JB Jörgensen

Forelesninger

i

FEILLÆRE MED UTJEVNINGSREGNING

Videregående kurs

for

jordskiftestudentene ved
Norges Landbrukshøgskole

av

professor dr. Paul Gleinsvik

INSTITUTT FOR LANDMÅLING

Ås-NLH 1972

Innholdsfortegnelse.

Innledning.

Generelt gjelder at en står overfor en utjevningsoppgave dersom det er utført flere målinger enn nødvendig for løsningen av det aktuelle problem, dvs. dersom det foreligger overbestemmelser.

Den klareste matematiske forestilling om saksforholdet får en ved å anlegge en ligningsteoretisk betraktningsmåte. Vi tenker oss at i det aktuelle problem er innvolvert e ukjente størrelser. Til problemets løsning foretas i alt n observasjoner (enten direkte av de ukjente selv eller indirekte ved måling av størrelser som står i funksjonell forbindelse med de ukjente). Hver enkelt observasjon gir følgelig grunnlag for oppstilling av en ligning mellom de ukjente. Utjevningstilfellet er da karakterisert ved at $n>e$. Da blir ligningssystemet overbestemt, idet antall ligninger overskrider antall ukjente. Som følge av at målingene er beheftet med feil, vil det for $n>e$ opptre motsigelser innen systemet, slik at vi får differerende verdier for de ukjente alt etter hvilke e ligninger (observasjoner) som velges ut til bestemmelse av de ukjente. For å bringe overbestemmelse til veie når $n>e$, må det følgelig innføres korreksjoner på de utførte observasjoner. Men derved endrer problemet karakter. I tillegg til de opprinnelige e ukjente kommer nå n utjevningskorreksjoner, slik at vi nå har $n+e$ ukjente og bare n ligninger, dvs. det opprinnelige overbestemte ligningssystem er gått over til å bli underbestemt. Heri ligger det at det å bortskaffe motsigelsene i systemet, kan gjøres på et uendelig antall måter. Det må følgelig innføres et utjevningsprinsipp som av det ubegrensede antall muligheter velger ut en bestemt, nemlig den som etter visse kriterier, fortoner seg som den fordelaktigste. I praksis blir det bare spørsmål om et utjevningsprinsipp, nemlig minste kvadraters metode. I det elementære kurs ble påvist at under forutsetning av at målefeilene følger den Gaussiske feillov, så resulterer dette prinsipp i slike verdier for utjevningskorreksjonene (og samtidig for de ukjente, så vel som for vilkårlige størrelser uttrykt som funksjon av de ukjente), at den matematiske sannsynlighet for nettopp disse verdier, blir maksimal.

I det elementære kurs har vi behandlet det enkleste utjevningstilfelle, som has når det aktuelle problem bare omfatter en ukjent størrelse, et utjevningsproblem som betegnes som middeltallsutjevning. Videre ble utjevning av sluttfeil behandlet, et tilfelle karakterisert ved at antall overbestemmelser er lik én.

I det videregående kurs skal vi befatte oss med de mer kompliserte utjevningstilfeller at antall ukjente eller antall overbestemmelser overskrider én. Disse tilfeller omfatter element- og korrelatutjevning (i virkeligheten er ikke middeltallsutjevning og utjevning av sluttfeil annet enn spesialtilfeller av element-, respektive korrelatutjevning).

Kapitel I .

ELEMENTUTJEVNING.

1. Innføring av begrepet element.

Uttrykket element har i denne forbindelse en ganske spesiell betydning. Det nyttes nemlig som betegnelse på de ukjente størrelser som er innvolvert i det aktuelle problem, hvis løsning er de utførte målingers primære formål. Vi skal belyse dette med et eksempel. I trekanten ABC (fig. 1) er avsatt samtlige vinkler og sider. Vi står følgelig overfor et system eller størrelseskompleks, bestående av 6 størrelser. Fra geometrien vet vi at en trekant er fullstendig bestemt ved tre størrelser, hvorav i det minste den ene må være en sidelengde. Bestemmelsen av en trekant er følgelig et problem som generelt "omfatter" 3 ukjente, dvs. e = 3.

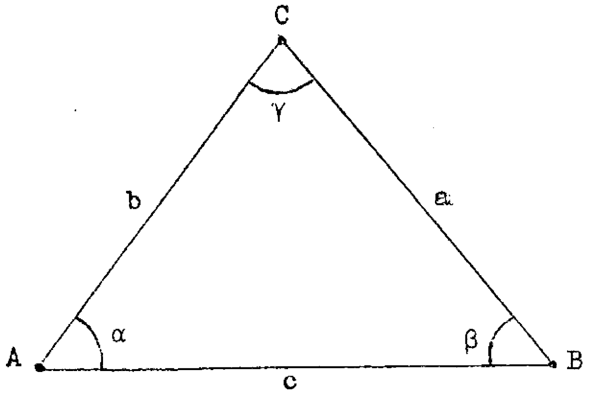


Fig. 1

Når det gjelder valg av disse ukjente, så består det et større antall muligheter. Fra matematikken vet vi at antall muligheter for kombinering av e størrelser innen et størrelseskompleks, bestående av n størrelser, er gitt ved

$$\binom{n}{e} = \frac{n!}{e!(n-e)!}$$

som i foreliggende tilfelle resulterer i $\binom{6}{3} = 20$, som setter seg sammen av:

1. Tre sider	=	1 mulighet
2. Tre vinkler	=	1 "
3. To sider og en vinkel	=	9 muligheter
4. En side og to vinkler	=	9 "
Tilsammen		20 muligheter

Det synes altså som om det her består i alt 20 muligheter for valg av elementer. Imidlertid er ikke alle disse muligheter brukbare. Det henger sammen med at elementene må oppfylle følgende fundamentale fordringer:

1. De må entydig fastlegge vedkommende størrelseskompleks, og
2. De må være uavhengige av hverandre, dvs. det må ikke bestå noen funksjonell forbindelse mellom dem.

Derfor faller muligheten med valg av tre vinkler bort, fordi de alene ikke formår å bestemme trekanten, og det henger nettopp sammen med at de står i funksjonell forbindelse med hverandre ($\alpha+\beta+\gamma = 200^g$). Heller ikke er alle 9 mulighetene med to sider og en vinkel brukbare. Det skyldes at en trekant *ikke er entydig bestemt ved to sider og den minste sides motstående vinkel.* ? For hver kombinasjon av to sider er derfor en av de tre mulighetene ubrukbare, slik at det istedenfor de 9 bare blir 6 brukbare muligheter i den 3. gruppen. I foreliggende tilfelle består det altså i alt 20 - 1 - 3 = 16 muligheter for valg av elementer. På tilsvarende måte vil det forholde seg ved de fleste oppgaver i landmålingen - en vil ha en rekke muligheter å velge mellom - og en velger til elementer de størrelsene som i det konkrete tilfelle gir den enkleste regning.

I enkelte tilfeller er det mulig å velge elementene blant de målte størrelser, og det gir som regel den enklest mulige regning. Imidlertid står vi ofte overfor tilfeller, hvor det ikke vil være mulig eller ihvertfall ikke praktisk å innrette seg slik. Ved koordinatutjevning f.eks. som vi støter på senere i feillæren, lønner det seg å velge nypunktenes koordinater til elementer, mens de målte størrelser er retninger eller vinkler. I eksemplet med trekanten vil det selvsagt også være mulig å velge elementene utenom de betraktede 6 størrelsene. Vi kunne f.eks. som elementer velge: en side, lengden av perpendikulæren fra det motstående hjørnepunkt på denne side og beliggenheten av perpendikulærfotpunktet på siden (foruten en rekke andre muligheter).

Generelt kan det sies at det ved valg av elementer lønner seg "å gå mest mulig rett på sak", dvs. å velge som elementer de størrelser som primært interessere.

2. Observasjonsligninger, feilligninger og normalligninger.

Vi tar vårt utgangspunkt i den problemstilling som er drøftet i det foregående, nemlig at det foreligger $\underline{n}$ observasjoner til bestemmelse av et størrelseskompleks som entydig blir fastlagt ved $\underline{e}$ elementer. Når elementene er valgt, kan enhver størrelse som hører med til systemet, uttrykkes som funksjon av elementene. At så må være tilfelle, er lett å innse på basis av det betraktede tilfelle med trekanten i fig. 1. Det er klart at når elementene først er valgt, vil enhver størrelse som angår trekanten, kunne utregnes ved hjelp av elementene. Velges f.eks. α, b og c til elementer, vil ikke bare den 3. siden og de to andre vinklene kunne regnes ut, men også arealet, radien til den inn- og omskrevne sirkel, medianenes lengde osv., i det hele alle størrelser som angår trekanten.

I det generelle tilfelle vil det følgelig være mulig å uttrykke de n målte størrelsene som funksjoner av elementene. Vi betegner de målte størrelser med o_1, o_2, ..., o_n, de valgte elementer med X, Y, Z, ... og funksjonsforbindelsen med

$$o_i = F_i (X, Y, Z, ...)$$

Disse ligninger går under navn av observasjonsligninger. Deres antall er n , og de inneholder i alt e ukjente, dvs. ligningssystemet er overbestemt forutsatt at $n > e$, og det vil jo alltid være tilfelle når det er spørsmål om å foreta utjevning. På grunn av målefeil vil det opptre motsigelser i ligningssystemet, dvs. om vi velger ut e ligninger og løser disse med hensyn til elementene, og setter disse verdiene for elementene i de øvrige n-e ligninger, vil de siste ikke være tilfredsstilt. Overensstemmelse innen ligningssystemet oppnås ved å tilføye de målte størrelser korreksjonene v_1, v_2, ...v_n, slik at vi får

$$\begin{array}{lll} o_1 + v_1 = F_1(X, Y, Z, ...), & \text{dvs.} & v_1 = F_1(X, Y, Z, ...) - o_1 \\ o_2 + v_2 = F_2(X, Y, Z, ...), & '' & v_2 = F_2(X, Y, Z, ...) - o_2 \\ \multicolumn{3}{l}{..} \\ o_n + v_n = F_n(X, Y, Z, ...), & '' & v_n = F_n(X, Y, Z, ...) - o_n \end{array}$$

Vi kommer så over til de såkalte feilligninger ved å bringe observasjonsligningene på lineær form. Det oppnås ved å innføre tilnærmede verdier for elementene (x°, y°, z°), idet vi setter:

$$X = x^\circ + x$$
$$Y = y^\circ + y$$
$$Z = z^\circ + z$$
$$..........$$

hvor størrelsene x , y , z , ... er små forbedringer av elementene som overfører de tilnærmede verdier av elementene i de endelige verdiene X, Y, Z, ...

Dermed antar den i-te observasjonsligning formen

$$o_i + v_i = F_i (x^o + x \;,\; y^o + y \;,\; z^o + z \;,\; .....)$$

Vi utvikler så dette uttrykk etter Taylors formel, idet vi forutsetter at de tilnærmede verdier x^o, y^o, z^o, ... er så gode tilnærmelser at tilleggene x , y , z , ... blir så små størrelser at leddene av 2. og høyere orden i Taylors rekkeutvikling kan settes ut av betraktning, følgelig

$$\begin{aligned} o_i + v_i &= F_i(x^\circ, y^\circ, z^\circ, ...) + (\frac{\partial F_i}{\partial X})_\circ x + (\frac{\partial F_i}{\partial Y})_\circ y + (\frac{\partial F_i}{\partial Z})_\circ z + ...) \\ &= F_i(x^\circ, y^\circ, z^\circ, ...) + a_i x + b_i y + c_i z + ... \end{aligned}$$

idet vi har innført forkortede betegnelser for differensialkvotientene. (Nullindiseringen av differensialkvotientene indikerer at det er de provisoriske verdier som her skal settes inn for elementene.) Ligningene ovenfor resulterer i følgende ligningssystem, idet vi begrenser oss til tre elementer :

$$
\begin{aligned}
v_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + F_1(x^\circ,\ y^\circ,\ z^\circ) - o_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + f_1 \\
v_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + F_2(x^\circ,\ y^\circ,\ z^\circ) - o_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + f_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_n &= a_n x + b_n y + c_n z + F_n(x^\circ,\ y^\circ,\ z^\circ) - o_n = a_n x + b_n y + c_n z + f_n
\end{aligned}
$$

Vi har her også innført forkortede betegnelser for konstantleddene, nemlig:

$$f_i = F_i(x^o,\ y^o,\ z^o) - o_i$$

Ligningene ovenfor går under navn av feilligninger. Deres antall er lik antall målinger, og vi kommer fram til dem ved å linearisere observasjonsligningene. I feilligningssystemet opptrer n v-er og e elementer som ukjente størrelser, mens antall ligninger er lik n , dvs. vi har e flere ukjente enn ligninger, systemet er ubestemt. For at oppgaven skal bli bestemt, må vi skaffe e flere ligninger til veie, og det skjer ved å trekke inn prinsippet som ligger til grunn for minste kvadraters metode.

$$[pvv] = \text{minimum}$$

I funksjonen [pvv] opptrer bare de e elementer som variable. Minimum av funksjonen finner vi på vanlig måte ved å differensiere partielt med hensyn til samtlige variable og sette alle differensialkvotienter lik null, altså ved å danne:

$$\frac{\partial[pvv]}{\partial x} = o \quad , \quad \frac{\partial[pvv]}{\partial y} = o \quad \text{og} \quad \frac{\partial[pvv]}{\partial z} = o$$

Her er: $[pvv] = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \ldots\ldots + p_n v_n^2$

hvor v-ene ifølge feilligningene er funksjoner av x , y , z . Etter reglene for derivasjon av sammensatte funksjoner må vi først derivere [pvv] med hensyn til v-ene og deretter v-ene med hensyn til elementene x , y , z . Minimumsbetingelsene for [pvv] er følgelig gitt ved:

$$\frac{\partial[pvv]}{\partial x} = 2p_1 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + 2p_2 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + \ldots\ldots + 2p_n v_n \frac{\partial v_n}{\partial x} = o$$

$$\frac{\partial[pvv]}{\partial y} = 2p_1 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} + 2p_2 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + \ldots\ldots + 2p_n v_n \frac{\partial v_n}{\partial y} = o$$

$$\frac{\partial[pvv]}{\partial z} = 2p_1 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} + 2p_2 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} + \ldots\ldots + 2p_n v_n \frac{\partial v_n}{\partial z} = o$$

Vi innfører så her de verdiene for $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ og $\frac{\partial v}{\partial z}$ som feilligningssystemet gir ($\frac{\partial v_i}{\partial x}=a_i$, $\frac{\partial v_i}{\partial y} = b_i$ og $\frac{\partial v_i}{\partial z} = c_i$), forkorter over alt med 2 og får:

$$\begin{array}{lll}
p_1v_1a_1 + p_2v_2a_2 + \ldots\ldots + p_nv_na_n = o , & \text{dvs.} & [pav] = o \\
p_1v_1b_1 + p_2v_2b_2 + \ldots\ldots + p_nv_nb_n = o , & '' & [pbv] = o \\
p_1v_1c_1 + p_2v_2c_2 + \ldots\ldots + p_nv_nc_n = o , & '' & [pcv] = o
\end{array}$$

Dette er det såkalte <u>implisitte normalligningssystem</u>. Vi får brakt det over på eksplisitt form ved å danne [pav] , [pbv] og [pcv] med utgangspunkt i feilligningssystemet.

$$\begin{array}{l||c|c|c}
v_1 = a_1x + b_1y + c_1z + f_1 & p_1a_1 & p_1b_1 & p_1c_1 \\
v_2 = a_2x + b_2y + c_2z + f_2 & p_2a_2 & p_2b_2 & p_2c_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
v_n = a_nx + b_ny + c_nz + f_n & p_na_n & p_nb_n & p_nc_n
\end{array}$$

Vi multipliserer i tur og orden med pa- , pb- og pc-kolonnen, summerer det hele og kommer fram til

$$\begin{array}{rc|cccc|c}
 & & a & b & c & f & \\ \cline{3-6}
[pav] & = & [paa]x + & [pab]y + & [pac]z + & [paf] = o & a \\
[pbv] & = & [pab]x + & [pbb]y + & [pbc]z + & [pbf] = o & b \\
[pcv] & = & [pac]x + & [pbc]y + & [pcc]z + & [pcf] = o & c \\ \cline{3-6}
\end{array}$$

Det innrammede system er det såkalte <u>normalligningssystem</u>, som spiller en grunnleggende rolle ved alle former for utjevning etter m.k.m. I foreliggende tilfelle fikk vi tre normalligninger. I det generelle tilfelle får vi like mange normalligninger som elementer.

Normalligningssystemet kan tenkes framkommet på den måten at vi skriver koeffisientene i feilligningssystemet horisontalt og vertikalt (se forangående normalligningsoppstilling). En vilkårlig normalligningskoeffisient kan da oppfattes som "skjæringspunkt" mellom den horisontale og vertikale linje gjennom de tilhørende feilligningskoeffisienter. Vedkommende normalligningskoeffisient er da gitt som produktet av disse feilligningskoeffisienter med tilføyelse av p og med summetegn omkring.

Når det gjelder "strukturen" av normalligningssystemet, er det å bemerke at det består symmetri mellom koeffisientene. Koeffisientene [paa] ,

[pbb] og [pcc], som går under navn av <u>kvadratiske koeffisienter</u>, danner en diagonallinje som samtidig er symmetriakse. Denne symmetri letter oppløsningen i høy grad og tillater en forenklet skrivemåte som ofte brukes:

$$\begin{aligned}
\underline{[paa]}x + [pab]y + [pac]z + [paf] &= o \\
\underline{[pbb]}y + [pbc]z + [pbf] &= o \\
\underline{[pcc]}z + [pcf] &= o
\end{aligned}$$

Ved oppløsning av normalligningene finnes forbedringene x, y og z til de tilnærmede verdier av elementene. De endelige, utjevnede verdier av elementene er da gitt ved tidligere anførte ligninger:

$$\begin{aligned}
X &= x^o + x \\
Y &= y^o + y \\
Z &= z^o + z
\end{aligned}$$

og dermed er den egentlige utjevningsoppgave løst.

3. Kontroll på danningen av normalligningene.

Kontroll skaffer vi oss ved hjelp av summene til feilligningskoeffisientene.

Vi tar vårt utgangspunkt i den i-te feilligning og setter

$$a_i + b_i + c_i \ldots\ldots + f_i = s_i \quad \| \quad p_i a_i \quad | \quad p_i b_i \quad | \quad p_i c_i \quad |$$

hvor altså s er summen av koeffisientene i feilligningen. Vi multipliserer med $p_i a_i$, summerer og får

$$[\,pa\overset{a}{\cancel{b}}] + [pab] + [pac] + \ldots\ldots\ldots + [paf\,] = [pas]$$

Ved så å multiplisere med $p_i b_i$ og summere fås på samme måte for summen av koeffisientene til 2. normalligning

$$[pab\,] + [\,pbb] + [pbc] + \ldots\ldots \quad + [pbf] = [pbs]$$

I sin alminnelighet gjelder altså at summen av koeffisienten til en normalligning, hvis kvadratiske koeffisient er [pii], er lik [pis].

Vi skaffer oss altså kontroll på danningen av normalligningen ved hjelp av s-ene, idet vi undersøker om summen av normalligningskoeffisientene stemmer med den verdi som vi kommer fram til gjennom summekoeffisientene [pas], [pbs], osv.

4. Oppløsning av normalligningssystemet.

Det finnes en hel rekke metoder for oppløsning av normalligningssystemer. Dreier det seg om små systemer med bare to eller tre ukjente, kan det komme på tale å foreta oppløsningen ved hjelp av determinanter, spesielt dersom en ved oppløsningen bare tar sikte på å bestemme verdiene av elementene. Imidlertid er forholdet det at en rekke andre størrelser interesserer, f.eks. feilkvadratsummen og vektskoeffisientene til elementene (eller til vilkårlige funksjoner av elementene), og for utledningen av slike tilleggsstørrelser er ikke determinanter særlig velegnet. Heller ikke tar determinantmetoden hensyn til (og følgelig heller ikke trekker fordel av) NL-systemts symmetriske struktur.

Den mest kjente og i hvert fall tidligere også mest benyttede eliminasjonsmetode, skriver seg fra Gauss og går under navn av den Gaussiske algoritmus. Prinsippet som ligger til grunn for metoden, er det enklest mulige; det består nemlig i en suksessiv eliminering av de ukjente, én for én (substitusjonsprinsippet). Vi skal demonstrere prinsippet på følgende NL-system med 4 ukjente:

$$\begin{aligned}
[paa]x + [pab]y + [pac]z + [pad]t + [paf] &= o\\
[pab]x + [pbb]y + [pbc]z + [pbd]t + [pbf] &= o\\
[pac]x + [pbc]y + [pcc]z + [pcd]t + [pcf] &= o\\
[pad]x + [pbd]y + [pcd]z + [pdd]t + [pdf] &= o
\end{aligned}$$

Den første ligning gir for x

$$x = -\frac{[pab]}{[paa]}y - \frac{[pac]}{[paa]}z - \frac{[pad]}{[paa]}t - \frac{[paf]}{[paa]}$$

som innsatt i de tre andre ligninger, resulterer i

$$\left([pbb]-\frac{[pab][pab]}{[paa]}\right)y+\left([pbc]-\frac{[pab][pac]}{[paa]}\right)z+\left([pbd]-\frac{[pab][pad]}{[paa]}\right)t+\left(\overset{[pbf]}{\cancel{[paf]}}-\frac{[pab][paf]}{[paa]}\right) = o$$

$$\left([pbc]-\frac{[pab][pac]}{[paa]}\right)y+\left([pcc]-\frac{[pac][pac]}{[paa]}\right)z+\left([pcd]-\frac{[pac][pad]}{[paa]}\right)t+\left([pcf]-\frac{[pac][paf]}{[paa]}\right) = o$$

$$\left([pbd]-\frac{[pab][pad]}{[paa]}\right)y+\left([pcd]-\frac{[pac][pad]}{[paa]}\right)z+\left([pdd]-\frac{[pad][pad]}{[paa]}\right)t+\left([pdf]-\frac{[pad][paf]}{[paa]}\right) = o$$

For dette system innføres skrivemåten

$$\begin{aligned}
[pbb\cdot 1]y + [pbc\cdot 1]z + [pbd\cdot 1]t + [pbf\cdot 1] &= o\\
[pbc\cdot 1]y + [pcc\cdot 1]z + [pcd\cdot 1]t + [pcf\cdot 1] &= o\\
[pbd\cdot 1]y + [pcd\cdot 1]z + [pdd\cdot 1]t + [pdf\cdot 1] &= o
\end{aligned}$$

Det nye system inneholder en ukjent mindre enn originalsystemet. Det betegnes derfor som det en gangs reduserte NL-system, og det er nettopp dette reduksjonstrinn som den énpunkterte skrivemåten gir uttrykk for.

Hva oppbygningen av koeffisientene i det énpunkterte system angår, så er den underkastet en enkel lovmessighet. De énpunkterte størrelser, som er oppbygget av nullpunkterte størrelser (dvs. av originale NL-ligningskoeffisienter) består av et positivt og et negativt ledd. Det positive ledd er identisk med den normalligningskoeffisient som framkommer når vi utelater ·1 i den reduserte koeffisienten. Alle negative ledd har nevneren [paa]. Telleren består av to faktorer som begge inneholder a. Dessuten inneholder faktorene hver sin av bokstavene i det positive ledd, slik at en symbolsk forkortelse resulterer i null for de énpunkterte koeffisienters vedkommende. Generelt har vi altså

$$[pij\cdot 1] = [pij] - \frac{[pai][paj]}{[paa]}$$

Videre legger vi merke til at det reduserte system oppviser samme symmetriske struktur som originalsystemet.

Vi gjentar så den benyttede eliminasjonsprosedyre. Av det reduserte system fås for y

$$y = -\frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}z - \frac{[pbd\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}t - \frac{[pbf\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}$$

som innsatt i de to resterende ligninger gir

$$\left([pcc\cdot 1] - \frac{[pbc\cdot 1][pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}\right)z + \left([pcd\cdot 1] - \frac{[pbc\cdot 1][pbd\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}\right)t + \left([pcf\cdot 1] - \frac{[pbc\cdot 1][pbf\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}\right) = o$$

$$\left([pcd\cdot 1] - \frac{[pbc\cdot 1][pbd\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}\right)z + \left([pdd\cdot 1] - \frac{[pbd\cdot 1][pbd\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}\right)t + \left([pdf\cdot 1] - \frac{[pbd\cdot 1][pbf\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}\right) = o$$

som skrives forkortet

$$[pcc\cdot 2]z + [pcd\cdot 2]t + [pcf\cdot 2] = o$$

$$[pcd\cdot 2]z + [pdd\cdot 2]t + [pdf\cdot 2] = o$$

som betegnes som det <u>to gangers reduserte NL-system</u>. Vi ser at NL-strukturen går igjen også i dette system. De topunkterte størrelser som er oppbygget av énpunkterte størrelser, består, på samme måte som de énpunkterte, av et positivt og et negativt ledd. Det positive ledd inneholder de samme bokstaver som den to ganger reduserte koeffisient, men er én orden lavere med hensyn til punktering. Nevneren i det negative ledd inneholder $[pbb\cdot 1]$. De topunkterte størrelsene lar seg også symbolsk forkorte til null. Generelt har vi altså

$$[pij\cdot 2] = [pij\cdot 1] - \frac{[pbi\cdot 1][pbj\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}$$

Hadde ligningssystemet inneholdt flere ukjente, ville vi ha kommet fram til høyere reduksjonstrinn og følgelig til punkterte størrelser av høyere orden. De trepunkterte størrelsene f.eks. får formen:

$$[pij\cdot 3] = [pij\cdot 2] - \frac{[pci\cdot 2][pcj\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}$$

Den i det foregående gjennomførte eliminasjonsprosedyre tillater en helt skjematisk (mekanisk) utførelse. Vi skal vise hvordan det arter seg for et NL-system bestående av tre ligninger

$$[paa]x + [pab]y + [pac]z + [paf] = o$$

$$[pab]x + [pbb]y + [pbc]z + [pbf] = o$$

$$[pac]x + [pbc]y + [pcc]z + [pcf] = o$$

1	$[paa]x$	$[pab]y$	$[pac]z$	$[paf]$	$\left(-\frac{[pab]}{[paa]}\right)\left(-\frac{[pac]}{[paa]}\right)$
2	$[pab]x$	$[pbb]y$	$[pbc]z$	$[pbf]$	
3	$-[pab]x$	$-\frac{[pab]^2}{[paa]}y$	$-\frac{[pac][pab]}{[paa]}z$	$-\frac{[paf][pab]}{[paa]}$	
4	o	$[pbb\cdot 1]y$	$[pbc\cdot 1]z$	$[pbf\cdot 1]$	$\left(-\frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}\right.$
5	$[pac]x$	$[pbc]y$	$[pcc]z$	$[pcf]$	
6	$-[pac]x$	$-\frac{[pab][pac]}{[paa]}y$	$-\frac{[pac]^2}{[paa]}z$	$-\frac{[paf][pac]}{[paa]}$	
7	o	$-[pbc\cdot 1]y$	$-\frac{[pbc\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]}z$	$-\frac{[pbf\cdot 1][pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}$	
8	o	o	$[pcc\cdot 2]z$	$[pcf\cdot 2]$	

Først innføres den 1. normalligning i linje 1 og derunder den 2. normalligning i linje 2. Vi eliminerer så x av disse to ligningene ved å multiplisere 1. normalligning med $-\frac{[pab]}{[paa]}$ og addere resultatet til 2. normalligning. Denne multiplikasjon er utført i 3. linje, og addisjonen skjer i 4. linje. Derved fås en ligning i 4. linje som bare inneholder y og z som ukjente. Så innføres 3. normalligning i 5. linje. I denne normalligning elimineres x ved hjelp av 1. normalligning, og y ved hjelp av 1. normalligning og den innrammede ligning i linje 4. Det foregår på den måten at vi først multipliserer

1. normalligning med faktoren $-\frac{[pac]}{[paa]}$, og resultatet føres i 6. linje. Deretter multipliseres 4. linje med $-\frac{[pbc\cdot1]}{[pbb\cdot1]}$, og resultatet føres i 7. linje, og det hele adderes til 3. normalligning i linje 5. Resultatet av denne addisjon blir en ny innrammet ligning i linje 8, som bare inneholder z som ukjent. Hovedresultatet av oppløsningen er de innrammede ligninger, og disse har fått eget navn, nemlig sluttligninger. I eksemplet foran er vi altså kommet fram til følgende sluttligninger

$$\begin{aligned}
[paa]x + [pab]y + [pac]z + [paf] &= 0\\
[pbb\cdot1]y+[pbc\cdot1]z+[pbf\cdot1] &= 0\\
[pcc\cdot2]z+[pcf\cdot2] &= 0
\end{aligned}$$

idet 1. normalligning skal betraktes som 1. sluttligning.

Av siste sluttligning finnes z, og ved suksessiv innsetting i de andre sluttligningene finnes først y og til slutt x. (Vi skal senere se at i virkeligheten foregår transaksjonen med å fremskaffe de ukjente på basis av sluttligningssystemet langt mer "raffinert".)

Betrakter vi det oppstilte eliminasjonsskjema nøyere, ser vi at alle regneoperasjoner til venstre for de dobbelte opptrukne, vertikale linjer er uten betydning for utledningen av de ukjente. Vi kan derfor under de etterfølgende betrakninger begrense oss til regneoperasjonene på høyre side av dobbeltstrekene. (Det er NL-systemets symmetriske struktur som er årsaken til denne forenkling, som innebærer en betydelig arbeidsbesparelse, som ikke vil kunne "innkasseres" dersom det dreier seg om ligningssystemer av vilkårlig struktur.)

Ikke bare ved oppløsning av ligningssystemer, men ved regnetransaksjoner i det hele tatt, er det av stor betydning å bruke metoder som tillater en helt gjennom mekanisk framgangsmåte etter et enkelt huskeskjema. Vi stiller oss derfor nå til oppgave å "materialisere" framgangsmåten i det oppstilte eliminasjonsskjema i enkle huskeregler, som muliggjør en ren mekanisk arbeidsmåte. En nærmere betrakning av skjemaet resulterer i følgende huskeregler:

1. Under hver sluttligning innføres en normalligning, idet alle ledd foran den kvadratiske koeffisient kastes vekk. Den første normalligning skal betraktes som 1. sluttligning.

2. 1. linje under hver normalligning avledes av 1. sluttligning og er lik produktet av 1. sluttligning og faktoren $-\frac{q_1}{q_2}$, hvor q_1 er den koeffisient i 1. sluttligning som befinner seg i det aktuelle reduksjonsavsnitts første kolonne, mens q_2 er 1. koeffisient i 1. sluttligning.

3. 2. linje under hver normalligning avledes av 2. sluttligning og er lik produktet av 2. sluttligning og faktoren $-\frac{q_1'}{q_2'}$, hvor q_1' er koeffisienten i 2. sluttligning som befinner seg i det aktuelle reduksjonsavsnitts første kolonne, mens q_2' er 1. koeffisient i 2. sluttligning. Slik fortsettes inntil alle sluttligninger er "oppbrukt".

4. Så dannes summen av alle linjene nedenfor foregående sluttligning, og denne summering resulterer i en ny sluttligning.

Vi skal så praktisere disse reglene på et eksempel med tre ukjente, idet vi benytter forkortede betegnelser A, B, C og D på koeffisientene i normalligningssystemet.

1.n.l.=1.s.l.	A_1	B_1	C_1	D_1
2.n.l.		B_2	C_2	D_2
$-\frac{B_1}{A_1}$		$-\frac{B_1^2}{A_1}$	$-\frac{B_1}{A_1}C_1$	$-\frac{B_1}{A_1}D_1$
2.s.l.		$B_2 \cdot 1$	$C_2 \cdot 1$	$D_2 \cdot 1$
3.n.l.			C_3	D_3
$-\frac{C_1}{A_1}$			$-\frac{C_1^2}{A_1}$	$-\frac{C_1}{A_1}D_1$
$-\frac{C_2 \cdot 1}{B_2 \cdot 1}$			$-\frac{C_2 \cdot 1^2}{B_2 \cdot 1}$	$-\frac{C_2 \cdot 1}{B_2 \cdot 1}D_2 \cdot 1$
			$C_3 \cdot 2$	$D_3 \cdot 2$

Den Gaussiske eliminasjonsmetode er kun brukbar for oppløsning av ligningssystemer som har normalligningsstruktur. (Metoden kan riktignok anvendes på vilkårlige ligningssystemer, men det forutsetter at vi betrakter det opprinnelige ligningssystem som feilligninger og danner normalligninger av disse før oppløsningen.)

Den Gaussiske metode ble utformet før regnemaskinenes oppfinnelse. Den er derfor spesielt tilpasset logaritmeregning og egner seg ikke særlig for maskinregning fordi den ikke gir høve til å utnytte alle de mulighetene som moderne regnemaskiner innebærer. Metodens største mangel består deri at den medfører oppskriving av resultatene til et større antall mellomregninger. Metoden er derfor sterkt utsatt for opphopning av avrundingsfeil, slik at vi blir nødt til å operere med et uforholdsmessig stort antall siffer når det dreier seg om systemer med mange ukjente. Siden regnemaskiner kom i bruk, er det dukket opp metoder som er bedre tilpasset den automatisering av regneoperasjonene som moderne regnemaskiner innebærer muligheter for enn den Gaussiske metode. Av slike metoder kan nevnes den moderniserte Gaussiske metode eller Doolittle's metode som den også kalles, og Cholesky - Rubins metode. Ved begge disse metodene er nedskrivning av resultater begrenset til koeffisientene i sluttligningene.

*

Det lar seg vise at NL-systemets determinant er gitt ved

$$D = [paa][pbb \cdot 1][pcc \cdot 2] \ldots.$$

og videre at

$$[pbb \cdot 1] > o, \; [pcc \cdot 2] > o, \text{ osv.}$$

likeledes at

$$[pvv] \leqq [pff]$$

(Likhet mellom $[pvv]$ og $[pff]$ kan bare inntreffe i det spesialtilfelle at samtlige konstantledd i NL-systemet er lik null. Da blir de endelige verdier for elementene lik de provisoriske verdier, slik at v-ene blir identisk med feilligningenes konstantledd.) Videre lar det seg bevise at i tilfelle av at $\frac{b_i}{a_i} = k$, hvor k er konstant, vil det ikke være mulig ved oppløsningen av NL-systemet å "separere" de to elementer som a-ene og b-ene står til. Eks.

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + k\, a_1 y + c_1 z + f_1 \\ v_2 &= a_2 x + k\, a_2 y + c_2 z + f_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= a_n x + k\, a_n y + c_n z + f_n \end{aligned}$$

med tilhørende NL-system

$$\begin{aligned} 1.\;& [paa]x + k[paa]y + [pac]z + [paf] = o \\ 2.\;& k[paa]x + k^2[paa]y + k[pac]z + k[paf] = o \\ 3.\;& [pac]x + k[pac]y + [pcc]z + [pcf] = o \end{aligned}$$

Vi får altså et system av lineært avhengige ligninger, idet

$$\text{lign.}2 = k \times \text{lign.}1$$

5. Regnekontroller i forbindelse med oppløsningen av NL-systemet.

For å sikre seg mot regnefeil ved de tallrike regneoperasjoner som en utjevningsoppgave medfører, innføres en rekke regnekontroller. Vi skiller mellom fortløpende prøver og sluttprøver. Til fortløpende prøving av regningens gang har summeprøvene vist seg meget hensiktsmessige. Som tidligere vist, sjaltes summeprøver inn allerede under dannelsen av normalligningskoeffisientene, idet vi skaffer oss kontroll på danningen av disse ved hjelp av relasjonene:

$$
\begin{aligned}
[paa] + [pab] + [pac] + [paf] &= [pas] \\
[pab] + [pbb] + [pbc] + [pbf] &= [pbs] \\
[pac] + [pbc] + [pbb] + [pcf] &= [pcs]
\end{aligned}
$$

Disse summeledd kan også brukes til å kontrollere oppløsningen av normalligningene. Summeleddene trekkes inn i oppløsningen og blir behandlet etter de samme mekaniske regler som de øvrige koeffisienter, og kontrollen be**står i at følgende relasjoner skal være oppfylt**

$$
\begin{aligned}
[paa] + [pab] + [pac] + [paf] &= [pas] \\
[pbb\cdot 1]+[pbc\cdot 1]+[pbf\cdot 1] &= [pbs.1] \\
[pcc\cdot 2]+[pcf\cdot 2] &= [pcs\cdot 2]
\end{aligned}
$$

At disse ligninger må bestå, framgår av en nærmere betraktning av eliminasjonsskjemaet på side 10. Vi skal vise riktigheten av disse kontrolligninger for den andre sluttlignings vedkommende. Den andre sluttligning er framkommet ved å multiplisere 1. normalligning med en faktor $f = -\frac{[pab]}{[paa]}$ og addere resultatet av denne multiplikasjon til 2. normalligning, med andre ord:

$$
\begin{array}{ll}
\text{2.n.l.} & [pab] \;+[pbb] \;+[pbc] \;+[pbf] = [pbs] \\
\text{1.n.l. x f} & [paa]f +[pab]f +[pac]f +[paf]f = [pas]f \\
\hline
\text{2.s.l.} & \quad o \quad +[pbb\cdot 1]+[pbc\cdot 1]+[pbf\cdot 1]= [pbs\cdot 1] \\
\hline
\end{array}
$$

Det er innlysende at den likhet som består mellom høyre og venstre side av de første to ligningene, også vil bestå for sluttligning nr. 2, som jo ikke er annet enn summen av dem. På tilsvarende måte kan vi bevise riktigheten av de angitte kontrolligninger for de øvrige sluttligningers vedkommende.

Vi sammenfatter så i korthet hvordan kontrollen med oppløsningen av normalligninger foregår: Det skjer på den måten at summekoeffisientene trekkes inn i oppløsningen og behandles på akkurat samme måte som de andre koeffisienter i normalligningssystemet. For hver sluttligning får vi kontroll ved at summen av koeffisientene i sluttligningen skal stemme overens med samme sluttlignings reduserte summekoeffisient.

6. Utledning av feilkvadratsummen.

Vi skal i det etterfølgende vise at det er mulig å utlede [pvv] på flere måter. Dette forhold innebærer mulighet for en omfattende kontroll av hele utjevningsregningen.

6.1. Direkte beregning av [pvv].

Etter at elementene er funnet ved oppløsning av normalligningene, kan korreksjonene v utregnes på grunnlag av feilligningssystemet, idet vi i det siste innfører de verdier for elementene som utjevningen har resultert i. Deretter kvadreres v-ene og multipliseres med de tilhørende vekter, hvorved [pvv] fås direkte.

6.2. Beregning av [pvv] på grunnlag av [pff].

Vi tar vårt utgangspunkt i feilligningssystemet:

$$\begin{array}{l|c|c}
v_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + f_1 & p_1 v_1 & p_1 f_1 \\
v_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + f_2 & p_2 v_2 & p_2 f_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \\
v_n = a_n x + b_n y + c_n z + f_n & p_n v_n & p_n f_n
\end{array}$$

Vi multipliserer feilligningssystemet med pv-kolonnen, summerer det hele og får:

$$[pvv] = [pav]x + [pbv]y + [pcv]z + [pfv]$$

hvor [pav], [pbv] og [pcv], som tidligere nevnt, ,c,& represnenterer den implisitte skrivemåte for normalligningene. Vi må altså ha:

$$[pav] = [pbv] = [pcv] = o$$

dvs.

$$[pvv] = [pfv]$$

Vi multipliserer så feilligningene med pf-kolonnen, summerer og får

$$[pvf] = [pvv] = [pff] + [paf]x + [pbf]y + [pcf]z$$

6.3. Utledning av [pvv] i tilknytning til oppløsningen av normalligningssystemet.

Vi tar vårt utgangspunkt i det nettopp utledede uttrykk for [pvv]:

$$[pvv] = [pff] + [paf]x + [pbf]y + [pcf]z$$

Vi substituerer her elementene x, y, og z med verdiene fra sluttligningssystemet, og får etter noen enkle omforminger:

$$[pvv] = [pff] - \frac{[paf]^2}{[paa]} - \frac{[pbf\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]} - \frac{[pcf\cdot 2]^2}{[pcc\cdot 2]}$$

Ifølge reglene for de punkterte størrelser er:

$$[pff] - \frac{[paf]^2}{[paa]} \text{ lik } [pff\cdot 1]$$

dvs. $$[pvv] = [pff\cdot 1] - \frac{[pbf\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]} - \frac{[pcf\cdot 2]^2}{[pcc\cdot 2]}$$

Her er $$[pff\cdot 1] - \frac{[pbf\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]} \text{ lik } [pff\cdot 2]$$

~~dvs.~~ $$[pvv] = [pff\cdot 2] - \frac{[pcf\cdot 2]^2}{[pcc\cdot 2]} = [pff\cdot 3]$$

Generelt (e elementer): $\underline{\underline{[pvv] = [pff\cdot e]}}$

Vi har dermed vist at det er mulig å bygge inn utledningen av $[pvv]$ i oppløsningen av normalligningssystemet. Det skjer på den måten at vi i tillegg til normalligningssystemet innfører ligningen

$$[pvv] = [paf]x + [pbf]y + [pcf]z + [pff]$$

som en fingert (e+1). normalligning, slik at det fullstendige normalligningssystem formelt får formen:

$$\begin{aligned}
[paa]x + [pab]y + [pac]z + [paf] &= 0\\
[pab]x + [pbb]y + [pbc]z + [pbf] &= 0\\
[pac]x + [pbc]y + [pcc]z + [pcf] &= 0\\
[paf]x + [pbf]y + [pcf]z + [pff] &= 0
\end{aligned}$$

Vi behandler så hele systemet etter de eliminasjonsreglene som gjelder for den Gaussiske metode. Vi kommer da fram til følgende system av sluttligninger:

$$\begin{array}{r|l}
 & \text{Summe-}\\
 & \text{kontroll}\\
[paa]x + [pab]y + [pac]z + [paf] & [pas]\\
[pbb\cdot 1]y+[pbc\cdot 1]z+[pbf\cdot 1] & [pbs\cdot 1]\\
[pcc\cdot 2]z+[pcf\cdot 2] & [pcs\cdot 2]\\
[pff\cdot 3] & [pfs\cdot 3]\\
=[pvv] &
\end{array}$$

6.4. Utledningen av [pvv] på grunnlag av observasjonsligningene.

De kontrollene som vi hittil har sjaltet inn, kontrollerer alle regneprosesser fra og med danningen av normalligningssystemet til og med oppløsningen av samme, eller sagt på en annen måte: kontrollerer at det foreliggende feilligningssystem er korrekt behandlet i samsvar med minste kvadraters metode. Imidlertid består fremdeles den mulighet at dette feilligningssystem er feilaktig, ikke minst er lineariseringsprosedyren i forbindelse med overgangen fra observasjonsligninger til feilligninger "feilutsatt" . Dette trinn i utjevningsregningen får vi kontroll på ved å innføre de utjevnede verdier for elementene i observasjonsligningene. Vi skal da ha at:

$$v_i = F_i(X, Y, Z) - o_i$$

Disse v-ene må innenfor regnenøyaktigheten stemme overens med v-ene utledet av feilligningssystemet. Denne kontroll er en såkalt sluttprøve. Stemmer også denne, har vi rimelig sikkerhet for at hele utjevningsoppgaven er riktig løst.

7. Nøyaktighetsundersøkelser ved elementutjevning.

Da de utførte observasjoner som utjevningen baserer seg på, er beheftet med feil, vil heller ikke de verdier for elementene som vi kommer fram til gjennom utjevningen, være feilfrie, Det samme gjelder selvsagt også for vilkårlige størrelser gitt som funksjoner av de utjevnede elementer:

$$u = \varphi(X, Y, Z ,...)$$

og vi setter oss nå til oppgave å utlede nøyaktigheten av så vel elementene som vilkårlige funksjoner av samme. (Det er altså ingen grunn til å regne med at størrelsene som bestemmes gjennom utjevningen, er feilfrie. Det som oppnås ved en utjevning etter m.k.m., er at en kommer fram til de sannsynligste verdier, dvs. de verdier hvis tilhørende middelfeil er minimale - forutsatt at målefeilene følger den Gaussiske feillov.)

7.1. Nøyaktigheten av elementene.

Dette problem løses ved hjelp av den Gaussiske feilforplantningslov. Forutsetningen herfor er at det lykkes å få elementene uttrykt som funksjoner av de opprinnelige målinger, hvilket oppnås med utgangspunkt i følgende resonnement: Elementene blir bestemt gjennom utjevningen på grunnlag av normalligningssystemet, hvis konstantledd er lineære funksjoner av feilligningenes konstantledd f-ene. Følgelig må det prinsipielt være mulig å uttrykke elementene som lineære funksjoner av f-ene, som i sin tur er lineære funksjoner av de observerte størrelser, o-ene ($f = F(x^\circ, y^\circ, z^\circ) - o$, hvor $F(x^\circ, y^\circ, z^\circ)$ i feilteoretisk forstand har karakteren av en matematisk konstant og følgelig uten interesse i forbindelse med nøyaktighetsundersøkelser). Det må følgelig eksistere relasjoner mellom elementene og o-ene av formen

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 o_1 + \alpha_2 o_2 + \dots + \alpha_n o_n \\ y &= \beta_1 o_1 + \beta_2 o_2 + \dots + \beta_n o_n \\ z &= \gamma_1 o_1 + \gamma_2 o_2 + \dots + \gamma_n o_n \end{aligned} \qquad (1)$$

hvor α, β og γ er visse foreløpig ukjente koeffisientsystemer. Dermed er det "duket" for anvendelse av den Gaussiske feilforplantningslov, hvorved fås for de søkte middelfeil

$$m_x^2 = m_o^2 \left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right], \; m_y^2 = m_o^2 \left[\frac{\beta\beta}{p}\right] \text{ og } m_z^2 = m_o^2 \left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right]$$

hvor størrelsene $[\frac{\alpha\alpha}{p}]$, $[\frac{\beta\beta}{p}]$ og $[\frac{\gamma\gamma}{p}]$ går under navn av vektskoeffisienter, hvis vanligste skrivemåte er Q_{xx}, Q_{yy} og Q_{zz}.

Vanskeligheten her består i å få uttrykt elementene i samsvar med (1), m.a.o. å bestemme koeffisientsystemene α, β og γ. Som vi skal se, oppnås dette ved anvendelse av den såkalte ubestemte koeffisienters metode på normalligningssystemet. Vi multipliserer første NL med den foreløpig ubestemte koeffisient Q_{xx}, den 2. med Q_{xy} og den 3. med Q_{xz} og får

$$\begin{aligned} Q_{xx}[paa]x + Q_{xx}[pab]y + Q_{xx}[pac]z + Q_{xx}[paf] &= o \\ Q_{xy}[pab]x + Q_{xy}[pbb]y + Q_{xy}[pbc]z + Q_{xy}[pbf] &= o \\ Q_{xz}[pac]x + Q_{xz}[pbc]y + Q_{xz}[pcc]z + Q_{xz}[pcf] &= o \end{aligned} \qquad (2)$$

Ved addisjon av samtlige ligninger fås:

$$\begin{aligned} &([paa]Q_{xx}+[pab]Q_{xy}+[pac]Q_{xz})x+([pab]Q_{xx}+[pbb]Q_{xy}+[pbc]Q_{xz})y+ \\ &([pac]Q_{xx}+[pbc]Q_{xy}+[pcc]Q_{xz})z+([paf]Q_{xx}+[pbf]Q_{xy}+[pcf]Q_{xz}) = o \end{aligned}$$

Koeffisientene er som nevnt ubestemte. Vi disponerer følgelig over 3 frihetsgrader, og kan således fastsette tre betingelser for deres bestemmelse, og som sådanne velger vi: I summasjonsligningen skal koeffisientene til y og z forsvinne, mens koeffisientene til x skal bli lik én, m.a.o.

$$\begin{aligned} [paa]Q_{xx} + [pab]Q_{xy} + [pac]Q_{xz} &= 1 \\ [pab]Q_{xx} + [pbb]Q_{xy} + [pbc]Q_{xz} &= 0 \\ [pac]Q_{xx} + [pbc]Q_{xy} + [pcc]Q_{xz} &= 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

hvorved x fås lik

$$x = - [paf]Q_{xx} - [pbf]Q_{xy} - [pcf]Q_{xz}$$

Vi **løser** opp summeleddene i siste uttrykk for x og får

$$x = -(p_1 a_1\ Q_{xx} + p_1 b_1\ Q_{xy} + p_1 c_1\ Q_{xz})f_1 - (p_2 a_2\ Q_{xx} + p_2 b_2\ Q_{xy} + p_2 c_2\ Q_{xz})f_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots - (p_n a_n\ Q_{xx} + p_n b_n\ Q_{xy} + p_n c_n\ Q_{xz})f_n$$

$$= (p_1 a_1\ Q_{xx} + p_1 b_1\ Q_{xy} + p_1 c_1\ Q_{xz})o_1 + (p_2 a_2\ Q_{xx} + p_2 b_2\ Q_{xy} + p_2 c_2\ Q_{xz})o_2 + .$$

Dermed er det endelig lyktes å få brakt x over på formen (1). Det fremgår at

$$\alpha_i = + p_i a_i\ Q_{xx} + p_i b_i\ Q_{xy} + p_i c_i\ Q_{xz} \quad \Big\| \ \frac{\alpha_i}{p_i} \ \Big| \ a_i \ \Big| \ b_i \ \Big| \ c_i \ \Big| \qquad (4)$$

Ved å multiplisere med $\frac{\alpha_i}{p_i}$ og summere får vi

$$[\frac{\alpha\alpha}{p}] = + [a\alpha]Q_{xx} + [b\alpha]Q_{xy} + [c\alpha]Q_{xz}$$

Vi danner så $[a\alpha]$, $[b\alpha]$ og $[c\alpha]$

$$\begin{aligned} [a\alpha] &= + [paa]Q_{xx} + [pab]Q_{xy} + [pac]Q_{xz} = +1 \\ [b\alpha] &= + [pab]Q_{xx} + [pbb]Q_{xy} + [pbc]Q_{xz} = \ \ 0 \\ [c\alpha] &= + [pac]Q_{xx} + [pbc]Q_{xy} + [pcc]Q_{xz} = \ \ 0 \end{aligned} \quad \xleftarrow{} \text{ i følge (3)}$$

Vi har derved vist at

$$[\frac{\alpha\alpha}{p}] = Q_{xx}$$

For utledningen av $[\frac{\beta\beta}{p}]$ blir det å gå fram på tilsvarende måte. Vi multipliserer normalligningssystemet med de foreløpig ubestemte koeffisienter Q_{yx}, Q_{yy} og Q_{yz} og fastsetter at ved summeringen skal koeffisienten foran y blir lik én og de andre lik null, m.a.o.

$$\begin{aligned} [paa]Q_{yx} + [pab]Q_{yy} + [pac]Q_{yz} &= 0 \\ [pab]Q_{yx} + [pbb]Q_{yy} + [pbc]Q_{yz} &= 1 \\ [pac]Q_{yx} + [pbc]Q_{yy} + [pcc]Q_{yz} &= 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

som betinger følgende relasjon for elementet y

$$y = -[paf]Q_{xy} - [pbf]Q_{yy} - [pcf]Q_{yz}$$

mens koeffisientene β i (1) antar verdien

$$\beta_1 = + p_i a_i\ Q_{yx} + p_i b_i\ Q_{yy} + p_i c_i\ Q_{yz} \quad \Big\| \ \frac{\beta_i}{p_i} \ \Big| \ a_i \ \Big| \ b_i \ \Big| \ c_i \ \Big| \qquad (6)$$

Vi danner først

$$[\frac{\beta\beta}{p}] = + [a\beta]Q_{yx} + [b\beta]Q_{yy} + [c\beta]Q_{yz}$$

og videre

$$\begin{aligned}
[a\beta] &= + [paa]Q_{yx} + [pab]Q_{yy} + [pac]Q_{yz} = 0 \\
[b\beta] &= + [pab]Q_{yx} + [pbb]Q_{yy} + [pbc]Q_{yz} = 1 \quad \longleftarrow \text{ i følge (5)} \\
[c\beta] &= + [pac]Q_{yx} + [pbc]Q_{yy} + [pcc]Q_{yz} = 0
\end{aligned}$$

dvs.

$$[\frac{\beta\beta}{p}] = Q_{yy}$$

Med utgangspunkt i de foreløpig ubestemte koeffisienter Q_{zx}, Q_{zy} og Q_{zz}, hvis bestemmelse blir å basere på

$$\begin{aligned}
[paa]Q_{zx} + [pab]Q_{zy} + [pac]Q_{zz} &= 0 \\
[pab]Q_{zx} + [pbb]Q_{zy} + [pbc]Q_{zz} &= 0 \\
[pac]Q_{zx} + [pbc]Q_{zy} + [pcc]Q_{zz} &= 1
\end{aligned} \tag{7}$$

fås på tilsvarende måte

$$z = - [paf]Q_{zx} - [pbf]Q_{zy} - [pcf]Q_{zz}$$

og til slutt

$$[\frac{\gamma\gamma}{p}] = Q_{zz}$$

Ved å multiplisere (4) med β_i, summere og ta hensyn til (3) og (5) fås

$$[\frac{\alpha\beta}{p}] = Q_{xy}$$

Ved å multiplisere (6) med α_i, fås på tilsvarende måte

$$[\frac{\alpha\beta}{p}] = Q_{yx}, \quad \text{m.a.o.} \quad Q_{xy} = Q_{yx}$$

Denne lovmessighet er generell, dvs.

$$Q_{ij} = Q_{ji}$$

Videre finner vi

$$[\frac{\alpha\gamma}{p}] = Q_{xz} \text{ og } [\frac{\beta\gamma}{p}] = Q_{yz}$$

*

Vi har dermed vist hvordan nøyaktigheten av elementene kan bestemmes. Nøyaktigheten har intim tilknytning til vektskoeffisientene Q_{xx}, Q_{yy} og Q_{zz}, og disse utledes av ligningssystemene (3), (5) og (7), som går under navn av vektsligninger. Middelfeilen på elementene er så gitt ved

$$m_x = m_o\sqrt{Q_{xx}}$$
$$m_y = m_o\sqrt{Q_{yy}}$$
$$m_z = m_o\sqrt{Q_{zz}}$$

De vektskoeffisienter som inneholder to like indekser, går under navn av kvadratiske vektskoeffisienter, mens de som inneholder to forskjellige indekser, kalles ikke-kvadratiske vektskoeffisienter. De kvadratiske vektskoeffisienter er altså et direkte mål for nøyaktigheten av den størrelse som indeksen viser til. De ikke-kvadratiske derimot gir uttrykk for avhengigheten eller korrelasjonen mellom de to størrelsene som indeksene står til.

Begrepet vektskoeffisient (når uttrykket brukes alene, så underforstås alltid kvadratisk vektskoeffisient) spenner over langt mer enn akkurat det med nøyaktighet i forbindelse med elementutjevning. Generelt defineres vektskoeffisient som følger: middelfeilen til en vilkårlig størrelse u er lik produktet av middelfeilen til vektsenheten og kvadratroten til vedkommnede størrelses vektskoeffisient, dvs.

$$m_u = m_o\sqrt{Q_{uu}}$$

Hva bestemmelsen av vektskoeffisientene angår, ser vi av vektsligningene at disse overalt har samme koeffisienter foran de ukjente som i normalligningssystemet. Konstantleddkolonnene derimot er forskjellige. Det er derfor mulig å utlede vektskoeffisientene i tilknytning til oppløsningen av normalligningssystemet ved å utvide sistnevnte med følgende nye konstantleddkolonner (på høyre side av =)

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

*

De i det foregående utledede uttrykk for elementene

$$x = - [paf]Q_{xx} - [pbf]Q_{xy} - [pcf]Q_{xz}$$
$$y = - [paf]Q_{xy} - [pbf]Q_{yy} - [pcf]Q_{yz}$$
$$z = - [paf]Q_{xz} - [pbf]Q_{yz} - [pcf]Q_{zz}$$

representerer den såkalte ubestemte oppløsning av NL-systemet, som utnyttes bl.a. til kontroll av vektskoeffisientenes beregning, idet den ubestemte oppløsning skal resultere i samme verdier for elementene som NL-systemet.

7.2. Nøyaktigheten av vilkårlige funksjoner av elementene.

Vi går et skritt videre og skal utlede nøyaktigheten av vilkårlige funksjoner av elementene. Vi tar vårt utgangspunkt i funksjonen

$$u = \varphi(X, Y, Z)$$

idet vi begrenser oss til 3 elementer. Vi innfører i u

$$X = x^\circ + x$$

$$Y = y^\circ + y$$

$$Z = z^\circ + z$$

og får

$$u = \varphi(x^\circ, y^\circ, z^\circ) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial X}\right)_\circ x + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial Y}\right)_\circ y + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial Z}\right)_\circ z$$

$$= u^\circ + \varphi_x\ x + \varphi_y\ y + \varphi_z\ z = u^\circ + \Delta u \qquad (8)$$

idet vi innfører de forkortede betegnelser φ_x, φ_y og φ_z for differensialkvotientene. For utledningen av middelfeilen på u er u° uten interesse, idet den i feilteoretisk henseende blir å betrakte som en konstant.

Vi innfører (1) i (8) og får

$$u = \varphi_x(\alpha_1 o_1 + \alpha_2 o_2 + ..) + \varphi_y(\beta_1 o_1 + \beta_2 o_2 + ..) + \varphi_z(\gamma_1 o_1 + \gamma_2 o_2 + ..)$$

$$= (\varphi_x \alpha_1 + \varphi_y \beta_1 + \varphi_z \gamma_1)o_1 + (\varphi_x \alpha_2 + \varphi_y \beta_2 + \varphi_z \gamma_2)\Phi_2 + ...$$

$$= k_1 o_1 + k_2 o_2 + ...$$

slik at uttrykket for middelfeilen på u antar formen

$$m_u^2 = m_o^2 \left[\frac{kk}{p}\right]$$

dvs.

$$Q_{uu} = \left[\frac{kk}{p}\right]$$

Vi har altså

$$k_i = \varphi_x \alpha_i + \varphi_y \beta_i + \varphi_z \gamma_i$$

dvs.

$$\left[\frac{kk}{p}\right] = \varphi_x^2\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] + \varphi_y^2\left[\frac{\beta\beta}{p}\right] + \varphi_z^2\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right] + 2\varphi_x\varphi_y\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + 2\varphi_x\varphi_z\left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] + 2\varphi_y\varphi_z\left[\frac{\beta\gamma}{p}\right]$$

$$= \varphi_x^2 Q_{xx} + \varphi_y^2 Q_{yy} + \varphi_z^2 Q_{zz} + 2\varphi_x\varphi_y Q_{xy} + 2\varphi_x\varphi_z Q_{xz} + 2\varphi_y\varphi_z Q_{yz} \qquad (9)$$

Dette er en særdeles grunnleggende relasjon, som bl.a. danner basis for den utvidede feilforplantningslov som blir behandlet senere (side 26).

Setter vi i (9) inn de uttrykk for vektskoeffisientene som vektsligningene gir, får vi etter en del forenklinger:

$$Q_{uu} = \frac{\varphi_x{}^2}{[paa]} + \frac{(\varphi_y \cdot 1)^2}{[pbb \cdot 1]} + \frac{(\varphi_z \cdot 2)^2}{[pcc \cdot 2]} \qquad (10)$$

Ligning (10) åpner muligheten for å bygge inn utledningen av Q_{uu} i det Gaussiske eliminasjonsskjema.

Ved elementutjevning har vi altså to måter å utlede nøyaktigheten av vilkårlige funksjoner til elementene på, nemlig enten ved å gå veien om vektskoeffisientene til elementene i samsvar med (9) eller ved direkte utledning i tilknytning til oppløsningen av normalligningene i samsvar med (10).

I praksis er det gjerne slik at det alltid knytter seg interesse til elementenes nøyaktighet, slik at vektskoeffisientene til elementene under alle omstendigheter må utledes. Det vil da være mest praktisk å basere utledningen av nøyaktigheten til mulige funksjoner av elementene på (9), dvs. på den utvidede feilforplantningslov (se side 26). Metode (10) kommer fortrinnsvis til anvendelse dersom utledningen av vektskoeffisientene sløyfes.

7.3. Middelfeilen på vektsenheten.

Vi har foran utledet vektskoeffisientene til de utjevnede elementer og til vilkårlige funksjoner av samme. For å komme over til middelfeilen på disse størrelsene må vi foruten vektskoeffisientene også ha kjennskap til middelfeilen på vektsenheten, idet vi definisjonsmessig har:

$$m_u = m_o \sqrt{Q_{uu}}$$

Vi har tidligere (side 15) utledet feilkvadratsummen ved elementutjevning (vi begrenser oss i det etterfølgende til to elementer) til

$$[pvv] = [pff] + [paf]x + [pbf]y$$

hvor feilligningenes konstantledd, f-ene, er gitt ved

$$f_i = F_i(x^\circ,\ y^\circ) - o_i$$

Ligningen for $[pvv]$ har generell gyldighet uten hensyn til hvordan de provisoriske verdier for elementene velges. Den videre utledning forenkles imidlertid vesentlig dersom vi forutsetter at som provisoriske verdier for elementene er valgt deres sanne verdier, slik at konstantleddene forenkles til $(\bar{o} - o = \varepsilon)$

$$f_i = \varepsilon_i$$

dvs. lik den sanne feil på o_i, hvorved $[pvv]$ går over til

$$[pvv] = [p\varepsilon\varepsilon] + [pa\varepsilon]x + [pb\varepsilon]y$$

I siste ligning substitueres elementene i samsvar med den ubestemte oppløsning av normalligningssystemet (side 21)

$$x = -[pa\varepsilon]Q_{xx} - [pb\varepsilon]Q_{xy} \quad ,$$

$$y = -[pa\varepsilon]Q_{xy} - [pb\varepsilon]Q_{yy}$$

hvorved fås som sluttuttrykk for $[pvv]$

$$[pvv] = [p\varepsilon\varepsilon] - Q_{xx}[pa\varepsilon]^2 - Q_{yy}[pb\varepsilon]^2 - 2Q_{xy}[pa\varepsilon][pb\varepsilon]$$

Betrakter vi en enkelt utjevning isolert, vil det selvsagt ikke være mulig å forutsi verdien for $[pvv]$, som jo, slik det går fram av siste uttrykk, blir en funksjon av de aktuelle observasjonsfeil. Vi må her nøye oss med beregning av den såkalte <u>forventningsverdi</u>, som er den middelverdi som $[pvv]$ tenderer mot ved et uendelig stort antall gjentakelser av måleserien med ny utjevning for hver gjentakelse. (Generelt defineres forventningsverdien til en størrelse u som

$$u_M = \lim_{N\to\infty} \frac{\Sigma u}{N}$$

hvor indeksen M symboliserer forventningsverdi som altså faller sammen med middelverdien.) I foreliggende tilfelle fås forventningsverdien for $[pvv]$ som summen av forventningsverdiene av hvert enkelt ledd (generelt gjelder nemlig at forventningsverdien til en flerleddet størrelse er lik summen av forventsverdiene til de enkelte ledd). Vi tar først for oss summeuttrykket

$$[p\varepsilon\varepsilon] = p_1\varepsilon_1^2 + p_2\varepsilon_2^2 + \dots \quad + p_n\varepsilon_n^2$$

Her er forventningsverdien for de enkelte ledd lik m_o^2, idet $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{p_i\ \Sigma\ \varepsilon_i^2}{N} = m_o^2$,

dvs. $$[p\varepsilon\varepsilon]_M = n \cdot m_o^2$$

Så tar vi for oss

$$[pa\varepsilon]^2 = p_1^2 a_1^2 \varepsilon_1^2 + p_2^2 a_2^2 \varepsilon_2^2 + \dots + p_n^2 a_n^2 \varepsilon_n^2 + \text{ledd av formen} \quad 2p_i p_j a_i a_j \varepsilon_i \varepsilon_j$$

Her er forventningsverdien av de enkelte kvadratiske ledd lik $p_i a_i^2 m_o^2$, mens forventningsverdien for dobbeltproduktleddene (tilfeldige målefeil forutsatt) er lik null, dvs.

$$\{[pa\varepsilon]^2\}_M = [paa]m_o^2$$

For summeuttrykket $[pb\varepsilon]^2$ gjelder analogt

$$\{[pb\varepsilon]^2\}_M = [pbb]m_o^2$$

På tilsvarende måte lar det seg vise at

$$\{[pa\varepsilon][pb\varepsilon]\}_M = [pab]m_o^2$$

Følgelig

$$\begin{aligned}[pvv]_M &= n\ m_o^2 - Q_{xx}[paa]m_o^2 - Q_{yy}[pbb]m_o^2 - 2Q_{xy}[pab]m_o^2 \\ &= n\ m_o^2 - \underbrace{([paa]Q_{xx} + [pab]Q_{xy})}_{=1}m_o^2 - \underbrace{([pab]Q_{xy} + [pbb]Q_{yy})}_{=1}m_o^2\end{aligned}$$

At parantesuttrykkene er lik én, følger umiddelbart av vektsligningene (side 18 og 19). Dermed har vi vist at

$$[pvv]_M = nm_o^2 - 2\,m_o^2$$

I foreliggende tilfelle hadde vi to elementer. I det generelle tilfelle med e elementer fås

$$[pvv]_M = nm_o^2 - e\ m_o^2$$

Hvorav

$$m_o = \sqrt{\frac{[pvv]_M}{n-e}}$$

hvor n-e er identisk med antall overbestemmelser. Vi kan følgelig skrive formelen for m_o på følgende måte

$$m_o = \sqrt{\frac{[pvv]_M}{\text{Ant. overbest.}}}$$

Da det er mulig, som vi senere skal vise, å tilbakeføre alle former for utjevning til elementutjevning, vil denne formel ha generell gyldighet ved utjevning etter minste kvadraters metode.

Dette er den sanne verdi for m_o. I praksis kjenner vi ikke $[pvv]_M$, men må basere oss på den verdi som utjevningen resulterer i, nemlig verdien (i det etterfølgende nyttes tegnene $\wedge$ og $-$ til å symbolisere utjevnede, respektive sanne verdier)

$$\hat{m}_o = \sqrt{\frac{[pvv]}{\text{Ant. overbest.}}}$$

som representerer den gunstigste estimeringsmåte for m_o, idet som vist i det foregående

$$\{\hat{m}_o^2\}_M = \lim_{N\to\infty} \frac{\Sigma \hat{m}_o^2}{N} = \bar{m}_o^2$$

Derimot kan den $\hat{m}_o$-verdi som den enkelte utjevning resulterer i, i større eller mindre grad avvike fra den korrekte verdi, jfr. den empiriske middelfeils fordelingsfunksjon (elementærkurset, side 44).

For usikkerheten som knytter seg til bestemmelsen av m_o, når sistnevnte estimeres som ovenfor, gjelder følgende tilnærmelsesuttrykk

$$M_{\hat{m}_o} = \frac{\hat{m}_o}{\sqrt{2\cdot(\text{ant.overbest.})}}$$

8. Den utvidede feilforplantningslov.

Gyldigheten av den Gaussiske feilforplantningslov er begrenset til uavhengige målinger som bare er utsatt for tilfeldige feil. Den utvidede feilforplantningslov derimot dekker også det tilfelle at målingene er avhengige av hverandre (eller korrelerte som er den vanligste uttrykksmåte).

Vi går tilbake til ligning (9)

$$Q_{uu} = \varphi_x^2 Q_{xx} + \varphi_y^2 Q_{yy} + \varphi_z^2 Q_{zz} + 2\varphi_x \varphi_y Q_{xy} + 2\varphi_x \varphi_z Q_{xz} + 2\varphi_y \varphi_z Q_{yz}$$

Denne ligning som altså uttrykker vektskoeffisienten til en vilkårlig størrelse u som funksjon av vektskoeffisientene til de variable som u er funksjon av, har generell gyldighet, uavhengig av utjevningsform. Ved innføring av begrepet symbolske vektskoeffisienter

$$Q_x\,,\; Q_y\,,\; Q_z\,,\; \text{osv.}$$

kan den lovmessighet som dekker seg bak (9), uttrykkes på en meget enkel og bekvem måte. Skrevet som ovenfor har de symbolske vektskoeffisienter ingen spesiell, i hvert fall ingen numerisk betydning. Det får de først ved multiplikasjon av to symbolske vektskoeffisienter. Definisjonsmessig tillegger vi nemlig de symbolske vektskoeffisienter følgende egenskaper:

$$Q_x \cdot Q_x = Q_{xx}\,,\; Q_y \cdot Q_y = Q_{yy}\,,\; Q_x \cdot Q_y = Q_{xy}\,,\; \text{osv.}$$

eller skrevet generelt:

$Q_i \cdot Q_j = Q_{ij}$ for i lik eller forskjellig fra j.

Ved hjelp av symbolske vektskoeffisienter kan (9) skrives på følgende enkle måte:

$$Q_u^2 = \{\varphi_x Q_x + \varphi_y Q_y + \varphi_z Q_z\}^2 = Q_{uu} \qquad (11)$$

Dette er den <u>utvidede feilforplantningslov</u> som altså setter oss i stand til å utlede middelfeilen (vektskoeffisienten) til vilkårlige funksjoner av variable som det består avhengighet (korrelasjon) mellom. Framgangsmåten blir som følger:

1. Først dannes funksjonsforbindelsen

$$u = f(x,\ y,\ z,\ \ldots\ldots)$$

2. Så utledes funksjonens totale differensial

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \ldots\ldots$$

3. I det totale differensial erstattes alle d med Q, og begge sider av likhetstegnet opphøyes i 2. potens, dvs.

$$Q_u^2 = Q_{uu} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}Q_x + \frac{\partial f}{\partial y}Q_y + \frac{\partial f}{\partial z}Q_z + \ldots\ldots\right\}^2$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 Q_{xx} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 Q_{yy} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 Q_{zz} + 2\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial y}Q_{xy} + 2\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial z}Q_{xz} + 2\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial f}{\partial z}Q_{yz} + .$$

Det er klart at (11) innebærer en utvidelse av den Gaussiske feilforplantningslov. Sistnevnte representerer egentlig bare et spesialtilfelle av (11), nemlig det tilfelle som inntreffer når samtlige ikke-kvadratiske vektskoeffisienter er lik null, som nettopp betyr at de variable størrelser i funksjonen u er uavhengig av hverandre.

(Som allerede nevnt, representerer Q_i - skrevet isolert - ikke noen matematisk størrelse. Først ved multiplikasjon av to symbolske vektskoeffisienter fås størrelser som har en numerisk betydning. Likevel er det tillatt å regne med de symbolske vektskoeffisienter som om de var algebraiske størrelser. Vi kan med andre ord anvende de vanlige matematiske regneregler på dem, bare med den begrensning at divisjoner og produkter av mer enn to koeffisienter må unngås.)

Relasjonen mellom den såkalte korrelasjonskoeffisient som nyttes i den matematiske statistikk, og vektskoeffisientene er gitt ved:

$$r_{xy} = \frac{[\varepsilon_x \varepsilon_y]}{\sqrt{[\varepsilon_x^2]\cdot[\varepsilon_y^2]}} = \frac{Q_{xy}}{\sqrt{Q_{xx}\cdot Q_{yy}}}$$

hvor x og y er de to korrelerte størrelsene, mens ε som vanlig betyr sann feil. r kan variere mellom -1 og +1, og antar verdien null for uavhengige målinger, fordi summen av dobbeltproduktene da vil være lik null.

9. De utjevnede størrelsers konfidens.

De numeriske verdier vi kommer fram til for de ulike størrelser som utledes gjennom en utjevning (utjevningsproblemets egentlige ukjente såvel som nøyaktighetsmålene), er i en viss betydning tilfeldige, forsåvidt som at en gjentagelse av målingene som ligger til grunn for utjevningen, og etterfølgende ny utjevning, vil resultere i litt avvikende verdier i forhold til de første. Spørsmålet om de utjevnede størrelsers konfidens (pålitelighet) blir derfor av fundamental betydning.

I det foregående er vist hvordan nøyaktigheten til de utjevnede størrelser (i betydning av middelfeil) kan bestemmes, og det er klart at de middelfeil som hermed utledes, gir et visst bilde av konfidensen til de samme størrelser (stor middelfeil betinger liten pålitelighet og omvendt), men ikke noe fullgodt bilde fordi at to middelfeil, like i tallverdi, kan ha vidt forskjellig matematisk bakgrunn, avhengig av de to middelfeils faktiske frekvensfunksjoner.

Den mest fullkomne måte å angi en størrelses konfidens på består i, med utgangspunkt i den verdi som utjevningen har resultert i for størrelsen, å konstruere det såkalte konfidensintervall som vedkommende størrelses sanne verdi vil holde seg innenfor med en gitt matematisk sannsynlighet. Denne på forhånd fikserte sannsynlighet benevnes statistisk sikkerhet og skrives S, mens $\alpha = 1 - S$, som blir sannsynligheten for at den betraktede størrelses sanne verdi faller utenfor konfidensintervallet, betegnes som feilslutningssannsynlighet (eller signifikansnivå). Problemet med konstruksjon av konfidensintervall i forbindelse med middeltallsutjevning er tidligere behandlet i elementærkurset (side 42 og utover). Nå er imidlertid forholdet det at gyldigheten av den dengang framstilte konfidensteori ikke er begrenset bare til middeltallsutjevning, men teorien dekker utjevning etter minste kvadraters metode rent generelt, dvs. den kan uten videre overføres til de mer avanserte utjevningsmetoder, element- og korrelatutjevning. Vi nøyer oss derfor her med en rekapitulasjon.

De størrelser som det blir spørsmål om å undersøke konfidensen for, deler seg naturlig i to hovedgrupper, nemlig

A. De ukjente som representerer utjevningsproblemets løsning.

B. Nøyaktighetsangivelsene.

Vi tar først for oss A-gruppen. Generelt gjelder at den matematiske basis for den numeriske "turnering" av konfidensproblemet, er frekvensfunksjonen til den betraktede størrelse. Som tidligere vist, utledes de størrelser som sogner til A-grupper, rent generelt gjennom lineære relasjoner av formen

$$x = \alpha_1 o_1 + \alpha_2 o_2 + \dots\dots + \alpha_n o_n$$

Herav følger at de ukjente vil være normalfordelt forutsatt at primærmaterialet (o-ene) er det, og dessuten at o-ene er uavhengige størrelser. Konfidensestimeringen blir følgelig å basere på normalfordelingen, og konfidensintervallene blir å konstruere på følgende måte

$$\hat{u} - t\cdot\bar{m}_u < \bar{u} < \hat{u} + t\cdot\bar{m}_u$$

eventuelt
$$\hat{u} - t\cdot\hat{m}_u < \bar{u} < \hat{u} + t\cdot\hat{m}_u$$

avhengig av om middelfeilen som legges til grunn for konstruksjonen, er den korrekte (sanne) verdi eller om den er estimert gjennom utjevningen.

a. Middelfeilens sanne verdi forutsettes kjent.

I dette tilfelle baseres konfidensestimeringen direkte på normalfordelingen, og t-ene blir utelukkende avhengig av den valgte feilslutningssannsynlighet. Tabellen gir en oversikt over t-verdiene assosiert med de vanligst nyttede feilslutningssannsynligheter (verdiene utenfor parantes refererer seg til dobbeltsidig og de i parantes til ensidig problemstilling).

Den vanligste bakgrunn for den her behandlede problemstilling er at målenøyaktigheten foreligger som erfaringsverdi. Utføres så målinger under likeartede betingelser som de erfarinsverdien knytter seg til, må det være tillatt å regne med samme nøyaktighet. I praksis er imidlertid den langt hyppigste problemstilling den at observasjonsnøyaktigheten utledes på basis av observasjonsmaterialet gjennom selve utjevningen.

α	t	
0,1 %	3,2905	(3,0902)
0,27"	3,0000	(2,7821)
0,5 "	2,8070	(2,5758)
1 "	2,5758	(2,3263)
2 "	2,3263	(2,0637)
5 "	1,9600	(1,6449)
10 "	1,6449	(1,2816)

b. Middelfeilen utledes gjennom utjevningen.

Her blir konfidensestimeringen å basere på frekvensfunksjonen til størrelsen $t = \frac{\varepsilon_u}{\hat{m}_u}$, hvor telleren (den sanne feil på u) er normalfordelt, mens nevneren (den estimerte verdi for middelfeilen til u) er m-fordelt. Den av disse to fordelinger resulterende fordeling for t blir den såkalte t-fordeling. Til forskjell fra a-tilfellet vil t-verdiene (som tas ut av beregnede tabellverk med α og f som argumenter) denne gang, foruten av den valgte α, også avhenge av antall frihetsgrader f.

c. Konfidensen til empiriske middelfeil.

Konstruksjonen av konfidensintervall for nøyaktighetsangivelsene skjer på følgende måte

$$q_n\cdot\hat{m} < \bar{m} < q_{ö}\,\hat{m}$$

hvor den numeriske beregning av q-ene (n står for nedre og ö for øvre) blir å basere på m-fordelingen. q-ene (det foreligger tabellverk over disse) blir funksjoner av såvel den valgte verdi for α som av antall frihetsgrader.

10. Det fullstendige eliminasjonsskjema ved elementutjevning.

Da vi tidligere behandlet oppløsning av normalligninger, forutsatte vi at elementene skulle finnes ved suksessiv innsetting i sluttligningene, idet den siste sluttligning inneholder bare ett element, den nest siste to elementer, osv.

Vi skal i det etterfølgende vise at det er mulig å erstatte denne noe ubekvemme, indirekte framgangsmåten med en direkte metode, som bringer oss samtlige elementer utregnet, så å si på ett brett. Videre er det mulig å kombinere oppløsningen med utledning av feilkvadratsummen og likeledes vektskoeffisientene til vilkårlige funksjoner av de utjevnede elementer, herunder også vektskoeffisientene til elementene selv.

Vi skal vise hvordan dette foregår ved et eksempel. Vi tar vårt utgangspunkt i følgende normalligningssystem med tre ukjente

$$[paa]x + [pab]y + [pac]z + [paf] = o$$

$$[pab]x + [pbb]y + [pbc]z + [pbf] = o$$

$$[pac]x + [pbc]y + [pcc]z + [pcf] = o$$

Den funksjonen av utjevnede elementer som vi søker middelfeilen til, er:

$$u = u^\circ + \varphi_x x + \varphi_y y + \varphi_z z = u^\circ + \Delta u$$

På side 31 følger det fullstendige eliminasjonsskjema for oppløsning av NL-systemet ovenfor.

I det etterfølgende skal vi vise at de størrelsene som vi kommer fram til i hovedresultatlinjen i det fullstendige eliminasjonsskjema (umiddelbart etter $[pvv]$), er identisk med de søkte elementer. Vi tar vårt utgangspunkt i sluttligningssystemet som eliminasjonsprosedyren resulterer i, nemlig:

$$[paa]x + [pab]y + [pac]z + [paf] = o$$

$$[pbb.1]y + [pbc.1]z + [pbf.1] = o$$

$$[pcc.2]z + [pcf.2] = o$$

Dette system av sluttligninger gir følgende verdier for elementene:

$$z = -\frac{[pcf.2]}{[pcc.2]} \quad , \quad y = -\frac{[pbf.1]}{[pbb.1]} + \frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}\frac{[pcf.2]}{[pcc.2]}$$

$$\text{og } x = -\frac{[paf]}{[paa]} + \frac{[pab]}{[paa]}\frac{[pbf.1]}{[pbb.1]} + \frac{[pac]}{[paa]}\frac{[pcf.2]}{[pcc.2]} - \frac{[pab]}{[paa]}\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}\frac{[pcf.2]}{[pcc.2]}$$

Eliminasjonsskjema ved elementutjevning.

1.n.l. =1.s.l.	[paa]	[pab]	[pac]	[paf]	1	o	o	φ_x	S_1
	2.n.l.	[pbb]	[pbc]	[pbf]	o	1	o	φ_y	S_2
	f_1	f_1[pab]	f_1[pac]	f_1[paf]	f_1	o	o	$f_1\cdot\varphi_x$	f_1S_1
	2.s.l.	[pbb.1]	[pbc.1]	[pbf.1]	f_1	1	o	$\varphi_y.1$	$S_2.1$
		3.n.l.	[pcc]	[pcf]	o	o	1	φ_z	S_3
		f_2	f_2[pac]	f_2[paf]	f_2	o	o	$f_2\varphi_x$	f_2S_1
		f_3	f_3[pbc.1]	f_3[pbf.1]	f_3f_1	f_3	o	$f_3\varphi_y.1$	$f_3S_2.1$
		3.s.l.	[pcc.2]	[pcf.2]	$f_2+f_1f_3$	f_3	1	$\varphi_z.2$	$S_3.2$
			Fingert n.l.	[pff]	o	o	o	o	S_4=[pfs]
			f_4	f_4[paf]	f_4	o	o	$f_4\varphi_x$	f_4S_1
			f_5	f_5[pbf.1]	f_1f_5	f_5	o	$f_5\varphi_y.1$	$f_5S_2.1$
			f_6	f_6[pcf.2]	$f_2f_6+f_1f_3f_6$	f_3f_6	f_6	$f_6\varphi_z.2$	$f_6S_3.2$
hovedresultatlinje				[pff.3] = [pvv]	$f_4+f_1f_5+f_2f_6+f_1f_3f_6$ = x	$f_5+f_3f_6$ = y	f_6 =z	Δu	$S_4.3$
				f_7	f_7	o	o		
				f_8	f_1f_8	f_8	o		
				f_9	$f_2f_9+f_1f_3f_9$	f_3f_9	f_9		
					$-Q_{xx}$	$-Q_{xy}$	$-Q_{xz}$		
					f_{10}	f_{10}			
					f_{11}	f_3f_{11}	f_{11}		
						$-Q_{yy}$	$-Q_{yz}$		
						f_{12}	f_{12}		
							$-Q_{zz}$		
							f_{13}	$f_{13}\varphi_x$	
							f_{14}	$f_{14}\varphi_y.1$	
							f_{15}	$f_{15}\varphi_z.2$	
								$-Q_{uu}$	

$$f_1 =- \frac{[pab]}{[paa]}, f_2 =- \frac{[pac]}{[paa]}, f_3 =- \frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}$$

$$f_4 =- \frac{[paf]}{[paa]}, f_5 =- \frac{[pbf.1]}{[pbb.1]}, f_6 =- \frac{[pcf.2]}{[pcc.2]}$$

$$f_7 =- \frac{1}{[paa]}, f_8 =- \frac{f_1}{[pbb.1]}, f_9 =- \frac{f_2+f_1f_3}{[pcc.2]}$$

$$f_{10} =- \frac{1}{[pbb.1]}, f_{11} =- \frac{f_3}{[pcc.2]}, f_{12} =- \frac{1}{[pcc.2]}$$

$$f_{13} =- \frac{\varphi_x}{[paa]}, f_{14} =- \frac{\varphi_y.1}{[pbb.1]}, f_{15} \doteq- \frac{\varphi_z.2}{[pcc.2]}$$

Av skjemaet ser vi at $z = f_6 = - \frac{[pcf\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}$, dvs. påstanden stemmer for elementet z's vedkommende. Vi har videre satt:

$$y = f_5 + f_3 f_6 = - \frac{[pbf\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]} + \frac{[pbc.1]}{[pbb\cdot 1]} \frac{[pcf\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}$$

dvs. påstanden stemmer også for elementet y's vedkommende. Ved innsetting i $x = f_4 + f_1 f_5 + f_2 f_6 + f_1 f_3 f_6$ finner vi at det samme også er tilfelle for elementet x. På samme måte lar det seg bevise at størrelsen som vi kommer fram til i nest siste kolonne i hovedresultatlinjen, er lik Δu, dvs. lik det tillegget som overfører den tilnærmede verdi av funksjonen u til den endelige, utjevnede verdi, med andre ord

$$u = u^{o} + \Delta u$$

Ved å fortsette skjemaet videre finnes også de kvadratiske og ikke-kvadratiske vektskoeffisienter til elementene, og til slutt fås vektskoeffisienten til funksjonen u. Det blir bare den forskjell i regningen at det for utledningen av vektskoeffisientene ikke blir spørsmål om innføring av normalligninger i første linje for hvert nytt avsnitt.

Hva de enkelte størrelsene i skjemaet angår, er det å bemerke at S_1, S_2 og S_3 inkluderer samtlige koeffisienter som befinner seg til venstre for dem. Vi må spesielt være oppmerksomme på dette forhold for S_2's og S_3's vedkommende, fordi at vi ved innføringen av 2. og 3. normalligning ikke tar med koeffisientene foran de kvadratiske ledd, men disse koeffisientene må altså likevel medtas i summeleddene.

Som det framgår av eliminasjonsskjemaet, får vi ikke summekontroll på utledningen av vektskoeffisientene. Kontroll på riktig beregning av vektskoeffisientene til elementene fås ved å regne ut elemtene indirekte gjennom den ubestemte oppløsning av NL-systemet

$$x = -[paf]Q_{xx} - [pbf]Q_{xy} - [pcf]Q_{xz}$$
$$y = -[paf]Q_{xy} - [pbf]Q_{yy} - [pcf]Q_{yz}$$
$$z = -[paf]Q_{xz} - [pbf]Q_{yz} - [pcf]Q_{zz}$$

Vi skal da komme fram til de samme verdier for elementene som den direkte oppløsning av NL-systemet har gitt.

Ellers er det å merke seg at det ikke er vanlig samtidig å foreta beregning av vektskoeffisientene til elementene og til funksjoner av samme. Interesserer bare vektskoeffisientene til et lite antall funksjoner, mens vektskoeffisientene til elementene er uten interesse, sløyfes beregningen av de siste. Det vanligste er imidlertid at middelfeilen til elementene er av interesse, slik at vektskoeffisientene til dem må utregnes i alle fall. Dersom det siste er tilfelle, er det mest hensiktsmessig i eliminasjonsskjemaet å sløyfe utledningen av vektskoeffisientene til mulige funksjoner av elementene, og isteden utlede disse på grunnlag av vektskoeffisientene til elementene ved hjelp av den tidligere oppstilte utvidede feilforplantningslov

$$Q_{uu} = (\varphi_x Q_x + \varphi_y Q_y + \varphi_z Q_z \; .....)^2$$

11. Oversikt over elementutjevning.

Til løsning av et problem, som inneholder e ukjente, foreligger observasjonsrekken o_1, o_2, ...,o_n med vektene p_1, p_2, ..., p_n. Gangen i utjevningsregningen blir som følger:

1. Valg av elementer.
2. Oppstilling av de såkalte observasjonsligninger

$$o_i = F_i(X, Y, Z, ...)$$

som ved tilføyelse av utjevningskorreksjon antar formen

$$o_i + v_i = F_i(X, Y, Z, ...)$$

3. Oppstilling av feilligningene som framkommer ved linearisering av observasjonsligningene. Det foregår på den måten at vi i observasjonsligningene innfører tilnærmede verdier x°, y°, z°, ... for elementene og foretar en Taylor-utvikling. Oppstillingen av feilligningene foregår i tre trinn, nemlig:

a) Valg av tilnærmede verdier for elementene.

Hertil er bl.a. det å si, at det av hensyn til regnenøyaktigheten er gunstig at de provisoriske verdier er så gode at tilleggene eller forbedringene blir små størrelser. Et moment som ytterligere trekker i samme retning, er neglisjeringen av alle ledd av 2. og høyere orden i Taylorutviklingen ved overgangen fra observasjons- til feilligninger. Berettigelsen av denne framgangmåten bygger nettopp på at de provisoriske verdier for elementene er så gode at tilleggene blir så små størrelser at virkningen av de neglisjerte ledd kan settes ut av betrakning. (Dersom observasjonsligningene er lineære, er det strengt tatt ikke nødvendig å innføre tilnærmede verdier for elementene. Av regnetekniske grunner vil det likevel også i slike tilfeller være fordelaktig å gjøre det. Det skyldes hensynet til regnenøyaktigheten. Antar nemlig elementene store verdier, må samtlige beregningstransaksjoner i forbindelse med utjevningen utføres med et uforholdsmessig stort antall siffer for å få elementene bestemt med tilstrekkelig nøyaktighet.)

b) **Utregning av koeffisientene i feilligningene**

$$a_i = \frac{\partial F_i}{\partial X}, \quad b_i = \frac{\partial F_i}{\partial Y}, \quad c_i = \frac{\partial F_i}{\partial Z}, \quad \text{osv.}$$

Feilligningskoeffisientene krever ikke stor nøyaktighet, ofte vil de kunne regnes med regnestav.

c) **Utregning av konstantleddene:**

$$f_i = F_i(x^\circ,\ y^\circ,\ z^\circ,\ \ldots\ldots) - o_i$$

Konstantleddene må regnes ut med stor nøyaktighet.

4. Så følger dannigen av normalligningssystemet, som må foretas med summekontroll. Av regnetekniske grunner er det fordelaktig — før danningen av normalligningssystemet — å omforme feilligningene slik at de nye feilligningene får vekten 1. Det foregår på den måten at vi multipliserer koeffisientene i feilligningene og likeså konstantleddene med kvadratroten av feilligningenes vekter:

		Vekt
Opprinnelig feilligning:	$v_i = a_i x + b_i y + c_i z + f_i$	p_i
Transformert " :	$v_i' = a_i\sqrt{p_i}\,x + b_i\sqrt{p_i}\,y + c_i\sqrt{p_i}\,z + \sqrt{p_i}\,f_i$	1

Riktigheten av transformeringen innses derved at begge feilligningene gir samme bidrag til normalligningssystemet.

Danningen av normalligninger foregår i følgende skjema:

Feilligning nr.	a	b	c	f	s	p	v
	x =	y =	z =				
1	a_1	b_1	c_1	f_1	s_1	p_1	v_1
1'	a_1'	b_1'	c_1'	f_1'	s_1'	1	
2	a_2	b_2	c_2	f_2	s_2	p_2	v_2
2'	a_2'	b_2'	c_2'	f_2'	s_2'	1	

osv.

I skjemaet representerer de merkede størrelser de transformerte feilligninger, og det er av disse at normalligningssystemet skal dannes.

Da det knytter seg såvidt stor usikkerhet til fikseringen av vektene, er det tilstrekkelig å uttrykke den med to siffers eller endog med ett siffers nøyaktighet.

5. Så følger oppløsningen av normalligningssystemet, som også må foretas med summekontroll. Herunder utledes også feilkvadratsummen på grunnlag av [pff], idet vi har [pvv] = [pff·e], hvor e er antall elementer.

6. Beregning av [pvv] på grunnlag av feilligningssystemet. Ved denne beregning brukes de umerkede ligninger i det oppstilte feilligningsskjema. Deretter dannes [pvv],og denne verdi må stemme overens innenfor regnenøyaktigheten med den verdien for [pvv] som vi fikk ved oppløsningen av normalligningssystemet.

7. Beregning av [pvv] på grunnlag av observasjonsligningene. Denne verdi for [pvv] må stemme overens med de tidligere utledede verdier for [pvv]. Dette er den såkalte sluttkontroll. Dersom også denne stemmer, har vi sikkerhet for at utjevningen er riktig utført. I praksis sløyfes ofte pkt. 6, idet en anser det for kontroll god nok dersom [pvv] etter 7 stemmer overens med [pvv]etter 5. Beregning av [pvv] på basis av feilligningssystemet foretas da bare i tilfelle av at disse to verdier ikke stemmer overens (for å få fastslått hvor feilen ligger).

8. Dersom vi har bruk for vektskoeffisientene til elementene, må disse utledes i tilknytning til oppløsningen av normalligningssystemet. Riktigheten av utregningen av vektskoeffisientene kontrolleres ved

$$x = -[paf]Q_{xx} - [pbf]Q_{xy} - [pcf]Q_{xz}$$

$$y = -[paf]Q_{xy} - [pbf]Q_{yy} - [pcf]Q_{yz}$$

$$z = -[paf]Q_{xz} - [pbf]Q_{yz} - [pcf]Q_{zz}$$

9. Middelfeilen på vektsenheten er gitt ved:

$$m_o = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-e}}$$

1o. Deretter finnes middelfeilen til elementene:

$$m_x = m_o\sqrt{Q_{xx}} \quad , \quad m_y = m_o\sqrt{Q_{yy}} \quad , \quad m_z = m_o\sqrt{Q_{zz}}$$

Kapitel II.

KORRELATUTJEVNING.

STANDRD PROBLEM I

1. Betingelsesligninger.

Problemstillingen er den samme som ved elementutjevning. Til løsning av et problem, som omfatter e ukjente, er det foretatt n målinger. For n = e vil oppgaven bestå i å løse et ligningssystem som inneholder like så mange ukjente som ligninger. For n > e blir ligningssystemet overbestemt, dvs. vi har flere ligninger enn ukjente. Forutsetningen for at de overskytende ligninger skal "gå" sammen med de andre, er at de oppfyller visse betingelser, dvs. for hver enkelt overskytende måling vil det være mulig å stille opp en betingelsesligning. For r overskytende målinger får vi følgende system av betingelsesligninger:

$$F_1(o_1 , o_2 , \dots\dots , o_n) = o$$

$$F_2(o_1 , o_2 , \dots\dots , o_n) = o$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$F_r(o_1 , o_2 , \dots\dots , o_n) = o$$

Det blir like mange betingelsesligninger som antall overskytende målinger. Forbindelsen mellom r , n og e er gitt ved:

$$r = n - e$$

Vi skal senere behandle spørsmålet om oppstillingen av betingelsesligningene. Foreløpig nøyer vi oss med å belyse problemet ved et eksempel: Vi tenker oss at vi i en plan trekant har målt alle tre vinklene α , β og γ . Det foreligger da én overskytende måling, og vi kan stille opp en betingelsesligning som får formen:

$$\alpha + \beta + \gamma - 2oo^g = o$$

Betingelsesligningene er rent teoretiske ligninger som ville ha vært oppfylt dersom målingene hadde vært feilfrie. På grunn av målefeil vil systemet av betingelsesligninger ikke være tilfredsstilt når vi setter inn de målte verdier for o_1 , o_2 , ... , o_n . For å få tilfredsstilt betingelsesligningene må vi tilføye korreksjoner til måleverdiene, slik at vi får:

$$
\begin{aligned}
F_1(o_1+v_1 \;,\; o_2+v_2 \;,\; \ldots\ldots \;,\; o_n+v_n) &= o \\
F_2(o_1+v_1 \;,\; o_2+v_2 \;,\; \ldots\ldots \;,\; o_n+v_n) &= o \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
F_r(o_1+v_1 \;,\; o_2+v_2 \;,\; \ldots\ldots \;,\; o_n+v_n) &= o
\end{aligned}
$$

Vi foretar så en rekkeutvikling i samsvar med Taylors formel, hvorved ligningssystemet bringes på lineær form:

$$
\begin{aligned}
F_1(o_1 \;,\; o_2 \;,\; \ldots\ldots \;,\; o_n) + \frac{\partial F_1}{\partial o_1} v_1 + \frac{\partial F_1}{\partial o_2} v_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial F_1}{\partial o_n} v_n &= o \\
F_2(o_1 \;,\; o_2 \;,\; \ldots\ldots \;,\; o_n) + \frac{\partial F_2}{\partial o_1} v_1 + \frac{\partial F_2}{\partial o_2} v_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial F_2}{\partial o_n} v_n &= o \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
F_r(o_1 \;,\; o_2 \;,\; \ldots\ldots \;,\; o_n) + \frac{\partial F_r}{\partial o_1} v_1 + \frac{\partial F_r}{\partial o_2} v_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial F_r}{\partial o_n} v_n &= o
\end{aligned}
$$

Vi innfører forkortede betegnelser for de forskjellige størrelsene som opptrer her.:

$U_{pi} = \frac{\partial t_p}{\partial x_i}$ $U \cdot \Delta \underline{X} = -\underline{t}$

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n + w_1 = o$, **eller skrevet på komprimert form:** $[av] + w_1 = o$

$b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n + w_2 = o$, " " " " : $[bv] + w_2 = o$ (1)

....

$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n + w_r = o$, " " " " : $[rv] + w_r = o$

Dette er de såkalte lineariserte betingelsesligninger. Vi kommer i det etterfølgende til å bruke betegnelsen betingelsesligninger både om de opprinnelige og lineariserte betingelsesligninger. Bare i de tilfelle hvor det kan være av betydning å holde dem fra hverandre, kommer vi til å bruke de fullstendige betegnelser. Størrelsene w kalles motsigelsene i betingelsesligningene, og er altså lik det avviket fra null som fås når de observerte verdier settes inn i de opprinnelige betingelsesligninger, dvs.

$$w_i = F_i(o_1 \;,\; o_2 \;,\; \ldots\ldots \;,\; o_n)$$

2. Overgang til normalligninger.

I systemet av lineariserte betingelsesligninger opptrer n ukjente, nemlig de n korreksjoner. På den annen side foreligger r ligninger, dvs. ligningssystemet er underbestemt. Ved å trekke inn prinsippet som ligger til grunn for m.k.m., nemlig $[pvv] = \text{min.}$, skaffer vi oss de n - r manglende ligninger. Vi blir med andre ord stilt overfor oppgaven å gjøre [pvv] til minimum, men samtidig skal v-ene oppfylle betingelsesligningene (1) . Den matematiske betegnelse på den oppgaven å finne minimumsverdien av en funksjon når funksjonens variable samtidig skal oppfylle visse betingelsesligninger, er: ekstremaloppgave med tilleggskrav. Vi har tidligere i elementærkurset under "utjevning av sluttfeil" allerede behandlet løsningen av dette matematiske problem. Løsningen som skriver seg fra den store italiensk-franske matematiker Lagrange, går ut på at hver av betingelsesligningene skal multipliseres med de foreløpig ubestemte faktorene $-2k_1$, $-2k_2$, ... $-2k_r$, hvoretter det hele adderes til [pvv]. Derved fås den såkalte hovedfunksjon. Størrelsene k går under navn av Lagrangeske multiplikatorer eller korrelater (den siste betegnelse nyttes i utjevningsregningen). Vi betegner hovedfunksjonen med H og har altså:

$$\begin{aligned} H = [pvv] & - 2k_1(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots\ldots + a_nv_n + w_1) \\ & - 2k_2(b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots\ldots + b_nv_n + w_2) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & - 2k_r(r_1v_1 + r_2v_2 + \ldots\ldots + r_nv_n + w_r) \end{aligned}$$

Egentlig står her ikke noe annet enn H = [pvv], fordi hvert enkelt av tilleggsleddene ifølge (1) er lik null. Minimumsverdien av H finnes på vanlig måte ved å differensiere partielt med hensyn til samtlige variable og sette alle partielt deriverte lik null:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial v_1} &= 2p_1v_1 - 2k_1a_1 - 2k_2b_1 - \ldots\ldots - 2k_rr_1 = o \\ \frac{\partial H}{\partial v_2} &= 2p_2v_2 - 2k_1a_2 - 2k_2b_2 - \ldots\ldots - 2k_rr_2 = o \qquad (2) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial H}{\partial v_n} &= 2p_nv_n - 2k_1a_n - 2k_2b_n - \ldots\ldots - 2k_rr_n = o \end{aligned}$$

Vi har nå like mange ligninger som ukjente. Antall ukjente er de n korreksjonene v og de r korrelatene k . På den annen side har vi de r betingelsesligninger (1) og de n ekstremalbetingelsesligninger (2) . Av ligningene (2) fås:

$$\begin{array}{l||c|c|c}
v_1 = \frac{a_1}{p_1}k_1 + \frac{b_1}{p_1}k_2 + \ldots\ldots + \frac{r_1}{p_1}k_r & a_1 & b_1 & c_1 \\
v_2 = \frac{a_2}{p_2}k_1 + \frac{b_2}{p_2}k_2 + \ldots\ldots + \frac{r_2}{p_2}k_r & a_2 & b_2 & c_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
v_n = \frac{a_n}{p_n}k_1 + \frac{b_n}{p_n}k_2 + \ldots\ldots + \frac{r_n}{p_n}k_r & a_n & b_n & c_n
\end{array}$$

Disse ligninger går under navn av korrelatligninger. Av disse kan v-ene finnes når korrelatene er kjent. For å komme over til normalligninger multipliserer vi korrelatligningene i tur og orden med a_1, a_2, ..., a_n og danner $[av]$. Vi adderer w_1 til på begge sider og får , idet vi forutsetter 3 betingelsesligninger:

$$[av] + w_1 = [\frac{aa}{p}]k_1 + [\frac{ab}{p}]k_2 + [\frac{ac}{p}]k_3 + w_1 = 0$$

fordi $[av] + w_1$ ifølge 1. betingelsesligning er lik null. Dette er den første normalligning. Multipliserer vi deretter med b_1, b_2, ..., b_n og c_1, c_2, ..., c_n, framkommer to nye normalligninger, slik at vi får normalligningssystemet:

$g_{tt} \cdot \underline{k} = -\underline{t}$

$g_{tt} = U \cdot g_{xx} \cdot U^T$

$$\begin{aligned}
[\frac{aa}{p}]k_1 + [\frac{ab}{p}]k_2 + [\frac{ac}{p}]k_3 + w_1 &= 0 \\
[\frac{ab}{p}]k_1 + [\frac{bb}{p}]k_2 + [\frac{bc}{p}]k_3 + w_2 &= 0 \\
[\frac{ac}{p}]k_1 + [\frac{bc}{p}]k_2 + [\frac{cc}{p}]k_3 + w_3 &= 0
\end{aligned}$$

Dette ligningssystemet har samme oppbygning som normalligningene ved elementutjevning, bare med den forskjell at vektene ved korrelatutjevning opptrer i nevnerne.

På samme måte som ved elementutjevning, fås regnekontroll på danningen av normalligninger ved hjelp av summen av koeffisientene i betingelses ligningene. Vi setter:

$$\begin{array}{l||c|c|c}
a_1 + b_1 + c_1 = s_1 & \frac{a_1}{p_1} & \frac{b_1}{p_1} & \frac{c_1}{p_1} \\
a_2 + b_2 + c_2 = s_2 & \frac{a_2}{p_2} & \frac{b_2}{p_2} & \frac{c_2}{p_2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_n + b_n + c_n = s_n & \frac{a_n}{p_n} & \frac{b_n}{p_n} & \frac{c_n}{p_n}
\end{array}$$

og har da at:

$$\left[\frac{aa}{p}\right] + \left[\frac{ab}{p}\right] + \left[\frac{ac}{p}\right] = \left[\frac{as}{p}\right] \text{(Ved multiplisering med } \frac{a}{p}\text{-kolonnen og summering)}$$

$$\left[\frac{ab}{p}\right] + \left[\frac{bb}{p}\right] + \left[\frac{bc}{p}\right] = \left[\frac{bs}{p}\right] \text{(" \quad " \quad " } \frac{b}{p}\text{-kolonnen " \quad ")}$$

$$\left[\frac{ac}{p}\right] + \left[\frac{bc}{p}\right] + \left[\frac{cc}{p}\right] = \left[\frac{cs}{p}\right] \text{(" \quad " \quad " } \frac{c}{p}\text{-kolonnen " \quad ")}$$

Vi legger merke til at betingelsesligningenes konstantledd ikke inngår i s-ene, og heller ikke inngår normalligningenes konstantledd i summekontrollen.

Av normalligningssystemet finnes korrelatene og deretter v-ene av korrelatligningene. Med disse v-ene korrigeres så de utførte observasjoner, og på grunnlag av disse utjevnede verdier for observasjonene foretas beregning av det størrelseskompleks som målingene tar sikte på å bestemme, hvorved utjevningsoppgaven er løst.

3. Generelle regler for oppstilling av betingelsesligninger.

En feil i oppstillingen av betingelsesligningene med hensyn til antall eller "innhold" fører - som vi skal komme nærmere inn på - enten til at utjevningen "blokkeres" (ubestemte verdier for korrelatene) eller til forfalskning av utjevningsresultatet. De mest nærliggende feilmuligheter består i å operere med feilaktig antall betingelsesligninger eller å stille opp betingelsesligninger som er lineært avhengig av hverandre.

Den oppstillingsprosedyre som innebærer maksimal sikring mot feil av nevnte kategorier, består i

1. Avsetting av de gitte størrelser (dersom slike forekommer).
2. Avsetting av så mange målte størrelser som nødvendig for oppgavens løsning. (Antall overbestemmelser og dermed antall betingelsesligninger blir da identisk med antall tiloversblevne målinger.)
3. Avsetting av de resterende målinger, én etter én, med oppstilling av den tilhørende betingelsesligning umiddelbart etter avsettingen av hver enkelt overskytende måling. Oppstillingen skal basere seg på de til enhver tid avsatte størrelser.

Det er altså av avgjørende betydning at systemet av betingelsesligninger er korrekt både med hensyn til antall or "innhold". Hva det siste angår, må en spesielt ha oppmerksomheten rettet mot å unngå avhengige ligninger. Vi skal belyse dette med et eksempel. Figuren forestiller et nivellementsnett basert på de høydegitte punkter A og B samt 5 nivellerte høydeforskjeller (pilene angir stigningsretningen). Vi har 3 overbestemmelser og de 3 betingelsesligninger kan stilles

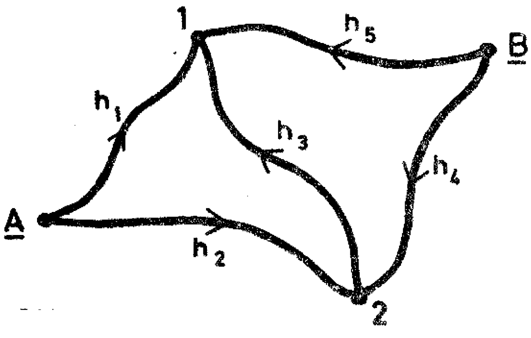


Fig. 2

opp på ulike måter, både korrekt og feilaktig. Nedenfor følger et korrekt og et feilaktig system

korrekt system	feilaktig system
$h_1 - h_3 - h_2 = o$	$h_1 - h_3 - h_2 = o$
$h_3 - h_5 + h_4 = o$	$h_3 - h_5 + h_4 = o$
$H_A + h_1 - h_5 = H_B$	$h_1 - h_5 + h_4 - h_2 = o$

De to første ligninger er de samme i begge tilfeller, utformet som polygon- eller sløyfeligninger. I det feilaktige system er den 3. ligning feilaktig, og feilen består i at den er lineært avhengig av de to første. Den er nemlig utformet som polygonligning (i hovedpolygonen), og blir derfor en følge av de to første, dvs. den bringer ikke noe nytt inn i "bildet" (i det korrekte system er den 3. ligning utformet som dragligning).

Under alle omstendigheter disponeres atskillig "frihet" med hensyn til valg av betingelsesligninger. Målsettingen her bør være å oppnå betingelsesligninger som inneholder færrest mulig ledd.

Hva blir så konsekvensene av feil ved betingelsesligningene og hvordan gir de seg til kjenne? Vi betrakter følgende 3 feilmuligheter.

a. Korrekt antall betingelsesligninger, men én ligning er lineært avhengig av de andre.

b. For mange betingelsesligninger. I tilegg til et korrekt system kommer én overtallig betingelsesligning som følgelig må bli lineært avhengig av de andre.

c. For få betingelsesligninger.

De to første tilfellene ytrer seg på samme måte. Vi får et NL-system med like mange ukjente som ligninger, men i begge tilfeller blir én av NL-ligningene lineært avhengig av de andre, dvs. de resulterer i ubestemte verdier for korrelatene, noe som manifesterer seg på den måte at det i en bestemt fase av oppløsningsprosedyren vil forekomme en null med **null-divisjon. Dette inntreffer i hoved**resultatlinjen ved danningen av den multiplikasjonsfaktor som er tilordnet siste sluttligning. Her vil nemlig den reduserte kvadratiske koef. og den reduserte konstantleddkoef. begge anta verdien null. For et system bestående av 3 NL vil vi i siste sluttligning ha

$$[\frac{cc}{p}\cdot 2] = 0 \quad \text{og likeså} \quad W_3 \cdot 2 = 0$$

Hva c-tilfellet angår, vil ikke den begåtte feil manifestere seg under selve utjevningsregningen. Feilen vil først gi seg til kjenne etter utjevningsprosedyrens avslutning ved den endelige beregning av størrelseskomplekset, hvis bestemmelse er utjevningens egentlige formål. Det vil da konstateres indre motsigelser innen størrelseskomplekset, nettopp som følge av den (eller de) neglisjerte betingelsesligning(er).

4. Tilbakeføring av korrelatutjevning til elementutjevning.

Vi skal nå vise at det er mulig å overføre en korrelatutjevning til elementutjevning.

Denne overføring skjer på den måten at vi i de r betingelsesligninger velger ut et antall v-er til elementer. Dette antall må være lik antall ukjente, med andre ord lik e. Vi løser så betingelsesligningene med hensyn til de n-e resterende v-er. De derved framkomne ligninger, sammen med de ligninger som uttrykker identitet mellom visse v-er og elementene, representerer et komplett system av feilligninger.

Eksempel: n = 5 og r = 2

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 + a_5v_5 + w_1 = o$$

$$b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 + b_4v_4 + b_5v_5 + w_2 = o$$

Med utgangspunkt i relasjonen n-e=r finner vi i det foreliggende tilfelle e lik 3 , dvs. vi må velge 3 av v-ene til elementer. Vi velger v_3 , v_4 og v_5 og kaller dem x , y og z . Vi løser så de to betingelsesligninger med hensyn på v_1 og v_2 og får:

$$v_1 = a_1'x + b_1'y + c_1'z + f_1$$

$$v_2 = a_2'x + b_2'y + c_2'z + f_2$$

som sammen med:

$$v_3 = x$$

$$v_4 = y$$

$$v_5 = z$$

utgjør et komplett system av feilligninger.

De to utjevningsarter element- og korrelatutjevning atskiller seg med andre ord bare med hensyn til regnematen. Vi skal senere komme inn på spørsmålet om hvilke av de to utjevningsmetoder som bør velges når vi står overfor et konkret utjevningsproblem. Utjevningsresultatet blir det samme i begge tilfeller,men regnearbeidet kan differere atskillig, avhengig av forholdene i det enkelte tilfelle.

5. Middelfeilen på vektsenheten.

Da korrelatutjevning kan føres tilbake til elementutjevning, kan vi uten videre bruke den tidligere formel for middelfeilen på vektsenheten, som ble utledet under elementutjevning:

$$m_o = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-e}} = \sqrt{\frac{[pvv]}{r}}$$

Vi skal så vise hvordan vi kan utlede $[pvv]$. Vi tar vårt utgangspunkt i korrelatligningene:

$$v_i = \frac{a_i}{p_i} k_1 + \frac{b_i}{p_i} k_2 + \frac{c_i}{p_i} k_3 \quad \Big| \quad p_i v_i$$

Vi multipliserer med $p_i v_i$, summerer og får:

$$[pvv] = [av]k_1 + [bv]k_2 + [cv]k_3$$

Her er $[av]$, $[bv]$ og $[cv]$ ifølge betingelsesligningene lik $-w_1$, $-w_2$ og $-w_3$ (se (1)), dvs.:

$$[pvv] = - w_1 k_1 - w_2 k_2 - w_3 k_3 = - [wk]$$

Innføres her for k-ene de verdiene som normalligningssystemet gir, får vi en tilsvarende formel som ved elementutjevning:

$$[pvv] = \frac{w_1^2}{[\frac{aa}{p}]} + \frac{(w_2.1)^2}{[\frac{bb}{p}.1]} + \frac{(w_3.2)^2}{[\frac{cc}{p}.2]} + \ldots..$$

Av denne formel går det fram at vi kan utlede $[pvv]$ gjennom oppløsning av normalligningssystemet, idet vi til de r normalligninger føyer følgende fingerte normalligning:

$$w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + o = o$$

og behandler denne ligning etter samme mekaniske eliminasjonsregler som gjelder for de øvrige normalligninger.

Endelig består den mulighet å utlede $[pvv]$ ved å regne ut de enkelte v-er ved hjelp av korrelatligningene.

Stemmer disse to uttrykkene for $[pvv]$ overens, har vi sikkerhet for at hele utjevningsregningen fra og med danningen av normalligningene til og med utledningen av v-ene, er riktig utført. Det eneste ledd i regningen som fremdeles kan være beheftet med feil, er lineariseringen av de opprinnelige betingelsesligninger, med andre ord utviklingen av de siste etter Taylors formel. Vi skaffer oss kontroll på denne regnetransaksjonen ved den såkalte sluttprøve, som består i å sette inn de korrigerte observasjoner i de opprinnelige betingelsesligninger, og disse må da være tilfredsstilt innenfor regnenøyaktigheten. (Men fremdeles består den mulighet at selve betingelsesligningssystemet er feilaktig. En slik feil vil først manifistere seg ved den endelige beregning av størrelseskomplekset, idet en da konstaterer at det etter utjevningen fremdeles opptrer motsigelser.)

6. Middelfeilen på funksjoner av utjevnede observasjoner.

Vi setter oss nå til oppgave å utlede middelfeilen til følgende vilkårlige funksjon av utjevnede målinger:

$$\begin{aligned} u &= \varphi(o_1 + v_1 , o_2 + v_2 , \ldots\ldots , o_n + v_n) \\ &= \varphi(o_1 , o_2 , \ldots\ldots , o_n) + \frac{\partial\varphi}{\partial o_1} v_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial o_2} v_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial o_n} v_n . \\ &= \varphi(o_1 , o_2 , \ldots\ldots , o_n) + \underbrace{t_1 v_1 + t_2 v_2 + \ldots\ldots + t_n v_n}_{[tv]} \\ &= u^o + \Delta u \end{aligned}$$

idet vi har innført som betegnelse for de partielle differensialkvotienter.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial o_i} = t_i$$

Da feilforplantningsloven bare kan brukes for uavhengige størrelser, må vi her, på samme måte som ved behandlingen av det tilsvarende problem under elementutjevning, søke å framstille funksjonen u som funksjon av de opprinnelige målinger o_1 , o_2 , ... , o_n , som her representerer de uavhengige størrelser. Vi tar vårt utgangspunkt i korrelatligningene:

$$v_i = \frac{a_i}{p_i} k_1 + \frac{b_i}{p_i} k_2 + \frac{c_i}{p_i} k_3 \quad \Big| \quad t_i$$

Vi multipliserer med t_i , summerer og får:

$$[tv] = [\tfrac{at}{p}]k_1 + [\tfrac{bt}{p}]k_2 + [\tfrac{ct}{p}]k_3$$

dvs.

$$u = \varphi(o_1 , o_2 , \ldots\ldots , o_n) + [\tfrac{at}{p}]k_1 + [\tfrac{bt}{p}]k_2 + [\tfrac{ct}{p}]k_3$$

Det gjelder så her å få k-ene uttrykt ved de opprinnelige observasjoner. Det oppnår vi ved å gå ut fra normalligningssystemet:

$$\begin{array}{l|l} [\tfrac{aa}{p}]k_1 + [\tfrac{ab}{p}]k_2 + [\tfrac{ac}{p}]k_3 + w_1 = 0 & q_1 \\ [\tfrac{ab}{p}]k_1 + [\tfrac{bb}{p}]k_2 + [\tfrac{bc}{p}]k_3 + w_2 = 0 & q_2 \\ [\tfrac{ac}{p}]k_1 + [\tfrac{bc}{p}]k_2 + [\tfrac{cc}{p}]k_3 + w_3 = 0 & q_3 \end{array}$$

I dette ligningssystem opptrer de uavhengi observerte størrelser, o-ene, i konstantleddene, idet vi har

$$w_i = F_i(o_1 , o_2 , \ldots\ldots , o_n)$$

Vi må derfor ta sikte på å få uttrykt k-ene som funksjoner av w-ene, og det oppnås ved å slå inn på ubestemte koeffisienters metode, idet vi multipliserer normalligningssystemet etter tur med de foreløpig ubestemte koeffisienter q_1, q_2 og q_3 og adderer produktene (som alle har verdien null) til på høyre side av siste ligning for u. Vi får da:

$$\begin{aligned} u = \varphi(o_1\ ,\ o_2\ ,\ \ldots\ ,\ o_n) &+ q_1 w_1 + q_2 w_2 + q_3 w_3 \\ &+ \{[\tfrac{aa}{p}]q_1 + [\tfrac{ab}{p}]q_2 + [\tfrac{ac}{p}]q_3 + [\tfrac{at}{p}]\}k_1 \\ &+ \{[\tfrac{ab}{p}]q_1 + [\tfrac{bb}{p}]q_2 + [\tfrac{bc}{p}]q_3 + [\tfrac{bt}{p}]\}k_2 \\ &+ \{[\tfrac{ac}{p}]q_1 + [\tfrac{bc}{p}]q_2 + [\tfrac{cc}{p}]q_3 + [\tfrac{ct}{p}]\}k_3 \end{aligned}$$

Vi forlanger nå at q-ene skal velges på en slik måte at alle { }-uttrykk blir null, og har dermed oppnådd vår hensikt å få funksjonen u uttrykt som funksjon av w-ene, idet u da går over til:

Vi disponerer nå de 3 frihetsgradene som innføringen av de 3 ubestemte koeffisienter betinger, til å forlange at samtlige { }-uttrykk skal anta verdien null, m.a.o.

$$\begin{aligned} [\tfrac{aa}{p}]q_1 + [\tfrac{ab}{p}]q_2 + [\tfrac{ac}{p}]q_3 + [\tfrac{at}{p}] &= o \\ [\tfrac{ab}{p}]q_1 + [\tfrac{bb}{p}]q_2 + [\tfrac{bc}{p}]q_3 + [\tfrac{bt}{p}] &= o \\ [\tfrac{ac}{p}]q_1 + [\tfrac{bc}{p}]q_2 + [\tfrac{cc}{p}]q_3 + [\tfrac{ct}{p}] &= o \end{aligned} \qquad 3)$$

Vi har dermed oppnådd vår hensikt, nemlig å få funksjonen u uttrykt ved w-ene, idet u nå går over til

$$u = \varphi(o_1\ ,\ o_2\ ,\ \ldots\ ,\ o_n) + q_1 w_1 + q_2 w_2 + q_3 w_3$$

Vi innfører her for w-ene og får:

$$u=\varphi(o_1,o_2,\ldots,o_n)+q_1F_1(o_1,o_2,\ldots,o_n)+q_2F_2(o_1,o_2,\ldots,o_n)+q_3F_3(o_1,o_2,\ldots,o_n)$$

Det har dermed lykkes oss å tilbakeføre u til en funksjon av de målte størrelsene. Vi kan nå uten videre anvende feilforplantningsloven, idet vi først bringer u på lineær form. Herunder tas hensyn til at

$$\frac{\partial\varphi}{\partial o_i} = t_1\ ,\ \frac{\partial F_1}{\partial o_i} = a_i\ ,\ \frac{\partial F_2}{\partial o_i} = b_i \quad \text{og} \quad \frac{\partial F_3}{\partial o_i} = c_i$$

hvorved fås:

$$\begin{aligned} \varepsilon_u = t_1\varepsilon_1 + t_2\varepsilon_2 + \ldots + t_n\varepsilon_n &+ q_1a_1\varepsilon_1 + q_1a_2\varepsilon_2 + \ldots\ldots + q_1a_n\varepsilon_n \\ &+ q_2b_1\varepsilon_1 + q_2b_2\varepsilon_2 + \ldots\ldots + q_2b_n\varepsilon_n \\ &+ q_3c_1\varepsilon_1 + q_3c_2\varepsilon_2 + \ldots\ldots + q_3c_n\varepsilon_n \\ = \underbrace{(t_1 + q_1a_1 + q_2b_1 + q_3c_1)}_{r_1}\varepsilon_1 &+ \underbrace{(t_2 + q_1a_2 + q_2b_2 + q_3c_2)}_{r_2}\varepsilon_2 + \ldots\ldots \end{aligned}$$

Følgelig:

$$m_u^2 = m_0^2\left[\frac{rr}{p}\right]$$

Vi skal se litt nærmere på uttrykket $\left[\frac{rr}{p}\right]$, idet vi tar vårt utgangspunkt i det generelle uttrykk for r :

$$r_i = t_i + q_1a_i + q_2b_i + q_3c_i \quad \left| \quad \frac{r_i}{p_i} \quad \right| \quad \frac{a_i}{p_i} \quad \left| \quad \frac{t_i}{p_i} \right.$$

Vi multipliserer først med $\frac{r_i}{p_i}$, summerer og får:

$$\left[\frac{rr}{p}\right] = \left[\frac{tr}{p}\right] + q_1\left[\frac{ar}{p}\right] + q_2\left[\frac{br}{p}\right] + q_3\left[\frac{cr}{p}\right]$$

Deretter multipliserer vi med $\frac{a_i}{p_i}$, summerer og får:

$$\left[\frac{ar}{p}\right] = \left[\frac{aa}{p}\right]q_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]q_2 + \left[\frac{ac}{p}\right]q_3 + \left[\frac{at}{p}\right]$$

Her er $\left[\frac{ar}{p}\right]$ ifølge (3) lik null. Ved etter tur å multiplisere med $\frac{b_i}{p_i}$ og $\frac{c_i}{p_i}$ kommer vi fram til at det samme også er tilfelle for $\left[\frac{br}{p}\right]$ og $\left[\frac{cr}{p}\right]$, følgelig:

$$\left[\frac{rr}{p}\right] = \left[\frac{tr}{p}\right]$$

Ved så å multiplisere med $\frac{t_i}{p_i}$ og summere, fås:

$$\left[\frac{rr}{p}\right] = \left[\frac{tt}{p}\right] + \left[\frac{at}{p}\right]q_1 + \left[\frac{bt}{p}\right]q_2 + \left[\frac{ct}{p}\right]q_3$$

Dermed er oppgaven for så vidt løst, idet q-ene er gitt ved (3), mens de andre størrelsene som opptrer i formelen er kjent. Imidlertid er det mulig å komme fram til et enklere uttrykk ved å løse (3) med hensyn på q-ene og innføre disse verdiene i den siste ligningen. Vi får da som sluttformel for middelfeilen på funksjonen u:

$$m_u^2 = m_o^2\left\{\left[\frac{tt}{p}\right] - \frac{\left[\frac{at}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{bt}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]} - \frac{\left[\frac{ct}{p}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]}\right\} = m_o^2\,Q_{uu}$$

Hva $\{\;\}$-uttrykket i den siste formelen angår, er det mulig å utlede dette ~~direkte i tilknytning til oppløsningen av normalligningssystemet~~.

Middelfeilen på funksjonen u dersom den ble utregnet på grunnlag av de ikke utjevnede størrelser, ville være:

$$m_u^2 = m_o^2\left[\frac{tt}{p}\right]$$

Aggregatet
$$m_o^2\left\{\frac{\left[\frac{at}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} + \frac{\left[\frac{bt}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]} + \frac{\left[\frac{ct}{p}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]}\right\}$$

utgjør følgelig den nøyaktighetsvinning som utjevningen har medført for funksjonen u's vedkommende (de enkelte ledd representerer vinningen som de enkelte betingelsesligninger medfører, m.a.o. $[\frac{at}{p}]^2 : [\frac{aa}{p}]$ har sin opprinnelse i 1. betingelseslign., o.s.v.).

7. Det fullstendige eliminasjonsskjema
ved korrelatutjevning.

Det forutsetter et normalligningssystem med tre korrelater. Oppløsningen skal kombineres med utledning av feilkvadratsummen og vektskoeffisienten til en funksjon av utjevnede observasjoner, nemlig funksjonen:

$$u = \varphi(o_1 + v_1\ ,\ o_2 + v_2\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ o_n + v_n)$$

$$= \varphi(o_1\ ,\ o_2\ ,\ \ldots\ ,\ o_n) + t_1v_1 + t_2v_2 + \ldots + t_nv_n = u^o + \Delta u$$

Eliminasjonsskjema ved korrelatutjevning.

1.n.l. = 1.s.l.	$\left[\frac{aa}{p}\right]$	$\left[\frac{ab}{p}\right]$	$\left[\frac{ac}{p}\right]$	w_1	1	0	0	$\left[\frac{at}{p}\right]$	S_1
	2.n.l.	$\left[\frac{bb}{p}\right]$	$\left[\frac{bc}{p}\right]$	w_2	0	1	0	$\left[\frac{bt}{p}\right]$	S_2
	f_1	$f_1\left[\frac{ab}{p}\right]$	$f_1\left[\frac{ac}{p}\right]$	$f_1 w_1$	f_1	•	0	$f_1\left[\frac{at}{p}\right]$	$f_1 S_1$
	2.s.l.	$\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]$	$\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]$	$w_2\cdot 1$	f_1	1	0	$\left[\frac{bt}{p}\cdot 1\right]$	$S_2\cdot 1$
		3.n.l.	$\left[\frac{cc}{p}\right]$	w_3	0	0	1	$\left[\frac{ct}{p}\right]$	S_3
		f_2	$f_2\left[\frac{ac}{p}\right]$	$f_2 w_1$	f_2	0	0	$f_2\left[\frac{at}{p}\right]$	$f_2 S_1$
		f_3	$f_3\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]$	$f_3 w_2\cdot 1$	$f_1 f_3$	f_3	0	$f_3\left[\frac{bt}{p}\cdot 1\right]$	$f_3 S_2\cdot 1$
		3.s.l.	$\left[\frac{cc}{p}:2\right]$	$w_3\cdot 2$	$f_2+f_1 f_3$	f_3	1	$\left[\frac{ct}{p}\cdot 2\right]$	$S_3\cdot 2$
			Fingert n.l.	0	0	0	0	0	$S_4=[w]$
			f_4	$f_4 w_1$	f_4	0	0	$f_4\left[\frac{at}{p}\right]$	$f_4 S_1$
			f_5	$f_5 w_2\cdot 1$	$f_1 f_5$	f_5	0	$f_5\left[\frac{bt}{p}\cdot 1\right]$	$f_5 S_2\cdot 1$
			f_6	$f_6 w_3\cdot 2$	$f_2 f_6+f_1 f_3 f_6$	$f_3 f_6$	f_6	$f_6\left[\frac{ct}{p}\cdot 2\right]$	$f_6 S_3\cdot 2$
hovedresultatlinje				$-[pvv]$	k_1	k_2	k_3	Δu	$S_4\cdot 3$
								$\left[\frac{tt}{p}\right]$	
							f_7	$f_7\left[\frac{at}{p}\right]$	
							f_8	$f_8\left[\frac{bt}{p}\cdot 1\right]$	
							f_9	$f_9\left[\frac{ct}{p}\cdot 2\right]$	
								Q_{uu}	

$$f_1 = -\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}, \quad f_2 = -\frac{\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}, \quad f_3 = -\frac{\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}$$

$$f_4 = -\frac{w_1}{\left[\frac{aa}{p}\right]}, \quad f_5 = -\frac{w_2\cdot 1}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}, \quad f_6 = -\frac{w_3\cdot 2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]}$$

$$f_7 = -\frac{\left[\frac{at}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}, \quad f_8 = -\frac{\left[\frac{bt}{p}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}, \quad f_9 = -\frac{\left[\frac{ct}{p}\cdot 2\right]}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]}$$

8. Oversikt over korrelatutjevning.

Det foreligger n observasjoner: $o_1 \, , \, o_2 \, , \, \dots\dots \, , \, o_n$

De tilhørende vekter er: $p_1 \, , \, p_2 \, , \, \dots\dots \, , \, p_n$

Ved utj. blir målingene tillagt korreksjonene: $v_1 \, , \, v_2 \, , \dots\dots\dots \, , \, v_n$

De utjevnede verdier av målingene er: $o_1 + v_1 \, , \, o_2 + v_2 \, , \, \dots , o_n + v_n$

Gangen i utjevningsberegningen blir:

1. Oppstilling av de opprinnelige betingelsesligninger

$$F_i \left(o_1 \, , \, o_2 \, , \, \dots\dots \, , \, o_n \right) = o$$

Vi får like så mange slike betingelsesligninger som overskytende målinger, nemlig n-e = r .

2. Linearisering av de opprinnelige betingelsesligninger, som faller i to trinn, nemlig:

a.

Danning av koeffisientene i de lineariserte betingelsesligninger:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots\dots + a_n v_n + w_1 = o$$

$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots\dots + b_n v_n + w_2 = o$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \dots\dots + r_n v_n + w_r = o$$

Her er: $a_i = \frac{\partial F_1}{\partial o_i} \quad , \quad b_i = \frac{\partial F_2}{\partial o_i} \quad , \quad c_i = \frac{\partial F_3}{\partial o_i} \quad$, osv.

Koeffisientene a , b , c,osv. trenger vi ikke regne ut med noen særlig stor nøyaktighet.

b.

Utregning av motsigelsene w i betingelsesligningene:

$$w_i = F_i \left(o_1 \, , \, o_2 \, , \, \dots\dots \, , \, o_n \right)$$

Beregning av konstantleddene w må utføres med stor nøyaktighet.

3. Dersom vi i tilknytning til utjevningen skal utlede middelfeilen til en funksjon av utjevnede observasjoner, nemlig funksjonen

$$u = \varphi \left(o_1 + v_1 \, , \, o_2 + v_2 \, , \, \dots\dots \, , \, o_n + v_n \right)$$

må denne funksjon først lineariseres

$$u = \varphi(o_1 , o_2 , \ldots , o_n) + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \ldots + t_n v_n$$

hvor $t_i = \frac{\partial \varphi}{\partial o_i}$

4. Så følger danningen av normalligningssystemet, som må foretas med summekontroll. Danningen av normalligningene foregår i følgende skjema:

v	a	b	c	t	s	1/p=q	$v_{beregnet}$	p
	$k_1 =$	$k_2 =$	$k_3 =$					
v_1	a_1	b_1	c_1	t_1	s_1	q_1	v_1	p_1
	a'_1	b'_1	c'_1	t'_1	s'_1	1		
v_2	a_2	b_2	c_2	t_2	s_2	q_2	v_2	p_2
	a'_2	b'_2	c'_2	t'_2	s'_2	1		
. .	. .	. .	. .	.	. .	. .	. . .	.
v_n	a_n	b_n	c_n	t_n	s_n	q_n	v_n	p_n
	a'_n	b'_n	c'_n	t'_n	s'_n	1		
	w_1	w_2	w_3				- [wk]	

I dette skjemaet anbringes altså betingelsesligningene vertikalt, slik at korrelatligningene kommer horisontalt. De merkede størrelsene er framkommet ved å multiplisere horisontalt med $\sqrt{q} = \frac{1}{\sqrt{p}}$.

Danningen av normalligningene skjer med de merkede størrelsene. Derved oppnås den forenkling at normalligningskoeffisientene kan dannes med vekten én. Etter at korrelatene er funnet, skrives de opp øverst i skjemaet. v-ene finnes da ved horisontal regning med de umerkede korrelatligningskoeffisienter og skrives opp i nest siste kolonne:

$$v_i = q_i (a_i k_1 + b_i k_2 + c_i k_3)$$

I siste linje skjer utregning av [pvv] på grunnlag av formelen

$$[pvv] = - [wk]$$

Ellers legger vi merke til at også koeffisientene t er med i skjemaet. Derved oppnås å få dannet størrelsene $[\frac{at}{p}]$, $[\frac{bt}{p}]$, osv. med summekontroll.

5. Oppløsning av normalligningssystemet med fortløpende summekontroll av sluttligningene og med samtidig utledning av korrelatene, feilkvdratsummen og vektskoeffisienten(e) til funksjonen(e) u .

6. Beregning av v-ene på grunnlag av korrelatligningene.

7. Med de under pkt. 6 beregnede v-er dannes så $[pvv]$, som må stemme overens med $[pvv]$ funnet ved oppløsningen av normalligningssystemet.

8. Beregning av de utjevnede verdier $o_i + v_i$ av observasjonene.

9. Sluttprøve.Den består i å sette inn de utjevnede verdier av observasjonene i de opprinnelige betingelsesligninger som da må tilfredsstilles innenfor regnenøyaktigheten.

1o. Beregning av det størrelseskompleks som målingene tar sikte på å bestemme på grunnlag av de utjevnede observasjoner.

11. Beregning av middelfeilen på vektsenheten

$$m_o = \sqrt{\frac{[pvv]}{r}}$$

12. Beregning av middelfeilen på den funksjon (eventuelt de funksjoner) av utjevnede observasjoner, som vi søker nøyaktigheten av

$$m_u = m_o \sqrt{Q_{uu}}$$

9. Valg av utjevningsmetode.

Vi har allerede vist at enhver utjevningsoppgave kan løses enten ved element- eller korrelatutjevning. Når vi står overfor en konkret utjevningsoppgave, melder derfor spørsmålet seg om hvilken metode som er mest hensiktsmessig. Vanligvis lønner det seg å praktisere den regel at en velger den metode som resulterer i det minste antall normalligninger, idet erfaringen viser at antall normalligninger i det store og hele er utslagsgivende for omfanget av utjevningsregningen. Hva tallet på normalligninger angår, har vi at:

	Antall NL.
Elementutjevning	e
Korrelatutjevning	n-e=r

Herav ser vi at elementutjevning i alminnelighet vil være å foretrekke dersom

$$e < n-e \ , \quad \text{dvs.} \quad e < \frac{n}{2}$$

Dersom antall normalligninger er det samme i begge tilfelle, eller praktisk talt det samme, foretrekkes den utjevningsmetode som resulterer i de enkleste grunnligninger (feilligninger eller betingelsesligninger). Ellers er det å merke seg at alle nøyaktighetsundersøkelser faller enklere for elementutjevning enn for korrelatutjevning. Det er et moment som under ellers like forhold kan bli avgjørende for valget av metode.

Utviklingstendensen i den senere tid har i det store og hele gått i favør av elementutjevning. Ikke minst er denne utvikling blitt påskyndet som følge av at datateknikken er blitt tatt i bruk. Forholdet er nemlig det at elementutj. er langt mer velegnet for programmering av helautomatiske utjevningsprosedyrer enn korrelatutj. (en helautomatisk oppstilling av betingelsesligninger byr på langt større problemer enn en helautomatisk oppstilling av feilligninger).

lo. Utjevning av målinger som har forskjellige dimensjoner.

I det tilfelle at de utførte målinger har forskjellige dimensjoner (det kan f.eks. dreie seg om en observasjonsrekke bestående både av vinkelmålinger og lengdemålinger), byr utjevningen på spesielle problemer hva fiksering av vektene angår. Det henger sammen med at målingene blir inkommensurable med hensyn til nøyaktighet. Det vil ikke være mulig, slik som vi hittil har gjort, å velge en vektsenhet og uttrykke samtlige vekter ved denne. Vi må ta vårt utgangspunkt i den tidligere oppstilte generelle utforming av prinsippet som ligger til grunn for m.k.m. (se elementærkurset, side 25)

$$\left[\frac{v^2}{m^2}\right] = \min.$$

I dette uttrykk er de enkelte ledd $\frac{v^2}{m^2}$ dimensjonsløse fordi v-ene og m-ene for de enkelte ledd har samme dimensjon. En skjønner av dette at vi oppnår en korrekt utjevning etter m.k.m. også i tilfelle av at målingene - og dermed middelfeilene - har forskjellige dimensjoner dersom vi fastsetter vektene på følgende måte:

$$p = \frac{1}{m^2}$$

Eksempel: I en utjevning inngår både vinkel- og sidemålinger. Nøyaktigheten av de første er gitt ved $m_\alpha = \pm 1o^{cc}$, mens observasjonsmiddelfeilen til de siste er lik $m_s = \pm 5$ cm. Med hvilken vekt skal vinkelmålingene og sidemålingene inngå i utjevningen? Vi får:

$$p_\alpha = \frac{1}{m_\alpha^2} = \frac{1}{1oo}$$

$$p_s = \frac{1}{m_s^2} = \frac{1}{25}$$

Av regnetekniske grunner vil det her være fordelaktig å operere med en konstant faktor, f.eks. loo , slik at

$$p_\alpha = 1 \quad \text{og} \quad p_s = 4$$

En videre forutsetning er at utjevningsprosedyren forøvrig baseres på de samme enheter som legges til grunn for vektsfastsettelsen (i foreliggende tilfelle altså på enhetene cm og ^{cc}).

Det melder seg så spørsmål om betydningen av middelfeilen på vektsenheten når vi har med dimensjonsforskjellige observasjoner å gjøre. Holder vi oss til det første tilfelle med $p = \frac{1}{m^2}$, vil altså vekten bli én for m=1 , dvs. vektsenheten svarer til vekten av en fiktiv observasjon hvis middelfeil er lik én. Middelfeilen på vektsenheten må følgelig bli én dersom vi ved utjevningen har truffet riktige antakelser med hensyn til vektene, dvs. med hensyn til de enkelte målingers middelfeil. Dersom vi ved utjevningen får en verdi for middelfeilen på vektsenheten som avviker merkbart fra én, er altså det et tegn på at vektsfastsettelsen ikke er i samsvar med de faktiske forhold.

Opererer vi derimot med en konstant multiplikasjonsfaktor, dvs. vi setter $p = \frac{c}{m^2}$, skal vi av samme grunner som nevnt ovenfor ved utjevningen komme fram til $m_o = \sqrt{c}$ dersom fikseringen av vektene er realistisk.

Kapitel III.

GEODETISKE ANVENDELSER AV MINSTE KVADRATERS METODE.

Vi skal i det etterfølgende behandle noen av de viktigste anvendelser av m.k.m. i den geodetiske praksis. Vi kommer særlig til å rette oppmerksomheten mot utjevning av geometriske punktsystemer, men først skal vi befatte oss med noen sentrale problemer vedrørende måling av retninger og vinkler, nemlig stasjonsututjevning i forbindelse med måling av fullsatser og likeså vinkelmåling i alle kombinasjoner. Uttrykket stasjonsutjevning sikter til at utjevningen er "lokal" for så vidt som dens "virkning" er begrenset til vedkommende stasjon som målingene er utført i, i motsetning til selve hovedutjevningen, dvs. utjevningen av punktsystemet, som vanligvis innvirker på observasjonene i samtlige involverte stasjonspunkter.

1. Stasjonsutjevning.

1.1. Utjevning av fullsatser.

Satsmåling er uten sammenligning den mest anvendte observasjonsmetode når det er spørsmål om å bestemme trekantvinkler i geometriske systemer. Dessuten knytter det seg atskillig teoretisk interesse til satsmålingen av den grunn at visse andre vinkelmålingsmetoder leverer resultater som i feilteoreteoretisk henseende ekvivalerer fullsatser.

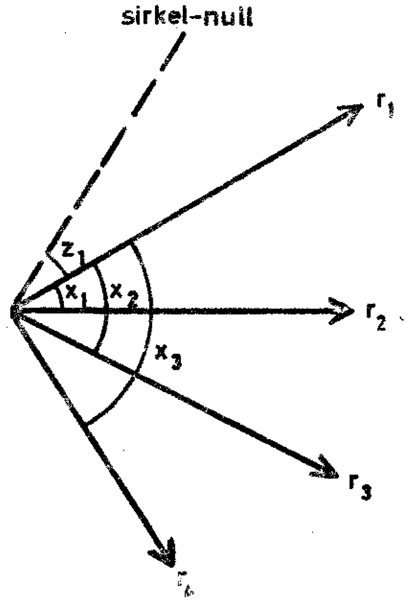


fig. 3

I fig. 3 har vi en satserie som består av 4 retninger. Utjevning av fullsatser utføres enklest som elementutjevning, idet vinklene x_1, x_2 og x_3 fra utgangsretningen r_1 og dessuten vinkelen z_1 mellom r_1 og retningen svarende til nullavlesning på sirkelen, velges til elementer. Vi får da følgende system av fundamentalligninger:

$$\begin{aligned} r_1 &= z_1 \\ r_2 &= z_1 + x_1 \\ r_3 &= z_1 \qquad + x_2 \\ r_4 &= z_1 \qquad\qquad + x_3 \end{aligned}$$

som resulterer i følgende feilligningssystem:

$$\text{1. sats:}\quad \begin{array}{lllllll} v_{1,1} & = + z_1 & & & & & - r_{1,1} \\ v_{2,1} & = + z_1 & + x_1 & & & & - r_{2,1} \\ v_{3,1} & = + z_1 & & + x_2 & & & - r_{3,1} \\ v_{4,1} & = + z_1 & & & + x_3 & & - r_{4,1} \end{array}$$

hvor indeksen 1 viser til 1. sats.

Vi tenker oss så at vi har målt i alt 3 fullsatser. Mellom hver sats foretar vi dreining av sirkelen, og får følgelig andre verdier for vinkelen mellom nullretningen og utgangsretningen. Vi innfører betegnelsene z_2 og z_3 for de nye orienteringselementene og får i alt følgende feilligningssystem:

	v	a (z_1)	b (z_2)	c (z_3)	d (x_1)	e (x_2)	g (x_3)	f
1. sats	$v_{1,1}$	+ 1						$- r_{1,1}$
	$v_{2,1}$	+ 1			+ 1			$- r_{2,1}$
	$v_{3,1}$	+ 1				+ 1		$- r_{3,1}$
	$v_{4,1}$	+ 1					+ 1	$- r_{4,1}$
2. sats	$v_{1,2}$		+ 1					$- r_{1,2}$
	$v_{2,2}$		+ 1		+ 1			$- r_{2,2}$
	$v_{3,2}$		+ 1			+ 1		$- r_{3,2}$
	$v_{4,2}$		+ 1				+ 1	$- r_{4,2}$
3. sats	$v_{1,3}$			+ 1				$- r_{1,3}$
	$v_{2,3}$			+ 1	+ 1			$- r_{2,3}$
	$v_{3,3}$			+ 1		+ 1		$- r_{3,3}$
	$v_{4,3}$			+ 1			+ 1	$- r_{4,3}$

Vi forutsetter sa at observasjonsnøyaktigheten er den samme for alle retninger, og får følgende normalligningssystem:

$$\text{1.gruppe}\left\{\begin{array}{lllllllll} 4z_1 & & & + x_1 & + x_2 & + x_3 & - [r]_1 & = 0 \\ & 4z_2 & & + x_1 & + x_2 & + x_3 & - [r]_2 & = 0 \\ & & 4z_3 & + x_1 & + x_2 & + x_3 & - [r]_3 & = 0 \end{array}\right.$$

$$\text{2.gruppe}\left\{\begin{array}{llllll} z_1 + z_2 + z_3 & +3x_1 & & & - [r_2] & = 0 \\ z_1 + z_2 + z_3 & & +3x_2 & & - [r_3] & = 0 \\ z_1 + z_2 + z_3 & & & +3x_3 & - [r_4] & = 0 \end{array}\right.$$

Her betyr f.eks. $[r]_2$ summen av alle retningsverdier tilhørende 2. sats, mens f.eks. $[r_2]$ betyr summen av alle retningsverdier mot objekt 2.

Vi summerer de to gruppene hver for seg og får:

$$4(z_1 + z_2 + z_3) + 3(x_1 + x_2 + x_3) - \underbrace{\{[r]_1 + [r]_2 + [r]_3\}}_{[r_1]+[r_2]+[r_3]+[r_4]} = 0$$

$$3(z_1 + z_2 + z_3) + 3(x_1 + x_2 + x_3) - \{[r_2] + [r_3] + [r_4]\} = 0$$

Vi subtraherer disse to ligninger og får:

$$z_1 + z_2 + z_3 - [r_1] = 0$$

som innført i hver av ligningene i 2. gruppe resulterer i:

$$x_1 = \frac{1}{3}\{[r_2] - [r_1]\} \quad , \quad x_2 = \frac{1}{3}\{[r_3] - [r_1]\} \quad \text{og} \quad x_3 = \frac{1}{3}\{[r_4] - [r_1]\}$$

Vi gikk her ut fra 3 satser. I det generelle tilfelle med s satser får vi:

$$x_1 = \frac{1}{s}\{[r_2] - [r_1]\} \quad , \quad x_2 = \frac{1}{s}\{[r_3] - [r_1]\} \quad \text{og} \quad x_3 = \frac{1}{s}\{[r_4] - [r_1]\}$$

Vi har dermed fastslått at de utjevnede verdier for vinklene x er identiske med de som kan utledes av middelsatsen (som differenser mellom de til vinklene x korresponderende retninger), idet denne jo får formen

$$\hat{r}_1 = \frac{1}{s}[r_1]$$
$$\hat{r}_2 = \frac{1}{s}[r_2]$$
$$\hat{r}_3 = \frac{1}{s}[r_3]$$
$$\hat{r}_4 = \frac{1}{s}[r_4]$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\hat{r}_n = \frac{1}{s}[r_n]$$

når vi forutsetter n retninger og s satser. Utjevning av fullsatser er altså meget enkelt. Den består ganske enkelt i en middeltallsberegning av de forskjellige retningsverdier.

I praksis pleier vi å redusere alle satsene til null med hensyn på utgangsretningen, og danne middelsatsen av de reduserte enkeltsatsene, da faller regningen enda enklere.

Middelfeilen på en utjevnet retning finner vi av

$$\hat{r} = \frac{1}{s}[r]$$

I samsvar med teorien for middeltallets middelfeil fås herav

$$m_{\hat{r}} = \frac{m_r}{\sqrt{s}}$$

hvor altså m_r er middelfeilen på en observert retning. Det er videre klart at samtlige utjevnede retninger og følgelig samtlige vinkler som kan utledes av middelsatsen, får samme nøyaktighet.

For å finne middelfeilen på vektsenheten, som her blir middelfeilen på en observert retning, må vi kjenne antall overskytende målinger, som er gitt ved:

$$n - e = \underbrace{n \, . \, s}_{\substack{\text{antall}\\ \text{obs.retn.}}} - \underbrace{(n - 1)}_{\substack{\text{antall}\\ \text{x-er}}} - \underbrace{s}_{\substack{\text{antall}\\ \text{z-er}}} = ns - n + 1 - s = (n-1)(s-1)$$

dvs.

$$m_r = \sqrt{\frac{[vv]}{(n-1)(s-1)}}$$

Vi skal så se nærmere på bestemmelsen av feilkvadratsummen. Vi kan selvsagt gjøre det på den måten at vi regner ut v-ene på grunnlag av det opprinnelige feilligningssystemet, men det faller tungvint. Ved den praktiske anvendelse av satsmetoden danner en som allerede nevnt, reduserte satser. Det skjer på den måten at retningsverdien for en for så vidt vilkårlig valgt utgangsretning, settes lik null, hvoretter de andre retningsverdiene reduseres med nullretningens opprinnelige retningsverdi. I samsvar med resultatet av den nettopp foretatte undersøkelse over satsmåling, består utjevningen i at de reduserte satsene sammendras til en middelsats, hvor hver retning er middeltallet av retningsverdiene i de reduserte satsene. En kan så regne ut avvikene v' mellom middelsatsen og de reduserte enkeltsatser. Imidlertid vil ikke de korreksjonene som vi kommer fram til på denne måten, være identiske med de sannsynligste korreksjoner v etter m.k.m., slik de framgår av det tidligere oppstilte feilligningssystem. At det må være slik, skjønner vi blant annet av den grunn at i v'-systemet får alle korreksjoner til utgangsretningen verdien null, og det kan jo umulig være riktig. Utgangsretningen vil selvsagt være feilbeheftet i samme utstrekning som de andre retningene. Sammenhengen mellom v'-ene og v-ene finner vi ved å ta utgangspunkt i det tidligere oppstilte feilligningssystem for 1. sats, som antar følgende form når 1. retning er redusert til null ($r_{1,1} = o$).

$$v_{1,1} = z_1 + (o - o)$$
$$v_{2,1} = z_1 + (x_1 - r_{2,1})$$
$$v_{3,1} = z_1 + (x_2 - r_{3,1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Her er størrelsene i parentesene nettopp lik avvikene mellom de reduserte retningsverdier og middelsatsen, med andre ord lik v'-ene for 1. sats, dvs.

$$v_{1,1} = z_1 + v'_{1,1}$$
$$v_{2,1} = z_1 + v'_{2,1}$$
$$v_{3,1} = z_1 + v'_{3,1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Vi kan her eliminere z_1 ved å ta hensyn til at ved elementutjevning skal $[av]$ være lik null, og det betyr her at $[v]_1 = o$

dvs. $o = nz_1 + [v']_1$ som gir $z_1 = -\frac{1}{n}[v']_1$

Relasjonene mellom v'-ene og v-ene er altså gitt ved (i refererer seg til retning og j til satsnr.)

$$v_{i,j} = v'_{i,j} - \frac{1}{n}[v']_j$$

Vi skal belyse framgangsmåten ved et eksempel med $n = 4$ og $s = 3$.

retn. / sats	r_1			r_2			r_3			r_4			$[v']$	$-\frac{1}{n}[v']$
		v'	v		v'	v		v'	v		v'	v		
1	0,-	0	+2	26,5430	0	+2	52,4892	-7	-5	116,1967	-1	+1	-8	+2
2	0,-	0	+3	36	-6	-3	87	-2	+1	70	-4	-1	-12	+3
3	0,-	0	-5	24	+6	+1	76	+9	+4	61	+5	0	+20	-5
Middel-sats	0,-	0	0	26,5430	0	0	52,4885	0	0	116,1966	0	0	0	0

Vi danner så $[vv] = 96$ og får

$$m_r = \sqrt{\frac{96}{(4-1)\ (3-1)}} = \pm 4{,}0^{cc}$$

som altså er middelfeilen på en observert retning. Middelfeilen på de utjevnede retninger blir følgelig

$$m_{\hat{r}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \pm 2{,}3^{cc}$$

1.2. Stasjonsutjevning ved vinkelmåling i alle kombinasjoner.

1.2.1. Stasjonsutjevningen.

I oppmålingslære I har vi behandlet den utføringsmessige side ved vinkelmåling i alle kombinasjoner, og skal nå komme inn på den beregningsmessige behandling av observasjonsresultatene. Det lønner seg også i dette tilfelle å legge elementutjevning til grunn for stasjonsutjevningen.

I fig. 4 blir alle mulige vinkelkombinasjoner i sektoren mellom retningene til pkt. 1 og pkt. 4 observert. I det foreliggende tilfelle med 4 tilsiktede punkter har vi i alt 6 muligheter. I det generelle tilfelle med n retninger gis det, som tidligere vist, i alt $\frac{1}{2}n(n-1)$ vinkelkombinasjoner.

På grunn av den symmetriske anordning av målingene faller stasjonsutjevningen, som vi skal se, svært enkel. Som elementer velger vi de n-1 vinkler fra utgangsretningen til hver av de andre retningene. Vi kaller elementene x , y og z og får følgende feilligningssystem, idet vi betegner de observerte verdier av vinklene med 1.2 , 1.3, osv.

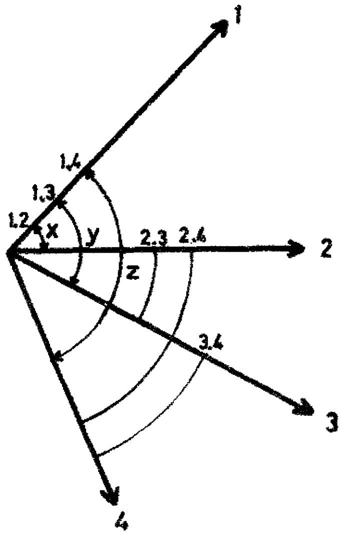


fig. 4

$$\begin{array}{llllll}
v_{1.2} & = & +x & & & -1.2 \\
v_{1.3} & = & & +y & & -1.3 \\
v_{1.4} & = & & & +z & -1.4 \\
v_{2.3} & = & -x & +y & & -2.3 \\
v_{2.4} & = & -x & & +z & -2.4 \\
v_{3.4} & = & & -y & +z & -3.4
\end{array}$$

Herav resulterer følgende normalligningssystem dersom vi forutsetter at alle målinger er like nøyaktige:

$$\begin{array}{l}
3x - y - z = 1,2 - 2,3 - 2.4 \\
-x + 3y - z = 1,3 + 2,3 - 3,4 \\
-x - y + 3z = 1.4 + 2.4 + 3,4
\end{array}$$

Vi summerer samtlige normalligninger og får:

$$x + y + z = 1.2 + 1.3 + 1.4$$

Vi adderer så denne ligning til hver enkelt av normalligningene og kommer derved fram til følgende verdier for elementene:

$$x = \frac{1}{4}\{2(1.2) + (1.3 - 2.3) + (1.4 - 2.4)\} = \widehat{1.2}$$

$$y = \frac{1}{4}\{2(1.3) + (1.2 + 2.3) + (1.4 - 3.4)\} = \widehat{1.3}$$

$$z = \frac{1}{4}\{2(1.4) + (1.2 + 2.4) + (1.3 + 3.4)\} = \widehat{1.4}$$

hvor de enkelte ()-uttrykkene representerer enten direkte eller indirekte observerte verdier (de siste i form av summer eller differenser mellom to målte vinkler).

Vi kan derfor stille opp følgende generelle regel for utledningen av de utjevnede verdier av vinklene ved vinkelmåling i alle kombinasjoner:

Den utjevnede verdi av en vinkel finnes som middeltallet av den direkte målte verdi av vinkelen (tillagt vekten to) og alle mulige indirekte uttrykk for vinkelen som kan dannes ved kombinasjon av to direkte observerte vinkler (tillagt vekten én).

Det viser seg at alle vinkler blir bestemt med samme nøyaktighet gjennom utjevningen. For elementet x f.eks. hadde vi:

$$x = \frac{1}{4}\{2(1.2) + (1.3 - 2.3) + (1.4 - 2.4)\}$$

eller generelt for n retninger:

$$x = \frac{1}{n}\{2(1.2) + \underbrace{(1.3 - 2.3) + (1.4 - 2.4) + \ldots..\}}_{\text{i alt (n-2) dobbeltledd}}$$

dvs. $$m_x^2 = \frac{1}{n^2}\{4m_\alpha^2 + 2(n-2)m_\alpha^2\} = \frac{2}{n}\, m_\alpha^2$$

hvor m_α står for middelfeilen på de enkelte vinkler som inngår i utjevningen. Den utledede middelfeil m_x blir den samme for alle elementer og for alle andre vinkler som kan dannes mellom to og to retninger i den ekvivalente satsserie som stasjonsutjevningen resulterer i (Jfr. 1.2.2.).

Vi går så et skritt videre og tenker oss at hver enkelt vinkel som inngår i stasjonsutjevningen, er framkommet som middeltall av q enkeltmålinger, dvs.

$$m_\alpha^2 = \frac{m_v^2}{q}$$

hvor m_v er middelfeilen på den enkelte vinkelmåling, følgelig:

$$m_x^2 = \frac{2m_v^2}{n \cdot q}$$

Vi erstatter her m_v med den tilsvarende retningsmiddelfeil m_r (den generelle sammenheng mellom middelfeil på retning og vinkel følger av: $\alpha = r - r'$, dvs. $m_\alpha = \sqrt{2}\, m_r$) og får:

$$m_x^2 = \frac{4m_r^2}{n \cdot q}$$

1.2.2. Sammenligning med satsmåling.

Det lar seg bevise at elementene x , y , z , ... som vi kommer fram til ved stasjonsutjevningen, i enhver henseende kan oppfattes og behandles som uavhengige retninger. Vi kan altså "overføre" stasjonsutjevningsresultatet til følgende ekvivalente (fiktive) satsserie

o , x , y , z , ...

og regne videre med denne som om vi hadde med en ekte satsserie å bestille. Vi vil f.eks. oppnå samme sluttresultat om vi ved utjevning av et punktsystem, hvis bestemmelse baserer seg på vinkelmåling i alle kombinasjoner, først foretar en stasjonsutjevning og deretter utjevner punktsystemet, idet vi betrakter stasjonsutjevningsresultatene som uavhengige retningsobservasjoner, eller om vi foretar utjevningen av punktsystemet på grunnlag av de opprinnelige målinger, altså på grunnlag av vinklene 1.2, 1.3, osv.

Vi skal så bringe klarhet i spørsmålet om hvordan q må avstemmes når vi forlanger at nøyaktigheten av den fiktive fullsatsen skal tilsvare en gitt nøyaktighet til en ekte fullsats. Vi forlanger altså at

den fiktive satsen: o , x , y , z , ...
og den ekte satsen: r_1 , r_2, r_3 , r_4 , ...

skal ha samme nøyaktighet. Vi forutsetter at den ekte satsen er en middelsats av s enkeltsatser. I samsvar med resultatet av den foretatte undersøkelse over nøyaktigheten av fullsatser vil samtlige vinkler som kan dannes av middelsatsen, bli bestemt med en middelfeil lik:

$$m_\alpha^2 = 2\, m_{\bar{r}}^2 = 2\,\frac{m_r^2}{s}$$

I den fiktive satsen vil samtlige vinkler mellom to og to retninger ha en middelfeil identisk med den tidligere utledede middelfeil på en utjevnet vinkel, dvs.

$$m_\alpha^2 = \frac{4m_r^2}{n\cdot q}$$

hvor altså n er antall retninger i stasjonen og q er antall ganger som den enkelte vinkel blir målt. Vinkelmåling i alle kombinasjoner og middelsatsen av s fullsatser er derfor likeverdige med hensyn til nøyaktighet dersom

$$2\,\frac{m_r^2}{s} = \frac{4m_r^2}{nq} \quad \text{dvs. dersom } \underline{nq = 2s}$$

Når metoden anvendes i praksis, tar en sikte på å oppnå samme nøyaktighet for de fiktive retningssatser i samtlige stasjoner, dvs. en fastsetter en konstant verdi for s. Vi ser da at q som representerer antall målinger av hver enkelt vinkel, blir variabel lik $\frac{2s}{n}$, dvs. avhengig av antall retninger i de enkelte stasjoner. For den grunnleggende triangulering av 1. orden i Norge er s fastsatt til 12, dvs. observasjonsstyrken i vårt 1. ordens nett tilsvarer 12 fullsatser. Observasjonsstyrken for hver enkelt vinkel vil, som nevnt, avhenge av det totale antall retninger i de enkelte stasjoner. For s=12 kan vi stille opp følgende oversikt over q:

n	2	3	4	5	6
q	12	8	6	≈ 5	4

Vi ser herav at observasjonsstyrken for enkeltvinklene avtar med økende antall retninger i stasjonene.

1.2.3. Middelfeilen på vektsenheten.

Middelfeilen på vektsenheten kan utledes på 4 måter:

1. På grunnlag av de observerte og utjevnede verdier for de målte vinkler utledes utjevningskorreksjonene $v_{1.2}$, $v_{1.3}$, osv. Det er målt i alt $\frac{n}{2}(n-1)$ vinkler, mens antall elementer er $(n-1)$. Antall overskytende målinger blir følgelig lik: $\frac{n}{2}(n-1) - (n-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Middelfeilen på vinklene som inngår i utjevningen, er følgelig gitt ved

$$m_\alpha = \sqrt{\frac{[vv]}{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}}$$

Vi må her ta hensyn til at hver enkelt vinkel som inngår i stasjonsutjevningen, er middeltall av q enkeltmålinger. Middelfeilen på en enkelt gang observert vinkel, som vi kaller m_v, blir derfor $m_\alpha\sqrt{q}$, dvs.

$$m_v = \sqrt{\frac{2q[vv]}{(n-1)(n-2)}} \quad \text{eller} \quad m_r = \sqrt{\frac{q[vv]}{(n-1)(n-2)}}$$

Dette er den vanligste måte å utlede observasjonsnøyaktigheten på ved stasjonsutjevning i alle kombinasjoner.

2. Ved den nettopp behandlede metode utledes altså middelfeilen gjennom stasjonsutjevningen, hvor sistnevnte baseres på middeltallene av de q enkeltvinkelmålinger. En sikrere bestemmelse av middelfeilen (som følge av et større antall overbestemmelser) oppnås ved å legge enkeltvinkelmålingene til grunn for stasjonsutjevningen. Stasjonsutjevningsresultatet blir det samme (Schreibers 2. regel), men v-ene blir nå å utlede som avviket mellom utjevnet vinkelverdi og hver enkelt av de q vinkelmålinger. Ved denne fremgangsmåte blir antall overskytende målinger lik:

$$\underbrace{\frac{n}{2}(n-1)q}_{\text{antall målinger}} - \underbrace{(n-1)}_{\text{antall elementer}} = (n-1)\left(\frac{nq}{2} - 1\right)$$

Vi betegner korreksjonene etter denne metode med v' og har følgelig:

$$m_r = \sqrt{\frac{[v'v']}{(n-1)(nq-2)}}$$

3. En tredje mulighet består i å basere utledningen av observasjonsnøyaktigheten på den preliminære utjevningsfase, dvs. på middeltallsdanningen. Utjevningskorreksjonene for hver enkelt vinkel 1.2, 1.3, osv. finnes da som avviket mellom middeltallet og enkeltmålingene, hvoretter feilkvadratsummen (omfattende samtlige vinkler) dannes. I dette tilfelle blir antall overskytende målinger lik:

$$\frac{n}{2}(n-1)(q-1)$$

hvor $\frac{n}{2}(n-1)$ er lik antall vinkler, mens $(q-1)$ er lik antall overskytende målinger for hver vinkel. Vi betegner korreksjonene etter denne metode med v'' og har følgelig:

$$m_r = \sqrt{\frac{[v''\,v'']}{n(n-1)(q-1)}}$$

4. Endelig består den mulighet å regne ut observasjonsnøyaktigheten på grunnlag av differensene mellom vinkelverdiene i I. og II. kikkertstilling. Vi kaller de to verdiene av en målt vinkel for α_I og α_{II} og setter:

$$d = \alpha_I - \alpha_{II}$$

og får i samsvar med den tidligere utledede formel for middelfeilen utregnet av dobbeltmålinger $(m = \sqrt{\frac{[dd]}{2n}})$:

$$m_\alpha = \sqrt{\frac{[dd]}{nq(n-1)}}$$

som blir middelfeilen på en vinkel observert i bare én kikkertstilling. Den tilsvarende middelfeil for en i begge kikkertstillinger observert retning er følgelig gitt ved:

$$m_r = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{[dd]}{nq(n-1)}}$$

Dette er en meget sikker metode til bestemmelse av observasjonsnøyaktigheten under forutsetning av at det benyttede instrument er tilstrekkelig godt verifisert for instrumentfeil som kollimasjonsfeil og horisontalakseskjevhet, idet disse instrumentfeil vil virke inn på differensen mellom de observerte verdier i I. og II. kikkertstilling.Som allerede nevnt, blir vinkelmåling i alle kombinasjoner hovedsakelig anvendt ved I. ordens triangulering, og her vil høydevinklene som regel være forholdsvis små på grunn av at sidelengdene er meget store, slik at virkningen av disse instrumentfeil blir uten noen større betydning.

*

Vi skal så gå nærmere inn på spørsmålet om nøyaktigheten av bestemmelsen av retningsmiddelfeilen etter disse fire metodene. Som tidligere omtalt, er middelfeilen til middelfeilen på vektsenheten tilnærmet gitt ved:

$$M_{\hat{m}_o} = \frac{\hat{m}_o}{\sqrt{2(\text{ant.overbest.})}}$$

For s = 12 kan vi stille opp følgende oversikt over M_{m_o} for de fire metodene

Metode	M_{m_o}				
	n = 2	n = 3	n = 4	n = 6	n = 8
1		$0,6358m_o$ (1)	$0,3967m_o$ (3)	$0,2220m_o$ (10)	$0,1538m_o$ (21)
2	$0,2119m_o$ (11)	$0,1503m_o$ (22)	$0,1228m_o$ (33)	$0,0952m_o$ (55)	$0,0805m_o$ (77)
3	$0,2119m_o$ (11)	$0,1538m_o$ (21)	$0,1288m_o$ (30)	$0,1053m_o$ (45)	$0,0944m_o$ (56)
4	$0,2030m_o$ (12)	$0,1439m_o$ (24)	$0,1176m_o$ (36)	$0,0912m_o$ (60)	$0,0771m_o$ (84)

Tabellen er beregnet på basis av det eksakte uttrykk for M_{m_o}, altså ikke ved den tilnærmede formel ovenfor (i parantes er antall overbestemmelser anført).

Av tabellen går det frem at særlig for små verdier for n er den 1. metode betydelig usikrere (det henger sammen med at antall overbestemmelser etter denne metode blir så lite) enn de tre andre, som er praktisk talt jevngode.

Hva metode 2 og 3 angår, må en regne med en tilleggsusikkerhet i bestemmelsen av m_o som følge av at korreksjonene etter disse metodene vil bli forfalsket av eventuelle sirkeldelingsfeil. Metode 1 er noe mindre påvirkelig overfor sirkeldelingsfeil, mens metode 4 overhodet ikke påvirkes av slike feil.

Dersom vi får større avvik ved bestemmelsen av retningsmiddelfeilen etter disse 4 metodene enn som kan forklares ut fra middelfeilens middelfeil, er det et tegn på at observasjonene er påvirket av systematiske feil.

1.2.4. Fordeling av vinkelmålingene på sirkelen.

Antall vinkler som skal måles, er altså $\frac{1}{2}$ n(n-1). Hver av disse vinkler skal måles q ganger. De q målinger av hver enkelt vinkel blir å fordele på sirkelen i samsvar med den generelle regel at sirkelen mellom hver måling skal forskyves $\frac{200^g}{q}$.

Problemet gjelder altså fordelingen av de $\frac{1}{2}$ n(n-1) vinkler, dvs. å bestemme utgangsavlesningen for den første måling av hver av disse vinkler. Den enkleste måte å gjøre dette på er å fordele vinklene jevnt innenfor $\frac{200^g}{q}$-intervallene.

Vi skal belyse dette ved et eksempel, som refererer seg til n=3 og s=6, dvs. observasjonsstyrken skal ekvivalere 6 fullsatser.

Her blir antall enkeltvinkler $\frac{1}{2}$ 3(3-1) = 3. Hver av disse skal måles q ganger, hvor q er gitt ved:

$$q = \frac{2s}{n} = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4.$$

Mellom hver av de fire målinger av de tre vinklene skal altså sirkelen forskyves $\frac{200^g}{4} = 50^g$. De tre vinklene skal så fordeles jevnt innenfor dette intervall ($\frac{50^g}{3} = 16{,}67^g$). Vi får derfor følgende fordeling av målingene på sirkelen:

1.2	1.3	2.3
$0{,}00^g$	$16{,}67^g$	$33{,}33^g$
50,00	66,67	83,33
100,00	116,67	133,33
150,00	166,67	183,33

2. Koordinatutjevning.

En av de viktigste anvendelser av elementutjevning innen den praktiske landmåling består i bestemmelse av trigonometriske punkters koordinater ved utjevning. Navnet koordinatutjevning skriver seg fra at det er nypunktenes koordinater som opptrer som elementer ved denne utjevningsform.

Ved koordinatutjevning spiller spørsmålet om endringen av en linjes retningsvinkel når linjens endepunkter forflyttes, en grunnleggende rolle. Det samme gjelder også behandling av feilligninger i sin alminnelighet. Disse grunnleggende problemer vil derfor bli behandlet først.

2.1. Funksjonsforbindelsen mellom retningsvinkelendring og forflytning av en linjes endepunkter.

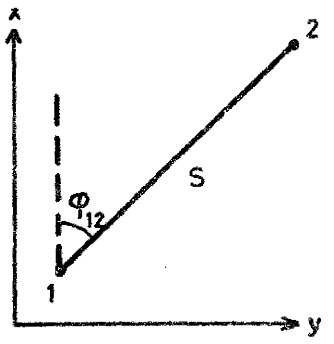


Fig. 5

I fig. 5 er gitt to punkter 1 og 2 ved sine rettvinklede koordinater. De er endepunkter til siden S, hvis retningsvinkel i pkt. 1 er φ_{12}. Funksjonsforbindelsen mellom endepunktenes koordinater og retningsvinkelen er gitt ved:

$$\operatorname{tg} \varphi_{12} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Vi lar så endepunktene foreta små forflytninger, gitt ved koordinatendringene dx_1, dy_1, dx_2 og dy_2, og finner den tilsvarende endring i retningsvinkelen ved implisitt differensiasjon av uttrykket for ln tg φ:

$$\ln \operatorname{tg} \varphi = \ln(y_2-y_1) - \ln(x_2-x_1)$$

herav følger: $$\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \; \frac{1}{\cos^2 \varphi} \, d\varphi = \frac{1}{\Delta y} (dy_2-dy_1) - \frac{1}{\Delta x} (dx_2-dx_1)$$

dvs. $$d\varphi = \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\Delta x} dx_1 - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\Delta y} dy_1 - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\Delta x} dx_2 + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\Delta y} dy_2$$

Vi har altså gjort den forutsetning at forflytningen av endepunktene er så liten at vi med tilstrekkelig nøyaktighet kan erstatte funksjonstilveksten med funksjonens totale differensial. Vi innfører så i uttrykket ovenfor:

$$\Delta y = S \sin \varphi_{1\,2}$$

$$\Delta x = S \cos \varphi_{1\,2}$$

og får for $d\varphi$:

$$d\varphi = \frac{1}{S} \sin \varphi_{1\,2} dx_1 - \frac{1}{S} \cos \varphi_{1\,2} dy_1 - \frac{1}{S} \sin \varphi_{1\,2} dx_2 + \frac{1}{S} \cos \varphi_{1\,2} dy_2$$

Her opptrer $d\varphi$ i absolutt vinkelmål. Vi går over til gradmål ved å multiplisere med ρ på begge sider

$$d\hat{\varphi} = \frac{\rho}{S} \sin \varphi_{1\,2} dx_1 - \frac{\rho}{S} \cos \varphi_{1\,2} dy_1 - \frac{\rho}{S} \sin \varphi_{1\,2} dx_2 + \frac{\rho}{S} \cos \varphi_{1\,2} dy_2$$

Ved koordinatutjevning brukes forkortede betegnelser for koeffisientene foran koordinattilleggene i ligningen for $d\hat{\varphi}$, idet vi setter:

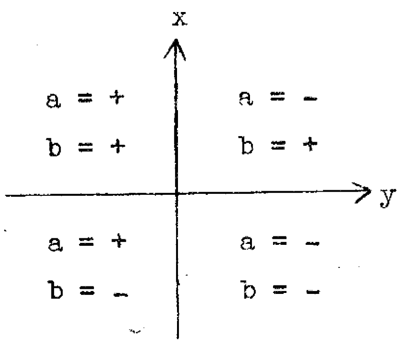
$$d\hat{\varphi} = + a'dx_1 + b'dy_1 + a\, dx_2 + b\, dy_2$$

Koeffisientene her går under navn av retningskoeffisienter. Koeffisientene foran dx_1 og dy_1 betegnes som stasjonspunktets retningskoeffisienter (eller tilbakeskjæringskoeffisienter) og skrives a' og b', mens koeffisientene foran dx_2 og dy_2 betegnes som det tilsiktede punkts retningskoeffisienter (eller framskjæringskoeffisienter) og skrives a og b.

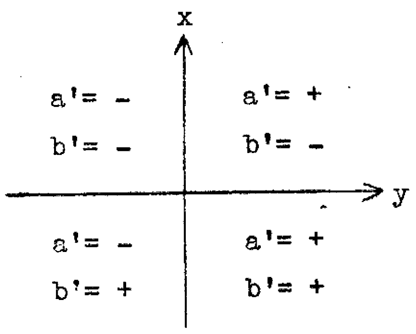
Vi fester oss ved at stasjonspunktets og det tilsiktede punkts koeffisienter er like i tallverdi, men har motsatt fortegn.

Fortegnene til retningskoeffisientene bestemmes sikrest ved hjelp av følgende kvadrantskjemaer:

Det tilsiktede pkt.s koef.



Stasjonspunktets koef.



Fremgangsmåten blir altså at først beregnes $|a|$ og $|b|$:

$$|a| = \frac{\rho}{S} |\sin \varphi| \text{ og } |b| = \frac{\rho}{S} |\cos \varphi|$$

dvs. uten å bry seg om koeffisientenes fortegn. Ved den endelige oppstilling av feilligningssystemet fastsettes så fortegnene ved hjelp av kvadrantskjemaene.

Foruten den analytiske utledning av dφ som vi nettopp har foretatt, er det også mulig å foreta en geometrisk utledning (fig. 6).

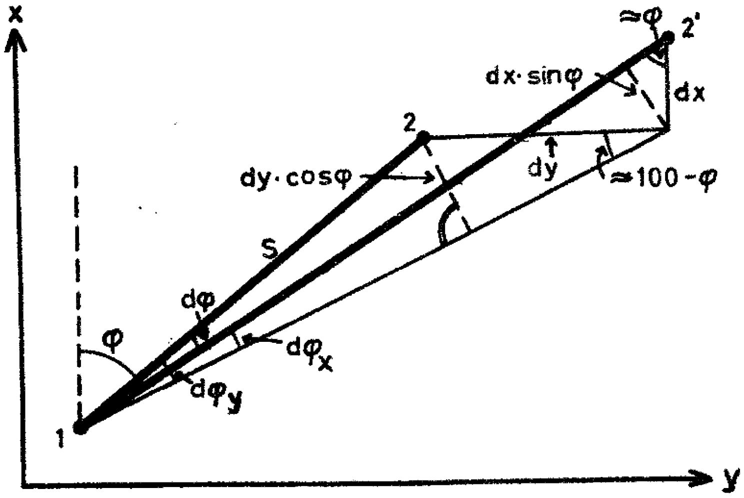


Fig. 6

Utgangsposisjonen for den betraktede side er gitt ved punktene 1 og 2. Vi lar så pkt. 2 forflyttes til 2' og dekomponerer forflytningen i dy og dx. Endringen av φ som følge av forflytningen dy, har vi kalt for $d\varphi_y$ og endringen av φ som følge av forflytningen dx, for $d\varphi_x$. Den resulterende retningsvinkelendring når 2 → 2' er dφ. Vi har da ifølge fig. 6:

$$d\hat{\varphi}_y = \frac{dy \cos \varphi}{S} \rho$$

$$d\hat{\varphi}_x = - \frac{dx \sin \varphi}{S} \rho$$

dvs. $$d\hat{\varphi} = d\hat{\varphi}_y + d\hat{\varphi}_x = - \frac{\rho}{S} \sin \varphi \; dx + \frac{\rho}{S} \cos \varphi \; dy$$

På tilsvarende måte kan vi utlede endringen i φ ved forflytning av pkt. 1.

2.2. Preliminær eliminasjon av elementer.

Ved koordinatutjevning opptrer foruten koordinatelementene også en spesiell type elementer som går under navn av orienteringselementer, og som det av regnetekniske grunner er mest praktisk å eliminere før danningen av normalligningene. En slik preliminær eliminasjon kan foretas etter to forskjellige metoder. Den ene metoden skriver seg fra Gauss og den andre fra Schreiber.

2.2.1. **Metoden til Gauss.**

Gitt feilligningssystemet:	Vekt
$v_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots\ldots + f_1$	p_1
$v_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots\ldots + f_2$	p_2
. . . .	.
$v_n = a_n x + b_n y + c_n z + \ldots\ldots + f_n$	p_n

Vi forutsetter så at vi skal foreta en preliminær eliminasjon av elementet x, og det skjer ved hjelp av 1. normalligning:

$$[paa]\,x + [pab]\,y + [pac]\,z + \ldots\ldots + [paf] = o$$

dvs.
$$x = -\frac{[pab]}{[paa]}\,y - \frac{[pac]}{[paa]}\,z - \ldots\ldots - \frac{[paf]}{[paa]}$$

Vi innfører denne verdi for x i hver av de opprinnelige feilligninger og får:

$$v_1 = (b_1 - a_1\frac{[pab]}{[paa]})\,y + (c_1 - a_1\frac{[pac]}{[paa]})\,z + \ldots\ldots + (f_1 - a_1\frac{[paf]}{[paa]})$$

$$v_2 = (b_2 - a_2\frac{[pab]}{[paa]})\,y + (c_2 - a_2\frac{[pac]}{[paa]})\,z + \ldots\ldots + (f_2 - a_2\frac{[paf]}{[paa]})$$

....

Vi innfører nye betegnelser for koeffisientene i disse feilligninger, idet vi setter:

$$\begin{array}{ll} & \text{Vekt} \\ v_1 = B_1y + C_1z + \ldots\ldots + F_1 & p_1 \\ v_2 = B_2y + C_2z + \ldots\ldots + F_2 & p_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . \\ v_n = B_ny + C_nz + \ldots\ldots + F_n & p_n \end{array}$$

Det nye system går under navn av <u>reduserte feilligninger</u> og de nye koeffisientene A , B , ... for <u>reduserte feilligningskoeffisienter</u>.

De to systemene er likeverdige så vel med hensyn til bestemmelsen av elementene y , z , ... med tilhørende middelfeil, som med hensyn til bestemmelsen av vilkårlige funksjoner av y , z , ... De to systemene har også samme feilkvadratsum og identiske v-er.

I det tilfelle som er av størst praktisk interesse, nemlig at samtlige koeffisienter til det elementet som skal elimineres, er lik minus én, og dessuten at samtlige vekter er lik én, antar det reduserte feilligningssystem formen:

$$\begin{array}{l} v_1 = (b_1 - \frac{[b]}{n})y + (c_1 - \frac{[c]}{n})z + \ldots\ldots + (f_1 - \frac{[f]}{n}) \\ v_2 = (b_2 - \frac{[b]}{n})y + (c_2 - \frac{[c]}{n})z + \ldots\ldots + (f_2 - \frac{[f]}{n}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = (b_n - \frac{[b]}{n})y + (c_n - \frac{[c]}{n})z + \ldots\ldots + (f_n - \frac{[f]}{n}) \end{array}$$

Kontroll på danningen av de reduserte feilligninger skaffer vi oss i dette tilfelle ved kontrolligningene:

$$[B] = [C] = \ldots\ldots = [F] = o$$

2.2.2. Schreibers metode.

(Schreibers 1.regel)

Gitt feilligningssystemet: Vekt

$$
\begin{array}{ll}
v_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots\ldots + f_1 & p_1 \\
v_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots\ldots + f_2 & p_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . \\
v_n = a_n x + b_n y + c_n z + \ldots\ldots + f_n & p_n
\end{array}
$$

Vi forutsetter at vi også denne gangen ønsker å eliminere elementet x . Etter Schreibers metode oppnås det ved å erstatte det opprinnelige feilligningssystem med følgende reduserte system:

Vekt

$$
\begin{array}{ll}
v_1' = b_1 y + c_1 z + \ldots\ldots + f_1 & p_1 \\
v_2' = b_2 y + c_2 z + \ldots\ldots + f_2 & p_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . \\
v_n' = b_n y + c_n z + \ldots\ldots + f_n & p_n \\
\Delta = [pab]y + [pac]z + \ldots\ldots + [paf] & -\frac{1}{[paa]}
\end{array}
$$

Det nye systemet er oppstått av det opprinnelige på den måten at vi i det opprinnelige systemet har fjernet x-kolonnen. Dessuten har vi tilføyd en fingert feilligning Δ med den negative vekten $-\frac{1}{[paa]}$.

At det nye systemet ekvivalerer det opprinnelige med hensyn til utledningen av elementene y , z , ... innsees ved å danne normalligninger av det nye systemet. Vi kommer da fram til samme normalligningssystem som vi ville få ved å eliminere x av normalligningssystemet dannet av de opprinnelige feilligninger. De to systemene er følgelig likeverdige i enhver henseende, ikke bare med hensyn til bestemmelsen av elementene y , z , ... med tilhørende middelfeil, men også med hensyn til bestemmelse av vilkårlige funksjoner av elementene. Det lar seg også vise at det nye systemet har samme feilkvadratsum som det opprinnelige, dvs.

$$[pvv] = [pv'v'] + p_\Delta \Delta^2$$

Derimot stemmer ikke de enkelte korreksjoner i de to systemene overens. I så henseende er Schreibers metode forskjellig fra metoden til Gauss. Ved den Gaussiske metode er nemlig korreksjonene i det opprinnelige og i det reduserte system identiske.

Mellom v-ene og v'-ene består følgende sammenheng

$$v_i = a_i x + b_i y + c_i z + \ldots\ldots + f_i$$

$$v_i' = \qquad b_i y + c_i z + \ldots\ldots + f_i$$

m.a.o. $\underline{v_i = a_i x + v_i'}$

Av 1. normalligning fås for elementet x:

1.NL.: $[paa]x + [pab]y + [pac]z + \ldots\ldots + [paf] = 0$

dvs. $x = -\frac{[pab]}{[paa]}y - \frac{[pac]}{[paa]}z - \ldots\ldots - \frac{[paf]}{[paa]} = p_\Delta \cdot \Delta$

følgelig: $v_i = v_i' + a_i \cdot p_\Delta \cdot \Delta$

Denne relasjon setter oss i stand til å beregne v-ene på grunnlag av v'-ene.

I det tilfelle som det knytter seg størst praktisk interesse til, nemlig at samtlige vekter er lik én, og dessuten at koeffisientene til det elementet som skal elimineres, samtlige er lik minus én, antar det reduserte feilligningssystem formen:

	Vekt
$v_1' = b_1 y + c_1 z + \ldots\ldots + f_1$	1
$v_1' = b_2 y + c_2 z + \ldots\ldots + f_2$	1
....	
$v_n' = b_n y + c_n z + \ldots\ldots + f_n$	1
$\Delta = -[b]y - [c]z - \ldots\ldots - [f]$	$-\frac{1}{n}$

Videre blir: $v_i = v_i' + \frac{\Delta}{n}$

Regelen om preliminær eliminasjon etter Schreibers metode går under navn av Schreibers 1. regel. Han har dessuten stilt opp to andre regler som undertiden kommer til nytte ved koordinatutjevning:

Schreibers 2. regel.

Gitt feilligningssystemet:	Vekt
$v_1 = ax + by + \ldots\ldots + f_1$	p_1
$v_2 = ax + by + \ldots\ldots + f_2$	p_2
....	.
$v_n = ax + by + \ldots\ldots + f_n$	p_n

hvor de enkelte feilligninger bare atskiller seg med hensyn til konstantledd og vekter. Schreibers 2. regel uttrykker at hele dette system kan erstattes av en enkelt feilligning:

$$\begin{array}{ll} & \text{Vekt} \\ v = ax + by + \ldots\ldots + \frac{[pf]}{[p]} \qquad & [p] \end{array}$$

Riktigheten av Schreibers 2. regel innsees derved at de to "feilligningssystemene" resulterer i samme bidrag til normalligningssystemet.

For den praktiske utjevningsregning er rekkevidden og betydningen av Schreibers 2. regel meget omfattende. Den utgangssituasjon som ligger til grunn for regelen (et større eller mindre antall feilligninger som bare atskiller seg med hensyn til konstantledd og vekter), svarer nemlig til det tilfelle at en størrelse som inngår i en utjevning, er målt flere ganger. Dersom vi ikke visste noe annet, måtte utjevningen bli å basere på enkeltmålingene, dvs. vi måtte stille opp separate feilligninger for hver enkelt. Schreibers 2. regel gir imidlertid her "legitimasjon" for den forenkling som ligger i en 2-trinnsbehandling av utjevningsproblemet, nemlig

1. Først dannes middeltall etter regelen for middeltallsutjevning (middeltall etter vekt).
2. Selve hovedutjevningen, som baseres på disse middeltall, idet sistnevnte innføres og behandles som observerte størrelser.

Etter Schreibers 2. regel vil denne oppdeling av utjevningsprosedyren i to trinn betinge eksakt samme resultat som ville oppnås dersom utjevningen ble basert direkte på primærmålingene og utført samlet.

*

Det nettopp behandlede problem "inngår" i det langt større problem som gjelder lovligheten rent generelt av å spalte opp utjevningsoppgaver i to eller flere trinn, hvor en innretter seg på den måte at en lar resultatene fra allerede utførte trinn inngå i etterfølgende som observasjonsmateriale. Hertil er å si at i de aller fleste tilfeller vil denne fremgangsmåte, som jo i og for seg står i strid med "ånden" i minste kvadraters metode (den forutsetter nemlig at i feilkvadratsummen [pvv], som blir minimalisert gjennom utjevningen, skal v-ene knytte seg til primærmålingene) ikke være tillatt, dvs. sluttresultatet av slike partielle utjevninger vil ikke bli identisk med resultatet av en samlet utjevning. Men det gis unntak fra denne regel, og Schreibers 2. regel representerer et av de aller viktigste unntak, idet den åpner muligheten for en oppspalting i to trinn. Punktbestemmelse som baserer seg på vinkelmåling i alle kombinasjoner, er eksempel på et tilfelle hvor det er tillatt med oppspalting av totalproblemet (bestemmelsen av selve punktsystemet) i tre trinn, nemlig

1. Middeltallsdannelse for de enkelte vinkler som inngår i stasjonsutjevningen.
2. Stasjonsutjevning.
3. Utjevning av punktsystemet.

Lovligheten av trinn 1 følger umiddelbart av Schreibers 2. regel. Hva trinn 2 og 3 angår, så lar det seg, som tidligere omtalt, vise at sluttresultatet vil bli eksakt korrekt under forutsetning av at resultatene fra trinn 2 innføres og behandles i trinn 3 som uavhengige retningsobservasjoner.

NB! En mer avansert utjevningsteknikk (utjevning av korrelerte observasjoner) gjør det mulig å "angripe" vilkårlige utjevningsproblemer trinnvis, og likevel oppnå et sluttresultat identisk med det som ville fås ved en samlet utjevning. Men det dreier seg her om en forholdsvis komplisert og arbeidskrevende utjevningsform som faller utenfor rammen av dette kurs.

Schreibers 3. regel.

Schreibers 3. regel angår omforming av vektene til feilligninger. Vi tenker oss gitt feilligningen:

$$v = ax + by + \dots . + f \text{ med vekten } p$$

Denne ligning kan erstattes med følgende feilligning:

$$v = qax + qby + \dots . + qf \quad \text{med vekten } \frac{p}{q^2}$$

hvor q er en fritt valgt konstant. Riktigheten herav innses på samme måte som nevnt under Schreibers 2. regel (begge feilligninger resulterer i samme normalligningsbidrag).

2.3. Oppstilling av feilligningene ved koordinatutjevning.

De etterfølgende utledninger bygger på forutsetningen om uavhengige retningsobservasjoner, som alle har samme vekt. Av regnetekniske grunner velger vi denne vekten til vektsenhet.

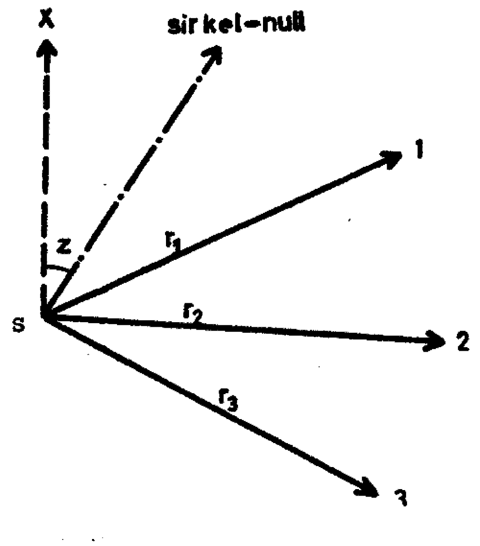


Fig. 7

Vi tenker oss gitt et punktsystem som skal bestemmes ved utjevning på grunnlag av retningsobservasjoner som er foretatt i et visst antall av systemets punkter (i det minste to av punktene som inngår i systemet, må være fastpunkter). Fig. 7 forestiller et utsnitt av punktsystemet, nemlig den delen som "angår" et vilkårlig stasjonspunkt s. Gjennom s er trukket en parallell til x-aksen og likeså retningen svarende til nullavlesning på sirkelen. I stasjonspunktet er målt satsserien r_1, r_2, r_3, ... mot punktene 1,2,3,.. Som elementer under utjevningen velges koordinatene til de variable punkter, dvs. til nypunktene og i tillegg hertil orienteringsstørrelsen z, som er lik den positive vinkel som en parallell med x-aksen i pkt. s må dreies for å falle sammen med satsseriens nullretning.

For retningsobservasjonen r_1 fås da følgende observasjonslinging:

$$r_1 + v_1 + z = \varphi_1$$

Vi forutsetter så at vi på grunnlag av en provisorisk beregning har skaffet oss tilnærmede verdier for koordinatene til nypunktene som inngår i punktsystemet. Vi kan følgelig sette:

$$\varphi_1 = \varphi_1^\circ + d\varphi_1$$

hvor altså φ° refererer seg til provisorisk punktposisjon. Vi har tidligere utledet $d\varphi$ til:

$$d\varphi_1 = + a_1'dx_s + b_1'dy_s + a_1 dx_1 + b_1 dy_1$$

hvor koordinattilleggene dx og dy svarer til overgangen fra den provisoriske punktbeliggenhet til den endelige, utjevnede posisjon. Vi innfører også en provisorisk verdi z° for orienteringselementet z, idet vi setter:

$$z = z^\circ + dz$$

Vi innfører så foregående uttrykk for φ_1 og z i observasjonsligningen og får følgende feilligning:

$$v_1 = - dz + a_1'dx_s + b_1'dy_s + a_1 dx_1 + b_1 dy_1 + \underbrace{(\varphi_1^\circ - r_1 - z^\circ)}_{f}$$

eller skrevet på generell form (s betegner stasjonspunkt og t tilsiktet punkt)

$$v_{st} = - z_s + a'x_s + b'y_s + a\ x_t + b\ y_t + (\varphi_{st}^\circ - r_{st} - z_s^\circ)$$

Dersom ett av punktene s eller t (eller begge) er fastpunkter, har det til følge at de tilhørende koordinattillegg skal settes lik null.

Vi støter på to hovedtyper av feilligningssystemer ved koordinatutjevning, avhengig av om satsseriens orienteringsvinkel er kjent eller ikke.

2.3.1. Feilligningssystemer som skriver seg fra satsserier med ukjent orienteringsvinkel.

I dette tilfelle antar feilligningssystemet følgende form, idet vi betegner satsseriens stasjonspunkt med s og de tilsiktede punkter med 1 , 2 , ... , n :

$$\begin{array}{l}
v_1 = - z + a_1' x_s + b_1' y_s + a_1 x_1 + b_1 y_1 \qquad + f_1 \\
v_2 = - z + a_2' x_s + b_2' y_s \qquad + a_2 x_2 + b_2 y_2 \qquad + f_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
v_n = - z + a_n' x_s + b_n' y_s \qquad + a_n x_n + b_n y_n \quad + f_n
\end{array}$$

hvor vi har innført betegnelsen z , x og y istedenfor dz , dx og dy. I dette system kan en del av feilligningen anta formen:

$$v = - z \qquad + f$$

Det vil inntreffe dersom både stasjonspunktet og det tilsiktede punkt er kjente punkter. Dersom stasjonspunktet er et nypunkt, mens det tilsiktede punkt er gitt, vil de tilhørende feilligninger anta formen:

$$v = - z + a' x_s + b' y_s \qquad + f$$

Endelig består den mulighet at stasjonspunktet i er et fastpunkt, mens det tilsiktede punkt er et nypunkt. I så tilfelle får feilligningene formen:

$$v = - z \qquad + a x_t + b y_t + f$$

Når det gjelder danningen og oppløsningen av normalligningssystemet, er det selvsagt fordelaktig med færrest mulig elementer. I foreliggende tilfelle kan vi oppnå en reduksjon i antall elementer ved å foreta en preliminær eliminasjon av orienteringselementene. Etter Schreibers metode oppnås dette ved å erstatte det opprinnelige feilligningssystem med følgende fingerte system:

$$\begin{array}{llr}
 & & \text{vekt} \\
v_1' = + a_1' x_s + b_1' y_s + a_1 x_1 + b_1 y_1 & + f_1 & 1 \\
v_2' = + a_2' x_s + b_2' y_s \qquad + a_2 x_2 + b_2 y_2 & + f_2 & 1 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & . \\
v_n' = + a_n' x_s + b_n' y_s \qquad + a_n x_n + b_n y_n & + f_n & 1 \\
\Delta = - [\,] x_s - [\,] y_s - [\,] x_1 - [\,] y_1 - \dots\dots & -[f] & -\frac{1}{n}
\end{array}$$

hvor koeffisientene i Δ-ligningen er framkommet ved summering av koeffisientene i det opprinnelige feilligningssystemet, og n er lik det totale antall retninger som inngår i vedkommende satsserie. En slik preliminær eliminasjon må foretas for samtlige satsserier. Det er her mulig å oppnå en liten forenkling i Δ-ligningen, idet vi velger en slik provisorisk verdi for orienteringselementet at Δ-ligningens konstantledd blir null. Under utledningen av den generelle feilligning ved koordinatutjevning viste vi at konstantleddene er gitt ved:

$$f = (\varphi^\circ - r) - z^\circ$$

herav følger at: $[f] = [\varphi^\circ] - nz^\circ - [r]$

Betingelsen for $[f] = 0$ er følgelig at den provisoriske verdi for orienteringselementet velges lik:

$$z^\circ = \frac{[\varphi^\circ] - [r]}{n} = \frac{[\varphi^\circ - r]}{n}$$

hvor altså φ° her har betydningen av retningsvinkelverdi <u>før utjevningen</u>. (For retninger mellom to fastpunkter vil altså φ° og endelig φ være identiske.)

2.3.2. Feilligningssystemer som skriver seg fra satsserier med kjent orienteringsvinkel.

Denne type av feilligningssystemer kan forekomme dersom stasjonspunktet er et fastpunkt hvis orienteringsvinkel allerede er bestemt, f.eks. gjennom en separat orienterinstransaksjon, jfr. 2.7. (avvikende behandling av satsserier i grunnlagspunkter). Orienteringselementet og koordinatelementene til stasjonspunktet faller da vekk, slik at feilligningssystemet antar formen:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 x_1 + b_1 y_1 && + f_1 \\ v_2 &= \qquad a_2 x_2 + b_2 y_2 && + f_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \\ v_n &= \qquad\qquad a_n x_n + b_n y_n && + f_n \end{aligned}$$

I dette systemet blir det altså ikke spørmål om å innføre noen Δ-ligning. Konstantleddene får her formen:

$$f = \varphi^\circ - (z + r) = \varphi^\circ - \varphi_{obs}.$$

dvs. Konstantleddene er lik differensen mellom beregnet provisorisk retningsvinkel og den observerte verdi av samme.

*

Etter at feilligningssystemene er oppstilt, følger danningen av normalligningssystemet. Imidlertid er det mulig på forhånd å foreta visse manipulasjoner med feilligningssystemene, for derved å oppnå at danningen av normalligningssystemet faller lettere. Det består følgende to muligheter:

<u>1.</u> I sin opprinnelige form har Δ-ligningene vekten $-\frac{1}{n}$, mens de andre feilligningene har vekten + 1. Dette kompliserer danningen av normalligningene. Imidlertid er det mulig å omforme Δ-ligningene slik at de får vekten -1.

Etter Schreibers 3. regel oppnås det ved å multiplisere Δ-ligningene med visse konstanter q gitt ved:

$$q = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Ved å gå fram på denne måten oppnår vi et enhetlig system av feilligninger som alle har vekten enten + 1 eller - 1. Det at de omformede Δ-ligninger har vekten - 1, betyr ikke noen særlig komplikasjon for danningen av normalligningene. Vi må bare være oppmerksom på at fortegnsreglene for Δ-ligningene rett og slett står på hodet, dvs. produktet av to ledd med samme fortegn blir negativt, mens produktet av to ledd med motsatt fortegn blir positivt.

2. Ved hjelp av Schreibers 2. regel er det mulig å innskrenke antall feilligninger betraktelig. Saken er nemlig den at etter eliminasjonen av orienteringselementene (Schreibers metode forutsatt) atskiller feilligningene for gjensidige retninger seg fra hverandre bare med hensyn til konstantledd. Vi har nemlig:

$$v_{i-j} = - ax_i - by_i + ax_j + by_j + f_i$$

og for kontraretningen:

$$v_{j-i} = - ax_i - by_i + ax_j + by_j + f_j$$

Ved hjelp av Schreibers 2. regel kan disse to feilligningene slås sammen til:

$$v = - ax_i - by_i + ax_j + by_j + \frac{f_i + f_j}{2}$$

som får vekten 2. Dersom vi nytter sammenslåing av feilligninger, må vi derfor sørge for at også Δ-ligningene får vekten - 2. Det oppnås ved multiplikatoren

$$q = \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

Videre må vi sørge for å omforme feilligninger som skriver seg fra eventuelle ensidig observerte retninger, slik at også de får vekten 2. Det oppnås ved multiplikatoren q = 0,7071.

2.4. Utregning av de enkelte korreksjoner.

Korreksjonene kan finnes på to måter, enten på grunnlag av observasjonsligningene eller på grunnlag av feilligningssystemet. Ved koordinatutjevning er det vanlig å basere den prinsipale utledning av v-ene på observasjonsligningene.

2.4.1 Utledning av v-ene på grunnlag av observasjonsligningene.

Den generelle observasjonsligning ved koordinatutjevning har vi tidligere utledet til (se side 72):

$$r + v + z = \hat{\varphi}$$

For feilligningssystemer som skriver seg fra satsserier med kjent orienteringsvinkel, resulterer denne ligning i:

$$v = \hat{\varphi} - (z + r) = \hat{\varphi} - \varphi_{obs}.$$

dvs. de enkelte v-er finnes som differensen mellom endelig retningsvinkel og den observerte verdi av samme.

For feilligningssystemer som inneholder orienteringselementer, stiller saken seg annerledes. Vi har da:

$$v = \hat{\varphi} - (z^\circ + dz + r)$$

hvor z° er valgt lik $z^\circ = \frac{1}{n}\{[\varphi^\circ - r]\}$.Det gjelder her å skaffe et uttrykk for dz. Det oppnår vi ved hjelp av feilligningssystemet fra vedkommende satsserie som dz refererer seg til:

$$v_1 = - dz + d\varphi_1 + f_1$$

$$v_2 = - dz + d\varphi_2 + f_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$v_n = - dz + d\varphi_n + f_n$$

idet vi her har substituert aggregatet $+ a'x_i + b'y_i + ax_j + by_j$ med $d\varphi$. Vi ser herav at $[v]$ blir lik null for satsserier (stasjoner) med ukjent orienteringsvinkel. Det følger av at $[av]$ er null ved elementutjevning. Følgelig $(a = - 1)$:

$$[av] = - [v] = + n\,dz - [d\varphi] - [f] = 0$$

Her er $[f] = 0$ som følge av at den provisoriske verdi for orienteringselementet ble valgt lik $\frac{1}{n}\{[\varphi - r]\}$. Dermed fås for orienteringselementet

$$dz = \frac{[d\varphi]}{n}$$

Følgelig blir den utjevnede verdi for orienteringsvinkelen lik:

$$\hat{z} = z^\circ + dz = \frac{[\varphi^\circ - r]}{n} + \frac{[d\varphi]}{n} = \frac{[\varphi^\circ + d\varphi - r]}{n} = \frac{[\hat{\varphi} - r]}{n}$$

dvs. satsseriens utjevnede orienteringsvinkel $\hat{z}$ utledes av samme uttrykk som den provisoriske verdi av samme, bare med den forskjell at den endelige verdi baseres på retningsvinklene etter utjevningen istedenfor de provisoriske verdier av samme ved bestemmelsen av z° . Når $\hat{z}$ er funnet, utledes v-ene av det tidligere uttrykk

$$v = \hat{\varphi} - (\hat{z} + r)$$

evt.

$$v = (\hat{\varphi} - r) - \hat{z}$$

Legg merke til at v-ene og f-ene (på samme måte som ovenfor konstatert for $\hat{z}$ og z°) utledes av identiske uttrykk. For f-ene hadde vi jo nemlig

$$f = (\varphi^\circ - r) - z^\circ$$

Forskjellen stikker i at utledningen av f-ene skal baseres på situasjonen før utjevningen, mens v-ene derimot skal baseres på situasjonen etter utjevningen.

Som foreløpig kontroll på utledningen av v-ene tjener kontrolligningen $[v] = 0$, som har gyldighet for alle satsserier hvor det opptrer orienteringselementer.

Feilkvadratsummen av v-ene utledet av observasjonsligningene må innenfor regnenøyaktigheten stemme overens med samme utledet ved oppløsningen av normalligningssystemet. Denne kontroll er riktignok ikke 100% sikker, men sannsynligheten for feil i utjevningen, dersom disse to feilkvadratsummer stemmer tilfredsstillende overens, er forsvinnende liten. Ved koordinatutjevning er det derfor blitt stående praksis at en nøyer seg med å jevnføre $[pvv]$ fra observasjonsligningene med $[pvv]$ fra normalligningssystemet. Dersom disse to verdier stemmer tilfredsstillende overens, anser en det som garanti god nok for at utjevningen er riktig utført. Kun dersom det konstateres uoverensstemmelse, blir det nødvendig - for å få fastslått hvor feilen stikker - å foreta en 3. utregning av v-ene, nemlig på grunnlag av feilligningene.

2.4.2. Utledning av v-ene på grunnlag av feilligningene.

For de feilligningene som ikke inneholder orienteringselementer, finnes v-ene ved å regne ut:

$$v = ax + by + \ldots\ldots + f$$

Inneholder feilligningene orienteringselementer, finnes korreksjonene som vi tidligere har vist under behandling av preliminær eliminasjon av orienteringselementer etter Schreibers metode,

$$v = v' + \frac{\Delta}{n}$$

hvor

$$v' = ax + by + \ldots\ldots + f$$

og

$$\Delta = - [a]x - [b]y - \ldots\ldots$$

Nyttes preliminær eliminasjon av orienteringselementer etter den Gaussiske metode, har vi

$$v = Ax + By + \dots + F$$

I praksis viser det seg at de fleste feil i forbindelse med koordinatutjevning, enten skriver seg fra feilaktig utregning av de provisoriske og endelige retningsvinkler, eller fra utregningen av retningskoeffisientene. Det første en derfor bør undersøke dersom det viser seg uoverensstemmelse mellom [pvv] av observasjonsligningene og [pvv] på grunnlag av normalligningssystemet, er om $d\varphi$ utregnet av feilligningene stemmer overens med differensene mellom provisorisk og endelig retningsvinkel. Mellom φ°, $\hat{\varphi}$ og retningskoeffisientene består nemlig funksjonsforbindelsen

$$\hat{\varphi} = \varphi^{o} + d\varphi = \varphi^{o} + a'x_s + b'y_s + a\,x_t + b\,y_t$$

En uoverensstemmelse her kan ha sin opprinnelse i feilaktig utregning av $\hat{\varphi}$ eller φ°, eller av retningskoeffisientene. Konstateres uoverensstemmelse mellom de to feilkvadratsummene, undersøkes altså først om kontrolligningen ovenfor er oppfylt for samtlige nypunktretninger (retninger som det inngår nypunkter i). Dersom vi ikke finner noen feil ved denne kontrollregning, blir neste skritt i feiletter søkingen å regne ut samtlige v-er av feilligningene

$$v = d\varphi + f + \frac{\Delta}{n}$$

og undersøke om disse stemmer overens med v-ene fra observasjonsligningene. Feilen(e) ligger der hvor uoverensstemmelse(r) mellom disse to v-sett konstateres.

2.5. Koordinatutjevning når de observerte størrelser er vinkler.

Vi har hittil forutsatt at målingene foreligger i form av retningsverdier. Dersom observasjonene er utført som vinkelmålinger, faller regningen atskillig enklere, og det henger sammen med at det ikke opptrer orienteringselementer ved denne form for koordinatutjevning.

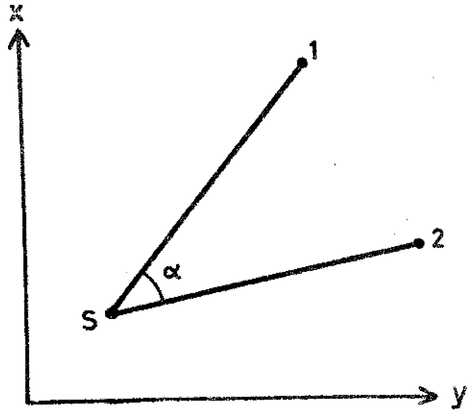


Fig. 8

I fig. 8 er vinkelen α i et stasjonspunkt S mellom punktene 1 og 2 målt. Vi får observasjonsligningen

$$\alpha + v = \varphi_2 - \varphi_1$$

Vi innfører som tidligere tilnærmede verdier for φ_1 og φ_2 og får

$$\alpha + v = \varphi_2^o + d\varphi_2 - \varphi_1^o - d\varphi_1$$

hvor $$d\varphi_1 = + a_1' x_s + b_1' y_s + a_1 x_1 + b_1 y_1$$

og $$d\varphi_2 = + a_2' x_s + b_2' y_s + a_2 y_2 + b_2 y_2$$

Vi innfører disse verdier i observasjonsligningen og får følgende feilligning

$$v_\alpha = (a_2' - a_1')x_s + (b_2' - b_1')y_s - a_1 x_1 - b_1 y_1 + a_2 x_2 + b_2 y_2 + (\varphi_2^o - \varphi_1^o - \alpha)$$

som blir den generelle feilligning ved koordinatutjevning på grunnlag av vinkelmålinger. Dersom noen av punktene S, 1 eller 2 er fastpunkter, har det til følge at de tilsvarende koordinatelementer faller vekk.

2.6. Nøyaktighetsundersøkelser ved koordinatutjevning.

Den etterfølgende nøyaktighetsteori har ikke bare referanse til koordinatutjevning, men gjelder bestemmelse av trigonometriske punkter i sin alminnelighet.

2.6.1. Retningsmiddelfeilen.

På grunnlag av feilkvadratsummen kan vi utlede retningsmiddelfeilen

$$m_o = \sqrt{\frac{[vv]}{n-k-z}}$$

hvor n er det totale antall retningsobservasjoner som inngår i utjevningen, k er antall koordinatelementer, som er lik det dobbelte antall nypunkter, og z er antall orienteringselementer, som igjen er lik antall Δ-ligninger.

Da vi ved utjevningen som regel opererer med middelsatser, vil denne retningsmiddelfeilen referere seg til middelsatsene, som altså er middeltall av flere enkeltsatser. Dersom middelsatsene er middeltall av s enkeltsatser, blir middelfeilen på en observert retning

$$m_r = m_o \sqrt{s}$$

Det er klart at retningsmiddelfeilen gir et visst uttrykk for nøyaktigheten av nypunktenes bestemmelse, idet stor observasjonsnøyaktighet selvsagt vil betinge nøyaktigere punktbestemmelse enn liten observasjonsnøyaktighet. På den annen side det innlysende at m_o representerer et sterkt "amputert" nøyaktighetsmål, idet, som tidligere påvist, er middelfeilen til en vilkårlig størrelse u rent generelt gitt ved

$$m_u = m_0 \sqrt{Q_{uu}}$$

hvor vektskoeffisienten Q_{uu} er en funksjon av bestemmelsesanordningen. Herav følger at m_0 isolert utgjør bare en del av det totale nøyaktighetsbilde (hvilke faktorer avhenger forøvrig Q_{uu} av ved den trigonometriske punktbestemmelse?). Videre kan det innvendes mot m_0 som nøyaktighetsmål at den ikke eksplisitt gir opplysning om nypunktenes nøyaktighet (med et punkts nøyaktighet assosieres selvsagt en lineær angivelse, f.eks. så og så mange cm). Imidlertid er det mulig på basis av m_0 å trekke visse slutninger med hensyn til nypunktenes lineære grunnrissnøyaktighet. Det oppnås ved å kombinere m_0 med trianguleringens gjennomsnittlige sidelengde.

2.6.2. Koordinatmiddelfeil.

Mer avanserte nøyaktighetsmål enn retningsmiddelfeilen representerer koordinatmiddelfeilene m_x og m_y, som er middelfeilene som knytter seg til nypunktenes koordinater. Ved oppløsningen av normalligningssystemet utledes vektskoeffisientene Q_{xx}, Q_{yy}, hvoretter middelfeilene i koordinataksenes retninger er gitt ved

$$m_x = m_0 \sqrt{Q_{xx}} \text{ og } m_y = m_0 \sqrt{Q_{yy}}$$

Imidlertid hefter det seg den mangel ved koordinatmiddelfeilene at de bare gir uttrykk for usikkerheten i koordinatakseretningene. Full oversikt over nøyaktigheten av en punktbestemmelse forutsetter kjennskap til middelfeilen i alle mulige retninger, og det skaffer vi oss ved den såkalte feilellipse.

2.6.3. Feilellipsen.

Vi setter oss nå til oppgave å undersøke nøyaktigheten av punktbestemmelsen for samtlige retninger horisonten rundt, hvilket oppnås med utgangspunkt i funksjonsforbindelsen (se fig. 9)

$$D^2 = (y - y_p)^2 + (x - x_p)^2$$

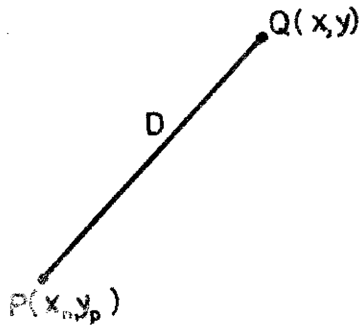


Fig. 9

hvor (x_p, y_p) er koordinatene til det punkt hvis nøyaktighet skal undersøkes, mens (x,y) er koordinatene til et variabelt hjelpepunkt Q, som her har karakteren av en matematisk parameter, og som sådan ikke feilbeheftet.

Vi forutsetter så at punktet P er beheftet med koordinatfeilene dx_p og dy_p og finner den tilsvarende forfalskning av avstanden D ved differensiasjon

$$2DdD = 2(y-y_p)(-dy_p) + 2(x-x_p)(-dx_p)$$

dvs. $$dD = -\frac{y-y_p}{D} dy_p - \frac{x-x_p}{D} dx_p = - \sin \varphi \; dy_p - \cos \varphi \; dx_p$$

hvor φ er retningsvinkelen i P for linjen mellom P og Q. Vi kommer over til middelfeilen på D ved her å erstatte differensialene med symbolske vektskoeffisienter (hvorfor må den utvidede feilforplantningslov nyttes her?)

$$Q_{DD} = (-\sin \varphi \; Q_y - \cos \varphi \; Q_x)^2 = \sin^2\varphi \; Q_{yy} + \cos^2\varphi \; Q_{xx} + \sin 2\varphi \; Q_{xy}$$

videre

$$M^2(\varphi) = m_o^2 \; (Q_{yy}\sin^2\varphi + Q_{xx}\cos^2\varphi + Q_{xy} \; \sin 2\varphi)$$

hvor altså $M(\varphi)$ er middelfeilen til punktet P i retningen φ. Ved å la φ anta alle mulige verdier mellom 0 og 400^g vil den siste ligning fremstille usikkerheten i punktbestemmelsen hele horisonten rundt.

En nærmere analyse av en ligning i polarkoordinater av den generelle form

$$r^2 = a \; \sin^2\varphi + b \; \cos^2\varphi + c \; \sin 2\varphi$$

hvor a, b og c er gitte konstanter, viser at r fremstiller en såkalt fotpunktkurve til en ellipse. Navnet fotpunktkurve skriver seg fra at kurven er det geometriske sted for fotpunktene til samtlige perpendikulærer fra vedkommende ellipses sentrum ned på ellipsens tangent. Fig. 10 viser konstruksjonen av fotpunktkurven når ellipsen er gitt. Det til ellipsepunktet P' svarende punkt P" på fotpunktkurven finnes ved i P' å trekke tangenten til ellipsen og nedfelle en perpendikulær på denne tangent fra ellipsens sentrum C. Den stiplede kurven forestiller forpunktkurven. Den minner om en ellipse, men har en mer rektangulær form enn denne.

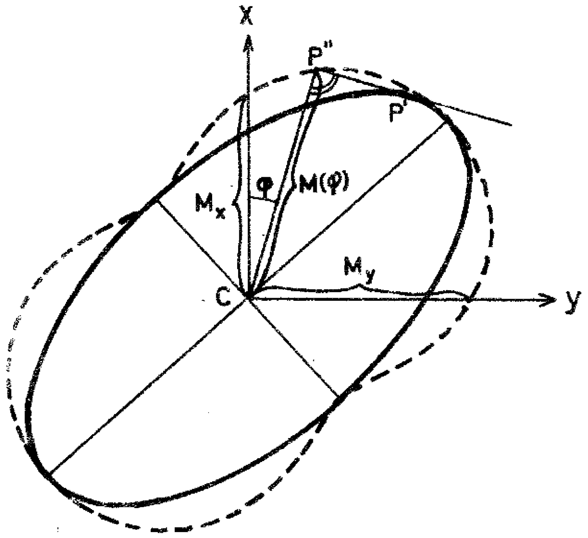


Fig. 10

Av det som er sagt foran, følger at i ligningen

$$M^2(\varphi) = m_o^2 (Q_{yy} \sin^2\varphi + Q_{xx} \cos^2\varphi + Q_{xy} \sin 2\varphi)$$

fremstiller $M(\varphi)$ en fotpunktkurve til en ellipse. Denne ellipse går under navn av feilellipse. Punktbestemmelsens middelfeil i en vilkårlig retning er lik radius vektor til feilellipsens fotpunktkurve (se fig. 10).

Av fig. 10 ser vi at ekstremalverdiene til $M(\varphi)$ faller sammen med aksene til feilellipsen, og vi setter oss nå til oppgave å bestemme disse ekstremalverdier, eller om vi vil, å bestemme feilellipsens akser m.h.t. størrelse og retning. Oppgaven løses på vanlig måte ved derivering av $M(\varphi)$ med hensyn på φ og sette differensialkvotienten lik null

$$\frac{dM^2(\varphi)}{d\varphi} = m_o^2 \ (2 \sin\varphi \cos\varphi \ Q_{yy} - 2 \cos\varphi \sin\varphi \ Q_{xx} + 2 \cos 2\varphi \ Q_{xy}) = 0$$

dvs. $$m_o^2 \ (\sin 2\varphi \ Q_{yy} - \sin 2\varphi \ Q_{xx} + 2 \cos 2\varphi \ Q_{xy}) = 0$$

som resulterer i $$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}}$$

hvor altså φ representerer retningsvinkelen til feilellipsens akser. Ligningen er oppfylt for to verdier av φ som er 100^g forskjellig, dvs. de to ekstremalretninger står vinkelrett på hverandre.

Når det gjelder å avgjøre kvadrantspørsmålet, kommer de samme fortegnsregler til anvendelse som tidligere ved utregningen av en retningsvinkel gitt ved $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Den verdi for φ som vi kommer frem til ved å praktisere nevnte fortegnsregel, gir oss retningsvinkelen til feilellipsens store akse.

Vi skal så utlede ekstremalverdiene som altså her blir identiske med feilellipsens halvakser. Den verdi av φ som svarer til maksimumsretningen, kaller vi α. Minimumsverdien faller følgelig i retningen $100^g + \alpha$, med andre ord

$$\text{Maks.:} \quad M^2(\varphi) = m_o^2 \ (Q_{xx}\cos^2\alpha + Q_{yy}\sin^2\alpha + Q_{xy}\sin 2\alpha) = A^2$$

$$\text{Min.:} \quad M^2(\varphi) = m_o^2 \ (Q_{xx}\sin^2\alpha + Q_{yy}\cos^2\alpha - Q_{xy}\sin 2\alpha) = B^2$$

Vi har altså innført betegnelsene A og B for halvaksene til feilellipsen. Substituerer vi i disse uttrykkene de trigonometriske funksjoner ved hjelp av den tidligere utledede relasjon

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \ Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}} \text{, får vi}$$

$$\left.\begin{aligned} A^2 &= \tfrac{1}{2}(Q_{xx} + Q_{yy} + k)m_o^2 \\ B^2 &= \tfrac{1}{2}(Q_{xx} + Q_{yy} - k)m_o^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{hvor } k = \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4 \ Q_{xy}^2}$$

Ellipsen med halvakser A og B går under navnet av den midlere feilellipse. Det lar seg bevise at feilellipsen er invariabel med hensyn til aksesystemets orientering, dvs. den influeres ikke av en dreining av aksesystemet.

Når feilellipsen er kjent, kan vi utlede punktets middelfeil i vilkårlige retninger. Fig. 11 viser hvordan vi kommer frem til middelfeilen i retningen φ. Det skjer ved å trekke en perpendikulær på vedkommende retning, som samtidig skal være tangent til feilellipsen. Avstanden mellom ellipsens sentrum og fotpunktet til denne perpendikulæren er lik punktets middelfeil i den betraktede retning.

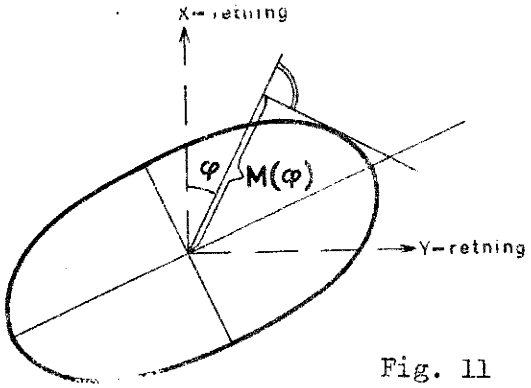


Fig. 11

Som vi skjønner, representerer feilellipsen et indirekte nøyaktighetsmål. Fotpunktkurven til den midlere feilellipse derimot gir eksplisitt uttrykk for punktets middelfeil i de forskjellige retninger, idet punktets middelfeil i en bestemt retning er lik lengden av fotpunktkurvens radius vektor i samme retning.

Vi går tilbake til uttrykkene for feilellipsens akser

$$A^2 = m_0^2(Q_{xx}\cos^2\alpha + Q_{yy}\sin^2\alpha + Q_{xy}\sin 2\alpha)$$

$$B^2 = m_0^2(Q_{xx}\sin^2\alpha + Q_{yy}\cos^2\alpha + Q_{xy}\sin 2\alpha)$$

Vi summerer disse ligningene og får

$$A^2 + B^2 = m_0^2(Q_{xx} + Q_{yy}) = m_x^2 + m_y^2$$

Da $A^2 + B^2$ er konstant, uttrykker altså denne ligning at summen av $m_x^2 + m_y^2$ er konstant. Ettersom aksesystemets orientering er mer eller mindre vilkårlig valgt, kan vi følgelig trekke den slutning at for hvilke som helst to retninger som står vinkelrett på hverandre, vil summen av kvadratene til middelfeilene i de to retningene være konstant, nemlig lik summen av kvadratene til feilellipsens halvakser.

En nærmere undersøkelse over spørsmålet om sannsynligheten for at punktets sanne posisjon skal falle innenfor den midlere feilellipse med sentrum i punktets beregnede posisjon, gir til resultat verdien 0,39347.

Videre lar det seg vise at feilellipsekurven (det samme gjelder for alle ellipser likedannet med feilellipsen) representerer det geometriske sted for punkter med samme posisjonssannsynlighet.

Foruten den midlere feilellipse har en også innført den sannsynlige feilellipse, som er karakterisert ved at sannsynligheten for at punktet skal befinne seg innenfor denne, er like stor som sannsynligheten for at punktet skal falle utenfor, nemlig lik 0,5 i begge tilfeller. Den sannsynlige feilellipse er likedannet med den midlere feilellipse, men dens dimensjoner er øket i forholdet 1 : 1,17741.

I det spesielle tilfelle at $Q_{xx} = Q_{yy}$ og dessuten at $Q_{xy} = 0$, blir

$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{0}{0}$, altså ubestemt, og videre blir A = B. Feilellipsen har i dette spesielle tilfelle antatt sirkelform, og den tilhørende fotpunktkurve faller sammen med denne sirkelen. At feilellipsen antar sirkelform, betyr følgelig at punktet blir bestemt med samme nøyaktighet i samtlige retninger, og det er selvsagt meget fordelaktig, og bør tilstrebes ved planleggingen av den trigonometriske punktbestemmelse.

2.6.4. Punktbestemmelsens nøyaktighet uttrykt ved en enkelt størrelse.

Feilellipsen, og enda mer fotpunktkurven, er temmelig "arbeidskrevende" nøyaktighetsmål. Det har derfor i praksis meldt seg behov for enklere nøyaktighetsmål, og helst slike som ved en enkelt størrelse formår å uttrykke et nypunkts nøyaktighet under ett (mer eller mindre dekkende).

2.6.4.1. Den midlere usikkerhet.

Dette nøyaktighetsmål, som betegnes med R, har umiddelbar tilknytning til feilellipsens fotpunktkurve, idet R fremkommer som kvadratisk middelverdi av fotpunktkurvens radius vektor hele horisonten rundt. Som tidligere vist, er fotpunktkurvens ligning i polarkoordinater

$$r^2 = m_o^2(Q_{xx}\cos^2\varphi + Q_{yy}\sin^2\varphi + Q_{xy}\sin 2\varphi)$$

Den kvadratiske middelverdi av r er følgelig gitt ved

$$R^2 = \frac{\int_o^{2\pi} r^2\, d\varphi}{\int_o^{2\pi} d\varphi} = \frac{\pi(m_x^2 + m_y^2)}{2\pi} = \tfrac{1}{2}(m_x^2 + m_y^2)$$

(R kan også interpreteres på en annen måte, nemlig som radius i den sirkelen som omslutter samme areal som fotpunktkurven.)

2.6.4.2. Punktmiddelfeilen.

Vi har hittil befattet oss med punktnøyaktigheten som funksjon av retningsvinkelen. Imidlertid er det mulig å ta et annet utgangspunkt og spørre etter nøyaktigheten av nypunktet i betydning av avstand mellom korrekt og faktisk punktbeliggenhet (uttrykt som middelfeil) uten å bekymre seg om i hvilke retning grunnrissfeilen befinner seg i.

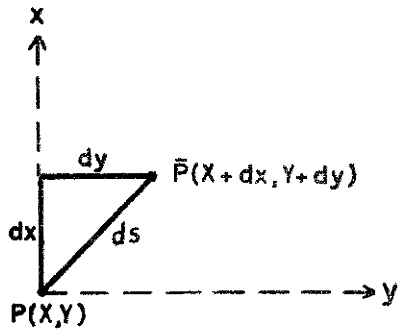


Fig. 12

I fig. 12 forestiller P den beliggenhet av nypunktet som vi er kommet frem til ved utjevningen, mens $\bar{P}$ er punktets korrekte posisjon. Da vi behandlet nøyaktighetsundersøkelsen i forbindelse med elementutjevning, viste vi at det var mulig å skrive elementene som lineære funksjoner av de observerte størrelser (se side 18). Det består følgelig en lineær funksjonsforbindelse mellom nypunktets utjevnede koordinater og observasjonsmaterialet som punktbestemmelsen baserer seg på, av formen

$$x = \alpha_1 o_1 + \alpha_2 o_2 + \ldots\ldots + \alpha_n o_n$$

$$y = \beta_1 o_1 + \beta_2 o_2 + \ldots\ldots + \beta_n o_n$$

hvor α og β er visse koeffisienter (som blir funksjoner av punktbestemmelsens geometri) o_1, o_2, ..., o_n er de observerte størrelser, mens x og y er de verdier for punktets koordinater som utjevningen gir. Ved å innføre observasjonenes sanne feil ε_1, ε_2, ...,ε_n finner vi punktets sanne koordinatfeil dx og dy

$$dx = \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \ldots. + \alpha_n \varepsilon_n, \text{ dvs.}^{*)}\ m_x^2 = [\alpha\alpha] m^2$$

$$dy = \beta_1 \varepsilon_1 + \beta_2 \varepsilon_2 + \ldots. + \beta_n \varepsilon_n, \text{ dvs.}^{*)}\ m_y^2 = [\beta\beta] m^2$$

Videre får vi:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (\alpha_1^2+\beta_1^2)\varepsilon_1^2 + (\alpha_2^2+\beta_2^2)\varepsilon_2^2 + \ldots + (\alpha_n^2+\beta_n^2)\varepsilon_n^2 + 2(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2)\varepsilon_1\varepsilon_2 + \ldots.$$

hvor altså ds er avstanden mellom punktets feilaktige og korrekte posisjon. Vi tenker oss så at punktbestemmelsen gjentas i alt N ganger og får når $N \to \infty$

$$M^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{[ds^2]}{N} = (\alpha_1^2+\beta_1^2)m_1^2 + (\alpha_2^2+\beta_2^2)m_2^2 + \ldots. + (\alpha_n^2+\beta_n^2)m_n^2$$

idet alle dobbeltproduktleddene har grenseverdien null når $N \to \infty$. Vi forutsetter nå at alle observasjoner er like nøyaktige og får

$$M^2 = [\alpha\alpha]m^2 + [\beta\beta]m^2 = m_x^2 + m_y^2$$

Punktmiddelfeilen er den enkeltstørrelse som best karakteriserer nøyaktigheten av en punktbestemmelse under ett, fordi den umiddelbart gir uttrykk for punktets grunnrissmiddelfeil i betydning av avstand mellom feilaktig og korrekt beliggenhet.

Relasjonen mellom midlere usikkerhet og punktmiddelfeil er gitt ved

---

*) under forutsetning av like nøyaktige målinger

$$M^2 = m_x^2 + m_y^2 = 2R^2$$

Ved bruk av M og R må en ha klart for seg den prinsipielle forskjell mellom dem. M som refererer seg til avstanden mellom feilaktig og korrekt punktposisjon, er et retningsuavhengig nøyaktighetsmål, mens R derimot er retningsbundet. Overalt hvor det er spørsmål om et punkts grunnrissnøyaktighet som sådan, skal punktmiddelfeilen nyttes. Er det derimot spørsmål om nøyaktighet i en bestemt retning, kommer den midlere usikkerhet inn i bildet. Vi skal belyse problemet med et eksempel. Vi tenker oss at et nypunkt blir bestemt trigonometrisk, i alt foretas N bestemmelser (N→∞). For hver enkelt punktbestemmelse måles avstanden ds mellom korrekt og aktuell posisjon (se fig. 13, hvor $\bar{P}$ forestiller punktets korrekte og P dets "observerte" posisjon). Det er da klart at vi kommer frem til punktmiddelfeilen ved å "realisere" uttrykket

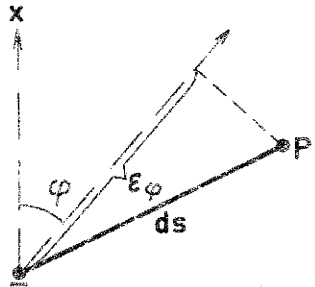


Fig. 13

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{\frac{\Sigma ds^2}{N}} = M = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$$

Tenker vi oss derimot fastholdt en bestemt retning, f.eks. $\varphi = 30^g$, og for hver enkelt punktbestemmelse utmåler punktets feil i denne retning, som blir lik grunnrissfeilens komponent i den bestraktede retning, m.a.o. størrelsen ε_φ i fig. 13, og "realiserer" uttrykket

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{\frac{\Sigma \varepsilon_\varphi^2}{N}}$$

så er det punktets middelfeil i retningen φ som vi kommer frem til, dvs. størrelsen M(φ), eller om en vil: lengden av radius vektor til fotpunktkurven i retningen φ. (Ved mer tilnærmede nøyaktighetsvurderinger vil det her være tillatt å erstatte M(φ) med den midlere usikkerhet R.)

Foranstående eksempel skulle klart vise den innholdsmessige betydning av og likeså anvendelsesområdet for M og R.

NB! Det er viktig å ha klart for seg at samtlige behandlede nøyaktighetsmål bygger på forutsetningen om feilfrie grunnlagspunkter, dvs. ingen av dem tar hensyn til eller formår å uttrykke virkningen av feil som skyldes at denne forutsetning ikke er oppfylt. Følgelig gir de uttrykk for relativ nøyaktighet i forhold til fastpunktgruppen (sistnevnte kollektivt oppfattet).

2.7. Avvikende behandling av satsserier i grunnlagspunkter.

I grunnlagspunkter hvor det er observert i det minste én fastpunktretning, består den mulighet å foreta en preliminær bestemmelse av satsseriens orienteringsvinkel. Derved oppnås å få overført vedkommende satsserie til den typen som ble behandlet under punkt 2.3.2. (Feilligningssystemer som skriver seg fra satsserier med kjent orienteringsvinkel.) Utledningen av orienteringsvinkelen foretas i et orienteringsregister i samsvar med den tidligere utledede formel

$$z = \frac{[\varphi - r]}{q}$$

hvor φ og r refererer seg til *fastpunktretningene* og q er lik antallet av samme.

Vi har dermed overført satsserien, som egentlig sogner til punkt 2.3.1. (Feilligningssystemer som skriver seg fra satsserier med ukjent orienteringsvinkel) til pkt. 2.3.2. Ved å gå frem på denne måten oppnår vi en viss arbeidsbesparelse, idet antall elementer reduseres. Imidlertid må vi være klar over at fremgangsmåten ikke er helt i samsvar med "ånden" i m.h.m. Det vi her har foretatt er nemlig en partiell utjevning. Bestemmelsen av z er i samsvar med m.k.m. når vi ser på denne bestemmelse isolert. Imidlertid er det bestemmelsen av punktsystemet i sin helhet som i det foreliggende tilfelle representerer selve utjevningsproblemet. *En korrekt behandling av en utjevningsoppgave etter m.k.m. forutsetter at kvadratsummen av korreksjonene til samtlige observasjoner som inngår i utjevningen, skal gjøres til minimum samtidig.* Ved partielle utjevninger som den vi nettopp har behandlet, gjør vi først kvadratsummen til en del av korreksjonene til minimum og deretter kvadratsummen til de resterende observasjoner til minimum. I de aller fleste tilfeller vil ikke sluttresultatet av to eller flere partielle utjevningen falle sammen med resultatet av en samlet utjevning. Som tidligere omtalt (se Schreibers 2. regel, side 71), vil det bare inntreffe i rent spesielle tilfeller, f.eks. når de størrelser som inngår i en utjevning, er middeltall av flere enkeltmålinger. Det er da tillatt å innføre middeltallet av enkeltmålingene i utjevningen og gjøre kvadratsummen av korreksjonene til disse middeltall til minimum. Vi vil da oppnå samme resultat som om vi hadde innført enkeltmålingene av vedkommende størrelse i utjevningen. At det må være slik følger av Schreibers 2. regel. Det samme forhold har vi ved stasjonsutjevning etter satsmetoden og ved vinkelmåling i alle kombinasjoner, hvor det også er tillatt å foreta stasjonsutjevningen og utjevningen av punktsystemet atskilt fra hverandre, og likevel oppnå et sluttresultat som vil være identisk med resultatet av en samlet utjevning.

Bortsett fra det tilfelle at det i et fastpunkt *bare inngår én nypunktretning*, vil preliminær bestemmelse av orienteringsvinkler innebære et brudd med den strenge behandling av problemet, og bør bare brukes for stasjoner hvor det forekommer et større antall grunnlagsretninger, eller når det dreier seg om mindre viktige stasjoner.

Unntakstilfellet er altså at det i et fastpunkt inngår bare en enkelt nypunktretning. Det lar seg da vise at preliminær orientering på basis av fastpunktretningene betinger samme resultat som fremgangsmåten med innføring av orienteringselement under selve punktutjevningen. Den preliminære orientering innebærer at hele feilligningssystemet fra et slikt fastpunkt kan erstattes av en enkelt feilligning av formen

$v_i = a_i x + b_i y + \{(\varphi_i^\circ - r_i) - \hat{z}\}$ med vekten $\frac{q}{q+1}$, hvor $\hat{z}$ altså utledes ved den ordinære orienteringsprosedyre (basert på fastpunktretningene, hvis antall er lik q).

2.8. Behandling av flere satsserier i samme stasjon.

Dersom det i en stasjon forekommer et større antall retninger, bør observasjonsarbeidet fordeles på flere satsserier. I praksis bør en helst ikke ta mer enn i høyden 6 - 7 objekter i hver satsserie. Ellers vil målingen av hver enkelt sats ta for lang tid, slik at det kan være tvilsomt om forutsetningen om at instrumentet holder seg i ro under målingen, er oppfylt med tilstrekkelig tilnærmelse. Det melder seg så spørsmål om hvordan slike satsserier skal behandles under utjevningen. Det vanligste er å innrette seg på den måten at en velger én eller flere fellesretninger som går igjen i samtlige satsserier. Ved hjelp av denne eller disse fellesretningene er det mulig å føye sammen alle enkeltserier til en enkelt satsserie, som behandles videre på vanlig måte. Imidlertid må vi være oppmerksom på at også denne fremgangsmåten bryter med ånden i m.k.m. Den strengt riktige behandling av problemet består i å trekke enkeltseriene atskilt inn i utjevningen, idet vi innfører et orienteringselement for hver enkelt satsserie. Denne fremgangsmåten bør derfor nyttes for de overordnede stasjoner i nettet. For mindre viktige stasjoner derimot kan det være tilstrekkelig å trekke sammen de forskjellige satsserier til en enkelt sats ved hjelp av fellesretningen(e) og innføre bare ett eneste orienteringselement for den sammendradde satsen.

2.9. Oversikt over koordinatutjevning.

Gangen i regningen blir som følger:

1. Beregningen av tilnærmede koordinater for nypunktene. Det er av betydning av de provisoriske koordinater avviker så lite fra de endelige at koordinatforbedringene blir små størrelser. Den provisoriske bestemmelse av punktenes koordinater bør derfor baseres på sentrerte retninger og gunstige skjæringsvinkler.

2. Beregning av de provisoriske retningsvinkler mellom alle punkter som det er foretatt retningsobservasjoner mellom.

3. Beregning av retningskoeffisientene til alle sider som inneholder nypunkter. Som enheter er det i alminnelighet hensiktsmessig å operere med cm og sek.

4. Innføring i skjema for koordinatutjevning av retningskoeffisientene i kolonnene 3 - 12, retningsvinkler i kolonne 13 og observerte retninger i kolonne 15. Fortegnene til retningskoeffisientene bestemmes ved hjelp av koordinatutjevningsskjemaets kvadrantoversikter. Uttrykkene framskjærings- og tilbakeskjæringskoeffisienter er slik å forstå:

Tilbakeskjæringskoeffisientene står til koordinatelementene til stasjonspunktet for vedkommende retningsobservasjon, mens framskjæringskoeffisientene står til det tilsiktede punkts koordinatelementer.

5. Utledning av provisorisk orienteringsvinkel i kolonne 16 for alle satsserier med ukjent orienteringsvinkel: $z^\circ = \frac{[\varphi - r]}{n}$, hvor φ-ene omfatter samtlige retningsvinkler før utjevningen (både de gitte og de provisoriske).

6. Utledning av feilligningenes konstantledd som er lik differensen mellom z° og de enkelte φ-r i kolonne 16: $f = (\varphi - r) - z^\circ$ for satsserier med ukjent orienteringsvinkel, og $f = \varphi^\circ - \varphi_{obs}$ for satsserier med kjent orienteringsvinkel.

7. Innføring av Δ-ligninger for alle satsserier med ukjent orienteringsvinkel. Koeffisientene til disse Δ-ligninger er lik summen av de tilhørende feilligningskoeffisienter. Δ-ligningene har vekten $-\frac{1}{n}$, hvor n er det totale antall retninger som inngår i utjevningen fra vedkommende satsserie.

8. Omforming av Δ-ligningene slik at de får vekten - 1. Det skjer ved hjelp av multiplikatoren q som er oppstilt i tabell på skjemaet for koordinatutjevning. De opprinnelige Δ-ligninger strykes ut og de omformede Δ-ligninger samles for seg selv.

9. Danning og oppløsning av normalligningssystemet med summekontroll, hvorved de endelige verdier for nypunktenes koordinater fås

$$\hat{x} = x^\circ + x \quad , \quad \hat{y} = y^\circ + y$$

10. Beregning av de endelige retningsvinkler for samtlige sider som inneholder nypunkter.

11. Innføring av de endelige retningsvinkler i kolonne 14. Deretter regnes de endelige orienteringsvinkler ut i kolonne 17

$$\hat{z} = \frac{[\hat{\varphi} - r]}{n}$$

12 .Deretter regnes v-ene ut som differensen mellom endelig orienteringsvinkel og de enkelte $\hat{\varphi} - r$ i kolonne 17, dvs. $v = (\hat{\varphi} - r) - \hat{z}$ for satsserier med ukjent orienteringsvinkel og $v = \hat{\varphi} - \varphi_{obs}$. for satsserier med kjent orienteringsvinkel. Disse v-ene, som altså er utledet av observasjonsligningene, føres i koordinatutjevningsskjemaets kolonne for v.

13. Danning av feilkvadratsummen av v-ene utledet under 12. Denne feilkvadratsummen skal stemme overens innenfor regnenøyaktigheten med samme utledet ved oppløsningen av normalligningssystemet.

14. Dersom denne kontroll ikke stemmer, må korreksjonene også utregnes på grunnlag av feilligningene. For satsserier med kjent orienteringsvinkel er v-ene gitt ved

$$v = ax + by + \ldots\ldots + f$$

For satsserier med ukjent orienteringsvinkel has

$$v = v' + \frac{\Delta}{n} \quad , \quad \text{hvor } v' = ax + by + \ldots\ldots + f$$

Disse v-ene, som altså er utregnet på grunnlag av feilligningene, føres inn i koordinatutjevningsskjemaets v'-kolonne. Brukes preliminær eliminasjon av orienteringselementene etter den Gaussiske metode, er v-ene gitt ved

$$v = Ax + By + \ldots\ldots + F$$

15. Deretter følger de forskjellige slags nøyaktighetsundersøkelser. Det kan foruten utregning av observasjonsnøyaktigheten også bli spørsmål om middelfeilen på elementene, punktmiddelfeilen(e) og feilellipsen(e).

3. Nettutjevning.

I det foregående har vi behandlet utjevning av trigonometriske punktsystemer ved elementutjevning, men det er ingen ting i veien for å foreta utjevningen som korrelatutjevning, og vi bruker da betegnelsen nettutjevning.

Som overalt ellers når det dreier seg om korrelatutjevning, blir oppstillingen av betingelsesligningene selve krumtappen i utjevningsprosedyren. I det etterfølgende blir derfor betingelsesligningene ved nettutjevning, deres antall, oppstilling og hvilke geometriske betingelser de gir uttrykk for, gjort til gjenstand for en inngående drøfting.

3.1. Betingelsesligningene ved nettutjevning.

Ved nettutjevning opptrer 3 hovedtyper av betingelsesligninger, nemlig

1. Vinkelligninger
    1.1. Stasjonsligninger
    1.2. Vinkelsumsligninger

2. Sideligninger eller sinusligninger
    2.1. De egentlige sideligninger.
    2.2. Basisligninger
3. Polygonligninger

Vi skal så gå nærmere inn på de enkelte typer av betingelsesligninger.

3.1.1. Stasjonsligninger.

Betegnelsen stasjonsligning henger sammen med at betingelsesligningen har sitt utspring i overbestemmelser i de enkelte stasjoner. Vi skal belyse denne betingelsesligningstype ved 3 eksempler.

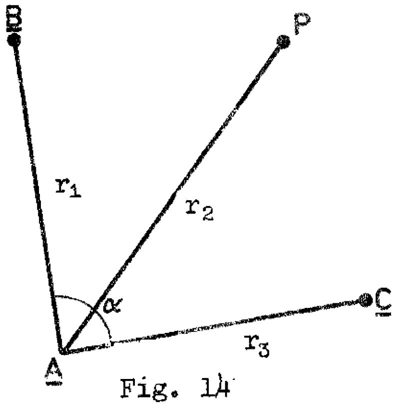


Fig. 14

1. I fig. 14 er A, B og C fastpunkter. Følgelig er vinkelen α gitt. Observasjonene r_1 og r_3 må derfor oppfylle følgende betingelsesligning

$$r_3 - r_1 = \alpha$$

2. Det andre tilfellet omfatter horisontslutning når observasjonene utføres som vinkelmåling. Av fig. 15 ser vi at vi kan stille opp følgende betingelsesligning

$$o_1 + o_2 + o_3 + o_4 = 400^g$$

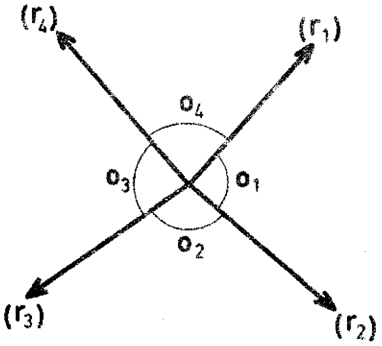


Fig. 15

Dersom vi i stedet har målt de fire retningen r_1, ..., r_4 og utledet vinklene på grunnlag av disse, faller denne betingelsesligning bor idet summen av vinklene horisonten rundt da alltid vil være 400^g. At det må være slik, ka vi vise på følgende måte:

$$\underbrace{\{r_2 - r_1\}}_{o_1} + \underbrace{\{r_3 - r_2\}}_{o_2} + \underbrace{\{r_4 - r_3\}}_{o_3} + \underbrace{\{(400^g + r_1) - r_4\}}_{o_4} = 40$$

dvs. ligningen vil alltid være oppfylt uten hensyn til om observasjonene er beheftet med feil eller ikke.

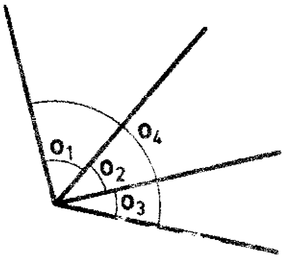


Fig. 16

3. Til slutt tar vi det tilfelle som inntreffer ved vinkelmåling dersom vi i en stasjon har målt overskytende vinkler, som følgelig kan utledes indirekte som sum av eller differens mellom andre målte vinkler. På grunnlag av observasjonene i fig. 16 kan vi stille opp betingelsesligningen

$$o_1 + o_2 + o_3 = o_4$$

3.1.2. Vinkelsumsligninger.

Vinkelsumsligninger oppstår når vi måler alle vinklene i en lukket polygon. I den plane geometri gjelder at summen av de innvendige vinkler i en polygon, bestående av n punkter, skal være lik (n-2)2R. Den vanligst forekommende polygon i landmålingen for oppstilling av vinkelsumsligninger,er selvsagt trekanten. For plane trekanter antar vinkelsumsbetingelsen formen

$$o_1 + o_2 + o_3 = 200^g$$

og for sfæriske trekanter

$$o_1 + o_2 + o_3 = 200^g + \text{sfærisk overskudd.}$$

3.1.3. Sideligninger eller sinusligninger.

Mens vinkelsumsligningene tar sikte på en korrigering av observasjonsmaterialet slik at polygonene får korrekt vinkelsum, har sideligningene til "misjon" å bringe alle stråler som inngår i bestemmelsen av et punkt, til å skjære hverandre i ett og samme punkt. Den siste fordringen kan også formuleres på følgende måte: Sideligningene bringer til uttrykk den betingelse at en triangelside som kan beregnes ad flere veier, skal få samme verdi i alle tilfeller.Vi skiller mellom to typer av sideligninger, nemlig

3.1.3.1. De egentlige sideligninger.

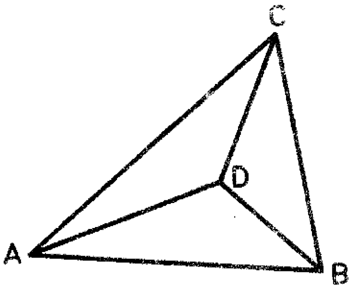


Fig. 17

Disse oppstår når det er mulig ut fra en side i nettet å regne seg frem til samme side ved å gå gjennom et større eller mindre antall trekanter. Fig. 17 viser et eksempel på hvordan en slik sideligning oppstår. Ved f.eks. å gå ut fra siden AD kan vi i trianglet ACD regne oss frem til CD, videre i trianglet BCD til BD, og endelig i trianglet ABD tilbake til AD. Sideligningen uttrykker så den geometriske betingelse at vi da skal komme tilbake til utgangsverdien.

3.1.3.2. Basisligninger.

Slike ligninger oppstår når det foreligger minst to kjente sider i nettet. Basisligningen uttrykker den betingelse at vi ved å gå ut fra den ene kjente sidelengde og regne oss gjennom nettet til den andre, skal komme frem til den sistes gitte verdi. Fig. 18 viser et eksempel på en basisligning. Punktene A, B og C er fastpunkter, følgelig er S_{AB} og S_{AC} gitte. Ved sukssesiv anvendelse av sinusproporsjonen er det mulig med utgangspunkt i S_{AB} å regne seg frem til S_{AC}, og basisligningen gir uttrykk for betingelsen at vi da skal komme frem til den gitte verdi for S_{AC}. Et annet eksempel på basisligning har vi når det i nettet foreligger målt to eller flere atskilte basislengder. Prinsippet for oppstillingen av basisligningen blir også i dette tilfelle det samme som i foregående eksempel: Ved å regne oss ut fra den ene basisside frem til en av de andre, skal vi komme frem til den sistes gitte verdi.

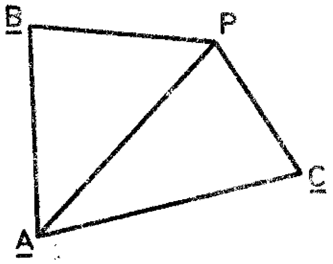


Fig. 18

Vi skal senere behandle de såkalte polygonligninger.

3.2. Det totale antall betingelsesligninger.

Det totale antall betingelsesligninger ved nettutjevning finnes lettest ved å tenke seg oppgaven løst ved koordinatutjevning. Antall overskytende målinger er da lik n-e, hvor n er det totale antall observasjoner og e det totale antall elementer. Når det dreier seg om retningsmålinger, vil e bestå av koordinatelementer og orienteringselementer. Antall koordinatelementer er lik det dobbelte antall nypunkter, og antall orienteringselementer er lik det totale antall stasjonspunkter. Betegner vi antall nypunkter med p og antall stasjonspunkter med s, blir antall overskytende målinger, som igjen er lik antall betingelsesligninger, følgelig gitt ved

$$r = n - 2p - s$$

Dersom de observerte størrelser er vinkler istedenfor retninger, faller orienteringselementene vekk, og antall betingelsesligninger blir

$$r = n - 2p$$

For å avgjøre hvordan det totale antall betingels sligninger fordeler seg på vinkelsums- og sideligninger brukes en regel som er oppstilt av Bessel og som derfor går under navn av Bessels regel.

3.3. Bessels regel.

Når vi skal praktisere Bessels regel, går vi frem på følgende måte: Vi setter først av de kjente punkter. Antall betingelsesligninger som følge av denne transaksjonen er lik null. Deretter avsettes punktsystemet punkt for punkt, idet punktene forbindes med de allerede avsatte punkter etter hvert som de avsettes med helt eller halvt opptrukne linjer, avhengig av om det dreier seg om gjensidige eller ensidige retninger. Bessels regel utsier da:

Vinkelsumsligningenes antall er for hvert avsatt punkt lik antall helt opptrukne linjer minus én, og antall sideligninger er lik antall av helt og halvt opptrukne linjer minus to. (Dersom subtrahenden blir mindre enn subtraktor, skal resultatet settes lik null.)

Dersom det dreier seg om et fritt nett, dvs. et nett som ikke inneholder kjente punkter, skal vi likevel begynne med å sette av som kjente punkter det minimale antall punkter som er nødvendig for den geometriske bestemmelse av systemet, nemlig to punkter.

Dersom nettet inneholder to eller flere grupper av kjente punkter som ikke er direkte forbundet med helt eller halvt opptrukne linjer, skal som kjent utgangsfigur nyttes bare én av gruppene.

Ved å bruke Bessels regel får vi med alle betingelsesligninger i nettet bortsett fra eventuelle stasjonsligninger i utgangsfiguren. Heller ikke fås med de betingelsesligninger som eventuelle kjente størrelser i nettet utenfor utgangsfiguren betinger. Opptrer det utenfor utgangsfiguren en kjent side, betinger det en basisligning. En kjent vinkel utenfor utgangsfiguren betinger en stasjonsligning, mens et koordinatbestemt punkt utenfor utgangsfiguren betinger to polygonligninger.

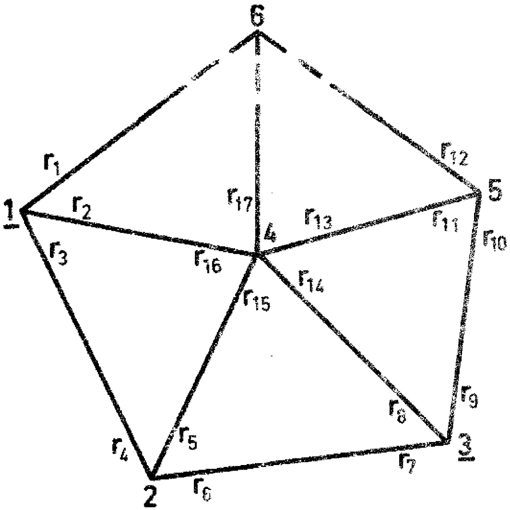


Fig. 19

Vi skal praktisere Bessels regel på nettet i fig. 19. Punktene 1, 2 og 3 er fastpunkter, mens 4, 5 og 6 er nypunkter. Til bestemmelse av nypunktene er det foretatt de i figuren antydede 17 retningsobservasjoner. Bestemmelsen av antall bestingelsesligninger foregår i følgende skjema:

pkt.	helt opptrukne linjer	helt og halvt opptrukne linjer	antall vinkelsumsligń.	antall sidelign.
1,2,3	-	-	0	0
4	3	3	2	1
5	2	2	1	0
6	0	3	0	1
		Sum:	3	2

Vi setter først av fastpunktene 1, 2 og 3 som ikke gir opphav til noen betingelsesligning. Deretter avsettes pkt. 4, hvorved delnettet i fig. 20 oppstår. Etter skjemaet fås derved 2 vinkelsumsligninger og én sideligning. Når vi skal anvende Bessels regel, er det viktig å ha klart for seg at de ligninger som konstateres etter hvert som nettet bygges opp, refererer seg til den del av nettet som er avsatt til enhver tid.

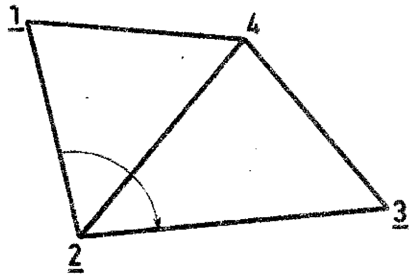


fig. 20

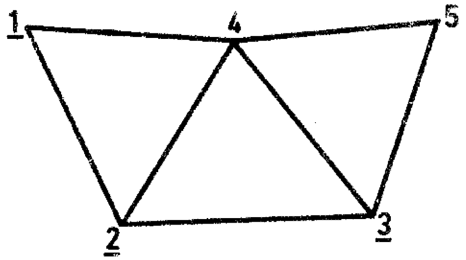


fig. 21

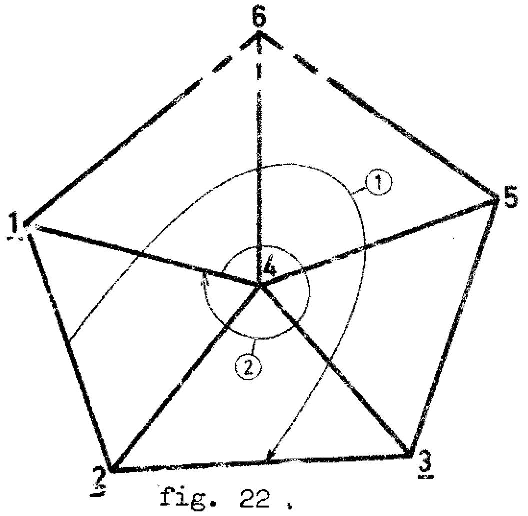


fig. 22 .

I delnettet i fig. 20 skal vi altså ha to vinkelsums- og én sideligning. Vinkelsumsligningene kan utformes på den måten at vi forlanger at trekantene 1,2,4 og 2,3,4 skal ha korrekte vinkelsummer. Sideligningen får her karakteren av en basisligning, som uttrykker den betingelse at en ved å gå utfra S_{21} og beregne seg frem til S_{23} , skal komme frem til den siste sides kjente verdi.

Vi setter så av pkt. 5, hvorved nettet antar den formen som fig. 21 viser. Ifølge skjemaet betinger avsettingen av pkt. 5 en ny vinkelsumsligning, som får sin enkleste utforming ved å stille opp fordringen om at trekanten 3,4,5 skal ha korrekt vinkelsum.

Vi setter så til slutt av pkt. 6, hvorved nettet blir komplett (se fig. 22). Derved oppstår ifølge skjemaet én sideligning. Denne kan utformes på to måter. nemlig enten som basisligning eller som ekte sideligning. Vi kan nemlig gå ut fra S_{21} og regne oss frem til den kjente siden S_{23} ved å velge "løype" ① , eller vi kan stille opp den fordring at en sentrallinje, f.eks. S_{14}, skal resultere i sin egen verdi når vi regner oss rundt figuren med 4 som sentralpunkt (løype (2) i fig.22). Den første betingelse resulterer i en basisligning og den siste i en ekte sideligning (vanligvis er sideligninger å foretrekke fremfor basisligninger).

I foreliggende tilfelle har altså Bessels regel ført til i alt 5 betingelsesligninger. Det melder seg så det spørsmål om nettet kan inneholde betingelsesligninger som ikke Bessels regel har "fått med seg". Ved å bruke den tidligere oppstile formel for det totale antalle overbestemmelser finner vi

$$r = n - 2\,p - s = 17 - 2\cdot 3 - 5 = 6$$

Nettet i fig. 19 inneholder med andre ord i alt 6 betingelsesligninger. Som tidligere nevnt, overser Bessels regel eventuelle stasjonsligninger i utgangsfiguren. I foreliggende tilfelle har Bessels regel ikke fått med stasjonsligningen

$$r_6 - r_4 = \angle 123$$

3.4. Oppstilling av sideligninger.

Som det fremgår av Bessels regel, vil sideligningene oppstå i enkle standardfigurer. Den langt vanligste standardfigur for oppstilling av sideligninger (og for den saks skyld også vinkelsumsligninger) er diagonalfirkanten, som derfor blir viet spesiell oppmerksomhet i det etterfølgende.

Ved bruk av Bessels regel på diagonalfirkanten i fig. 23 finner vi

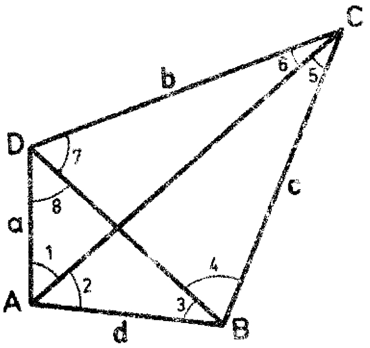


fig. 23

Pkt.	helt	helt og halvt	v	s
A,B	0	0	0	0
C	2	2	1	0
D	3	3	2	1
		sum:	3	1

Vinkelsumsligningene stilles enklest opp ved å forlange at 3 av de 4 mulige trekanter skal ha korrekt vinkelsum. De kan også utformes på den måten at vi forlanger at hele firkanten og to av trekantene skal ha korrekt vinkelsum. I siste tilfelle består imidlertid den fare at vi kan komme i skade for å stille opp betingelsesligninger som er lineært avhengig av hverandre. Det vil fremgå av følgende eksempel

1. betingelseslign. i ΔABC: $2 + 3 + 4 + 5 = 200^g$
2. " i ΔADC: $1 + 6 + 7 + 8 = 200^g$
3. " i ABCD: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 400^g$

Dette system av betingelsesligninger er ikke brukbart, idet den 3. ligningen ikke er noe annet enn summen av de to andre. Ligningene er med andre ord lineært avhengig av hverandre. Et uavhengig system av betingelsesligninger oppnår vi ved å bytte ut den 3. ligning med en vinkelsumsligning i ΔBCD eller ΔABD. Bortsett fra faren for å få et lineært avhengig ligningssystem når en bruker firkantligninger, taler også det til fordel for trekantligninger at de siste inneholder færre ledd. I det hele tatt bør en overalt ved oppstilling av betingelsesligninger ta sikte på å gi dem en slik utforming at antall ledd blir minst mulig. Det medfører nemlig en betydelig arbeidsmessig besparelse.

Sideligningen i diagonalfirkanten kan stilles opp på flere måter. Vi kan f.eks. gå ut fra siden a og regne oss via b, c og d tilbake til a, og skal da komme tilbake til a's utgangsverdi. Denne betingelse kan uttrykkes ved følgende identitetsligning

$$\frac{a}{b}\frac{b}{c}\frac{c}{d}\frac{d}{a} = 1$$

Vi fører her de observerte vinkler inn ifølge sinusproporsjonen og får sidebetingelsesligningen

$$\frac{\sin 6 \sin 4 \sin 2 \sin 8}{\sin 1 \sin 7 \sin 5 \sin 3} = 1$$

*

Vi skal så vise at det er mulig å oppstille ovenstående sidebetingelsesligning (og alle mulige andre som kan oppstilles såvel i diagonalfirkanten som i en hvilken som helst annen figur) rent mekanisk. "Krumtappen" i de mekaniske regler som det hele bygger på, er begrepet sentralpunkt, som er det fellespunkt som inngår i samtlige trekanter som sinusproporsjonen anvendes på etter tur for å få uttrykt sidebetingelsen (sentralpunktets hosliggende trekantvinkler vil følgelig ikke inngå i sideligningen). Når først sentralpunktet er valgt, skjer oppstillingen av sideligningen etter følgende regler (se fig. 24 hvor C er det valgte sentralpunkt): Vi går ut fra sentrallinjen lengst til venstre, her linjen C-1 og dreier om sentralpunktet i positiv retning til neste sentrallinje, hvor vi gjør en stans. Vi skriver så opp i telleren til sidebetingelsesligningen sinus til den trekantvinkelen som befinner seg ved enden av den sentrallinjen som vi stanset ved, og i nevneren føres opp sinus til den trekantvinkelen som befinner seg ved enden av utgangssentrallinjen. I foreliggende tilfelle gir altså trekanten 1,2,C følgende bidrag til sidebetingelsesligningen

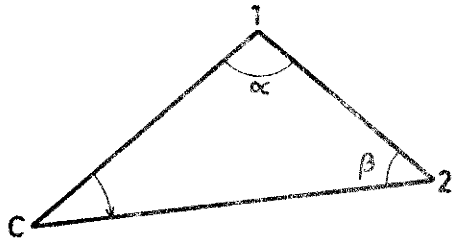


fig. 24

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

På samme måte fortsettes videre i positiv omløpsretning til vi kommer tilbake til utgangsstillingen, hvoretter brøken settes lik én.

Vi skal praktisere regelen om sentralpunkt på nettet i fig. 25. Vi velger diagonalenes skjæringspunkt C til sentralpunkt, og begynner f.eks. med

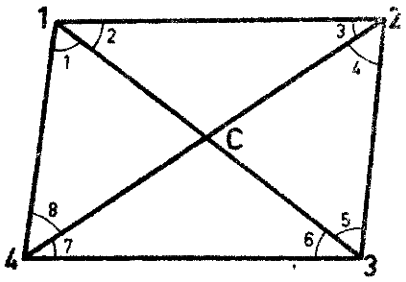


fig. 25

sentrallinjen C-1 og dreier til C-2, som resulterer i $\frac{\sin 3}{\sin 2}$, derfra til C-3 som gir $\frac{\sin 5}{\sin 4}$, derfra til C-4 som gir $\frac{\sin 7}{\sin 6}$ og endelig tilbake til C-1 som resulterer i $\frac{\sin 1}{\sin 8}$. I alt får vi sidebetingelsesligningen

$$\frac{\sin 1 \sin 3 \sin 5 \sin 7}{\sin 2 \sin 4 \sin 6 \sin 8} = 1$$

som blir den form som sidebetingelsen antar når diagonalenes skjæringspunkt velges til sentralpunkt. Imidlertid består også den mulighet å velge et av de 4 hjørnepunktene i diagonafirkanten til sentralpunkt. Vi skal vise hvilken form betingelsesligningen antar dersom vi velger punkt 1 til sentralpunkt. Vi kommer frem til denne ved å gå ut fra identitetsligningen

$$\frac{S_{12}\ S_{13}\ S_{14}}{S_{13}\ S_{14}\ S_{12}} = 1 \ , \quad \text{dvs.} \quad \frac{\sin 5 \sin(7+8) \sin 3}{\sin(3+4) \sin 6 \sin 8} = 1$$

Vi kan også stille denne ligning opp rent mekanisk ved å nytte de tidligere angitte regler for oppstilling av sidebetingelsesligninger ved bruk av sentralpunkt.

På tilsvarende måte kan også de andre 3 hjørnepunktene i diagonalfirkanten nyttes til sentralpunkt. De betingelsesligninger som vi får ved å nytte et av firkantpunktene til sentralpunkt, stiller seg gunstigere regneteknisk sett enn den ligningen som fås når diagonalenes skjæringspunkt nyttes til sentralpunkt. Det henger sammen med at de første resulterer i ligninger med 6 ledd, mens den siste vil inneholde 8 ledd. I praksis foretrekkes derfor ett av diagonalfirkantens hjørnepunkter til sentralpunkt.

Det spørsmål melder seg så om det er likegyldig hvilke av de 4 hjørnepunkter som velges til sentralpunkt. En nærmere undersøkelse over dette spørsmål gir til resultat at det sentralpunkt er å foretrekke som betinger de spisseste vinkler i sideligningen. Det henger sammen med at sinus til en vinkel er mer følsom overfor endringer i vinkelen jo spissere den er. Som kvantitativt mål for et punkts "skikkethet" som sentralpunkt kan nyttes størrelsen av arealet til den trekant som de 3 andre hjørnepunkter i diagonalfirkanten danner. Jo større dette arealet er, jo gunstigere er vedkommende punkt som sentralpunkt. Til sentralpunkt skal altså velges det hjørnepunkt, hvis "motstående" trekant har det største areal.

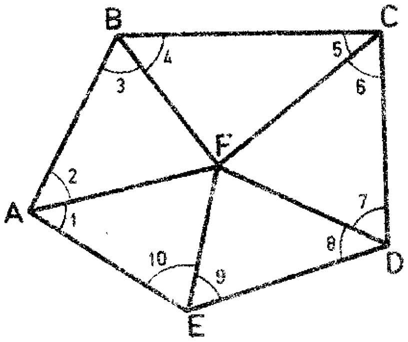


Fig. 26

I en vilkårlig mangekant uten diagonalforbindelser, som fig. 26 viser et eksempel på, stilles sidebetingelsesligningen opp ved å velge det indre punkt til sentralpunkt. Sideligningen i fig. 26 får formen

$$\frac{\sin 1 \;\; \sin 3 \; \sin 5 \; \sin 7 \; \sin 9}{\sin 2 \; \sin 4 \; \sin 6 \; \sin 8 \; \sin 10} = 1$$

3.5. Linearisering av sideligninger.

Det ligger i sakens natur at sideligningene (såvel de egentlige sideligninger som basisligningene) vil være ikke-lineære, og må følgelig bringes på lineær form. Det består to hovedmuligheter for denne linearisering, nemlig en logaritmisk og en analytisk (numerisk).

3.5.1. Logaritmisk linearisering.

Dette er den metode som,ihvertfall hittil, har vært den langt vanligste for linearisering av sideligninger. Vi skal demonstrere metoden med utgangspunkt i følgende sideligning

$$\frac{\sin 1 \; \sin 3 \; \sin 5}{\sin 2 \; \sin 4 \; \sin 6} = 1$$

Vi logaritmiserer ligningen og innfører samtidig korreksjoner til observasjonene

$$\log\sin(1+v_1)+\log\sin(3+v_3)+\log\sin(5+v_5)-\log\sin(2+v_2)-\log\sin(4+v_4)-\log\sin(6+v_6)=0$$

Vi kommer over til lineær form ved hjelp av log.tabellens differenser, som betegnes med d. For log sin $(1+v_1)$ f.eks. fås

$$\log \sin (1+v_1) = \log \sin 1 + d_1 \cdot v_1$$

Talleks.: for $1 = 28{,}6744^g$ fås log sin $(1+v_1) = 9{,}638829 + 1{,}41 v_1^{cc}$, hvor altså 1,41 er log.tabellens differens for ett sekund, uttrykt i enheter av logaritmens 6. desimal.

Her er det av spesiell betydning å være oppmerksom på nødvendigheten av konsekvent bruk av enheter. Nyttes f.eks. 10^{cc} som enhet for korreksjonene, må d være lik differensen til log sin for 10^{cc}. Likeledes må d og betingelsesligningens konstantledd stemme overens m.h.t. enheter.

Ved å fortsette på samme måte fås den lineariserte sidebetingelsesligning (T = teller, N = nevner)

$$+ d_1v_1 - d_2v_2 + d_3v_3 - d_4v_4 + d_5v_5 - d_6v_6 + \underbrace{(\log T - \log N)}_{w} = 0$$

Nedenfor gis et fullstendig eks. på linearisering av sidebetingelsesligninger. Originalligningen lyder (observasjonene foreligger i form av retningsmålinger)

$$\frac{\sin (9-8) \sin (6-4) \sin (12-11)}{\sin (12-10) \sin (8-7) \sin (5-4)} = 1$$

Teller

$$\log \sin (63{,}4843 + v_9 - v_8) = 9{,}924259 + 0{,}44(v_9 - v_8)$$

$$\log \sin (97{,}2654 + v_6 - v_4) = 9{,}999599 + 0{,}03(v_6 - v_4)$$

$$\log \sin (34{,}3600 + v_{12} - v_{11}) = \underline{9{,}710879} + 1{,}14(v_{12} - v_{11})$$

$$29{,}634737$$

Nevner

$$\log \sin (103{,}3605 + v_{12} - v_{10}) = 9{,}999395 - 0{,}04\ (v_{12} - v_{10})$$

$$\log \sin (\ 34{,}2013 + v_8 - v_7) = 9{,}709067 + 1{,}14\ (v_8 - v_7)$$

$$\log \sin (\ 63{,}9496 + v_5 - v_4\ ) = \underline{9{,}926293} + 0{,}44\ (v_5 - v_4)$$

$$29{,}634755$$

Ved sammentrekning og ordning av leddene fås den lineariserte betingelsesligning

$$+0{,}41v_4 - 0{,}44v_5 + 0{,}03v_6 + 1{,}14v_7 - 1{,}58v_8 + 0{,}44v_9 - 0{,}04v_{10} - 1{,}14v_{11} + 1{,}18v_{12} - 18 = 0$$

Foruten den her brukte metode til bestemmelse av koeffisientene i den lineariserte betingelsesligning, altså ved hjelp av log.tabellens diffenser, som er den uten sammenligning mest brukte fremgangsmåte, består også den mulighet å utlede koefisientene i sideligningen analytisk. Metoden baserer seg på en Taylor-utvikling av log sin (o+v)

$$\log \sin (o+v) = \log \sin o + \mu \frac{\cos o}{\sin o} v = \log \sin o + \frac{\mu}{\rho} \operatorname{cotg} o\ \hat{v}$$

hvor μ er modulus i det Briggske logaritmesystemet (μ=log e = 0,4343). I formelen må det selvsagt være samsvar mellom enhetene til v og ρ. Videre må sideligningskoef. og konstantleddene samsvare i enheter. Nyttes en q-sifret log.-tabell, oppnås det ved å multiplisere koef. med 10^q. Det fullstendige uttrykk for sidebetingelsesligningskoef. blir følgelig

$$D = \frac{\mu}{\varrho} 10^{q} \text{ cotg } o$$

I eksemplet foran med $o = 28,6744^g$ og 6-sifret regning fås

$$D = \frac{0,4343}{636620} 10^{6} \cdot 2,0680 = 1,411$$

Denne metode for utregning av koef. i sidebetingelseslign. er nøyaktigere enn metoden med log.tabellens differenser.

3.5.2. Analytisk (numerisk)linearisering.

Det dreier seg her om en direkte metode, som baserer seg på en Taylor-utvikling av den opprinnelige sidebetingelsesligning (altså uten logaritmisering).Til demonstrasjon av metoden tas utgangspunkt i sideligningen (i det siste uttrykket er utjevningskorr. innført)

$$\underbrace{\frac{\sin o_1 \sin o_3 \sin o_5}{\sin o_2 \sin o_4 \sin o_6}}_{y} = 1, \text{ dvs. } \quad \frac{\sin(o_1+v_1) \sin(o_3+v_3) \sin(o_5+v_5)}{\sin(o_2+v_2) \sin(o_4+v_4) \sin(o_6+v_6)} = 1$$

Det siste uttrykket utvikles etter Taylor, hvorved fås

$$\frac{\sin o_1 \sin o_3 \sin o_5}{\sin o_2 \sin o_4 \sin o_6} + a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 + a_5 v_5 + a_6 v_6 = 1$$

hvor v-ene opptrer i absolutt vinkelmål. Problemet knytter seg til koef. foran v-ene. For a_1 f.eks. fås

$$a_1 = \frac{\partial y}{\partial o_1} = \frac{\sin o_3 \sin o_5}{\sin o_2 \sin o_4 \sin o_6} \cos o_1$$

som ved multiplisering med $\frac{\sin o_1}{\sin o_1}$ går over til

$$a_1 = \text{cotg } o_1$$

Tilsvarende uttrykk fås for de andre a-ene, bare med den forskjell at nevnerkoeffisientene blir negative. Den lineariserte betingelsesligning antar følgelig formen (v-ene i gradmål)

$$\text{ctg } o_1 v_1 - \text{ctg } o_2 v_2 + \text{ctg } o_3 v_3 - \text{ctg } o_4 v_4 + \text{ctg } o_5 v_5 - \text{ctg } o_6 v_6 + \varrho \underbrace{\left(\frac{\sin o_1 \sin o_3 \sin o_5}{\sin o_2 \sin o_4 \sin o_6} - 1\right)}_{W} = 0$$

3.6. Polygonligninger.

Ved nettutjevning kan det også forekomme en 3. type av betingelsesligninger, nemlig de såkalte polygonligninger. Polygonligninger opptrer i kranssystemer og dessuten i systemer som inneholder koordinatbestemte punktter utenom den fastpunktfiguren som representerer utgangsfiguren når en skal nytte Bessels regel. I første tilfelle kommer polygonligningene med ved bruk av Bessels regel, i siste tilfelle derimot ikke. Kransen i fig. 27 inneholder 12 fullmålte trekanter bestemt ved vinkelmåling. Følgelig blir antall målte vinkler lik: n=12·3=36. Når vi skal bruke den generelle formel for det totale antall overbestemmelser, må i det foreliggende tilfelle to av punktene betraktes som fastpunkter, dvs.

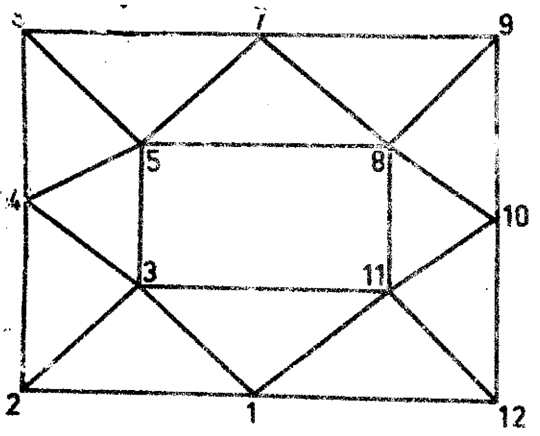


Fig. 27

$$r = 36 - 2 \cdot 10 = 16$$

Ved å bruke Bessels regel på kransfiguren finner vi 13 vinkelsumsligninger og 3 sidebetingelsesligninger. Av de 13 vinkelsumsligninger gir de 12 uttrykk for at de 12 trekantene skal ha korrekt vinkelsum. Av de 3 sideligningene gir den ene uttrykk for at ved å gå ut fra en side i kransen og beregne seg frem til samme ved å gå rundt kransen, skal en komme tilbake til utgangsverdien. De resterende 3 ligninger (én vinkelsumsligning og 2 sideligninger) er de såkalte polygonligninger. Disse forlanger at et polygondrag sammensatt av sider i kranssystemet, som legges rundt kransen, skal lukke seg uten gap. Dette polygondrag inneholder på samme måte som et vanlig polygondrag, én vinkelsums- og 2 koordinatligninger. Koordinatligningene får formen

$$[S \sin \varphi] = o \quad \text{og} \quad [S \cos \varphi] = o$$

Vinkelsumsligningen utformes enklest ved å knytte den til den betingelse at den polygon som det valgte polygondrag danner, skal ha en gitt vinkelsum, nemlig $(n-2)200^g$ for innvendige vinkler og $(n+2)200^g$ for utvendige vinkler.

For oppstillingen av polygonligningene må vi altså velge ut et polygondrag rundt kransen, og velger da selvsagt det som inneholder minst mulig sider, dvs. vi velger den indre "løype", altså draget 3 - 5 - 8 - 11 i fig. 27.

Foruten i kranssystemet opptrer også polygonligninger når det forekommer koordinatbestemte punkter utenom utgangsfiguren. Fig. 28 forestiller en triangelrekke mellom pkt. A, B og C, D som alle er koordinatbestemte punkter.

Ved bruk av Bessels regel finner vi

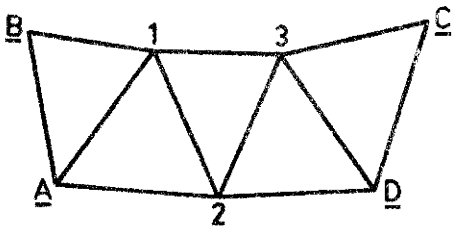


Fig. 28

Pkt.	Helt opptrukne linjer	Antall vinkelsumslign.	Antall sidelign.
A,B	o	o	o
1	2	1	o
2	2	1	o
3	2	1	o
D	2	1	o
C	2	1	o

Som tidligere nevnt, betinger et koordinatbestemt punkt utenom utgangsfiguren, som her er pkt. A og B, 2 polygonligninger. Vi får altså her i alt 5 vinkelsumsligninger og 4 polygonligninger. Det samme resultat gir også formelen for det totale antall betingelsesligninger

$$r = 22 - 2 \cdot 3 - 7 = 9$$

Vinkelsumsligningene utformes enklest ved å forlange at alle 5 trekantene skal ha korrekt vinkelsum. De 4 polygonligninger kan utformes på ulike måter. Den vanligste måte er å disponere en av dem i form av en basisligning (som uttrykker betingelsen at ved å gå ut fra S_{AB} og regne seg gjennom rekken til S_{CD}, skal en komme frem til den siste sides gitte verdi), mens de tre resterende uttrykkes på tilsvarende måte som i "kranstilfellet". En velger altså også her et polygondrag som forbinder de to fastpunktgrupper (i foreliggende tilfelle er det gunstigst å velge A-2-D). Vinkelsumsligningen får her karakteren av en retningsvinkelligning, som uttrykker betingelsen at ved å gå ut fra φ_{AB} og regne seg frem til φ_{DC}, skal en komme frem til sistes gitte verdi. Dessuten fås to koordinatbetingelsesligninger av formen

$$x_A + [S \cos \varphi] = x_D$$

$$y_A + [S \sin \varphi] = y_D$$

Polygonligninger er atskillig mer komplisert og fremfor alt mer arbeidskrevende enn de vanlige vinkelsumsligninger og sideligninger. I de fleste tilfeller hvor polygonligninger kommer på tale, vil det derfor være mer fordelaktig å foreta en koordinatutjevning istedenfor nettutjevning.

3.7. Avvikende behandling av stasjonsligninger ved nettutjevning.

Vi har hittil forutsatt at stasjonsligningene skal trekkes inn i utjevningen og behandles på samme måte som de øvrige betingelsesligninger, og det er også denne fremgangsmåten som er i overenestemmelse med "ånden" i minste kvadraters metode. Imidlertid øker arbeidsmengden ved en utjevning sterkt med antall normalligninger, som ved korrelatutjevning er identisk med antall betingelsesligninger. (I praksis regner en med at arbeidsmengden ved en utjevning øker med kvadratet av antall normalligninger.) En redusering av antall betingelsesligninger vil derfor innebære en betydelig arbeidsbesparelse, og det er nettopp det som tilsiktes ved den forenklede (men altså tilnærmede) fremgangsmåte, som har fått stor utbredelse i praksis, og som består i at stasjonsbetingelsene underkastes en preliminær stasjonsutjevning. Derved oppnås at stasjonsligningene faller bort under selve hovedutjevningen. Vi skal belyse fremgangsmåten med et eksempel.

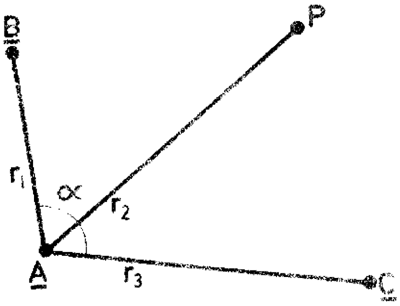


Fig. 29

I fig. 29 er punktene A, B og C fastpunkter, følgelig er vinkelen α gitt, og stasjonsligningen i A får formen

$$(r_3 + v_3) - (r_1 + v_1) = \alpha$$

dvs. $- v_1 + v_3 + \underbrace{(r_3 - r_1 - \alpha)}_{w} = 0$

Vi foretar så en preliminær stasjonsutjevning, dvs. vi behandler stasjonsligningen separat etter m.k.m. og får, idet vi forutsetter at r_1 og r_3 er lik nøyaktige

$$|v_3| = |v_1| = \frac{w}{2}$$

dvs. hver av retningene som omslutter vinkelen α, skal tillegges en korreksjon lik halvparten av motsigelsen i stasjonsligningen. De verdier for r_1 og r_3 som vi kommer frem til ved denne stasjonsutjevning, fastholdes så under selve nettutjevningen. For ∠BAP f.eks. innføres under hovedutjevningen verdien

$$r_2 + v_2 - \hat{r}_1$$

hvor altså $\hat{r}_1$ er den stasjonsutjevnede verdi for r_1.

Denne fremgangsmåten som er diktert av praktiske hensyn, representerer altså en tilnærmelsesløsning. Den strengt riktige behandling av en nettutjevningsoppgave forutsetter at samtlige betingelsesligninger, altså også stasjonsligningene, underkastes en samlet behandling.

3.8. Feilellipsen ved nettutjevning.

Fra teorien for feilellipsen husker vi at den blir bestemt både med hensyn til dimensjoner og orientering ved vektskoeffisientene Q_{xx}, Q_{yy} og Q_{xy}.

Vi skal i det etterfølgende vise hvordan disse vektskoeffisientene kan utledes ved nettutjevning, idet vi bygger på teorien for utledning av middelfeilen på en funksjon av utjevnede størrelser ved korrelatutjevning. Vi tenker oss koordinatene til det utjevnede punkt uttrykt som funksjoner av de utjevnede målinger

$$x = \varphi_1(o_1 + v_1 \;,\; o_2 + v_2 \;,\; \ldots\ldots \;,\; o_n + v_n).$$

$$\varphi_1(o_1 \;,\; o_2 \;,\; \ldots ,\; o_n) + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \ldots\ldots + t_n v_n$$

og
$$y = \varphi_2(o_1 + v_1 \;,\; o_2 + v_2 \;,\; \ldots\ldots \;,\; o_n + v_n)$$

$$= \varphi_2(o_1 \;,\; o_2 \;,\; \ldots ,\; o_n) + t_1' v_1 + t_2' v_2 + \ldots\ldots t_n' v_n$$

hvor altså $t_i = \frac{\partial x}{\partial o_i}$ og $t'_i = \frac{\partial y}{\partial o_i}$

Av den generelle teori for nøyaktighetsundersøkelser ved korrelatutjevning følger at vektskoeffisientene til x og y er gitt ved

$$Q_{xx} = \left[\frac{tt}{p}\right] - \frac{\left[\frac{at}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{bt}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]} - \ldots\ldots$$

$$Q_{yy} = \left[\frac{t't'}{p}\right] - \frac{\left[\frac{at'}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{bt'}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]} - \ldots\ldots$$

Videre lar det seg vise at den ikke-kvadratiske vektskoeffisient Q_{xy} er gitt ved

$$Q_{xy} = \left[\frac{tt'}{p}\right] - \frac{\left[\frac{at}{p}\right]\left[\frac{at'}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{bt}{p}\cdot 1\right]\left[\frac{bt'}{p}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]} - \ldots\ldots$$

Disse vektskoeffisienter utledes mest hensiktsmessig i tilknytning til oppløsningen av normalligningssystemet. Deretter beregnes feilellipsen på grunnlag av de formlene som tidligere ble utledet under koordinatutjevning.

4. Utjevning av linjetriangulering (trilaterasjon).

Ved trilaterasjon er det avstandene mellom punktene i nettet som måles. Utjevningen kan foretas enten som korrelatutjevning eller som elementutjevning. Den siste utjevningsart er som regel å foretrekke selv om antall normalligninger ved elementutjevning vanligvis blir større enn ved korrelatutjevning. Når elementutjevning likevel er å foretrekke, så skyldes det at feilligningene ved elementutjevning av trilaterasjon blir ganske enkle å stille opp, mens betingelsesligningene ved korrelatutjevning derimot blir meget kompliserte og arbeidskrevende.

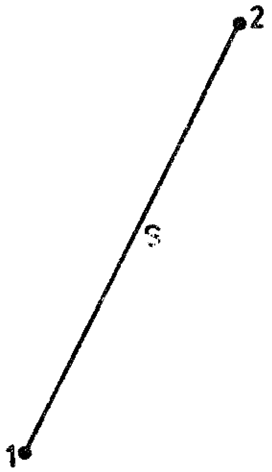


Fig. 30

Fig. 30 forestiller 2 vilkårlige punkter i trilaterasjonsnettet, som vi har målt avstanden mellom. Fundamentalligningen blir

$$S^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Vi forutsetter at vi har skaffet oss provisoriske verdier for koordinatene til de to punktene $(x_1^\circ, y_1^\circ, x_2^\circ, y_2^\circ)$, som ved utjevningstilleggene dx_1, dy_2, osv. overføres til de endelige, utjevnede verdier, dvs.

$$\hat{x}_1 = x_1^\circ + dx_1 \quad , \quad \hat{y}_1 = y_1^\circ + dy_1 \text{, osv.}$$

Forflytningen av linjens endepunkter ($x^\circ \rightarrow \hat{x}$ og $y^\circ \rightarrow \hat{y}$) betinger en endring i S som finnes ved implisitt differensiasjon av uttrykket for S^2

$$2S\ dS = 2\Delta x\ dx_2 - 2\Delta x\ dx_1 + 2\Delta y\ dy_2 - 2\Delta y\ dy_1$$

dvs. $$dS = \cos \varphi_{12}\ dx_2 - \cos \varphi_{12}\ dx_1 + \sin \varphi_{12}\ dy_2 - \sin \varphi_{12}\ dy_1$$

Oppstillingen av feilligningene skjer med utgangspunkt i den generelle observasjonsligning ved trilaterasjon

$$S_{obs} + v = \hat{S} = S^\circ + dS$$

dvs. $$v = dS + S^\circ - S_{obs}$$

Ved her å innføre uttrykket for dS som ble utledet ovenfor, fås feilligningen

$$v = -\cos \varphi_{12}\ dx_1 - \sin \varphi_{12}\ dy_1 + \cos \varphi_{12}\ dx_2 + \sin \varphi_{12}\ dy_2 + \underbrace{(S^\circ - S_{obs})}_{f}$$

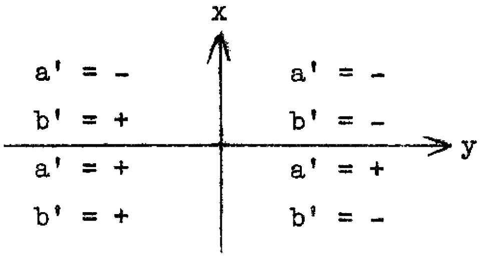
$$= a'\ dx_1 + b'\ dy_1 + a\ dx_2 + b\ dy_2 + f$$

Størrelsene a og b går under navn av <u>sidekoeffisienter</u>. Koeffisientene foran dx_1 og dy_1 betegnes som <u>begynnelsespunktets sidekoeffisienter</u> og skrives a' og b', mens koeffisientene foran dx_2 og dy_2 betegnes som <u>endepunktets sidekoeffisienter</u> og skrives a og b. (På samme måte som ved koordinatutjevning, pleier en også her å sløyfe d-betegnelsen foran utjevningstilleggene til koordinatelementene, og nytte skrivemåten x_i , y_i.)

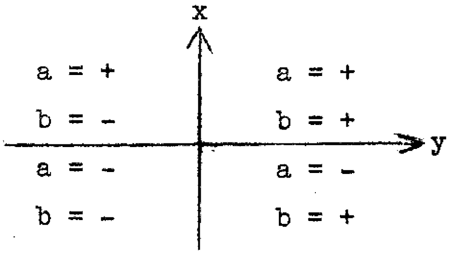
Vi legger merke til at begynnelses- og endepunktets koeffisienter er like i tallverdi, men har motsatt fortegn.

Fortegnene til sidekoeffisientene bestemmes sikrest ved hjelp av følgende kvadrantskjemaer:

Begynnelsespunktets koef.



Endepunktets koef.



Fremgangsmåten blir altså først å beregne $|a|$ og $|b|$:

$$|a| = |\cos \varphi| \quad \text{og} \quad |b| = |\sin \varphi|$$

dvs. uten å bry seg om koeffisientenes fortegn. Til slutt fastsettes så fortegnene ved hjelp av kvadrantskjemaene.

Den utledede ligning for v, som blir den generelle feilligning ved trilaterasjon, må stilles opp for samtlige observerte avstander. I feilligningene vil leddene med dx_1 og dy_1 eller dx_2 og dy_2 falle bort dersom enten pkt. 1 eller 2 er et fastpunkt

Hva beregningen av provisoriske koordinater for nypunktene angår, foretas denne enklest ved å utlede de nødvendige trekantvinkler ved hjelp av cosinussetningen. I fig. 31 er A og B fastpunkter og P et nypunkt. Videre er S_1 og S_2 målte størrelser. Vi bestemmer først vinkelen α ved hjelp av cosinussetningen

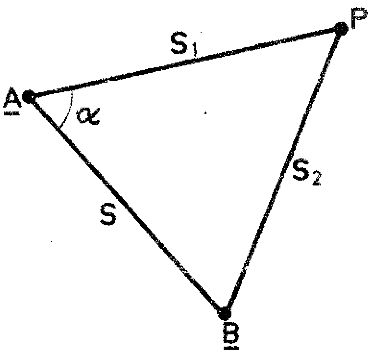


Fig. 31

$$S_2^2 = S^2 + S_1^2 - 2S\ S_1 \cos \alpha$$

$$\text{herav} \quad \cos \alpha = \frac{S^2 + S_1^2 - S_2^2}{2S\ S_1}$$

Deretter utledes $\varphi_{AP} = \varphi_{AB} - \alpha$. Dermed kjenner vi polarkoordinatene til P i forhold til pkt. A (S_1 og φ_{AP}) og kan følgelig beregne de rettvinklede koordinater

$$\Delta x = S_1 \cos \varphi_{AP}$$

$$\Delta y = S_1 \sin \varphi_{AP}$$

Kontroll på riktigheten av utjevningen fås som vanlig ved den såkalte sluttkontroll, som består i å beregne utjevningskorreksjonene av relasjonen

$$v = \hat{S} - S_{obs}$$

hvor $\hat{S}$ skal beregnes på grunnlag av de utjevnede koordinater, og deretter undersøke om kvadratsummen av disse v-ene stemmer med den tilsvarende verdi utledet ved oppløsningen av N.L.-systemet.