermed i stand til å korrigere måleresultatene. Ved geodetiske målinger blir denne framgangsmåten sjelden brukt, derimot ofte ved astronomiske målinger. Instrumentfeilene spiller i det hele tatt en større rolle ved astronomiske målinger enn ved geodetiske. Det henger sammen med at høydevinklene som regel er så mye større ved astronomiske enn ved geodetiske målinger.

2. Vi skaffer bort feilårsaken (selve instrumentfeilen) ved verifisering av instrumentet. Det forutsetter at instrumentet er korrigerbart for vedkommende instrumentfeil. Det vil f.eks. ikke være tilfelle med alidadens og kikkertens eksentrisitet og heller ikke med sirkelens delingsfeil. De nyere former av teodolitten er heller ikke justerbare for horisontalakse-skjevhet. Vi skjønner av dette at anvendelsesområdet for metode 2 er temmelig begrenset.

3. Vi utfører målingene på en slik måte at virkningen av instrumentfeilene blir eliminert i sluttresultatet. Denne metode fører fram for de fleste instrumentfeils vedkommende. Et unntak er virkningen av vertikalakseskjevhet, som jo heller ikke er noen instrumentfeil i egentlig forstand. Hva sirkeldelingsfeilene angår, kan vi heller ikke regne med at det er mulig å oppnå en fullstendig eliminering av deres virkning.

Utviklingen har gått i favor av den siste metode. Det henger sammen med at jo færre korreksjonsmidler et instrument har, desto stabilere vil det være.

K a p i t e l VI .

AREALMÅLENDE INSTRUMENTER (PLANIMETRE).

1. Innledning.

Planimeter betyr mekanisk flatemåler. Instrumentet brukes på den måten at en stift føres langs konturen til den flaten som skal arealb bestemmes. Bevegelsen av stiften overføres til en rull, og instrumentet er slik mekanisk innrettet at det søkte areal blir direkte proporsjonalt med antall omdreininger av rullen. Det forekommer et utall av planimeterkonstruksjoner. Vi innskrenker oss her til å behandle polarplanimeteret, som uten sammenligning er den planimeterkonstruksjon som spiller den største praktiske rolle.

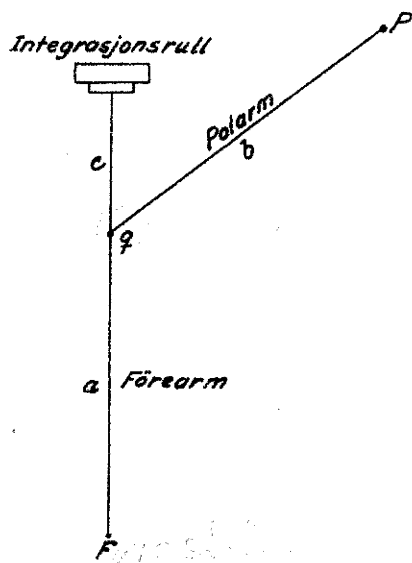


fig. 119

Fig. 119 forestiller et polarplanimeter.

Instrumentet består av to armer forbundet med hverandre ved et ledd q . De to armene kalles polarm og førearm. a , b og c er konstante størrelser. På den forlengede førearm er anbrakt en rull, integrasjonsrullen. Førearmen ender i en stift F som kalles førestiften. Instrumentet kan bevegges om et fast punkt P som går under navn av polen. Når F beveges vil q beskrive en sirkel med b til radius.

Mekanisk flatemåling er egentlig ikke noe annet enn mekanisk integrasjon. Buelengden som rullen dreier seg når førestiften F føres rundt konturen av en figur, er et mål

for figurens areal. Integrasjonsrullen er forsynt med et avlesningsmiddel til bestemmelse av denne buelengde eller avvikling som den kalles. Vanligvis er avlesningsmidlet en nonie med enhet lik $1/1000$ av rullens omkrets. Med planimeterets konstant forstår vi det areal som svarer til en nonie-enhet.

2. Polarplanimeterets teori.

Vi skal i det etterfølgende utlede den funksjonelle forbindelse mellom avviklingen på integrasjonsrullen og arealet til den figur som førestiften gjennomløper. I fig. 120 betrakter vi to konsekutive stillinger av

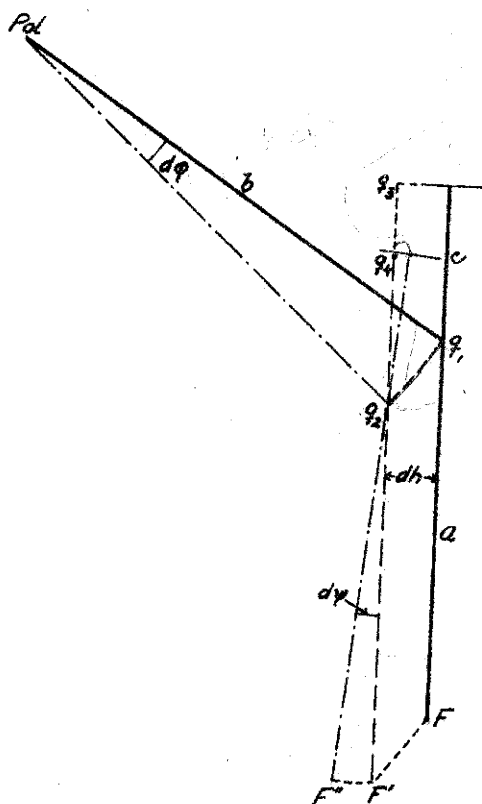


fig. 120

planimeteret. I utgangsstillingen befinder forestiften seg i \$F\$ og i sluttstillingen i \$F''\$. Den hertil svarende bevegelse av førearmen tenker vi oss dekomponert i to bevegelser, nemlig først en parallellforskyvelse av førearmen til den prikkede stilling med forestiften i \$F'\$ og dernest en dreining av førearmen lik vinkelen \$d\phi\$ om \$q_2\$, hvorved forestiften beveger seg fra \$F'\$ til \$F''\$. Vi forutsetter at forflytningen fra \$F\$ til \$F''\$ er så liten at alle størrelser som berøres av forflytningen som \$d\phi\$, \$d\phi\$ og \$dh\$ får karakteren av differensialstørrelser. Det arealet som befinner seg innenfor de to planimeterstillingene, med andre ord arealet av polygonen \$Pq_1FF'F''q_2\$, som vi betegner med \$dA\$, er da gitt ved:

$$dA = \frac{1}{2} b^2 d\phi + a dh + \frac{1}{2} a^2 d\phi$$

Avviklingen på rullen som følge av bevegelsen av forestiften fra \$F\$ til \$F''\$, kaller vi \$d\beta\$. Vi kan utlede \$d\beta\$ ved å tenke oss bevegelsen av rullen fra utgangsstillingen til sluttstillingen dekomponert i tre bevegelser, nemlig først en bevegelse vinkelrett på rulleaksen til \$q_3\$, og dernest en bevegelse langs rulleaksen til \$q_4\$, og til slutt en dreining om \$q_2\$ lik vinkelen \$d\phi\$. Det blir bare den første og siste bevegelse som medfører avvikling på rullen, nemlig \$dh\$ respektive \$c \cdot d\phi\$. Den totale avvikling blir følgelig lik:

$$d\beta = dh - c d\phi$$

Det negative fortegnet foran siste ledd skyldes at den siste avvikling virker i motsatt retning av den første.

Vi innfører \$dh\$ fra den siste ligning i ligningen for \$dA\$ og får:

$$dA = \frac{1}{2} b^2 d\phi + a d\beta + \frac{1}{2}(a^2 + 2ac) d\phi$$

Vi har dermed utledet uttrykket for et enkelt arealelement. Flateinnholdet som innesluttet mellom to endelige stillinger av planimeteret, finnes ved summering av de enkelte arealelementer:

$$A = \Sigma dA = \frac{1}{2} b^2 \Sigma d\phi + a \Sigma d\beta + \frac{1}{2}(a^2 + 2ac) \Sigma d\phi$$

Vi skal så gjennomføre denne summering (som i virkeligheten ikke er noe annet enn en kamouflert integrasjon) for de to muligheter som består for planimeterets bruk, nemlig:

- a) Polen befinner seg utenfor figuren som skal arealbestemmes.

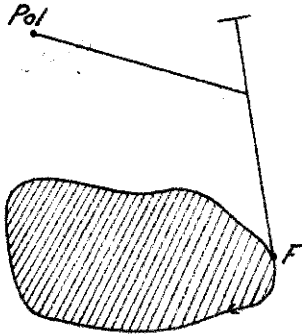


fig. 121

Når vi går rundt figuren med førestiften og vender tilbake til utgangspunktet, fører det til at $\sum d\phi$ og $\sum d\psi$ i uttrykkene ovenfor begge blir lik null, slik at

$$A = a\sum d\beta = a\beta$$

hvor størrelsen A er lik arealet av den figur som førestiften har gjennomløpt. Det følger av at det skraverte areal representerer restarealet av alle de arealer som planimeteret omslutter under sin bevegelse, idet de øvrige arealer opphever hver-

andre når F gjennomløper figuren og vender tilbake til utgangspunktet.

Det framgår av fig. 122, hvor q_1F_1 og q_2F_2 representerer de to ytterstillinger av førearmen ved omløpning av en figur. Under bevegelsen av

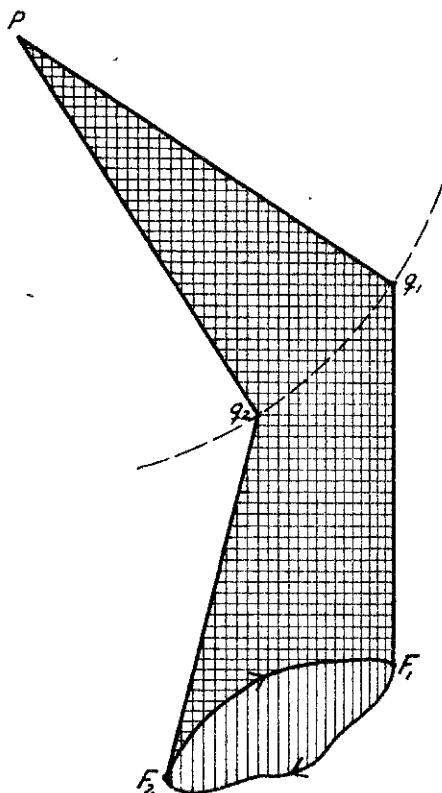


fig. 122

førearmen følger leddet mellom føre- og polarm den prikkede sirkelen. Vi lar først førestiften følge figurens forreste begrensningelinje fra F_1 til F_2 , som medfører at planimeteret går fra stillingen $P q_1F_1$ til $P q_2F_2$. Herunder blir summen av alle dA , som vi kaller A_1 , lik det vertikalskraverte areal i fig. 122. Velger vi i stedet å følge figurens indre begrensningelinje fra F_1 til F_2 , vil $\sum dA$ bli lik det horisontalskraverte areal som vi kaller A_2 . Følgelig vil den motsatte bevegelse av førestiften fra F_2 til F_1 langs indre begrensningelinje gi oss $-A_2$.

Men dermed er det klart at ved å la førestiften gjennomløpe figuren som antydnet i fig. 122, vil det resulterende areal som vi leser av på planimeteret, bli lik:

$$A = A_1 - A_2$$

hvor A altså blir lik arealet av den figuren som førestiften har fart rundt.

Vi har med andre ord vist at figurens flateinnhold er lik forearmslengden multiplisert med avviklingen.

- b) Polen befinner seg innenfor figuren som skal arealbestemmes.

I dette tilfelle har vi (se fig. 123):

$$\Sigma d\phi = \Sigma d\psi = 2\pi$$

$$\begin{aligned} \text{dvs.: } A &= a\beta + \frac{1}{2}b^2 2\pi + \frac{1}{2}(a^2 + 2ac)2\pi \\ &= a\beta + \pi(a^2 + b^2 + 2ac) \end{aligned}$$

hvor det siste ledd representerer arealet av den såkalte grunnsirkelen. Grunnsirkelen har, som vi skal se, en spesiell geometrisk betydning.

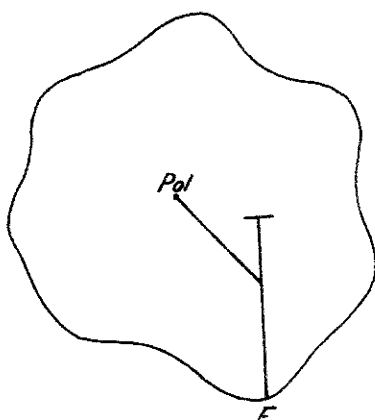


fig. 123

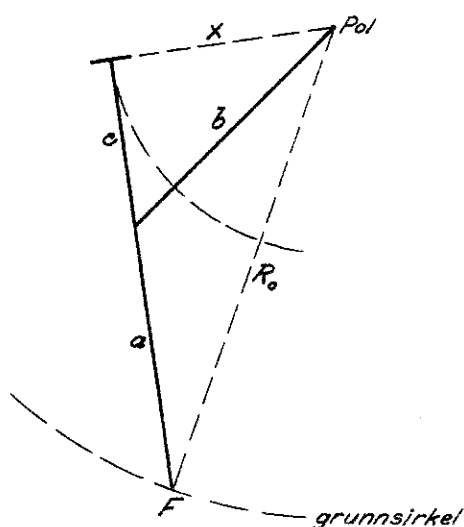


fig. 124

Fig. 124 tar sikte på en interpretasjon av grunnsirkelen. Rullen og polen befinner seg i samme plan. Når førestiften følger sirkelen med radius R_0 , blir det ingen avvikling på rullen. Det følger av at rullens bevegelsesretning, dvs. tangenten til rullens bane - som blir en sirkel med radius x - faller sammen med rulleaksen. Av fig. 124 ser vi at:

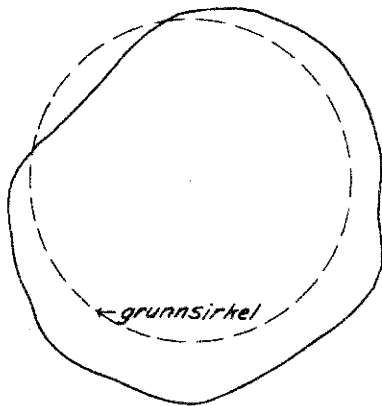
$$x^2 = b^2 - c^2$$

$$\begin{aligned} \text{videre } R_0^2 &= (a+c)^2 + x^2 = a^2 + c^2 + 2ac + b^2 - c^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2ac \end{aligned}$$

Sirkelen med R_0 til radius er grunnsirkelen. Grunnsirkelen har altså den egenskap at en bevegelse av førestiften langs denne kurven ikke medfører noen avvikling på rullen.

Med pol innenfor figuren kan avviklingen anta såvel positive som negative verdier. Dersom den delen av figuren som faller utenfor grunnsirkelen er større enn den som mangler innenfor, blir avviklingen positiv og omvendt. Fig. 125 viser eksempler med positiv og negativ avvikling.

Positiv avvikling.



Negativ avvikling.

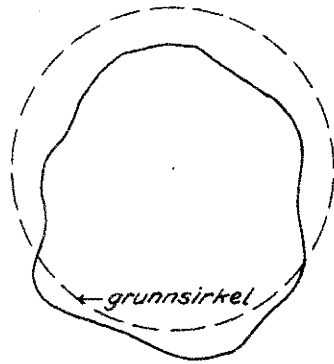


fig. 125

I første tilfelle skal altså arealet som avleses på planimeteret adderes til grunnsirkelens areal, og i siste tilfelle subtraheres fra. Den negative avvikling gir seg til kjenne på den måten at sluttavlesningen blir mindre enn begynnelsesavlesningen.

Ved enkelte planimeterkonstruksjoner har en gjort $R_0 = 0$. Det oppnår en ved å gjøre c negativ slik at rullen befinner seg på samme side av leddet mellom forearm og polarm som forestiften. Lengden av c må da gjøres lik:

$$c = - \frac{a^2 + b^2}{2a}$$

Med pol utenfor figuren blir altså arealet direkte proporsjonalt med avviklingen. Befinner polen seg innenfor figuren, må vi til avlesningen på planimeteret addere til en konstant, nemlig arealet av grunnsirkelen (i tilfelle av at planimeteret er konstruert slik at $c = - \frac{1}{2a} \{a^2 + b^2\}$, blir konstanten lik null).

Avviklingen β bestemmes ved å lese av rullens stilling før og etter omfaringen av figuren. Vi kaller avlesningene n_1 og n_2 . Differensen $n_2 - n_1$ representerer avviklingen uttrykt i rullens enheter. Vi betegner videre den lineære utstrekning av en enhet på rullen med l og har:

$$\beta = n \cdot l$$

dvs.

$$A = a(n \cdot l) = (a \cdot l)n = k \cdot n$$

Størrelsen k , som er lik det arealet som svarer til en enhet på rullen, kalles planimeterets konstant. Som regel gjøres k lik 10 mm^2 .

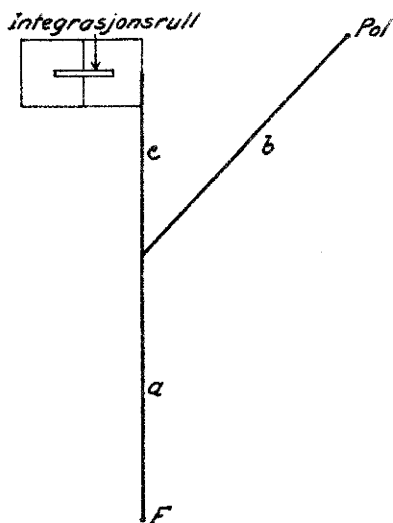


fig. 126

På de nyere planimeterkonstruksjoner blir rullen anbrakt i en ramme ved siden av førearmen (se fig. 126). Når bare rulleaksen er parallell med førearmen, medfører dette ingen konsekvenser for avviklingen og folgelig heller ikke for arealbestemmelsen. Det ser vi uten videre av den grunnleggende figuren som vi utledet funksjonsforbindelsen mellom dA , $d\varphi$, $d\psi$, dh og $d\beta$ av.

3. Kompensasjonsplanimeteret.

Den farligste feil hos polarplanimeteret er rulleakseskjevhet, dvs. at rulleaksen ikke er parallell med førearmen. Virkningen av denne instrumentfeil lar seg ikke eliminere ved den konstruksjon av polarplanimeteret som vi hittil har behandlet. Kompensasjonsplanimeteret derimot er slik innrettet

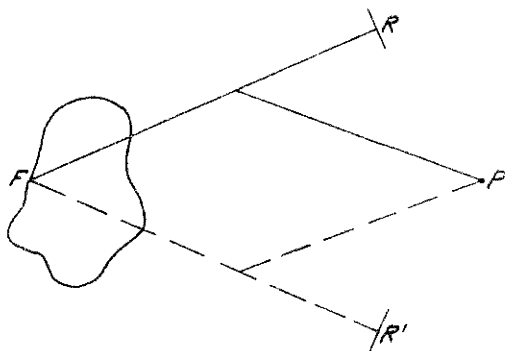


fig. 127

at virkningen av en eventuell rulleakseskjevhet kan elimineres. Kompensasjonsplanimeteret har den egenskap at det kan "slås gjennom" fra stillingen $F R P$ i fig. 127 til den symmetriske stilling $F P R'$. Det foretas altså to omfaringer av figuren, én i hver stilling. Under "gjennomslåingen" må polen ligge i ro. Rulleakseskjevheten vil opptre med motsatt fortegn i de to stillingene, slik at virkningen av feilen blir eliminert når vi tar middel-tallet av de to målingene.

4. Nullavviklingskurver.

Vi har allerede konstatert at avviklingen blir null når førestiften beveger seg på grunnsirkelen. Årsaken til dette fenomen er, som vi har sett,

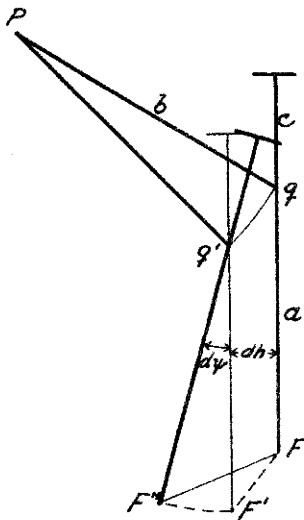


fig. 128

at rullens akse da faller sammen med bevegelsesretningen. Grunnsirkelen er en av de såkalte nullavviklingskurver. I virkeligheten er nemlig planimeterets bevegelsesområde dekket av nullavviklingskurver. Vi skal i det etterfølgende vise hvordan disse nullavviklingskurver lar seg bestemme. Fig. 128 viser en vilkårlig stilling av planimeteret. Fra utgangsstillingen P q F parallellforskyves førearmen til stillingen P q' F'. Den hertil svarende avvikling er lik dh . Førestiftens dreies så vinkelen $d\phi$ om q' til F'' . Denne dreining betinger en avvikling lik $-c d\phi$, slik at totalavviklingen, svarende til førestiftens bevegelse fra F til F'' , blir lik:

$$\beta = dh - c d\phi$$

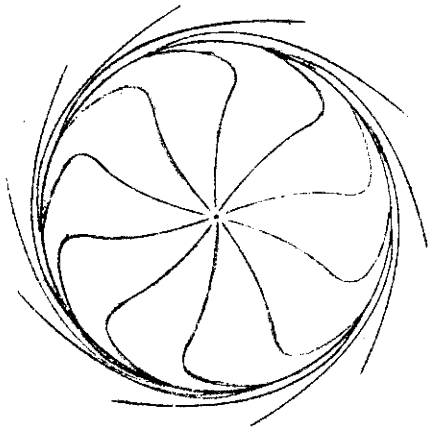


fig. 129

Avviklingen blir null for $d\phi = \frac{dh}{c}$. Dersom denne betingelse er oppfylt, representerer linjelementet $F F''$ buedifferensialet til en nullavviklingskurve. Fig. 129 viser hvordan nullavviklingskurvene i store trekk forløper omkring et vanlig polarplanimeter.

5. Kontroll av planimeteret.

På de fleste typer av planimetre er det mulig å regulere lengden av førearmen a , og dermed endre konstanten k . Førearmen har som regel en inndeling i $\frac{1}{2}$ mm. En tabell som følger med, angir konstanten k for forskjellige lengder av a . Som regel kan k varieres mellom $10 - 4 \text{ mm}^2$.

Vi kan få brakt på det rene om planimeterets arealangivelser er korrekte, dvs. om k er i samsvar med tabellens angivelser, ved å bruke instrumentet på en figur med kjent areal (kvadrat, rektangel eller sirkel). Med planimetrene følger som regel en kontrollinjal av 10 cm 's lengde. Linjalen kan dreies om et nullpunkt og er forsynt med en rekke huller med oppgitt av-

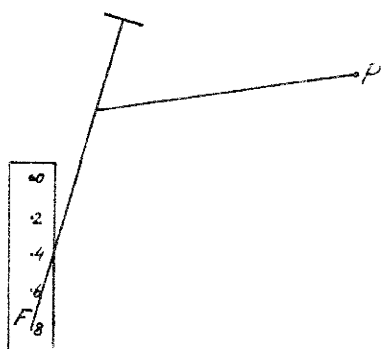


fig. 130

stand fra nullpunktet. Førestiften anbringes i et slikt hull (se fig. 130), og vi dreier linjalen en gang rundt om nullpunktet hvorved førestiften beskriver en sirkel med kjent radius. Vi slår så planimeteret over i den andre stillingen og gjentar prosessen. Dersom planimeterets konstant er korrekt, skal middeltallet av de to arealbestemmelsene stemme overens med arealet av kontrollsirkelen. Ved denne framgangsmåten får vi også brakt på det rene om instrumentet har rulleaksseskjevhet, idet den vil gi seg

utslag i et avvik mellom de to arealbestemmelsene.

Dersom det nå viser seg at verdien av k ikke er korrekt, må vi foreta en endring av førearmslengden, og vi skal i det etterfølgende vise hvordan vi beregningsmessig kan utlede denne endring. Vi tar vårt utgangspunkt i uttrykket:

$$k = a l$$

En endring av a lik da medfører en endring av k som vi kaller dk og som fås ved differensiering:

$$dk = l da$$

Herav følger:

$$da = \frac{dk}{l} = a \frac{dk}{k} = a \frac{\bar{k} - k}{k}$$

hvor \bar{k} er den ønskede verdi av planimeterkonstanten, men k er den aktuelle verdi. Vi innfører så $k = \frac{\bar{A}}{n}$ og $\bar{k} = \frac{A}{n}$, hvor \bar{A} er kontrollfigurens areal, mens A er den verdi for samme som planimeteret gir ved bruk av verdien \bar{k} for planimeterets konstant, og får som sluttuttrykk for da:

$$da = a \frac{A - \bar{A}}{\bar{A}}$$

hvor altså a er den avleste verdi for førearmslengden. Av formelen for da ser vi at førearmen må forlenges dersom planimeteret gir for stort areal og omvendt.

Istedenfor å korrigere førearmslengden for å oppnå en bestemt verdi av k , består også den mulighet å bestemme den aktuelle verdi for k , dvs. den verdi for k som multiplisert med planimeteravlesningen gir oss det riktige areal ($k = \frac{\bar{A}}{n}$), og bruke denne korrigerede verdi ved omregningen fra enheter på rullen til arealenheter.

6. De viktigste feil ved planimetermåling.

Ved måling av arealer med planimeter opptrer såvel systematiske som tilfeldige feil. Vi skal her omtale noen av de viktigste feilkilder.

a) Systematiske feil.

1. Feilaktig verdi av planimeterets konstant k, som resulterer i en feil på arealbestemmelsen dA gitt ved:

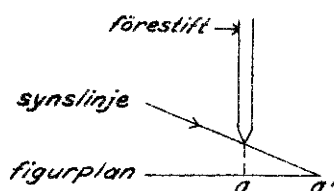
$$A = k n, \quad \text{dvs.} \quad dA = n dk$$

2. Rulleakseskjevhet. Denne feilkilde kan forårsake betydelige feil ved måling med planimetre som ikke kan slås gjennom.

Som tidligere nevnt, blir denne feilen eliminert ved måling med kompensasjonsplanimeter i begge stillinger. Enkelte instrumenter er utstyrt med korreksjonsinnretning slik at rulleaksens retning kan endres.

b) Tilfeldige feil.

1. Førefeilen som skyldes unøyaktig føring langs konturen til den figur som skal arealbestemmes. Førestiften skal så vidt berøre papiret. Beveges førestiften over figurens plan, vil det opptre parallakse (se fig. 131). For øyet



ser det ut som om stiften befinner seg over a' , mens den i virkeligheten befinner seg over a . Med henblikk på å redusere parallaksefeilen i størst mulig utstrekning bør brukeren venne seg til å betrakte førestiften i dens bevegelsesretning og ikke vinkelrett på denne.

fig. 131

Vi kan regne med at førefeilen vokser med lengden av figurens begrensningsslinje, slik at størrelsen av kvotienten $\frac{\text{omkrets}}{\text{areal}}$ får betydning for den relative nøyaktighet av arealbestemmelsen. Sirkelformen er den gunstigste da den betinger minimumsverdi av forholdet mellom omkrets og areal. Langstrakte, smale figurer egner seg ikke for planimetermåling da omkretsen for slike figurer blir meget stor i forhold til arealet.

Det er ikke å anbefale å bruke linjaler til å føre stiften langs etter når det dreier seg om figurer med rettlinjete begrensning. En feil i plasseringen av linjalene vil nemlig da innvirke med sin fulle verdi på arealbestemmelsen. Fører vi stiften fritt derimot, er det sannsynlig at den til dels føres utenfor og til dels innenfor figurens begrensningsslinje, slik at

feilene til en viss grad opphever hverandre.

2. Avlesningsfeilen. For å minske denne bruker vi lupe. Avlesningsfeilen gir seg størst utslag ved bruk av instrumenter med stor konstant.

3. Ujevnt underlag. Det er av stor betydning for nøyaktigheten av planimetermålingen at underlaget er jevnt og horisontalt.

7. Planimetermålingens nøyaktighet.

Omfattende forsøk med polarplanimeteret har gitt til resultat at det er mulig å uttrykke middelfeilen på arealbestemmelsen ved uttrykket:

$$m_A = c M\sqrt{A}$$

hvor c er en konstant, mens M refererer seg til målestokkforholdet $1 : M$. For c kan vi ved bruk av polarplanimeter under normale forhold regne med verdien

$$c = 0,0002$$

I formelen for m_A skal A uttrykkes i m^2 , og m_A fås også i m^2

Eksempel.

På et kart i $1:2000$ har vi ved planimetermåling bestemt arealet av en figur til 100 ar. Vi kan da regne med at det knytter seg følgende usikkerhet til arealbestemmelsen i betydning av middelfeil:

$$m_A = 0,0002 \cdot 2000\sqrt{10.000} = \pm 40 \text{ m}^2 = \pm 0,4 \text{ ar}$$

8. Noen regler for bruk av planimeteret.

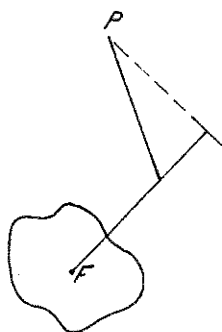


fig. 132

Det er ikke likegyldig for nøyaktigheten av planimetermålingen hvordan instrumentet plasseres i utgangsstillingen i forhold til figuren. Den heldigste plassering fås ved å gå fram på følgende måte, idet vi forutsetter at planimeteret brukes med polen utenfor figuren: Førstiften anbringes skjønnsmessig i figurens tyngdepunkt, hvoretter polen anbringes slik at rullens plan forlenget treffer polen. Denne plassering innebærer at figurens tyngdepunkt kommer til å inngå i grunnsirkelen (se fig. 132).

Det er ikke gunstig at noen del av figurens begrensningsslinje faller tilnærmet sammen med en nullavviklingskurve. Begrunnelsen herfor er at vedføring tilnærmet langs en nullavviklingskurve er avviklingen liten. Vi risikerer derfor at friksjonen mellom rull og underlag ikke blir tilstrekkelig stor til å overvinne friksjonen i lagrene til integrasjonsrullen. Resultatet blir derfor at vi får mindre avvikling enn vi skulle ha.

For å unngå uheldig trykk eller strekk i polstiften, må vi ikke bruke planimeteret i meget strak eller sammentrykt stilling. Det undersøkes ved en foreløpig omkjøring av figuren. I tilfelle må vi foreta en deling av figuren.

Ganske små flater passer det ikke å måle med planimeter. Har instrumentet en konstant lik 10 mm^2 , vil vi overhodet ikke få noen målbar avvikling for et kvadrat med ^{mindre enn} ca. 3 mm 's sidelengder. For små flater oppnås nøyaktigere resultater ved rutetelling ved bruk av gjennomsiktig rutepapir.

*

Foruten polarplanimeteret, som er det langt vanligste i praksis, forekommer også en rekke andre planimeterkonstruksjoner, som vanligvis utmerker seg med større nøyaktighet enn polarplanimeteret. Av slike planimeterformer kan nevnes skivepolar- skiverulle- og kulerulleplanimeteret. Det vil bli gjennomgått i forbindelse med de praktiske øvinger i planimetermålinger.

