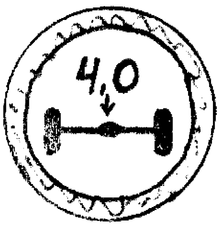
MATEMATISK VEIVISER FOR FOTGJENGERE

ved

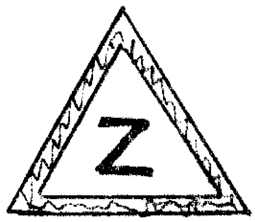
Per Nyborg og Erik Plahte

Institutt for matematiske fag
NLH

Vollebekk 1970



MATEMATISK VEIVISER FOR FOTGJENGERE



ved

Per Nyborg og Erik Plahte

Institutt for matematiske fag
NLH

Vollebekk 1970

Forord

Hensikten med disse notatene er å gi en oversikt over viktige matematiske begreper og metoder, samt å gjøre et forsøk på å vise hvordan disse inngår i oppstilling og løsning av problemer i anvendte fag.

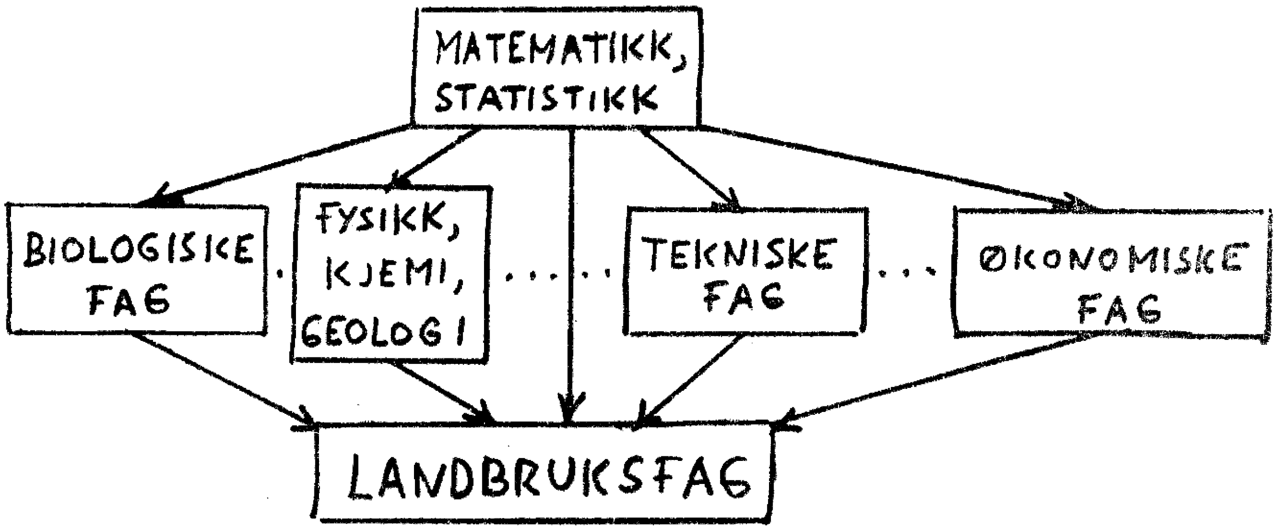
Notatene er ufullstendige og antageligvis delvis upresise og erstatter ikke læreboka, som forutsettes å være "Matematisk analyse I" av Knut Sydsæter.
For eksempler og øvingsoppgaver henvises til "Calculus" (including 1175 solved problems) av Frank Ayres.

INNHOLD

I INNLEDNING

Kunnskap og metoder fra naturfag, teknikk og økonomi spiller en stadig større rolle i forskning og undervisning innenfor landbruksfagene.

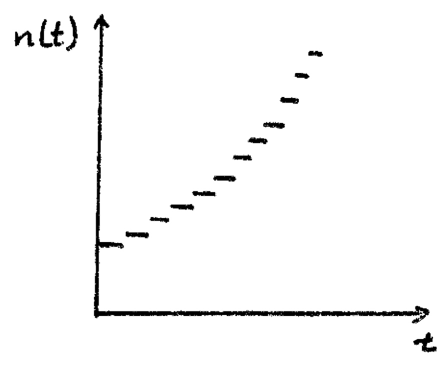
Etterhvert som undervisningen ved Norges landbrukshøgskole har blitt mindre deskriptiv og mer preget av prinsipper, metoder og teorier, har matematikk og statistikk blitt viktige elementer i mange av de anvendte fagene ved høgskolen. Disse grunnfagene har derfor, direkte og indirekte, fått stadig større betydning.



Matematikken er nødvendig i anvendte fag for presis formulering, for oppstilling av hypoteser, for etablering og kontroll av teorier, for generaliseringer.

Vi skal umiddelbart se på et eksempel. Dette eksemplet vil indikere at for å kunne nytte matematikken i anvendte fag, må vi ha full forståelse av de viktigste matematiske begrepene samt kunnskap om og trening i bruk av matematiske metoder.

Eksempel: Vekst av en bakteriekultur

Beskrivelse	Kommentarer
Siden bakteriene formerer seg ved deling, er det rimelig å forutsette at antall nye bakterier som dannes i et lite tidsintervall er proporsjonalt med det antall bakterier vi da har i bakteriekulturen: $\frac{\Delta n}{\Delta t} = kn$	Vi er interessert i å finne ut (forutsi) hvordan bakterieantallet n forandrer seg (øker) med tiden, $n(t)$? Vi må visst repetere hva vi mener med en <u>funksjon</u>. Vi har tydeligvis forutsatt at n ikke avhenger av andre størrelser enn t?
n står for antall bakterier, Δn er tilveksten til n i tidsintervallet Δt, k er en konstant.	n og Δn er heltallige, <u>diagrammet</u> (grafen) av $n(t)$ må se ut noe slik: 
Setter vi $\Delta n = 1$, ser vi at $\Delta t = \frac{1}{kn}$ og vi kan f.eks. finne at tiden det tar for bakterieantallet å øke fra 1000 til 1010 er $\frac{1}{k}\left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{1001} + \cdots + \frac{1}{1010}\right)$.	Funksjonene vi pleide å tegne på gymnaset var ikke slik, de var sammenhengende og glatte og pene. Det er ofte lettere å beskrive slike "glatte og pene" funksjoner.

Bakterievekst, fortsatt:

Beskrivelse

Vi får en enklere og eksplisitt løsning for hvordan bakterieantallet øker med tiden hvis vi tilnærmer $n(t)$ med en kontinuerlig og deriverbar funksjon $N(t)$. Forutsetningen for en slik tilnærmelse er at $\frac{\Delta n}{n} \ll 1$.

Da har vi at

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{dN(t)}{dt}$$

og vi får en differensialligning

$$\frac{dN(t)}{dt} = k\,N(t)$$

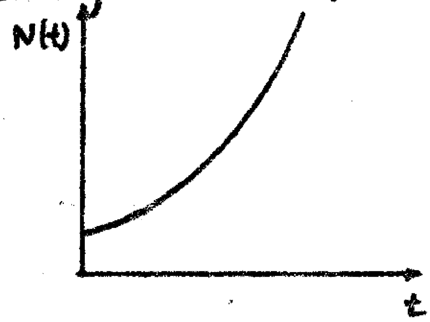
til bestemmelse av $N(t)$.

Vi skal senere vise hvordan en slik differensialligning kan løses. Løsningen er gitt ved

$$N(t) = N(0)\,e^{kt}$$

Kommentarer

Vi må ta for oss begrepene <u>kontinuitet</u> og <u>deriverbarhet</u>. Det er disse egenskapene ved $N(t)$ som garanterer at diagrammet er sammenhengende, glatt og pent. Viktigere for den matematiske behandling er at kontinuerlige og deriverbare funksjoner er enkle å regne med.



definisjon på den deriverte, $\frac{dN(t)}{dt}$ som her uttrykker tilvekst hastigheten, "rate of change".

$e \approx 2{,}718282$ har vel de fleste tidligere betraktet som en matematisk kuriositet?

De som husker derivasjonsreglene, kan sjekke:

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(0) \cdot e^{(kt)} \cdot k = k\,N(t)$$

konstant · der. av exp. funksjon · der. av kjernen

Bakterievekst, fortsatt:

Differensialligningen på side 5 kan vi betrakte som en <u>matematisk modell</u> for bakterievekst. Modellen bygger på forutsetningen om konstante forsøksbetingelser og på hypotesen om at tilvekstthastigheten til enhver tid er proporsjonal med totalantallet av bakterier i kulturen.

Siden løsningen $N(t)$ av differensialligningen er kjent, kan vi teste modellen ved å observere bakterieantallet til forskjellige tider og sammenholde observasjonsresultatene med modellens forutsigelser. (Her trengs kunnskaper i statistikk.) Det viser seg at det er god overensstemmelse for kortvarige forsøk.

Imidlertid ser vi at ifølge modellen skulle bakterieantallet bli vilkårlig stort for tilstrekkelig langvarige forsøk. Dette er (heldigvis!) ikke i overensstemmelse med observasjonsresultatene. Modellen må altså modifiseres hvis den også skal kunne gjelde for langvarige forsøk.

Er det rimelig at tilveksthastigheten $\frac{dN}{dt}$ bare avhenger av totalantallet av bakterier i kulturen? Ikke hvis det blir så mange bakterier at det ikke blir plass og næring til en optimal formering.

La oss anta at det i en avgrenset kultur bare er livsbetingelser for et begrenset antall bakterier M. Da må tilveksthastigheten avta mot null når bakterieantallet nærmer seg mot M. På denne bakgrunn formulerer vi en ny og forhåpentligvis bedre modell for bakterievekst:

$$\frac{dN(t)}{dt} = KN(t)[M - N(t)], \quad K \text{ og } M \text{ konstanter.}$$

Vi ser at tilveksthastigheten nå er proporsjonal med totalantallet (som i den første modellen), men dessuten også med "antall ledige plasser" $[M-N(t)]$.

Skriver vi den nye differensialligningen som

$$\frac{dN(t)}{dt} = KMN(t) - KN^2(t) = kN(t) - KN^2(t),$$

ser vi at den reduserer seg til

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN(t) \quad \text{når } N(t) \text{ er liten.}$$

(K er meget liten sammenlignet med k siden $k = KM$ og M er meget stor.) Den gamle modellen kan vi betrakte som en approksimasjon av den nye, eller vi kan si at den gamle modellen har et mindre gyldighetsområde enn den nye.

Løsningen av den nye differensialligningen kan skrives på formen

$$N(t) = \frac{MN(0)}{N(0) + [M-N(0)]e^{-MKt}}$$

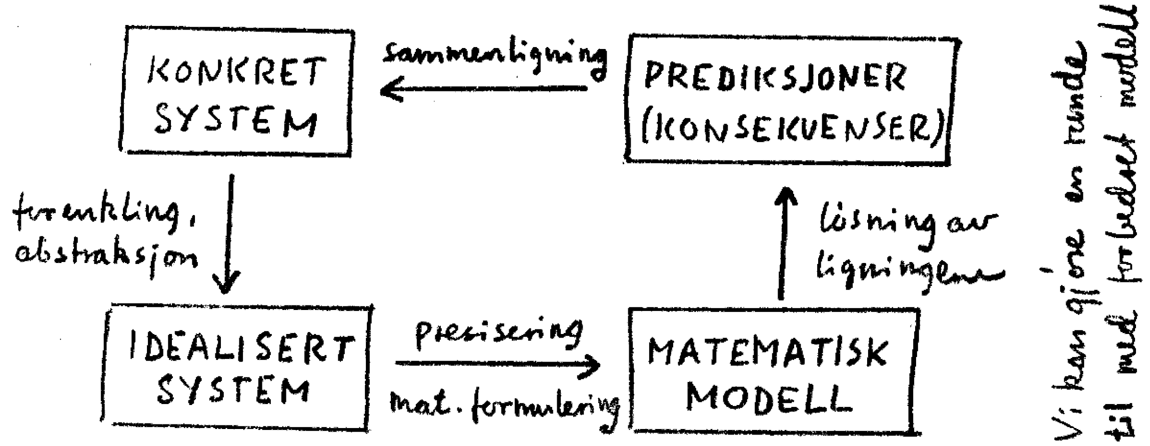
(utledning i kap. VIII om differensialligninger).
Vi legger merke til at $N(t) \to M$ når $t \to \infty$.
Vi ser også at når M er meget stor får vi

$$N(t) \approx \frac{MN(0)}{Me^{-MKt}} = N(0)e^{kt},$$

Ønsker vi å studere mer detaljert funksjonen $N(t)$, kan vi dra nytte av det vi har lært om <u>funksjonsdrøfting</u>.

Sammenligning av den nye modellen med observasjoner viser god overensstemmelse også for store verdier av t.

I eksemplet med beskrivelse av bakterievekst ser vi hvordan matematikken inngår, ikke bare som hjelpemiddel, men som en integrerende faktor i en vitenskapelig arbeidsmåte: Etter å ha observert bakteriekulturen og beskrevet den, ser vi bort fra en masse detaljopplysninger som vi tror er uvesentlige og stiller deretter opp en modell. Modellen gir forutsigelser om hvordan bakteriekulturen vil oppføre seg, og disse forutsetningene kan vi så sammenholde med observasjonsresultater. En slik arbeidsmåte er generell:



En matematisk modell er ofte anvendbar også for lösning av andre problemer enn det som modellen opprinnelig ble laget for. Den modellen vi har sett på, kan anvendes på en rekke forskjellige vekstprosesser, f. eks. befolkningseksplosjonen, höydevekst av trær, giftstoffpåvirkning av levende organismer, omdanning av stoff i kjemiske reaksjoner.

I "Calculus" av Sherman K. Stein kan en finne eksempler på anvendelse av matematiske begreper og metoder i biologi, fysikk, økonomi, psykologi og trafikk.

Ayres inneholder bl.a. en del eksempler av fysisk/teknisk natur, mens Sydsæter gir eksempler fra økonomien.

II INNLEDNING 2

En skikkelig veiviser bør også inneholde en advarsel til den reisende om de forskjellige farer som reisen kan by på, og hva han kan gjøre for å unngå dem eller bøte på skadene hvis ulykken først er ute.

Tittelen kan gi inntrykk av at dette er en veiviser for reiser i matematikkens verden. De farer en slik reise byr på er få, og fører oftest til at den reisende enten avbryter reisen eller foretar lengere opphold i områder med enkle og oversiktlige forhold. (Noen få foretrekker å reise i sovevogn, men det viser seg erfaringsmessig at disse som regel får vanskeligheter ved bilettkontrollen ved reisens slutt. De fleste av disse må reise om igjen og bør da velge en mere krevende reisemåte.)

Det er først når en prøver å bruke dette kompendiet som en matematisk veiviser for utforsking av vår egen verden, at spørsmålet om farer blir mere påtrengende. Alvoret ved disse farer blir ikke på noen måte uttrykt ved de noe uhøytidelige linjer ovenfor.

Den naturvitenskapelige metode og matematikkens sentrale rolle i denne ble forsøkt anskueliggjort i kap. I. Den hypotetisk-deduktive metode som representeres ved figuren på side 8 inneholder et element som i denne forbindelse er viktigere enn de andre, nemlig overgangen fra det konkrete til det idealiserte, abstrakte system som danner grunnlaget for den matematiske modell. Mange effekter og mindre detaljer må skjæres vekk og neglisjeres for at vi skal kunne stille opp en tilstrekkelig enkel modell. Ved relativt enkle systemer er ikke denne prosessen særlig problematisk. Det er oftest uten videre klart hva som er vesentlig og hva som ikke er vesentlig for forståelsen av det enkle (enkelte) system.

Men for kompliserte systemer er det hele ganske mye mer problematisk. Etter hvilke kriterier skal man forenkle? Noen prinsipper er åpenbare:

1) Bare egenskaper eller effekter som kan kvantifiseres kan bli tatt i betraktning.

2) Et komplisert system blir spaltet opp i mindre delsystemer som er tilstrekkelig enkle til at de kan beskrives på en tilstrekkelig oversiktlig måte.

Dette innebærer at helheten, altså det totale system, lett blir oppfattet enten som gitt eller som en sum av delene eller delsystemene. Men en innser fort at helheten alltid er noe mer enn en simpel sum av delene. En befolkning er ikke bare en sum av enkeltindivider, biltrafikk er ikke bare en sum av enkelte biler, like lite som en skog bare er en samling trær. I en befolkning oppstår forskjellige sosiale institusjoner, biltrafikken forårsaker trafikkkork og kollisjoner, og skogen som helhet skaper eller bidrar til et biologisk miljø for andre dyr og planter som er nødvendige for skogens eksistens. Slike kollektive fenomener er kjent også i fysikken. De kjennetegnes ved at de bare kan forstås eller beskrives ved en modell for helheten. Det er naturligvis ingenting iveien for å lage en slik modell, men vi har sett at den matematisk-naturvitenskapelige metode ikke direkte innbyr til det.

Mange effekter som er av mindre betydning for beskrivelsen av og forståelsen av delsystemene og som derfor blir neglisjert, kan bli kolossale når mange små bidrag frs delsystemene adderes opp. Et typisk eksempel er luftforurensningen på grunn av biltrafikk. Eksosen fra en enkelt bilmotor er ubetydelig og bare skadelig i lukkede rom. Men de totale effekter er skremmende. F.eks. går hvert år ca. 85 mill. tonn eksos opp i atmosfæren fra bilene i USA. Det er ikke vanskelig å finne flere eksempler.

Hvilke faktorer eller effekter som er viktige vil ofte avhenge av formålet med modellen. Hvis vi har et fysikalsk eller et biologisk system, ønsker vi gjerne å beskrive det for å kunne kontrollere det og utnytte teknologisk dets muligheter. Denne målsetting fastlegger ofte hvilke faktorer som er de essensielle og hvilke som kan neglisjeres.

Dette er av liten betydning hvis det aktuelle system er en pendel eller en enkelt bakteriekultur. Men hvis det er et oljeraffineri, en månerakett, samkjøringsnettet på Østlandet, produksjonsprosessen i en bilfabrikk eller en ny storferase, vil konsekvensene bli betydelige.

Dette må ikke oppfattes dithen at matematikk og naturvitenskap er fullstendig ubrukbare hjelpemidler for analyse og beskrivelse av systemer som inngår i den sosiale virkelighet. Tvertimot, særlig etter at elektroniske regnemaskiner er i alminnelig bruk, er omfanget og kompleksiteten av de systemer man kan behandle bortimot ubegrenset. Men samtidig øker de sosiale og politiske konsekvenser av de vitenskapelige avgjørelser man må ta. Altfor ofte ser vi at sosiale verdier som helse, arbeidsforhold, boligmiljøenes kvalitet, stress etc. blir underlagt faktorer som effektivitet, økonomisk produksjon, høy avkastning og rask vekst. Det burde være omvendt, og de potensielle muligheter for å realisere dette øker med vår økende kontroll over teknologiske og andre hjelpemidler. De potensielle muligheter må ikke forveksles med de reelle muligheter som avhenger av den virkelige fordeling av makt og ressurser i samfunnet.

Økonomien er et typisk eksempel. Nødvendigheten av forenklede og praktisk brukbare modeller fører ofte til at man i praksis bare betrakter små delsystemer eller bare hovedtrekkene i totalsystemet. Snevre privatøkonomiske lønnsomhetsbetraktninger får derved lett dominere over de mere sammensatte sosiale lønnsomhetskriterier. I tillegg blir delsystemene betraktet ut fra en <u>gitt</u> helhet, mens i virkeligheten er helheten ikke uavhengig av delsystemene, men endres når delsystemene utvikler seg og medfører at de opprinnelige betingelser ikke lenger blir gyldige.

Et enkelt regnestykke viser at det er raskere, men dyrere å bruke egen bil enn å kjøre med buss til arbeidet. Følgelig er det mange som gjør det. Men da forandres helheten de regnet ut fra: Det blir kork på veiene, kjøretida blir lenger enn den ville ha vært med buss hvis nesten ingen kjørte bil (som situasjonen var f.eks. før og under krigen). Dessuten synker trafikkgrunnlaget for bussene og takstene går opp. Snart er det like dyrt å kjøre buss, og modellen blir da fullstendig gal.

At økonomisk lønnsomhet blir begrenset til det kvantifiserbare, det som kan måles i kroner og øre, er vi vant til, men det behøvde ikke være slik. Årsaken er bl.a. kravet om matematisk behandling av modellene.

La oss igjen studere firkanten på side 8. Den er en modell av den naturvitenskapelige prosess, og innebærer derfor også forenklinger. Den framstiller bare det vi kan kalle naturvitenskapens indre dynamikk. Det den ikke viser er dens ytre dynamikk, eller naturvitenskapens vekselvirkning med og integrasjon i det samfunn vi lever i. Disse er selvfølgelig ikke uavhengige, men har utviklet seg under påvirkning av hverandre. Det er uten videre klart at den ytre dyamikk er minst like viktig som den indre. I denne korte framstilling må vi imdlertid la dette temaet ligge og bare bemerke at den naturvitenskapelige metode åpenbart er blitt slik utformet at den bidrar til og ikke motvirker mange trekk ved vitenskapens utnyttelse som umiddelbart virker negative for oss.

Dette er selvsagt ingen tilfeldighet. Vitenskapen har gjennomgått en historisk utvikling under påvirkning av samfunnets vekslende maktforhold. Dens utnyttelse fører til forskjellige konsekvenser for forskjellige samfunnsgrupper. Vitenskap er politikk selv om den pretenderer å være nøytral. Det er ikke noe prinsipielt til hinder for å bygge opp en naturvitenskapelig metode og en naturvitenskapelig praksis som unngår bl.a. de negative sider som er nevnt foran. Siden dette tross alt er en del av et kompendium i matematikk og ikke en avhandling om vitenskap og politikk, skal vi avstå fra videre betraktninger over hvorfor dette ikke skjer.

Har nå dette som er nevnt her noen betydning for en vanlig student ved NLH? I løpet av studietiden kommer studentene i kontakt med mange forskjellige forskningsmiljøer ved høgskolen, og noen vil selv ta del i dem etter avsluttet studium. En forståelse bare på grunnlag av firkanten på side 8 av disse forskningsaktiviteter er etter det som her er nevnt ufullstendig og bidrar ikke til å avklare høgskolens rolle i samfunnet og spesielt ikke overfor de forskjellige grupper i landbruksnæringen. Interesserte kan lese f.eks. Ottar Brox (red.): Norsk landbruk - utvikling eller avvikling? (Pax 1969).

III FUNKSJONSBEGREPET

I anvendte fag, herunder landbruksfag, prøver vi å beskrive, forklare og forutsi hendelser og relasjoner mellom hendelser. Beskrivelsene vil alltid være tilnærmet pga unøyaktighet og ufullstendighet i datamaterialet. Videre må vi alltid gjøre et utvalg blandt de størrelser (variable) som kan tenkes å influere det vi vil forklare. Det vil si at en matematisk modell (eller en teori) bygger på visse forutsetninger, modellen vil derfor ha et visst gyldighets-område der forutsetningene er (tilnærmet) oppfylt.

I matematikken opererer vi med eksakte formuleringer. Ut fra gitte forutsetninger kan vi finne eksakte svar. Disse svarene er relevante som løsning på et praktisk problem i den utstrekning forutsetningene er oppfylt.

En modell uttaler seg gjerne om sammenhenger (relasjoner) mellom de variable vi har funnet nødvendig å ta med i beskrivelsen.

For eksempel vil en enkel modell for bakterievekst angi hvordan bakterieantallet (n) forandrer seg med tiden (t), modellen vil gi en relasjon mellom de variable n og t.

En modell for nedbøyning av bjelker vil gi en relasjon mellom nedbøyningen (y), belastningen (P), avstanden fra bjelkens opplagringspunkt til belastningen (l), bjelkens høyde (h) og bredde (b) og en størrelse som angir bjelkematerialets elastiske egenskaper (E).

Slike relasjoner mellom variable uttrykkes i matematikken ved hjelp av funksjonsbegrepet. Hvis bare to variable inngår, benytter vi oss av det matematikeren kaller en reell funksjon av en reell variabel, i det følgende bare kalt funksjon av en variabel, for å beskrive sammenhengen mellom disse variable:

> En funksjon av en variabel er en forskrift som til ethvert tall i et spesifisert tallområde tilordner et annet tall.

I eksemplet ovenfor med bakterievekst vil det eksistere en forskrift f [eller $f(\ )$] som til enhver tid $t > t_0$ tilordner et bakterieantall n. Vi skriver da

$$n = f(t).$$

Merk at definisjonen ikke sier noe om at $f(\ )$ skal være gitt som en regneregel. (Derimot kan det hende at en regneregel kan etableres ut fra en matematisk modell.)

Merk også at det ikke er noen restriksjoner om hva slags tallområde*) som kan spesifiseres som forskriftens anvendelsesområde (funksjonens definisjonsområde), det kan være et intervall, flere intervaller, eller et spesifisert sett av diskrete tall. Et eksempel på det siste: Hvis studentene nummereres fra 1 til 163, vil matematikkarakteren kunne oppfattes som en funksjon som er definert for tallene 1, 2, 3 ··· 163.

*) tallområde: mengde av reelle tall

Det siste eksemplet illustrerer at en funksjonssammenheng ikke har noe med årsak og virkning å gjøre. En funksjon er en <u>tilordning</u>, og det er meget vesentlig at det er en <u>entydig</u> tilordning. I eksemplet med bakterievekst betyr det at det til enhver tid $t > t_0$ svarer bare en verdi av n. (Derimot er det ingenting i veien for at det for forskjellige verdier av t er tilordnet den samme verdi n.)

Definisjonen av funksjon på forrige side (reell funksjon av <u>en</u> reell variabel) er et spesialtilfelle av et mer generellt funksjonsbegrep (se Sydsæter kap. 2 §1):

> La M_1 og M_2 være to mengder av elementer.
> En funksjon fra M_1 til M_2 er en regel som til ethvert element i M_1 tilordner et entydig bestemt element i M_2.

Dette generelle funksjonsbegrep tillater tilordninger ikke bare mellom tall. Eksempel: La M_1 betegne mengden av gifte menn i Norge og M_2 mengden av alle gifte kvinner. Da kan vi definere en funksjon K fra M_1 til M_2 ved følgende: Hvis a er en gift mann i Norge, lar vi $K(a)$ være vedkommende i M_2 som er a's kone. K blir da en funksjon fra M_1 til M_2 siden en gift mann (iallefall i Norge) har en og bare en kone (Sydsæter).

Den generelle definisjon av funksjon som er gitt ovenfor inneholder også definisjonen av en reell funksjon av n reelle variable (funksjon av n variable):

En funksjon av n variable er en forskrift som tilordner et tall til ethvert element i en spesifisert mengde av n-tupler.

Betegner vi funksjonen med f, lar vi $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ bety det tallet som f tilordner n-tuplet $(x_1, x_2, \cdots x_n)$. (Et n-tuppel er en ordnet samling av n tall.)

Som et eksempel på en funksjon av flere variable kan vi ta

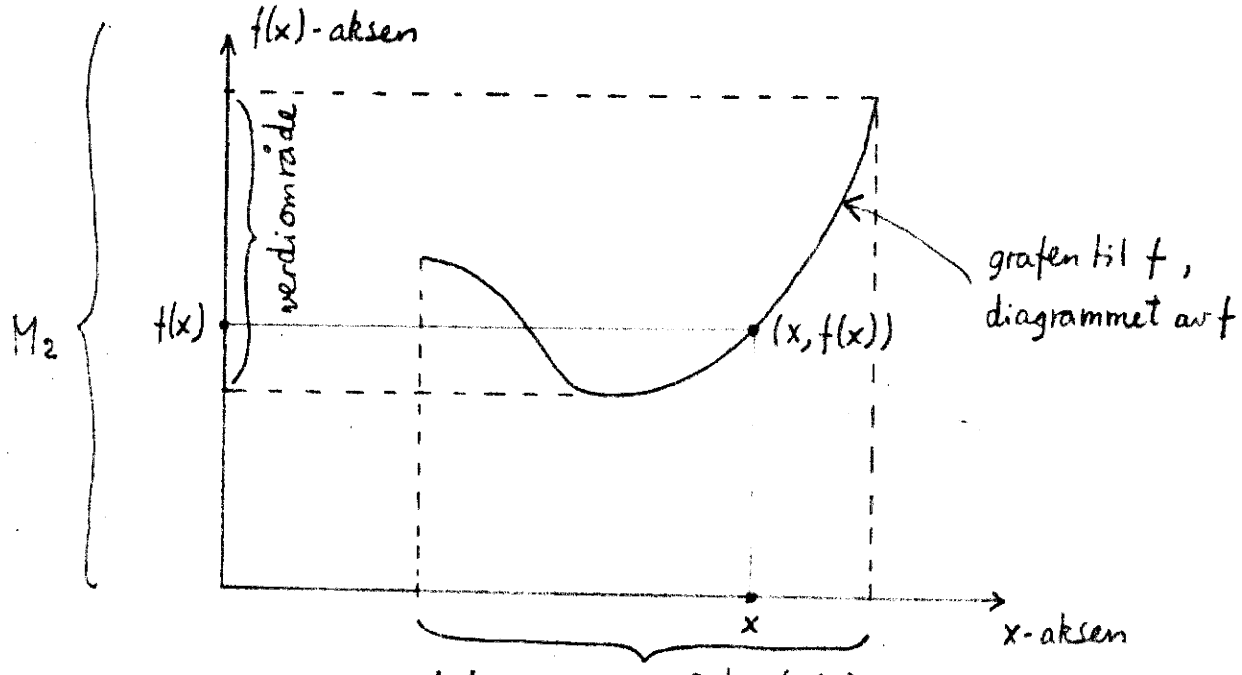
$$y = f(P, l, h, b, E)$$

idet vi refererer til eksemplet nedbøyning av bjelke på s.14.

I vårt matematikkurs skal vi hovedsakelig studere funksjoner av <u>en</u> variabel. Dette kan synes noe meningsløst da en raskt kan forvisse seg om at de fleste problemer i anvendte fag inneholder mange variable.

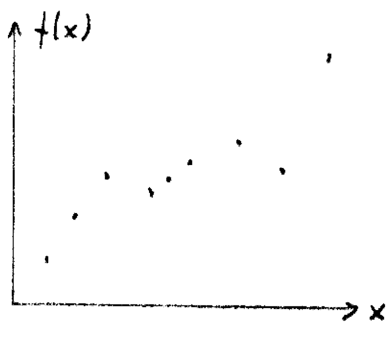
Imidlertid skal vi se at studiet av en funksjon av n variable i hvertfall delvis kan gjennomføres som en undersøkelse av n funksjoner av <u>en</u> variabel. Dette betyr ikke bare at vi først må lære å behandle funksjoner av <u>en</u> variabel, men også at vi når vi har lært dette, for en stor del behersker formalismen for studiet av funksjoner av flere variable. Dog må vi innse at en beskrivelse med mange variable nødvendigvis blir mer komplisert og arbeidskrevende enn en beskrivelse med få variable.

En funksjon av en variabel anskueliggjøres gjerne ved en grafisk fremstilling:



Samlingen av punktene $(x, f(x))$ for alle x i M_1 kalles grafen til f eller diagrammet av f. Vi kan betrakte grafen til f som et bilde av funksjonsforskriften f. Til ethvert x i M_1 angir grafen den tilordnede funksjonsverdi $f(x)$.
M_1 kalles gjerne for funksjonens definisjonsområde. De tall i M_2 som gjennom f tilordnes et eller flere tall i M_1 betegnes funksjonens verdiområde.

Hvis funksjonen er definert bare for diskrete verdier av x, kan diagrammet for eksempel se slik ut (avhengig av f):



En slik funksjon kan være definert ved en regneformel som skal anvendes bare for x i M_1, f. eks. $f(\frac{1}{n}) = n$ for n et nat. tall, eller, hvilket ofte er tilfelle i anvendte fag, ved tabeller. For eksempel, i et forsök angir $n(x)$ antall ganger at x planter ble observert pr. felt:

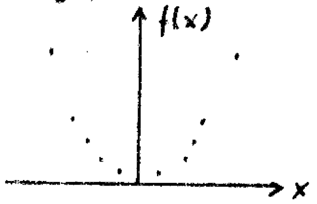
x	0	1	2	3	4	5	6	≥ 7
$n(x)$	18	31	27	13	8	1	2	0

Har M_1 et endelig antall elementer, kan alle funksjonsverdier avmerkes i diagrammet etter regneforskrift eller tabell.

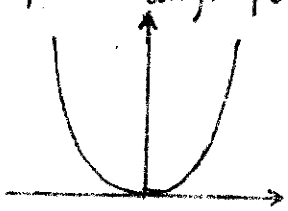
Hvis f er definert for alle x i et intervall, vil diagrammet av f bestå av uendelig mange punkter. Vi kan ikke avmerke alle etter funksjonsforskriften. Eksempel: $f(x) = x^2$. Forskriften kan brukes for alle verdier av x.

> Om ikke annet er sagt, skal definisjonsområdet for en funksjon gitt ved en regneformel være eksistensområdet for regneformelen, dvs. de verdier av den variable som gjör at regneformelen har mening.

Vi kan avmerke et antall punkter på grafen til $f(x) = x^2$ (egentlig skulle vi skrive $f(\ ) = (\ )^2$ e.l. for å angi forskriften)

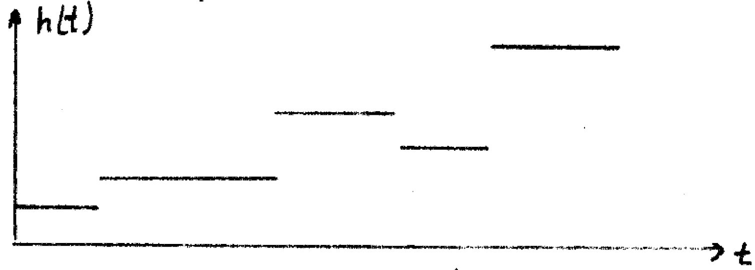


og så tror vi at grafen ser slik ut ?



For å være sikre på at vi har tegnet et korrekt bilde av grafen, må vi undersöke funksjonsforskriften nærmere: Forskriften må kunne vises å inneholde en garanti for at grafen er sammenhengende, "pen og pyntelig". Dette kommer vi tilbake til i neste avsnitt.

Ikke alle funksjoner definert i et tallområde er gitt ved regneformler, f.eks. funksjonen $h(t)$ som står for antall dyr av arten Hippopotamus i London Zoo som funksjon av tiden. På grunnlag av dyrepasserens rapporter kan man tegne et diagram som vil se slik ut:



I visse tilfelle kan en slik stepfunksjon tilnærmes med en "glatt" funksjon, som når $n(t)$ representerer antall bakterier i en bakteriekultur. (Hvorfor er ikke en slik tilnærmelse aktuell for flodhester?)

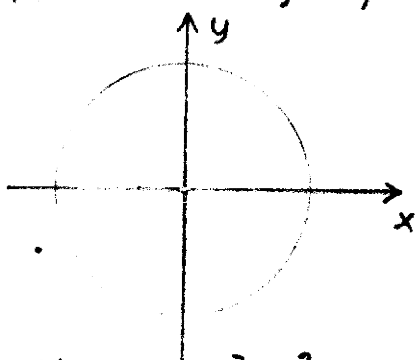
Noen ganger er man "på jakt etter" en funksjonssammenheng som man erfaringsmessig vet er "pen og pyntelig", men hvor man bare kjenner et sett måleverdier, f.eks. temperaturen som funksjon av tiden $T(t)$ ved en målestasjon. For å utnytte måleverdiene, som ved beregning av middeltemperatur, må en tilnærme $T(t)$ ved hjelp av en forskrift som gir en kurve gjennom målepunktene. (Hva med målefeil?)

En rekke eksempler på funksjonsforskrifter og deres definisjonsområder finnes i lærebøkene og i oppgavesamlingen til dette kurset.

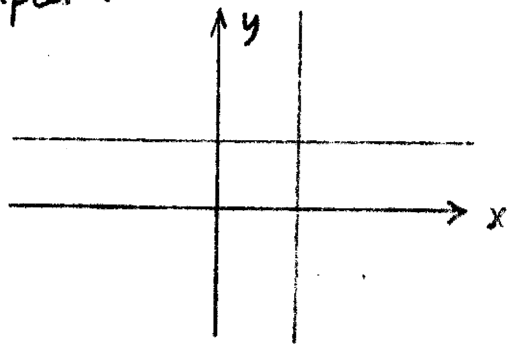
Diagrammet for en ligning

$$F(x,y) = 0$$

er definert som samlingen av alle punkter (x,y) som tilfredsstiller ligningen. Eksempler:



$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$



$$F(x,y) = (x-1)(y-1) = 0$$

Visse ligninger (men ingen av de to ovenfor), definerer funksjoner, f.eks.

$$F(x,y) = x - y + 3xy - 2 = 0$$

som løst mhp. y gir en entydig løsning for enhver $x \neq \frac{1}{3}$:

$$y = \frac{2-x}{3x-1}$$

Derimot ser vi at hvis vi løser sirkelligningen mhp. y får vi to verdier av y til enhver x i $[-2, 2]$:

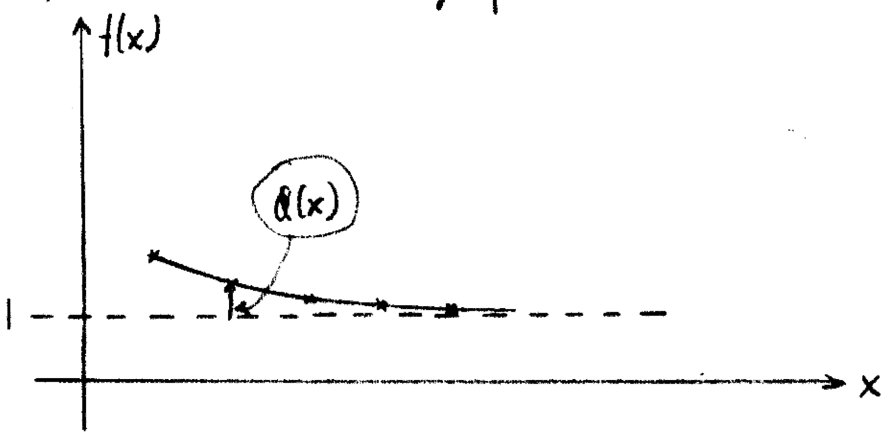
$$y = \pm\sqrt{4-x^2},$$

det eksisterer her ingen entydig tilordning fra x til y og følgelig ingen funksjon.

IV GRENSEVERDI OG KONTINUITET

La oss ta for oss funksjonen f definert ved
$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \qquad \text{for } x \geq 1 .$$

Vi kan avmerke et antall punkter på grafen til f
Dette vil få oss til å tro at grafen ser omtrent slik ut:



Men to ting må undersøkes nærmere: Om grafen virkelig er "pen og pyntelig" slik som tegnet på figuren og dessuten om den virkelig vil smyge seg inntil den rette linjen $y=1$ når x blir stor.

Vi tar for oss det siste problemet først:
Vi ser at $f(10) = 1 + \frac{1}{10}$, $f(100) = 1 + \frac{1}{100}$, $f(1000) = 1 + \frac{1}{1000}$, osv. Men hva med de verdiene vi ikke har undersøkt?

Det vi vil prøve å vise, er at avstanden $d(x)$ mellom grafen og den rette linjen $y=1$ kan gjøres så liten vi vil, bare vi går tilstrekkelig langt utover langs x-aksen.
$$d(x) = f(x) - 1 = \frac{1}{x} .$$

Vi ser at samme hvilken bitte liten verdi ε vi ønsker for $d(x)$, så er

$$d(x) < \varepsilon \quad \text{når } x > \frac{1}{\varepsilon} \quad .$$

Det betyr at bare vi går tilstrekkelig langt utover x-aksen ($x > \frac{1}{\varepsilon}$) så vil avstanden mellom grafen og den rette linjen være mindre enn den på forhånd oppgitte verdi (ε). Legg merke til at avstanden aldri kan bli lik null, men den vil nærme seg mot null når x vokser over alle grenser. Vi sier da at grenseverdien for $f(x) = 1+\frac{1}{x}$ når x vokser over alle grenser er lik 1. og skriver dette slik:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 \ .$$

Gitt en funksjon f. Vi sier at det eksisterer en grenseverdi a for $f(x)$ når x vokser over alle grenser hvis $|f(x)-a|$ kan gjøres mindre enn en vilkårlig oppgitt verdi ε ved å velge x tilstrekkelig stor:

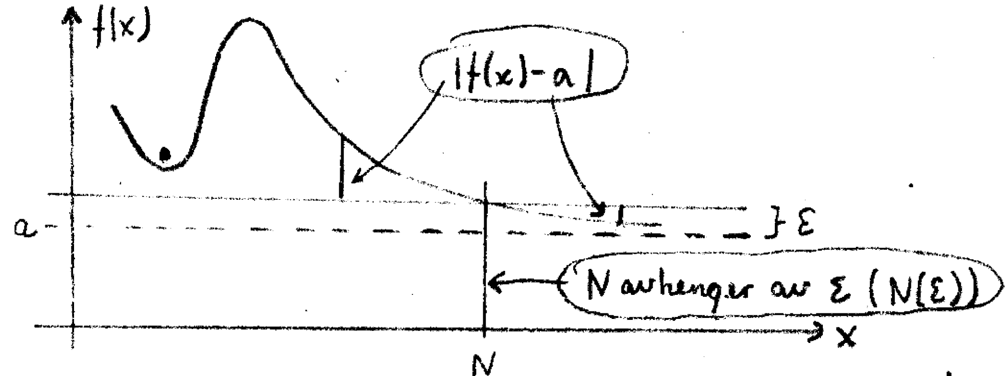
$$|f(x)-a| < \varepsilon \quad \text{for alle } x > N(\varepsilon),$$

x i def.mengden for f.

Vi skriver da

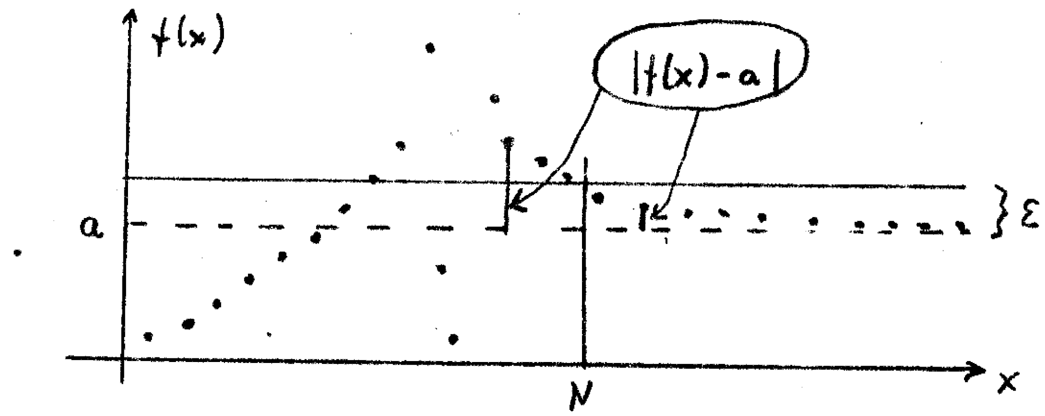
$$\lim_{x\to\infty} |f(x)-a| = 0 \ ,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \ .$$



ε oppgitt. Det må finnes et N slik at $|f(x)-a| < \varepsilon$ for alle $x > N$

Det er ikke nödvendig at funksjonen er "glatt og pen":

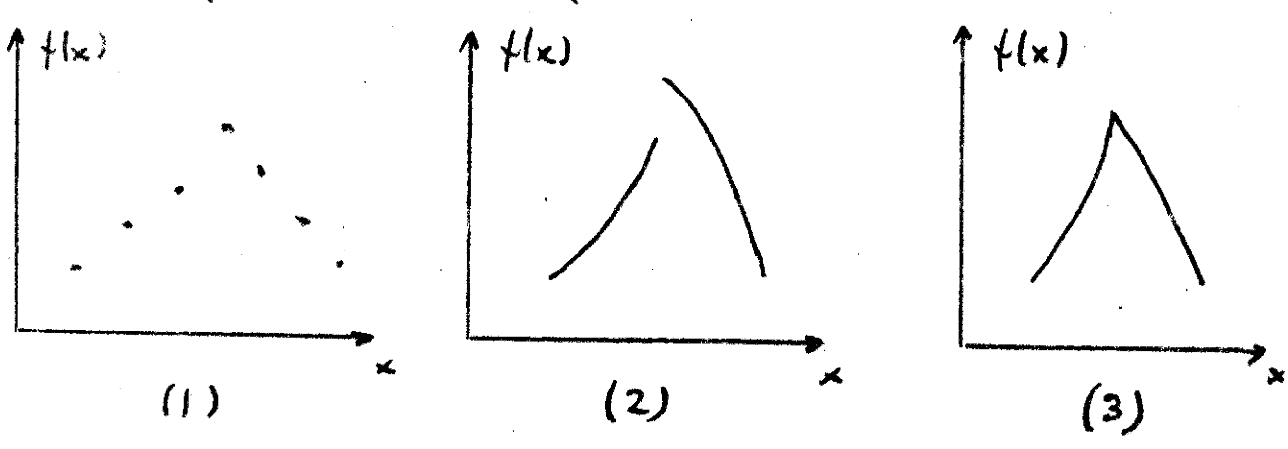


$|f(x)-a| < \varepsilon$ for alle $x > N$, x i def.mengden for f

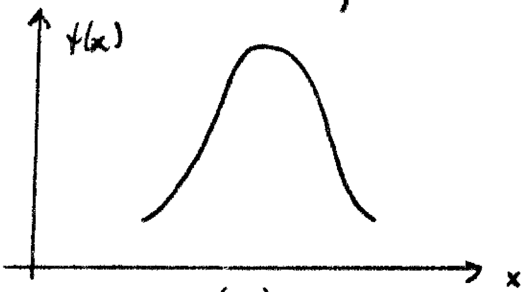
Begrepet grenseverdi, slik det ble introdusert foran, (via en differens som kan gjöres vilkårlig liten,) skal vi möte i andre forbindelser.

Da vi introduserte eksemplet $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, hadde vi også satt oss fore å undersöke om grafen virkelig er "pen og pyntelig", "glatt og pen" har vi visst også snakket om. På dette punktet har forfatteren vært bevisst upresis.

Intuitivt vil vi gjerne skille mellom disse tilfellene:



(1): usammenhengende overalt. (2): usammenhengende ett sted, (3): sammenhengende.



(4)

(4): "glatt og pen" ?

Det er egenskaper ved funksjonsforskriften som avgjør om vi har tilfelle (1), (2), (3) eller (4). Vi skal nå definere en egenskap <u>kontinuitet</u> som sikrer sammenhengende diagram, i neste avsnitt skal vi definere <u>deriverbarhet</u> som leder videre til tilfelle (4).

La oss følge Sydsæter, kapitel 3, §1:

Første forsøk på definisjon:

f er kontinuerlig for $x = x_0$ dersom $f(x)$ alltid er nær $f(x_0)$ når x er nær x_0. NB: for <u>alle</u> x nær x_0

Undersøker altså funksjonens egenskaper omkring $x = x_0$.

Hva er <u>nær</u> ?

f er kontinuerlig <u>i x_0</u> dersom en kan få avstanden mellom $f(x)$ og $f(x_0)$ så liten en måtte ønske bare avstanden mellom x og x_0 er liten nok.

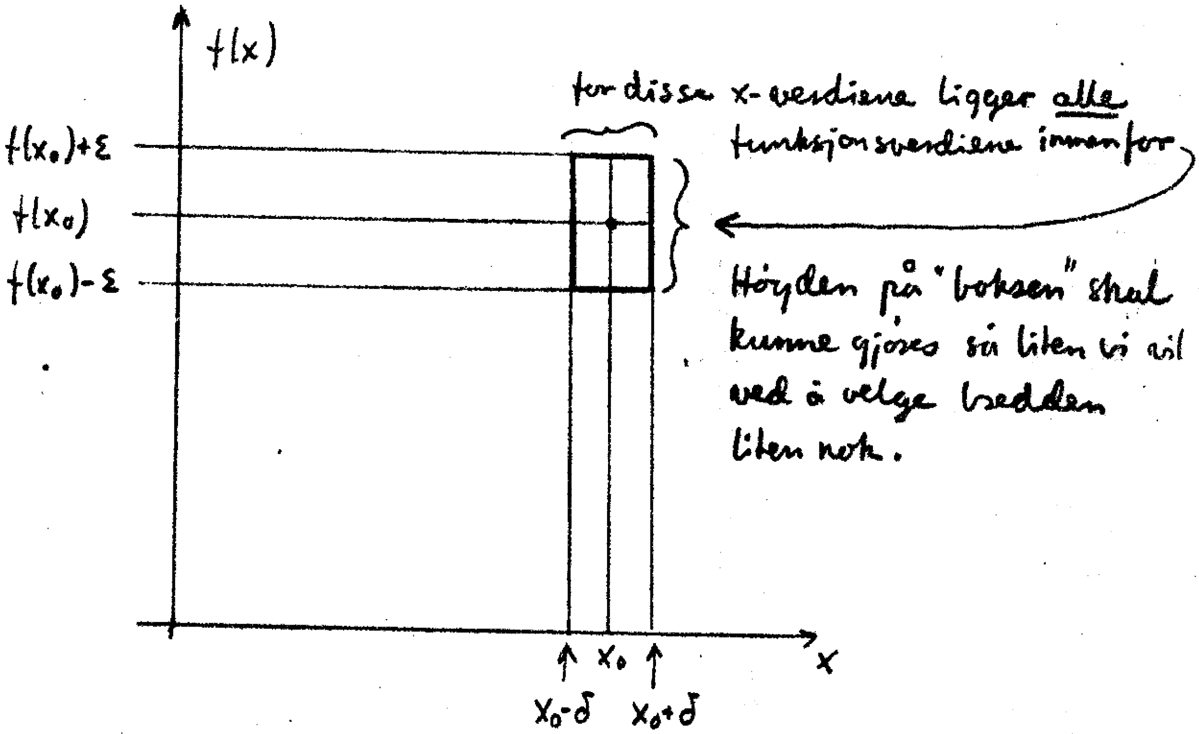
Eller:

f er kontinuerlig <u>i x_0</u> dersom en kan få $|f(x) - f(x_0)|$ så liten en måtte ønske bare $|x - x_0|$ er liten nok.

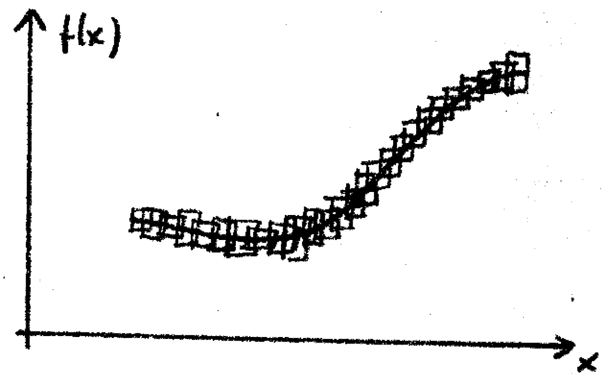
Presiseres til:

f er kontinuerlig <u>i x_0</u> dersom det til ethvert tall $\varepsilon > 0$ finnes et tall $\delta > 0$ slik at $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ når vi gjør $|x - x_0| < \delta$. NB: for <u>alle</u> x i $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$.

Kont. <u>i x_0</u> forutsetter at f er def. i et <u>intervall</u> omkring x_0.

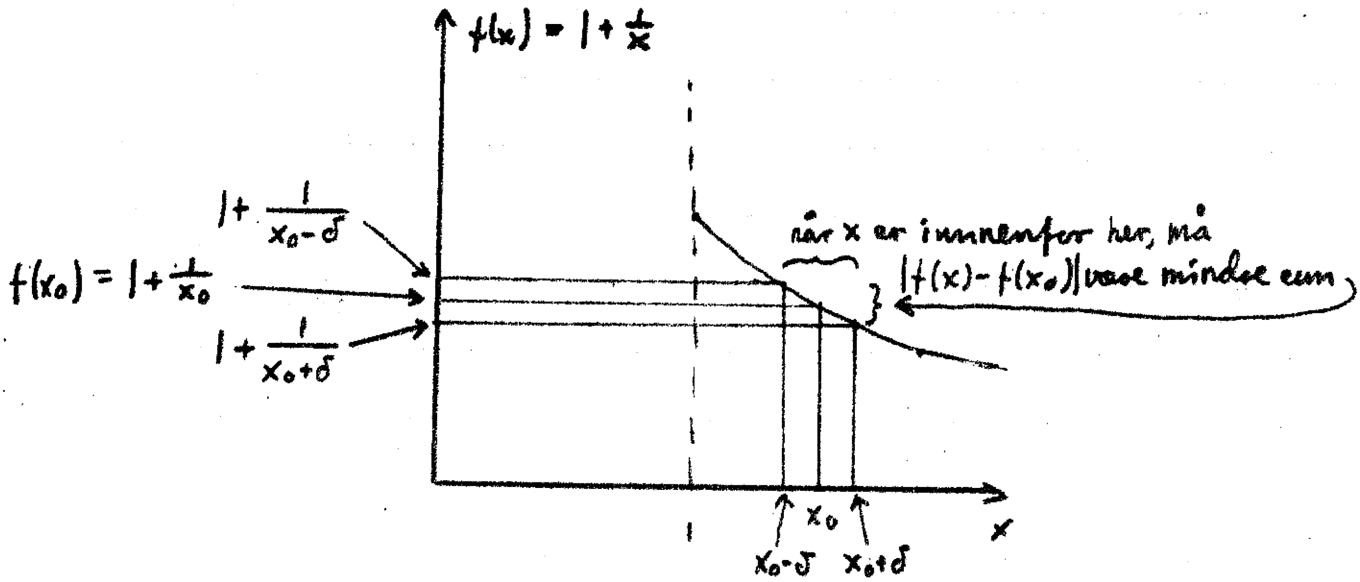


På denne måten kan vi undersöke for alle punkter x_0 i et intervall:



Hvis f er kontinuerlig for alle x_0 i et intervall, sies f å være kontinuerlig i intervallet. Grafen ligger da innenfor en sekvens av "bokser" (se figuren), hver "boks" kan gjöres vilkårlig liten og det er derfor berettiget å tegne grafen som en sammenhengende kurve. Det er åpenbart nödvendig men ikke tilstrekkelig at f er definert for alle x i intervallet.

Den analytiske undersökelse av en gitt funksjon kan f. eks. foregå slik (vi tegner figur for lettere å kunne fölge beregningen):



$$|f(x)-f(x_0)| < \left(1+\frac{1}{x_0-\delta}\right)-\left(1+\frac{1}{x_0+\delta}\right) = \frac{1}{x_0-\delta}-\frac{1}{x_0+\delta} = \frac{2\delta}{x_0^2-\delta^2}$$

Vi ser at vi kan gjøre $|f(x)-f(x_0)|$ så liten vi vil, ved å velge δ tilstrekkelig liten. Vi kan få $|f(x)-f(x_0)|$ mindre enn et på forhånd oppgitt pos. tall ε,

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon,$$

hvis vi velger δ så liten at

$$\frac{2\delta}{x_0^2-\delta^2} < \varepsilon .$$

Vi skriver da at

$$\lim_{x\to x_0}\,[f(x)-f(x_0)] = 0$$

eller

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

Vi ser at $f(x) = 1+\frac{1}{x}$ er kontinuerlig for alle $x_0 \neq 0$.

Det kan hende at grenseverdien $\lim_{x\to x_0} f(x)$ eksisterer selv om $f(x_0)$ ikke er definert,

dvs. en kan få $|f(x)-A|$ så liten en vil bare $|x-x_0|$ er liten nok, uten nödvendigvis å ha $A=f(x_0)$ (se eksemplet $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ som er behandlet i Sydsæter, s. 67.)
Derfor formuleres ofte definisjonen av kontinuitet i to trinn: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ skal eksistere og dessuten må denne grenseverdien være lik $f(x_0)$:

> Gitt en funksjon f. Hvis det finnes positive tall ε og δ slik at
> $$|f(x)-A|<\varepsilon$$
> for alle x i $\langle x_0-\delta,\ x_0+\delta\rangle$, sier vi at A er grenseverdien for $f(x)$ når x går mot x_0:
> $$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\ .$$
> Hvis
> $$A=f(x_0)$$
> sier vi at f er kontinuerlig for $x=x_0$. Er f kontinuerlig for alle x_0 i et intervall, sier vi at funksjonen er kontinuerlig i intervallet.

Som vi aner av vår undersökelse av funksjonen $f(x)=1+\frac{1}{x}$, kan et bevis for kontinuitet av en gitt funksjon være plundrete. Egentlig er det beviset for eksistensen av en grenseverdi som skaper hodebry.

I praksis blir undersökelsen vesentlig lettet av fölgende egenskaper for grenseverdier, se Sydsæter kap. 3, § 2:

Når vi kjenner grenseverdiene for en rekke funksjoner, så finner vi grenseverdien for et sammensatt uttrykk, dannet av disse funksjoner ved hjelp av de fire elementære regningsarter, ved direkte innsetting av grenseverdiene for de enkelte funksjoner. (En forutsetning er at ingen nevner har grenseverdien null.)

Herav følger (se Sydsæter kap. 3, § 2 og 3):

Enhver funksjon som ved de fire elementære regningsarter er sammensatt av flere funksjoner som er kontinuerlige i et visst intervall, er selv en kontinuerlig funksjon i det samme intervall, med unntak av verdier som gjør eventuelle nevnere lik null.

Eksempel: Det er lett å vise at $f(x) = x$ er kontinuerlig for alle x. Da følger at x^n og alle polynomer i x er kontinuerlige, likeså alle brøkfunksjoner dannet av polynomer med unntak for de verdier av x som gjør nevneren lik null. (Sydsæter s. 75)

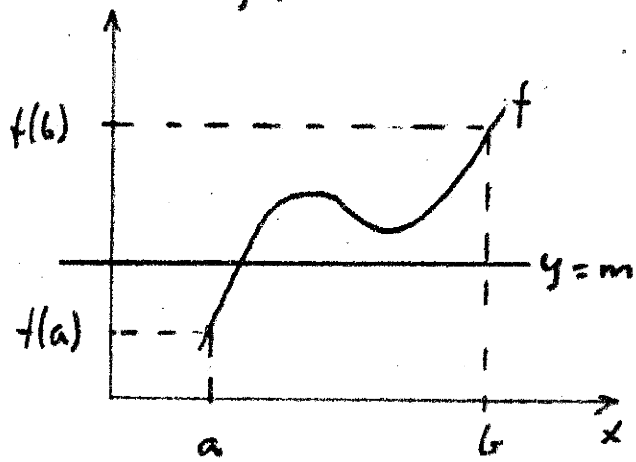
Skal vi tegne diagram av en funksjon, bør vi undersøke om funksjonen er kontinuerlig. Bare der hvor funksjonen er kontinuerlig kan diagrammet være en sammenhengende, "pen og pyntelig" kurve.

Kontinuitet avgjøres ved en analytisk undersøkelse av funksjonsforskriften. Om kontinuitet og empiriske funksjoner, se Sydsæter, kap. 3, § 6.

Viktige egenskaper ved kontinuerlige funksjoner

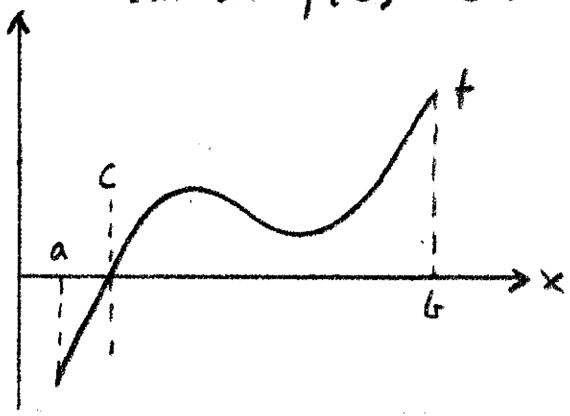
1. Skjæringssetningen (for bevis, se Sydsæter s. 90)

A: La f være en funksjon som er kontinuerlig for alle x i det lukkede intervall $[a, b]$, og anta $f(a) \neq f(b)$. Når x varierer fra a til b, vil $f(x)$ anta enhver verdi mellom $f(a)$ og $f(b)$.



Grafen til f må skjære linjen $y = m$ i minst ett punkt

B: La f være kontinuerlig i $[a, b]$ og anta at $f(a)$ og $f(b)$ har motsatt fortegn. Da finnes det minst en verdi c i $\langle a, b\rangle$ slik at $f(c) = 0$.



Spesialtilfelle av A: Grafen til f må skjære linjen $y = 0$ i minst ett punkt.

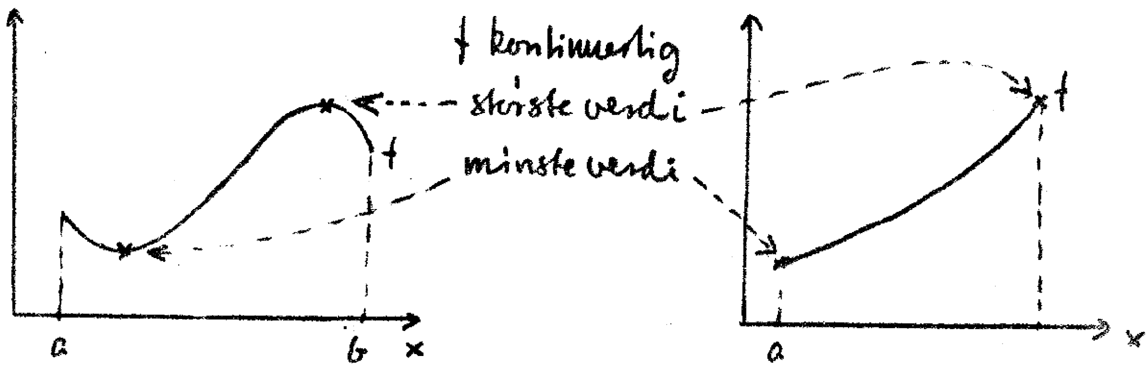
Eksempel: Siden $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$ er kontinuerlig, ser vi av tabellen (neste side)

x	0	-1	-2	-3
$f(x)$	1	3	3	-5

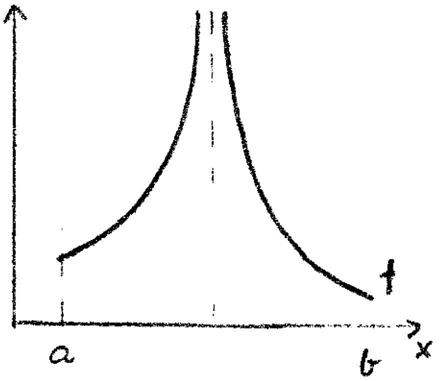
at ligningen $f(x)=0$ må ha en løsning for en eller annen x mellom -2 og -3. Se Sydsæter, eks. 1, s. 88.

2. Ekstremverdisetningen (Sydsæter s. 133, bevises ikke).

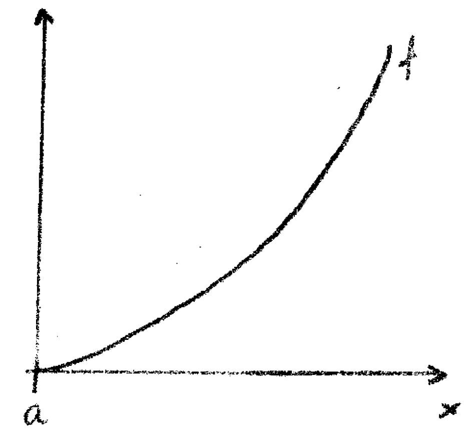
Hvis f er kontinuerlig i et <u>lukket</u>, <u>begrenset</u> intervall $[a,b]$, så har $f(x)$ en minste verdi og en største verdi i intervallet.



Hvis f ikke er kontinuerlig i $[a,b]$, eller hvis intervallet ikke er begrenset og lukket, har vi ingen garanti for at $f(x)$ har en minste verdi og en største verdi:



f ikke kont. i $[a,b]$, ingen største verdi for $f(x)$

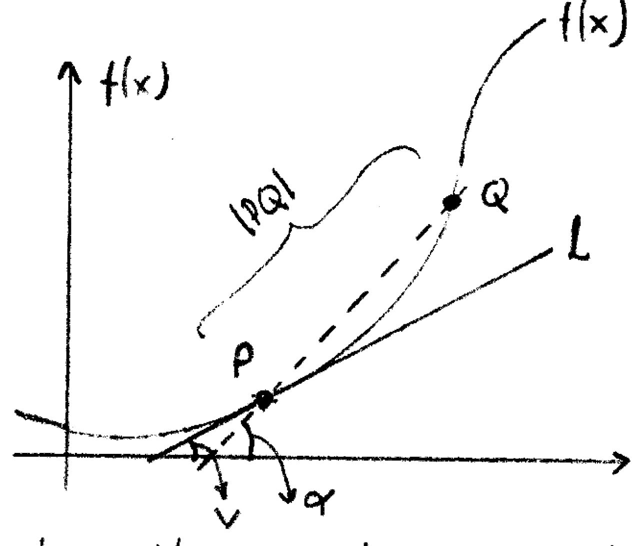


f kont., def for alle $x>0$ ingen største verdi for $f(x)$

V DERIVASJON

Hvis vi skal tegne diagram av en gitt funksjon, er det til stor nytte å kunne beregne tangentretningen til kurven på forskjellige steder, vi kan da finne ut hvordan kurven stiger eller synker med voksende x-verdier og for hvilke x-verdier kurven eventuelt går over på å synke til å stige eller fra å stige til å synke.

Vi trenger en definisjon av tangent til en kurve som kan brukes til å regne med, og det kan vi finne på følgende måte:



P er et fast punkt på kurven.
Q er et annet, uspesifisert punkt på kurven

Vi sier at den rette linje L er tangent i punktet P til kurven f(x) hvis vinkelen mellom sekanten PQ og linjen L, $v-\alpha$, kan gjøres vilkårlig liten for alle punkter Q som er tilstrekkelig nær punktet P,

$$v-\alpha < \varepsilon \quad \text{for } |PQ| < \delta .$$

Vi ser at grensebegrepet er ute og går igjen:

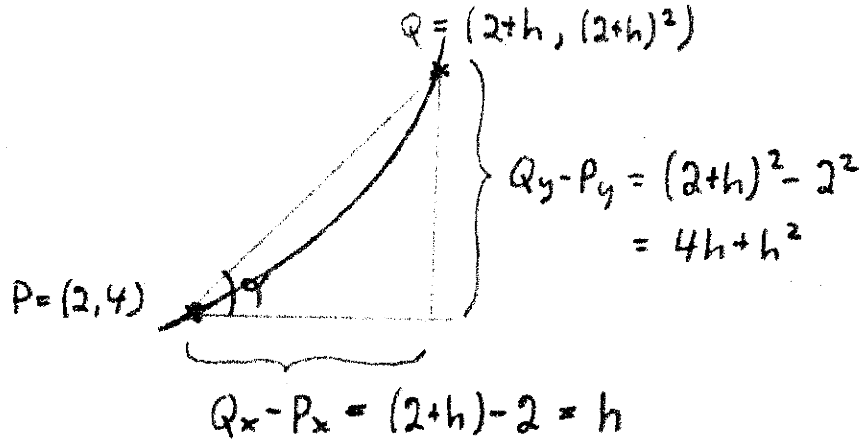
$$v = \lim_{Q \to P} \alpha$$

eller

$$\operatorname{tg} v = \lim_{Q \to P} \operatorname{tg} \alpha \ .$$

Her er v tangentvinkelen som skal bestemmes og α sekantvinkelen (som varierer med beliggenheten av Q).

La oss se som et eksempel hvordan vi på grunnlag av dette kan beregne tangentvinkelen til kurven $f(x) = x^2$ i punktet $(2,4)$, dvs for $x = 2$:



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Q_y - P_y}{Q_x - P_x} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h$$

Merk at dette uttrykket bare gjelder for $h \neq 0$, dvs når Q ikke faller sammen med P.

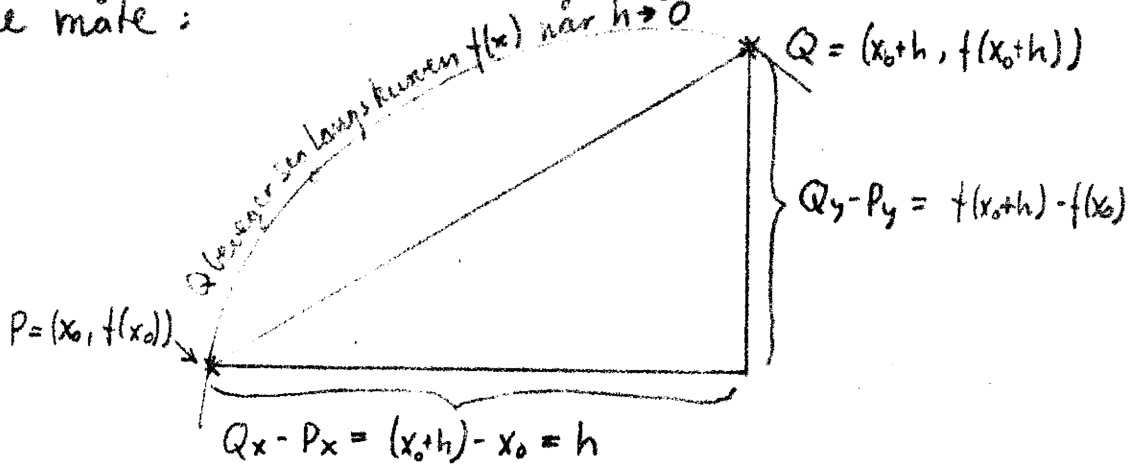
$$\operatorname{tg} v = \lim_{Q \to P} \operatorname{tg} \alpha = \lim_{h \to 0} \operatorname{tg} \alpha = 4$$

Vi har her ikke satt $h = 0$ i uttrykket for $\operatorname{tg} \alpha$, men konstatert at differansen $\operatorname{tg} \alpha - 4$ kan gjøres vilkårlig liten ved å gjøre h liten, da har vi at

$$\lim_{h \to 0} (\operatorname{tg} \alpha - 4) = 0 \ ,$$

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{tg} \alpha = 4 \ .$$

Skal vi finne tangentvinkelen til kurven $y = f(x)$ i punktet $(x_0, f(x_0))$, dvs. for $x = x_0$, går vi fram på samme måte:



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Q_y - P_y}{Q_x - P_x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} v = \lim_{Q \to P} \operatorname{tg} \alpha = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

Vi legger merke til at hvis uttrykket for $\operatorname{tg} v$ skal ha noen mening, så må vi ha

$$\lim_{h \to 0} \left[f(x_0+h) - f(x_0) \right] = 0$$

$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

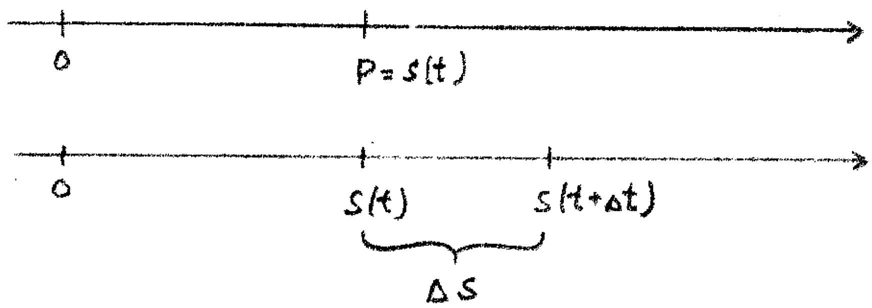
dvs funksjonen f må være kontinuerlig i $x = x_0$. Skal tangentbegrepet ha noen mening, må vi vite at kurven er sammenhengende.

Hvis kurven foruten å være sammenhengende også har en bestemt tangentretning i hvert punkt, vil vi oppfatte den som "glatt og pen".

Andre problemer fører til grenseverdier av samme type som innrammet ovenfor. For eksempel:

Et punkt beveger seg langs en rett linje. Punktets posisjon målt ut fra et punkt O er en funksjon av tiden, fordi det til enhver tid t er tilordnet en posisjon P,

$$P = s(t)$$



I tidsintervallet Δt har punktet tilbakelagt distansen

$$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$$

Begrepet hastighet assosierer vi med hvor fort punktet beveger seg i et gitt tidspunkt. Presisering av hastighetsbegrepet følger nedenfor. Uttrykket

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

som vi kaller gjennomsnittshastigheten uttaler seg om bevegelsen i tidsintervallet Δt som følger etter tidspunktet t.

Vi vet av praktiske erfaringer at gjennomsnittshastigheten i tidsintervallet som følger etter tidspunktet t ikke er representativ for hva som skjer ved tidspunktet t (Det er for sent å bremse ned etter at radarkontrollen har knepet oss ved t). Den matematiske definisjon (presisering) av (momentan) hastighet $u(t)$ ved tidspunktet t er

$$\boxed{u(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}}$$

som vi skal oppfatte på følgende måte: Samme hver liten en velger ε, eksisterer det en verdi Δt slik at

$$\left|\frac{\Delta s}{\Delta t} - u(t)\right| < \varepsilon$$

Vi ser at Δt kan aldri være lik null.

Sammenligner vi uttrykket for $u(t)$ på side 35 med uttrykket for $tg\,V$ på side 34, ser vi at grenseverdiene som inngår er av samme type. Vi legger også merke til at vi ut på posisjonsfunksjonen s har avledet (på engelsk: derived) en ny funksjon, hastighetsfunksjonen u. Tilsvarende svarer det en verdi $tg\,V$ til enhver x_0 i formelen på side 34, $tg\,V$ er altså en funksjon av x_0, $tg\,V$ er avledet av kurvefunksjonen f.

Gitt en funksjon F. Hvis

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \text{ eksisterer},$$

er dette en ny funksjon av x som vi kaller den deriverte av F, og som vi betegner med $\frac{dF}{dx}$ eller F'. Definisjonen av den deriverte funksjon er altså

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

En nødvendig betingelse for at en funksjon skal være deriverbar er at funksjonen er kontinuerlig,

$$\lim_{\Delta x \to 0} |F(x+\Delta x) - F(x)| = 0 .$$

Den deriverte funksjon er meget viktig i anvendt matematikk, fordi den gir uttrykk for hvordan en kontinuerlig funksjon forandrer seg når argumentet forandres. Vi har sett eksempler på dette foran: tangentvinkelen til et punkt på en kurve angir hvor bratt kurven stiger eller synker når argumentet øker, hastigheten gir uttrykk for hvor fort posisjonen forandres. Hvis vi går tilbake til vårt tidligere eksempel med bakterievekst, så vil "the rate of change" $\frac{dN}{dt}$,

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t},$$

angi hvor fort bakterieantallet vokser (ΔN er antall nye bakterier i tidsintervallet Δt). Men legg merke til at vi her har tilnærmet bakterieantallfunksjonen n med en kontinuerlig funksjon N, i virkeligheten kan vi ikke gjøre Δn vilkårlig liten bare ved å gjøre Δt tilstrekkelig liten, den minste tilvekst Δn vi kan ha er 1 bakterie.
NB! Tilnærmelsen av n til en kontinuerlig funksjon N skyldes ikke at bakteriene er små, men at det er mange av dem!

For andre betydninger av den deriverte, se Sydsæter kap. 4, § 2.

Derivasjonsregler: Sydsæter kap. 4, § 3-5.

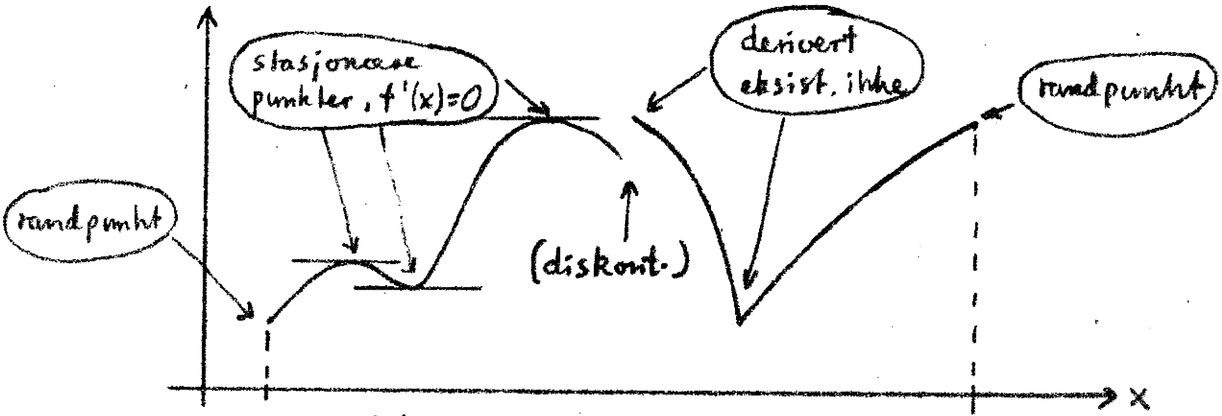
Anvendelser av derivasjon

1. Max/min. Se Sydsæter kap. 5.

Følgende setning danner grunnlaget for oppleting av max/min-punkter (ekstrempunkter):

> La f være en funksjon definert i et område D og c et indre punkt i D. Dersom c er et ekstrempunkt for f i D, og $f'(c)$ eksisterer, da er $f'(c)=0$.

For bevis, se Sydsæter s. 135.



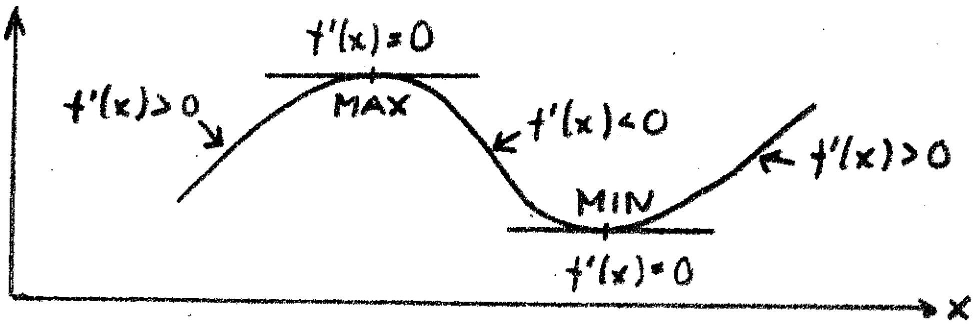
Setningen medfører at eventuelle max/min-punkter i det indre av D må finnes blandt de punkter der den deriverte er lik null (stasjonære punkter) eller blandt de punkter der den deriverte ikke eksisterer, herunder eventuelle diskontinuitetspunkter.

Hvis D er et lukket, begrenset intervall, kan f oppnå max/min på randa av intervallet (endepunktene).
Hvis D er lukket og begrenset og f er kontinuerlig, garanterer ekstremverdisetningen (s. 31) at f har max/min.

> Vi må derfor undersøke
> a) de punkter der $f'(x)=0$,
> b) de punkter der $f'(x)$ ikke eksisterer,
> c) eventuelle randpunkter.

For tilfelle a), $f'(c_i) = 0$, har vi
maximum i c (globalt eller lokalt) hvis $f'(x)$ skifter
fortegn i c fra positiv til negativ med voksende x,
minimum i c (globalt eller lokalt) hvis $f'(x)$ skifter
fortegn i x_0 fra negativ til positiv med voksende x.

førstederivert test



Da vi har at $f'(x)$ avtar med voksende x når vi
passerer gjennom et maximumspunkt $x = x_0$, må vi ha
$f''(x_0) \leq 0$ i dette tilfelle.
Da vi har at $f'(x)$ øker med voksende x når vi
passerer gjennom et minimumspunkt $x = x_0$, må vi ha
$f''(x_0) \geq 0$ i dette tilfelle.

annenderivert test

I mange tilfelle kan det være vanskelig å løse
ligningen $f'(x) = 0$. Ofte kan vi f.eks. ved hjelp av
skjæringssetningen vise at det må eksistere en løsning.
Vi kan deretter prøve å finne en tilnærmet verdi for
løsningen.

Teorien for max/min er meget viktig i anvendte
fag, kanskje spesielt i økonomi, teknikk og fysikk.
Se Sydsæter s. 139, eks. 5 for en viktig anvendelse i
økonomi. Som et teknisk preget eksempel kan vi ta følgende:

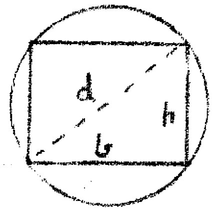
Eksempel:

For bjelker med rektangulært tverrsnitt er motstandsmomentet proporsjonalt med bjelkens bredde og med kvadratet av bjelkens høyde:

$$M = kbh^2$$

Hvordan skal man skjære en bjelke av en sirkulær tømmerstokk slik at bjelken får størst mulig motstandsmoment?

$$b^2 + h^2 = d^2 = \text{konstant}, \quad h^2 = d^2 - b^2,$$



$$M(b) = kb(d^2 - b^2) .$$

Vi legger merke til at vårt problem fastlegger definisjonsområdet for M

$$0 < b < d .$$

Vi ser at $M(b) > 0$ i hele definisjonsområdet og at $\lim\limits_{b \to 0} M(b) = \lim\limits_{b \to d} M(b) = 0$. M er kontinuerlig og må oppnå et maksimum; dette kan bare skje der

$$M'(b) = k(d^2 - 3b^2) = 0$$

dvs. for

$$3b^2 = d^2 .$$

Da er

$$h^2 = 3b^2 - b^2 = 2b^2, \qquad \underline{\frac{h}{b} = \sqrt{2} \approx \frac{7}{5}}$$

2. Funksjonsdrøfting. Se Sydsæter kap. 6, § 8.

A. Undersøkelse av $f(x)$

a) Definisjonsområde. Punkter der $f(x)$ er diskontinuerlig.

b) Nullpunkter og fortegnsdrøfting for $f(x)$.

c) Oppførsel for store verdier av $|x|$ (assymptotisk oppførsel)

Kan være aktuelt: Symmetri. Periodisitet.

B. Undersøkelse av $f'(x)$

d) Beregning av $f'(x)$. Punkter i def.omr. hvor $f'(x)$ ikke eksist.

e) Nullpunkter og fortegnsdrøfting for $f'(x)$

f) Lokale og globale ekstrempunkter for $f(x)$.

Kan være aktuelt: $f'(x)$ for store $|x|$. $f''(x)$.

Se eksemplene i Sydsæter. Eksempel 4 er viktig for statistikken (normalfordeling).

Eksempel:

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2-1} = \frac{e^{-x}}{(x+1)(x-1)} \qquad \text{(Eksamen NLH 9/6-69)}$$

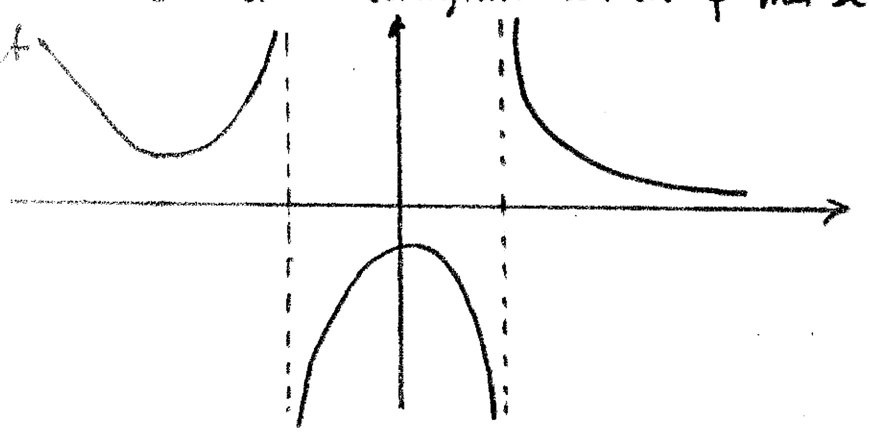
a) f def. for $x \neq \pm 1$ Vertikale tangenter for $x = \pm 1$.

b) $f(x) \neq 0$ for alle x

		-1		1	
$x+1$	- - -	|	———	|	———
$x-1$	- - -	|	- - - - -	|	———
$f(x)$	+	|	—	|	+

c) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ $\qquad \lim_{x \to -\infty} f(x)$ eksisterer ikke

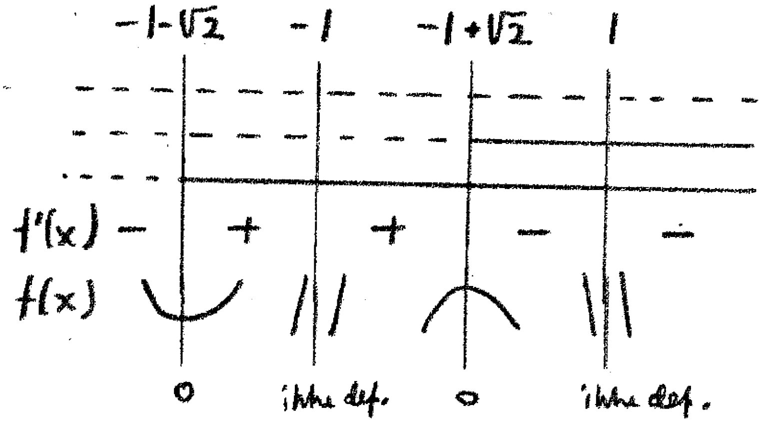
Allerede nå vet vi at diagrammet av f må se noenlunde slik ut



d) $f'(x) = \dfrac{-(x^2-1)e^{-x} - e^{-x} \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-e^{-x}(x^2+2x-1)}{(x^2-1)^2}$

e) $f'(x) = 0$ for $x^2+2x-1=0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2} \approx \begin{cases} 0{,}4 \\ -2{,}4 \end{cases}$

f)

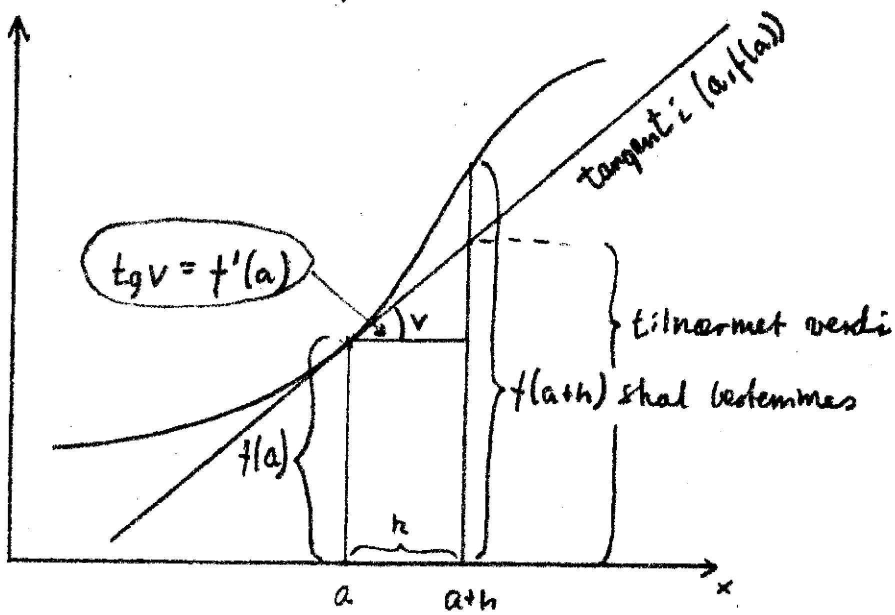


Funksjonen har lokalt min. for $x = -1-\sqrt{2}$ og lokalt max. for $x = -1+\sqrt{2}$. Max/min verdiene bör beregnes.
Nå kan vi tegne et mer nöyaktig diagram.
Pröv å tegne diagram av funksjonen $N(t)$ gitt på s. 7.

3. <u>Tilvekstformelen</u> (se Sydsæter kap. 4, § 6)

For en rekke funksjoner forholder det seg slik at funksjonsverdien er kjent i visse punkter, men at det bortsett fra disse spesielle punkter er vanskelig eller umulig å finne eksakt numerisk verdi for funksjonsverdien. For eksempel kjenner vi verdien av e^x for $x=0$, mens vi derimot ikke vet hvordan funksjonsverdien skal beregnes for $x = 0{,}1$ eller $x = 1$. Tilsvarende har vi $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, mens $\sin 0{,}1 = ?$ og $\sqrt{4} = 2$ mens $\sqrt{5} = ?$

En rekke slike numeriske verdier er tabulert (se Logaritmetabellen), men vi trenger allikevel metoder for tilnærmet beregning av funksjonsverdier.



La oss anta at vi kjenner funksjonsverdien i a og ønsker å beregne funksjonsverdien i et nærliggende punkt a+h. (Eks: Kjenner $e^0 = 1$ og ønsker å beregne $e^{0,1}$, dvs. $f(x) = e^x$, $a = 0$, $h = 0,1$)

Hvis $f(x)$ er kontinuerlig og deriverbar, kan vi som en tilnærmelse følge tangenten i stedet for kurven fra punktet $(a, f(a))$ når h er liten. Vi får da

$$f(a+h) \approx f(a) + h \operatorname{tg} v$$

eller

$$\boxed{f(a+h) \approx f(a) + h f'(a)} \qquad h \text{ liten}$$

som er tilvekstformelen for en funksjon av <u>en</u> variabel. Denne kan brukes til tilnærmet beregning av $f(a+h)$ hvis vi kjenner $f(a)$ og $f'(a)$, og i mange tilfelle er det slik at for de verdiene av a hvor $f(a)$ er kjent eksakt, kan vi også beregne $f'(a)$. Eksempel:

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $e^{0,1} \approx 1 + 0,1 \cdot 1 = 1,1$

$f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $\sin 0,0175 \approx 0,0175$

$f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f(4) = 2$, $f'(4) = \dfrac{1}{4}$. $\sqrt{5} \approx 2 + 1 \cdot \frac{1}{4} = 2,25$

Det er vesentlig å kunne fastslå hvor nøyaktige disse beregningene er. Dette kommer vi tilbake til i kapitel X.

Av figuren på forrige side ser vi at feilen vil avhenge av størrelsen på h og at vi bare bør bruke tilvekstformelen for små h (små = ?). Videre kan vi skjønne at feilen avhenger av kurvens form omkring $x = a$, dvs av funksjonsforskriften f, og av verdien av a.
En indikasjon på at tilvekstformelen er meget brukbar får vi ved å sammenligne de numeriske verdiene vi fant med verdiene i logaritmetabellen.

Tilvekstformelen kan skrives på en rekke forskjellige måter. Setter vi $a + h = x$, får vi

$$\boxed{f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)} \qquad (x-a) \text{ liten}$$

Denne formen bruker vi hvis vi ønsker å erstatte den gitte funksjon med en rett linje i et intervall omkring $x = a$. Eksempel: $\sqrt{x} \approx 2 + \frac{1}{4}(x-2)$ omkring $x = 2$.
Et viktig spesialtilfelle får vi for $a = 0$:

$$\boxed{f(x) \approx f(0) + f'(0)x} \qquad x \text{ liten}$$

Eksempel: $\sin x \approx x$, $e^x \approx 1 + x$ for små x.

En annen måte å skrive tilvekstformelen på er

$$\boxed{f(x+dx) \approx f(x) + f'(x)\,dx} \qquad dx \text{ liten.}$$

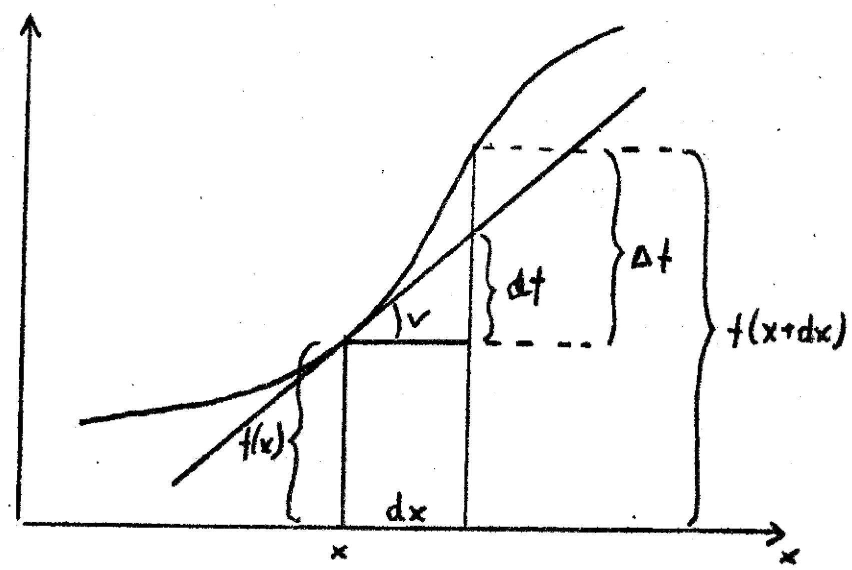
Med

$$\Delta f = f(x+dx) - f(x)$$

får vi

$$\boxed{\Delta f \approx f'(x)\,dx} \qquad dx \text{ liten}$$

Se figur på neste side.



Vi introduserer <u>differensialet</u> df ved

$$df = \operatorname{tg} v \, dx = f'(x)dx$$

og har at funksjonsdifferensen tilnærmes med differensialet for små dx :

$$\boxed{\Delta f \approx df} \qquad dx \text{ liten}$$

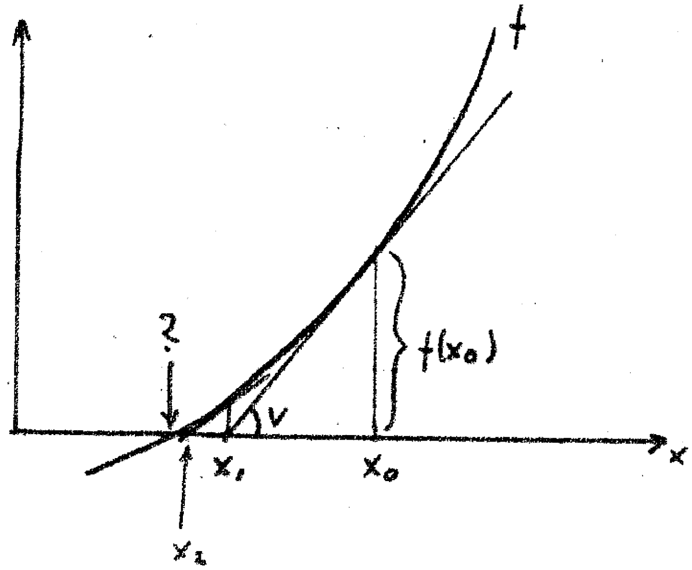
Å benytte tilvekstformelen er altså det samme som å tilnærme funksjonsdifferensen med differensialet (approximation by differentials). Se eksempler i Ayres Chapter 23.

4. <u>Newtons metode</u>

Newtons metode for tilnærmet løsning av en ligning

$$f(x) = 0$$

baserer seg på samme prinsipp som tilvekstformelen: Vi følger tangenten istedet for grafen og tilnærmer derved funksjonen med en linear funksjon i et lite intervall.



Vi forutsetter at nullpunktet ikke kan bestemmes eksakt, men at vi har funnet et punkt x_0 hvor $|f(x_0)|$ er liten, slik at x_0 kan betraktes som en tilnærmet løsning av ligningen. Vi bør helst ha en garanti for at det eksisterer en løsning nær x_0, f.eks. ved bruk av skjæringssetningen.
Det punkt x_1 hvor tangenten gjennom $(x_0, f(x_0))$ skjærer x-aksen vil vanligvis være en bedre tilnærmelse til nullpunktet enn x_0 (se figuren). Vi har at

$$\operatorname{tg} v = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

$$\boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

En praktisk brukbar løsning får vi bare når $|f'(x_0)|$ ikke er for liten. Det er gjerne fordelaktig å regne ut også

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

som vanligvis er en bedre tilnærmelse enn x_1. Sekvensen x_0, x_1, x_2 gir en ide om nøyaktigheten av tilnærmelsen. Det kan være aktuelt å regne videre (x_3, x_4 etc.).
Følgende eksempel viser at metoden kan gi gode resultater.

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

$f(1) = -1$, $f(2) = 2$, følgelig nullpunkt i $\langle 1, 2 \rangle$.
Velger $x_0 = \frac{3}{2}$,

$$f'(x) = 2x$$

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{x_0}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{17}{12} = 1{,}417$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 2}{2x_1} = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{x_1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{12} + \frac{12}{17} = \frac{577}{408} = 1{,}414216$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{577}{408} + \frac{408}{577} = 1{,}41421356237$$

Ved sammenligning med tabell finner vi at verdien for x_3 tilsvarer korrekt avrundet verdi med 11 desimaler!
For husbruk kunne vi vel trygt nøyd oss med tilnærmelsen x_2.

VI FUNKSJONER AV FLERE VARIABLE

1. INNLEDNING.

En generell definisjon av funksjonsbegrepet er gitt av Nyborg på side 11 foran.

Det ble der nevnt at en viktig type av funksjoner er funksjoner av flere variable. Vi gjentar definisjonen:

> En funksjon F av flere variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$, er en forskrift som til hvert sett av tall $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tilordner et entydig bestemt tall z, og vi skriver
>
> $$z = F(x_1, x_2, \cdots, x_n) .$$

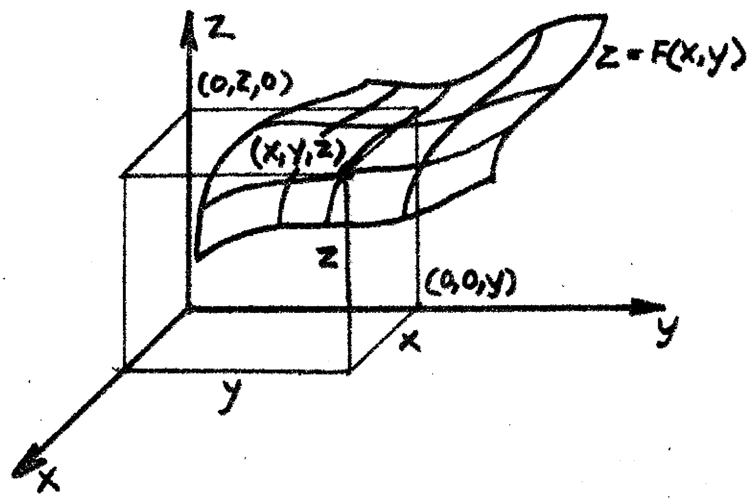
Det er selvfølgelig mulig å studere egenskaper til disse funksjonene ved å betrakte alle variable unntatt en som parametre og benytte seg av resultater fra teorien for funksjoner av en variabel. I mange tilfelle er det imidlertid nødvendig å studere den samtidige variasjon av flere variable, for eksempel hvis problemet er å finne ekstremalpunkter for funksjonen. Det er derfor nødvendig å utarbeide en mer generell teori for funksjoner av flere variable. Denne teorien vil selvfølgelig inneholde teorien for funksjoner av en variabel som spesialtilfelle, og er bygd opp som en generalisering av denne.

I dette notater gjennomgår vi endel av de viktigste elementer av denne teorien. Det er ikke en fullstendig oversikt, for eksempel er viktige begrep som grenseverdi og kontinuitet ikke behandlet. Det legges mere vekt på intuitiv forståelse enn på matematisk stringens. For enkelthets skyld skal vi også begrense oss til stort sett å diskutere funksjoner av to variable, siden resultater for to variable som regel uten videre kan generaliseres til et vilkårlig antall variable.

En mere fullstendig behandling er gitt i kap. 7, kap. 9, § 9 og kap. 10, § 4-5. Også i Ayres er det nyttige avsnitt om funksjoner av flere variable.

2. PARTIELT DERIVERTE.

En funksjon F av to variable gitt ved z = F(x,y) kan gis en grafisk (geometrisk) representasjon i et 3-dimensjonalt rom. Hvis F er en kontinuerlig funksjon, dvs. at funksjonsmengden eller mengden av funksjonsverdier er "sammenhengende", vil diagrammet eller grafen av F være en flate i x,y,z-rommet (se figuren). Det er denne geometriske interpretasjon som gjør det fordelaktig å begrense diskusjonen til funksjoner av to variable.



Som tidliger nevnt, kan man for noen formål betrakte z = F(x,y) som en funksjon av f.eks. x med y som en parameter som har en vilkårlig, men fast verdi. Anta at F er en deriverbar funksjon av x for denne verdi av y. Vi kan da innføre den partielt deriverte av z m.h.p. x og skriver

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \text{den deriverte av } z \text{ mhp. } x \text{ når } y \text{ holdes konstant.}$$

Tilsvarende definerer vi den partielt deriverte av z m.h.p. y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \text{den deriverte av } z \text{ mhp. } y \text{ når } x \text{ holdes konstant.}$$

Andre skrivemåter er

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = F_x'(x,y) .$$

og tilsvarende for $\partial z/\partial y$. De to siste skrivemåter antyder at vi med dette har innført to nye funksjoner $\partial F/\partial x$ og $\partial F/\partial y$, på samme måte som vi ved derivasjon av funksjonen f gitt ved $y = f(x)$ etablerer funksjonen $f' = df/dx$. Altså

$f(x)$	er	verdien	av	funksjonen	f	i	punktet	x
$F(x,y)$	"	"	"		F	"	"	(x,y)
$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$	"	"	"		$\frac{\partial F}{\partial x}$	"	"	"
$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$	"	"	"		$\frac{\partial F}{\partial y}$	"	"	"

Definisjonen av de partielt deriverte er følgelig (se side 20 i Nyborgs notat for definisjon av df/dx og sammenlign)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y) - F(x,y)}{\Delta x} ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x, y+\Delta y) - F(x,y)}{\Delta y} .$$

Disse definisjonene kan uten videre generaliseres til funksjoner av vilkårlig antall variable. For eksempel,

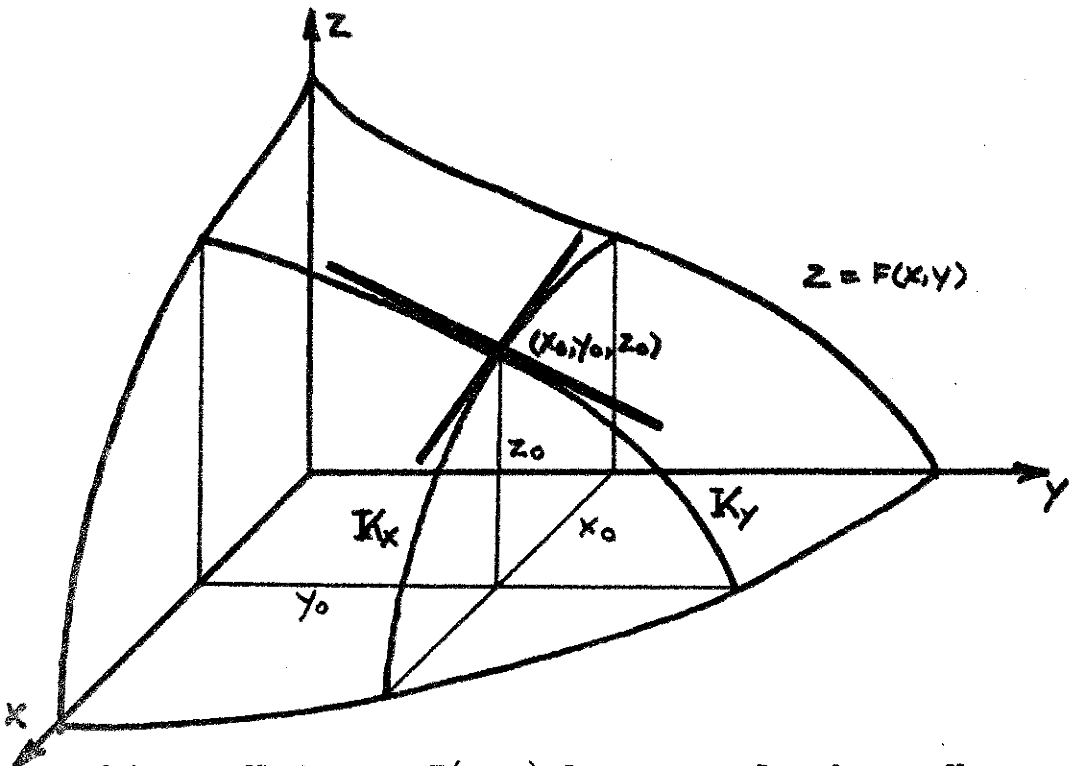
$$u = F(x,y,z,w) ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y, z, w) - F(x,y,z,w)}{\Delta x} .$$

For funksjoner av to variable kan vi gi en enkel geometrisk interpretasjon av $\partial F/\partial x$ og $\partial F/\partial y$. (Se figur på neste side.) Gjennom flatepunktet (x_0,y_0,z_0) kan vi legge to plan parallelle med hhv. xz-planet og yz-planet. Ligningen for et plan gjennom (x_0,y_0,z_0) parallelt med yz-planet er

$$x = x_0 ,$$

fordi alle punkt i dette planet og ingen andre tilfredstiller denne ligningen. Tilsvarende har det andre planet gjennom punktet parallelt med xz-planet ligningen $y = y_0$. Planet $y = y_0$



skjærer flaten z =F(x,y) langs en plan kurve K_x som har ligningen

$$z = F(x, y_0) \ ,$$

og fra interpretasjonen av den deriverte vet vi at vinkelkoeffisienten k_x for denne kurven i punktet (x_o, y_o, z_o) er den deriverte av z m.h.p. x i dette punktet, altså

$$k_x = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \ .$$

Tilsvarende er vinkelkoeffisienten for kurven K_y i samme punkt

$$k_y = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$$

De partielt deriverte $\partial F/\partial x$ og $\partial F/\partial y$ gir derfor stigningsforholdet i hhv. x-retningen og y-retningen for flaten i hvert punkt på flaten.

I det følgende antar vi at $\partial F/\partial x$ og $\partial F/\partial y$ er kontinuerlige. Tangentene til de to kurvene K_x og K_y i punktet (x_o, y_o, z_o) definerer et plan som da er tangentplanet til flaten i punktet. Da er det også mulig å definere den deriverte i en vilkårlig retning uttrykt ved $\partial F/\partial x$ og $\partial F/\partial y$, og en kan f.eks. finne den retning som har en oppgitt vinkelkoeffisient. Dette er noe de fleste gjør bruk av når de skal kjøre på ski ned en bratt fjellside.

Hvis f.eks. y holdes konstant og x gis en liten tilvekst dx, vil tilveksten Δz_x til z være tilnærmet gitt som

$$\Delta z_x \equiv F(x+dx,y) - F(x,y) \approx \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,dx\ .$$

For en funksjon av n variable $z = F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ er likedan

$$\Delta z_1 \equiv F(x_1+dx_1, x_2, \cdots, x_n) - F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$\approx \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,dx_1\ ,$$

der Δz_1 er tilveksten til z når x_1 gis tilveksten dx_1 og <u>alle de andre variable holdes konstant</u>. Høyre side av denne ligningen kan kalles <u>det partielle differensial av z m.h.p. x_1</u>.

Vi har imidlertid også bruk for å kunne finne en tilvekstformel som gjelder når <u>alle</u> variable får (små) tilvekster samtidig. Analogt med differensialet $dy = f'(x)dx$ for en funksjon av en variabel, defineres <u>det totale differensial</u> dz for $z = F(x,y)$ ved

$$dz \equiv \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,dy\ ,$$

som er summen av de to partielle differensialer. Det kan vises at for <u>små</u> tilvekster dx og dy gjelder tilvekstformelen

$$\Delta z \approx dz$$

eller

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx F(x,y) + \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,\Delta y\ .$$

Feilen i denne tilnærmelsen er for små Δx og Δy av annen orden i Δx og Δy (dvs. av formen $\alpha(\Delta x)^2 + \beta\,\Delta x\Delta y + \gamma(\Delta y)^2$).

Ved en figurbetraktning kan man overbevise seg om at dz representerer tilveksten til tangentplanet og Δz tilveksten til flaten, analogt med situasjonen for en funksjon av én variabel.

for en funksjon av flere enn to variable defineres likedan det totale differensial som summen av alle de partielle differensial, og det representerer også i dette generelle tilfellet en første ordens tilnærmelse til tilveksten til funksjonen.

3. EKSTREMALVERDIPROBLEMET FOR FUNKSJONER AV FLERE VARIABLE.

Av teoretiske grunner og ikke minst med tanke på praktiske anvendelser er det nødvendig å utvikle en metode for å finne maksimal- og minimalpunkter for funksjoner av flere variable.

For eksempel utføres praktisk talt all industriell produksjon med et ønske om å oppnå maksimal profitt. Dette oppnås ved å minimalisere produksjonsomkostningene, finne den mest økonomiske omsetningsform, de mest gunstige priser etc.

En metode for å oppnå dette er å lage en matematisk modell for produksjon, omsetning eller salg, dvs. ligninger som gir forventet fortjeneste som funksjon av en eller vanligvis flere variable, så som priser, interne produksjonsforhold, lønninger, antall arbeidere osv. Hvis modellen er god, vil de optimale forhold som finnes matematisk stemme overens med de virkelige optimale forhold.

Vi skal i det følgende se på den matematiske side av saken.

Et maksimalpunkt, lokalt maksimum, eller relativt maksimum for en funksjon er et punkt der funksjonsverdien er større enn for alle andre punkter som ligger tilstrekkelig nær. Minimalpunkt, lokalt minimum eller relativt minimum defineres tilsvarende som et punkt der funksjonsverdien er mindre enn i alle andre punkt som ligger tilstrekkelig nær. Begge typer punkt betegnes som ekstremalpunkt.

Uten bevis påstår vi nå at ekstremalpunkt for en funksjon kan forekomme i følgende slags punkter:

a) I et punkt der <u>alle</u> de partielt deriverte av funksjonen er null. For en funksjon av to variable følger dette av den geometriske interpretasjon av de partielt deriverte som er gitt ovenfor, men det kan også bevises analytisk i det generelle tilfelle med n variable.

b) I punkter på randa av definisjonsområdet.

c) I punkter der funksjonen er diskontinuerlig.

d) I punkter der en eller flere av de partielt deriverte er diskontinuerlige.

På den annen side er det klart at ikke alle randpunkt er ekstremalpunkt, og alle de partielt deriverte i et punkt kan være null uten at funksjonen har ekstremalverdi i punktet. Betingelsene a) - d) ovenfor er derfor nødvendige, men ikke tilstrekkelige for at funksjonen skal ha ekstremalverdi.

Hvis vi ser bort fra punktene b), c), d), har vi altså:

Nødvendig betingelse for ekstremalpunkt for funksjonen F gitt ved $z = F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ i et indre punkt av definisjonsområdet er

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

(Et indre punkt er et punkt i definisjonsområdet som ikke ligger på randa.)

Disse betingelsene gir n ligninger hvis løsning gir et eller flere <u>mulige</u> ekstremalpunkter. Hvert enkelt punkt må så undersøkes spesielt for å finne de virkelige ekstremalpunkter og om disse er maksimal- eller minimalpunkter. Bare for n=2 er det praktisk å angi generelle tilstrekkelige kriterier (se Ayres: Calculus, side 279). Ved praktiske problemer følger det ofte av problemets art om de funne punkter er ekstremalpunkter eller ikke.

Det vil føre for langt her å gi noen metode for undersøkelse av randpunktene, både fordi det generelt er et vanskelig problem og fordi det vanligvis er av mindre interesse i praktiske problemer. Vi nøyer oss derfor å referere til eksemplene nedenfor.

4. EKSEMPLER.

I dette avsnittet skal vi gi en del eksempler på den teorien for optimalisering som er gitt foran, og tilslutt et eksempel på en viktig type problem der denne teorien ikke kan benyttes.

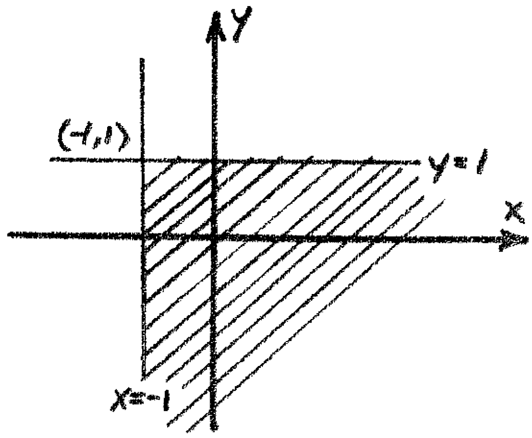
1) Vi skal først undersøke eventuelle ekstremalpunkter for funksjonen gitt ved

$$z = F(x,y) = xy^2 + x^2y = xy(x+y)$$

i området gitt ved

$$x \geq -1, \quad y \leq 1$$

dvs. området som er skravert på figuren.



Vi undersøker først de indre punktene, og får

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + x^2.$$

Den eneste løsning av ligningene

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

er punktet $x = y = 0$, altså origo, med funksjonsverdi $z = 0$. For å undersøke om dette virkelig er et ekstremalpunkt, beregner vi

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y,$$
$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x + 2y,$$
$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x,$$

og finner at

$$s^2 - rt = 4(x+y)^2 - 4xy = 0 \quad \text{for } x = y = 0.$$

Denne metoden gir derfor ikke noe svar i dette tilfellet. Men hvis vi ser på funksjonsuttrykket, ser vi at z <u>ikke</u> har fast fortegn omkring origo, dvs. z kan få både positive og negative verdier for vilkårlig små verdier av $|x|$ og $|y|$. Origo er derfor ikke ekstremalpunkt.

La oss så studere randa. Flatens snittkurve med det vertikale planet x = -1 er

$$z = -1 \cdot y(-1+y) = y(1-y) = y - y^2.$$

Denne kurven er en parabel med maks.punkt for

$$\frac{dz}{dy} = 1 - 2y = 0 \quad , \text{dvs. } y = \tfrac{1}{2}.$$

For å undersøke om dette er maks.punkt for flata (innenfor definisjonsområdet) beregner vi $\partial z / \partial x$ i dette punktet. Vi får

$$\frac{\partial F}{\partial x}(-1, \tfrac{1}{2}) = -1 + \tfrac{1}{4} = -\tfrac{3}{4} < 0 .$$

Av tilvekstformelen får vi da, siden $\frac{\partial F}{\partial y}(-1, \frac{1}{2}) = 0$,

$$F(-1+\Delta x, \tfrac{1}{2}+\Delta y) - F(-1, \tfrac{1}{2}) \approx \frac{\partial F}{\partial x}(-1,\tfrac{1}{2})\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}(-1,\tfrac{1}{2})\Delta y$$
$$= -\tfrac{3}{4}\Delta x .$$

Innen definisjonsområdet må vi ha $\Delta x \geq 0$, og det følger at for små $\Delta x, \Delta y$ i definisjonsområdet er tilveksten negativ, følgelig er $(-1, \frac{1}{2})$ et maksimalpunkt.

Flatens snittkurve med det andre planet y = 1 som avgrenser definisjonsområdet er

$$z = x(1+x) = x + x^2.$$

Dette er også en parabel med min.punkt for

$$\frac{dz}{dx} = 1 + 2x = 0 \quad , \text{dvs. } x = -\tfrac{1}{2}.$$

Helningen av flaten vinkelrett på planet i dette punktet $(-\frac{1}{2}, 1)$ er

$$\frac{\partial F}{\partial y}(-\tfrac{1}{2}, 1) = -\tfrac{3}{4}.$$

Ved en diskusjon som ovenfor finner vi at

$$F(-\tfrac{1}{2}+\Delta x, 1+\Delta y) - F(-\tfrac{1}{2}, 1) \approx -\tfrac{3}{4}\Delta y .$$

Siden $\Delta y \leq 0$ i definisjonsområdet er derfor alle funksjonsverdier i punkter omkring $(-\frac{1}{2},1)$ som tilhører definisjonsområdet større enn $F(-\frac{1}{2},1)$, og dette punktet er et minimalpunkt for funksjonen.

Det eneste punkt som gjenstår er hjørnepunktet $(-1,1)$. Tilvekstformelen gir

$$F(-1+\Delta x, 1+\Delta y) - F(-1,1) \approx -\Delta x - \Delta y \; .$$

I definisjonsområdet er $\Delta x \geq 0, \Delta y \leq 0$, og tilveksten har derfor ikke fast fortegn i punktet. Dette punktet er derfor heller ikke ekstremalpunkt.

Alle punkter i definisjonsområdet er nå undersøkt, og resultatet er et lokaltmaksimum i $(-1,\frac{1}{2})$ og et lokalt minimum i $(-\frac{1}{2},1)$.

Prøv på grunnlag av de analytiske resulatene ovenfor å skissere flata omkring de undersøkte punktene!

2) Minste kvadraters metode.

a) Anta en størrelse x er målt n ganger med måleresultat x_i, $i = 1, 2,,,n$. For eksempel kan x være avstanden mellom to punkter i terrenget. Vi ønsker å gi et <u>estimat</u> $\hat{x}$ av den sanne avstand x. Minste kvadraters metode er en metode til å gi et slikt estimat. Noen begrunnelse for metoden kan vi ikke gi her, det er et problem som vil bli nærmere behandlet i statistikken.

Ifølge minste kvadraters metode finnes estimatet $\hat{x}$ av størrelsen x ut fra måleresultatene x_i som den verdi som gir minimumsverdi for summen

$$S(x) = (x-x_1)^2 + (x-x_2)^2 + \cdots + (x-x_n)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (x-x_i)^2 .$$

Vi ønsker altså å bestemme estimatet slik at <u>summen av kvadratet av avstandene mellom den målte verdi og estimatet blir minst mulig.</u>

Ved derivasjon finner en at det søkte estimat er gitt ved

$$\hat{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

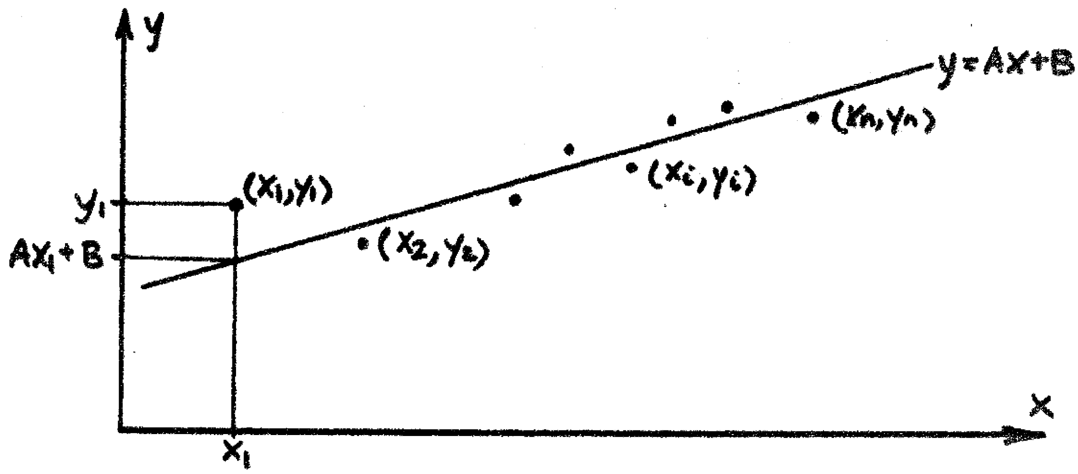
som er middelverdien av måleresultatene.

b) Vi skal se på en annen anvendelse av metoden. Anta det er målt en rekke samhørende verdier av to størrelser x og y, med måleresultat x_i og y_i, i = 1, 2,...,n. For eksempel kan x være belastningen på en bjelke og y den tilsvarende nedbøyning. Så lenge nedbøyningene er små, er det rimelig å anta at nedbøyningen er (tilnærmet) proporsjonal med belastningen, selv om en vet at denne sammenhengen ikke kan være ubegrenset gyldig (f.eks. vil bjelken brekke ved en viss belastning).

Vi antar altså

$$y = Ax + B$$

og ønsker å gi estimater $\hat{A}$ og $\hat{B}$ av A og B på grunnlag av de målte verdier x_i og y_i. Ut fra minste kvadraters metode vil vi bestemme estimatene slik at summen av kvadratet av de vertikale avstander mellom de observerte punkter og den rette linja y = Ax + B er minst mulig (se figuren). Altså, finne mi-



nimum for

$$S(A,B) = (Ax_1+B-y_1)^2 + (Ax_2+B-y_2)^2 + \cdots + (Ax_n+B-y_n)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(Ax_i+B-y_i)^2 .$$

Ved partiell derivasjon følger

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 2x_1(Ax_1+B-y_1) + 2x_2(Ax_2+B-y_2) + \dots + 2x_n(Ax_n+B-y_n)$$
$$= 2A\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2B\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ ,$$

$$\frac{\partial S}{\partial B} = 2(Ax_1+B-y_1) + 2(Ax_2+B-y_2) + \dots + 2(Ax_n+B-y_n)$$
$$= 2A\sum_{i=1}^{n} x_i + 2Bn - 2\sum_{i=1}^{n} y_i \ .$$

For enkelthets skyld innfører vi

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x} \ ,$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \overline{y} \ ,$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \overline{xy} \ ,$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \overline{x^2} \ .$$

Merk at $\overline{x^2} \neq \overline{x}^2$! Minimum finnes da for de verdier av A og B som tilfredstiller

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 0 \ , \quad \frac{\partial S}{\partial B} = 0 \ ,$$

eller

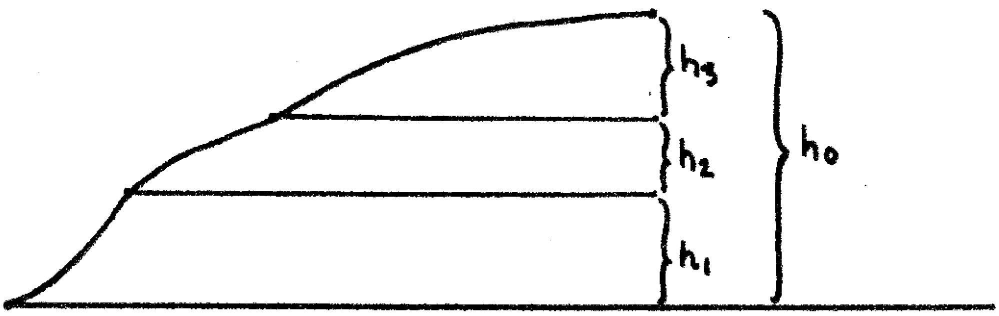
$$\overline{x^2}A + \overline{x}B = \overline{xy} \ ,$$
$$\overline{x}A + B = \overline{y} \ .$$

Av den siste av disse lignignene ser vi at linja går gjennom punktet $(\overline{x},\overline{y})$. Det er da tilstrekkelig å bestemme vinkelkoeffisienten A. Løsning av lignignene gir

$$\hat{A} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$$

som estimat for A. At dette virkelig gir minimum for S kan en se på forskjellig vis.

c) Minste kvadraters metode kan også benyttes ved utjevning av feil. Anta f.eks. at følgende høydeforskjeller er målt



De sanne høydeforskjeller H_1, H_2, H_3, H_o må tilfredstille

$$H_1 + H_2 + H_3 = H_0 .$$

På grunn av målefeil vil de målte verdier vanligvis ikke tilfredstille denne betingelsen. Det er derfor nødvendig å utjevne målefeilene for å få konsistente resultat, dvs. de utjevnede verdier må tilfredstille ligningen ovenfor. La oss anta at alle høydeforskjellene er målt med samme usikkerhet.

Etter minste kvadraters metode må vi finne minimum for funksjonen

$$S(H_1, H_2, H_3, H_0) = (H_1 - h_1)^2 + (H_2 - h_2)^2 + (H_3 - h_3)^2 + (H_0 - h_0)^2$$

med bibetingelsen

$$H_1 + H_2 + H_3 = H_0 .$$

Vi lar H_1,H_2,H_3 være de 3 uavhengige variable, og får ved derivasjon

$$\frac{\partial S}{\partial H_1} = 2(H_1 - h_1) + 2(H_0 - h_0) \quad \text{etc.}$$

Ligningene til bestemmelse av minimumspunktet blir

$$H_1 + H_0 = h_1 + h_0 ,$$
$$H_2 + H_0 = h_2 + h_0 ,$$
$$H_3 + H_0 = h_3 + h_0 .$$

Løsningen finnes lett og gir estimatene

$$\hat{H}_1 = h_1 - \tfrac{1}{4}\epsilon ,$$
$$\hat{H}_2 = h_2 - \tfrac{1}{4}\epsilon ,$$
$$\hat{H}_3 = h_3 - \tfrac{1}{4}\epsilon ,$$
$$\hat{H}_0 = h_0 + \tfrac{1}{4}\epsilon ,$$

der

$$\epsilon = h_1 + h_2 + h_3 - h_0 .$$

3) Lineær programmering.

Det siste eksemplet er hentet fra det viktige området lineær programmering, som går ut på å finne ekstremalverdier for lineære funksjoner av flere variable i et område gitt ved lineære bibetingelser. For lineære funksjoner er de partielt deriverte konstante. Det blir derfor ingen ekstremalpunkt i det indre av definisjonsområdet, dvs. ekstremalpunktene ligger alltid på randa.

Når antall uavhengige variable er $\leqq 3$, kan lineære programmeringsproblemer løses geometrisk. For et større antall variable er de vanlige optimaliseringsmetodene til liten hjelp, og det har vært nødvendig å lage en egen teori for løsning av lineære programmeringsproblemer, siden dette er av betydelig interesse innen økonomiske analyser, transportanalyser, produksjonskontroll osv.

Det følgende er et enkelt eksempel på lineær programmering som kan løses ved konvensjonelle metoder fordi det bare er to uavhengige variable.

En fabrikant produserer tre forskjellige artikler a, b, c. Han regner med å kunne selge $1\frac{1}{2}$ ganger så mye av a og av c som av b til fastsatte priser. Vi kaller mengdene av artiklene A,B,C, og fortjensten pr artikkel er

$$f_a = 2 \quad , \quad f_b = 6 \quad , \quad f_c = 1 .$$

Forventet fortjeneste er proporsjonal med

$$F = 6A + 12B + 3C = 3(2A + 4B + C) .$$

Han kan produsere totalt 1000 eksemplarer pr. uke:

$$A + B + C = 1000 .$$

Han vil lage flere av c enn av b:

$$B \leq C$$

Han vil lage minst 100 av hver av a og b:

$$A \geq 100 , \quad B \geq 100 .$$

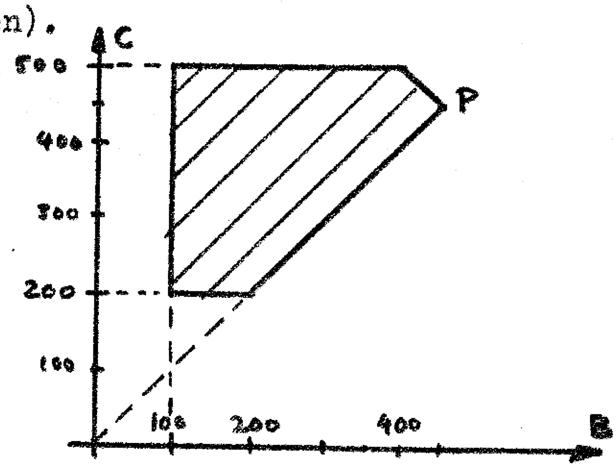
Han vil lage mellom 200 og 500 av c:

$$200 \leq C \leq 500 .$$

Disse betingelsene kan skrives

$$B \leq C$$
$$B + C \leq 900$$
$$B \geq 100$$
$$200 \leq C \leq 500$$

og er oppfylt i et visst område i B,C planet (skravert på figuren).



Når A elimineres er F en funksjon av B og C. Det søkte maksimumspunkt finnes i et av hjørnene av randpolygonen, og ved direkte utregning finnes maksimal fortjeneste i hjørnet P:

$$F = 3(2000 + 2B - C) = \text{max. for } B = C = 450 ,$$
$$A = 1000 - 2 \cdot 450 = 100 .$$

Den såkalte simplexmetoden for løsning av det generelle lineære programmeringsproblem er en generalisering av denne geometriske metode, men er for komplisert til å komme inn på her.

VII UBESTEMT INTEGRAL

I praktiske anvendelser kommer vi ofte bort i problemet å finne en funksjon F som har en gitt funksjon f til derivert. Et naturlig navn på F ville være "antiderivert til f", men vi skal bruke den vanlige betegnelsen og kaller F et ubestemt integral til f.

| En kontinuerlig funksjon f definert i et intervall [a,b] har alltid et ubestemt integral. |

Se setning 9.1, s. 290 i Sydsæter.

Setningen sikrer oss eksistensen av det ubestemte integral, men garanterer ikke at vi klarer å finne F når f er gitt. Mens vi har derivasjonsregler som setter oss istand til å derivere en hvilkensomhelst elementær funksjon (og som gir den deriverte som en annen elementær funksjon), finnes det ikke integrasjonsregler som knekker alle integrasjonsproblemer. Noen ganger gir vi opp et integrasjons-problem fordi vi ikke er lure nok eller utholdende nok, men vi skal også være klar over at det finnes mange elementære funksjoner hvis ubestemte integral ikke er elementære funksjoner.

| Hvis F er et ubestemt integral til f i et intervall [a,b], da vil ethvert annet ubestemt integral til f adskille seg fra F med en konstant. |

Se korrolar til setning 5.4, s. 148 i Sydsæter.

Som symbol for et vilkårlig ubestemt integral til f bruker vi $\int f(x)dx$ og skriver

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad \text{når } F'(x) = f(x)$$

for å markere at $F(x)+C$ er den mest generelle funksjonen som har $f(x)$ til derivert.

Hvordan skal vi finne $\int f(x)dx$ når $f(x)$ er gitt? Noen ganger kjenner vi igjen $f(x)$ som den deriverte av en annen funksjon, f.eks $\int 2x\,dx = x^2 + C$, men som oftest må vi ty til

a) integrasjonsmetoder
b) triks og knep
c) integraltabeller (formelsamling)

Etter avsluttet matematikkeksamen vil de fleste prøve alternativ c), men det hender ganske ofte at akkurat det integralet vi er interessert i, ikke står i tabellen. Vi må da kunne regne ut integralet på egenhånd, eller omforme og forenkle det til et tabulert integral. Vi kommer derfor ikke utenom alternativene a) og b).

Alternativ b) blir aktuelt når man selv har prøvd seg på et par hundre eksempler: Ayres Chapters 25-30.

Alternativ a) integrasjonsmetoder:

<u>Integrasjon ved substitusjon</u> (innføring av ny variabel) er særlig nyttig fordi vi kan forenkle, men også omforme til tabulerte integraler. Se Sydsæter kap. 9, §5 og Ayres Chapter 25.

Delvis integrasjon er en annen metode til forenkling av ubestemte integraler. Se Sydsæter kap. 9, §4 og Ayres Chapter 26.
Delbrøkoppløsning av integranden er aktuelt når integranden er en rasjonal funksjon (brøkfunksjon hvor teller og nevner er polynomer). Se Ayres Chapter 29.

HOW TO DO IT :

Kjenner du igjen integranden?
Titt i tabellen!
Har du teft, så bruk den!
Det skulle vel ikke være en rasjonal funksjon?
Prøv med ny variabel
Prøv med en annen ny variabel

Prøv med delvis integrasjon
Prøv med en annen delvis integrasjon

Finn på noe annet å gjøre!

Øve, øve, jevnt og trutt og tappert - det er tingen!

VIII DIFFERENSIALLIGNINGER

En differensialligning er en ligning som inneholder funksjoner (av en eller flere uavhengige variable) og deres deriverte. Differensialligningen kalles ordinær hvis det bare inngår en uavhengig variabel, partiell hvis det inngår to eller flere uavhengige variable. Ordenen av en differensialligning er ordenen til den høyeste deriverte som forekommer i differensialligningen.

I de følgende ordinære differensialligningene er x den uavhengige variable og y er en funksjon av x:

(1) $$x\frac{dy}{dx} + y = 3x^2 ,$$

(2) $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4y = 0 ,$$

(3) $$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0 ,$$

(4) $$2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 .$$

(1) og (2) er av første orden, (3) og (4) er av annen orden.

(5) $$\frac{dx}{dt} - y = 0 , \quad \frac{dy}{dt} + x = 0$$

er et sett av <u>simultane</u> ordinære differensialligninger av første orden. Her er t den uavhengige variable og x og y er funksjoner av t.

De følgende partielle differensialligninger

$$(6) \qquad x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z ,$$

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

er henholdsvis av første og annen orden. I (6) og (7) er z å betrakte som en funksjon av de to uavhengige variable x og y.

En funksjonsforbindelse mellom avhengige og uavhengige variable som tilfredsstiller differensialligningen kalles en <u>løsning</u> av differensialligningen. For eksempel er $y = x^2$ en løsning av (1), siden

$$xy' + y = x \cdot 2x + x^2 = 3x^2 .$$

Men det kan også vises at $y = x^2 + \frac{C}{x}$ (hvor C er en vilkårlig konstant) er en løsning av (1):

$$xy' + y = \left(2x - \frac{C}{x^2}\right)x + \left(x^2 + \frac{C}{x}\right) = 3x^2 .$$

Tilsvarende kan det vises at $y = x^2$ også er en løsning av differensialligningene (2), (3) og (4). Videre kan det vises at

$$y = x^2 + Cx + \frac{C^2}{4}$$ er en løsning av (2)

$$y = C_1 x + C_2 x^2$$ —"— (3)

$$y = \frac{2x}{C_1} - \frac{2}{C_1^2}\ln(1 + C_1 x) + C_2$$ —"— (4)

En løsning av en n-te ordens differensialligning som inneholder n uavhengige, vilkårlige konstanter kalles en almen løsning. Vi har ovenfor angitt almene løsninger av differensialligningene (1), (2), (3) og (4).
$y = x^2$ sies å være en partikulær løsning av de samme differensialligningene. Vi legger merke til at $y = x^2$ er inneholdt i den almene løsningen for (1), (2) og (3), men ikke i den almene løsningen for (4). Vi sier at $y = x^2$ er en singulær løsning av (4). Bare hvis det ikke eksisterer singulære løsninger er den almenne løsningen en fullstendig løsning av differensialligningen. Singulære løsninger er vanligvis av liten interesse for løsning av praktiske problemer.

Differensialligninger er av stor betydning for teoretiske undersøkelser i naturfag, teknikk og økonomi. En differensialligning kan beskrive hvordan et system forandrer seg og den gir løsninger i form av funksjoner. Konstantene som forekommer i løsningen bestemmes av systemets begynnelses- eller sluttilstand. (For ligning (4) får vi med betingelsene $y = y' = 0$ for $x = 0$ ikke bestemt konstanten C_1.)

Løsning ved kvadratur

Den aller enkleste typen differensialligning

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

har som fullstendig løsning

$$y = F(x) + C = \int f(x)\,dx + C$$

hvor $F(x)$ er den antideriverte av $f(x)$, dvs. $F'(x) = f(x)$. Hvis en kan finne $\int f(x)\,dx$ uttrykt ved elementære funksjoner, kan altså differensialligningen løses ved integrasjon, eller som en ofte sier, ved kvadratur.

Også andre differensialligninger enn den spesielle typen ovenfor kan løses ved kvadratur. Men løsningsmetoden vil avhenge av differensialligningens form, det eksisterer ingen felles metode for løsning av alle typer differensialligninger. Vi skal her bare se på løsningsmetoden for et par spesielle, men i praksis meget viktige typer differensialligninger, separable differensialligninger og lineære differensialligninger.

Hvis en differensialligning ikke kan løses ved kvadratur, kan det være aktuelt å finne løsning på annen måte, f.eks. kan løsningen i mange tilfelle uttrykkes ved en potensrekke. Tilnærmete løsninger er også aktuelle i mange tilfelle. Dette skal vi komme tilbake til i kap. X.

Separable differensialligninger.

Differensialligningen

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

kalles <u>separabel</u>, fordi en kan skrive

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$$

slik at venstre side bare avhenger av y og høyre side bare avhenger av x.

Her er løsningen av differensialligningen gitt ved

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx .$$

Det ser vi hvis vi deriverer venstre side og høyre side hver for seg mhp x:

$$\frac{d}{dx}\int \frac{dy}{g(y)} = \frac{d}{dy}\left[\int \frac{dy}{g(y)}\right]\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{g(y)}\,\frac{dy}{dx}, \qquad \text{V.S.}$$

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x), \qquad \text{H.S.}$$

ifølge den gitte differensialligning er disse uttrykkene like.

<u>Eksempel 1:</u>

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

$$\frac{dy}{y} = k\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int k\,dx = k\int dx$$

$$\ln|y| = kx + C$$

$$|y| = e^{kx+C} = e^{C}\cdot e^{kx} = C'e^{kx} \quad , \; y = C''e^{kx}$$

Eksempel 2:

$$\frac{dy}{dx} = Ky(M-y)$$

$$\int \frac{dy}{y(M-y)} = \int K dx$$

$$\frac{1}{M}\int\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{M-y}\right]dx = \int K dx \quad \text{(delbrøkspalting)}$$

$$\ln|y| - \ln|M-y| = MKx + C$$

$$\left|\frac{y}{M-y}\right| = e^{MKx+C} = C'e^{MKx}$$

$$\frac{y}{M-y} = C''e^{MKx}$$

$$y = \frac{MC''e^{MKx}}{1+C''e^{MKx}} = \frac{M}{1+C'''e^{-MKx}}$$

Differensialligningen i eksempel 1 korresponderer til den enkle modellen for bakterievekst som vi introduserte på s. 5. Vi ser at løsningen er en ekoponensialfunksjon.
Differensialligningen i eksempel 2 korresponderer til den forbedrete modell for bakterievekst på s. 6. Løsningen av denne ligningen kalles den logistiske funksjon (se oppg. 8.14 i oppgavesamlingen).

Vekstloven

$$\frac{dx}{dt} = \pm kx \qquad (k>0)$$

gjelder eksakt eller tilnærmet for mange forskjellige prosesser (vi har allerede brukt den for bakterievekst). Plussfortegnet korresponderer til et vekstproblem, mens minusfortegnet korresponderer til et svinnproblem (decay). Løsningene er ifølge eksempel 1 henholdsvis

$$x = x_0 e^{kt} \quad , \qquad x = x_0 e^{-kt}$$

Som et par ikke-biologiske eksempler kan vi nevne kontinuerlig forrentning av kapital (pluss-fortegn i lign.) radioaktiv decay og avkjøling (minus-fortegn i lign.) Se oppg. 8.16 og 8.19 i oppgavesamlingen.

Eksempel 3 (Eks.oppg. NLH 16/6-70)
Fordampning (sublimasjon) fra en møllkule er til enhver tid proporsjonal med kulas overflate. Hvis møllkulas diameter reduseres fra 12mm til 10 mm i løpet av 20 døgn, hvor lang tid tar det før møllkula er forsvunnet?
Løsning:
fordampning = massetap pr. tidsenhet $= -\frac{d}{dt}\rho V = -\rho\frac{dV}{dt}$

$$-\rho\frac{dV}{dt} = k\cdot 4\pi r^2$$

$$-\rho\, 4\pi r^2\frac{dr}{dt} = k\cdot 4\pi r^2$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{k}{\rho}$$

$$dr = -\frac{k}{\rho}\,dt \qquad \underline{r = r_0 - \frac{k}{\rho}t}$$

Radien avtar altså lineært. Med $r_0 = r(0) = 6mm$, $r(20) = 5mm$ finner vi at kula forsvinner etter 120 dager.

Bruk en tilsvarende modell til å forklare at radien i kuleformede manganknoller som dannes på havbunnen ved avsetning om en kjerne, kan antas å øke lineært med tiden. Hvordan øker volumet med tiden?

Lineære differensialligninger

Differensialligningen

$$y' = P(x)y + Q(x)$$

er av første orden, vi kaller den lineær fordi den er lineær i y. For å løse ligningen, setter vi

$$y = u \cdot v, \qquad u \text{ og } v \text{ er funksjoner av } x$$

$$uv' + \underbrace{u'v = P(x)uv}_{} + Q(x)$$

vi ønsker å få disse leddene til å heve hverandre:

$$u' = P(x)u \qquad \text{separabel}$$

$$\frac{du}{u} = P(x)\,dx$$

$$\ln|u| = \int P(x)\,dx + \ln C_1$$

$$u = \pm C_1 e^{\int P(x)dx}.$$

La oss bruke

$$\underline{u = e^{\int P(x)dx}}.$$

Vi får nå

$$uv' = Q(x) \;, \quad v' = \frac{Q(x)}{u}$$

og følgelig
$$v = \int \frac{Q(x)}{u}\,dx + C$$

som gir oss

$$\underline{\underline{y = u \cdot v = u\int \frac{Q(x)}{u}\,dx + Cu \,.}}$$

Dette kan vises å være det almene integralet av den gitte lineære differensialligningen.
For $C = 0$ får vi det partikulære integralet

$$y = u\int \frac{Q(x)}{u}\,dx$$

slik at

den almene løsningen av

$$y' = P(x)y + Q(x)$$

er summen av en <u>partikulær</u> løsning av denne (inhomogene) ligningen og den <u>generelle</u> løsningen av den tilsvarende homogene ligningen

$$u' = P(x)u \,.$$

<u>Eksempel 4</u>:

$$y' = 2xy + 1$$
$$y' = P(x)y + Q(x) \quad , \; P(x) = 2x \,, \; Q(x) = 1$$
$$u = \pm C_1 e^{\int 2x\,dx} = \pm C_2 e^{x^2}$$
$$y = \pm C_2 e^{x^2}\int \frac{1}{\pm C_2 e^{x^2}}\,dx \pm C C_2 e^{x^2}$$
$$= e^{x^2}\int e^{-x^2}\,dx + C_3 e^{x^2}$$

Integralet $\int e^{-x^2}dx$ kan ikke uttrykkes ved elementære funksjoner.

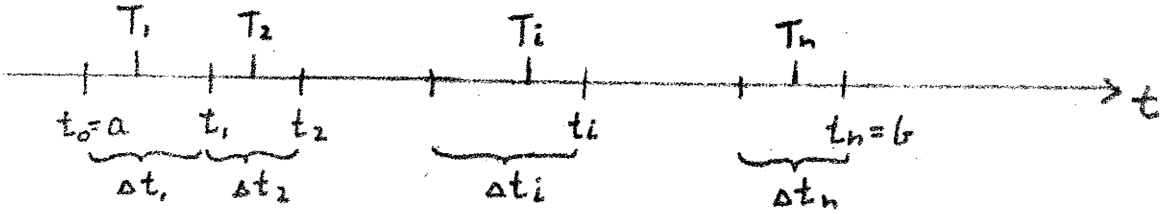
<u>Nødvendige egenskaper ved anvendte differensialligninger.</u>

1. Eksistens av løsninger.
   Hvis ligningen ikke har løsninger i det aktuelle område, er modellen ikke brukbar.
2. Entydighet av løsninger.
   For fysikalske systemer venter vi at en bestemt tilstand <u>alltid</u> følges av den samme utvikling. (For biologiske og sosiologiske systemer er dette en tvilsom påstand.)
   En løsning som refererer seg til et anvendt (fysikalsk) problem må derfor være <u>entydig</u> (Hva med løsning (4) s. 68 for $x=0$?)
3. Kontinuitet mhp. utgangsbetingelsene.
   Vi venter at en liten variasjon i utgangsbetingelsene (f.eks. en liten forandring i bakterieantallet ved $t=0$), bare skal gi en liten forandring i løsningen.

IX BESTEMT INTEGRAL

Vi skal nok en gang studere bevegelsen av et punkt langs en rett linje. Hvis vi kjenner punktets hastighet til enhver tid, hvordan kan vi klare å beregne hvor langt punktet har beveget seg i et spesifisert tidsintervall?

Hadde hastigheten vært konstant, kunne vi bare anvendt vår barnelærdom om at tilbakelagt distanse er lik hastighet × tidsintervall. Det vi vil gjøre, er først å finne et tilnærmet uttrykk på følgende måte: Vi deler tidsintervallet $[a,b]$ i mange små deler og tilnærmer tilbakelagt distanse i hvert delintervall ved formelen hastighet × tidsintervall, hvor vi for hvert delintervall bruker en hastighetsverdi avlest i dette delintervallet.



Tilnærmelsen for tilbakelagt veilengde S_a^b fra tiden $t=a$ til tiden $t=b$ blir da:

$$S_a^b \approx v(T_1)(t_1-t_0) + v(T_2)(t_2-t_1) + \cdots + v(T_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$+ \cdots + v(T_n)(t_n-t_{n-1})$$
$$= v(T_1)\Delta t_1 + v(T_2)\Delta t_2 + \cdots + v(T_i)\Delta t_i + \cdots + v(T_n)\Delta t_n$$

Dette kan vi skrive mer oversiktlig som

$$S_a^b \approx \sum_{i=1}^{n} v(T_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} v(T_i)\Delta t_i$$

I det lille tidsintervallet $\Delta t_i = (t_i - t_{i-1})$ kan vi vanligvis regne med at hastigheten v forandrer seg lite, slik at vi kan få en brukelig tilnærmelse for S_a^b ved en rimelig oppdeling. Videre kan vi regne med å få en bedre tilnærmelse jo finere oppdeling vi bruker. Hvis vi fortsetter oppdelingen slik at hvert enkelt delintervall går mot null, dvs gjøres vilkårlig lite, vil feilen vi gjør ved å regne hastigheten konstant i hvert delintervall kunne ellimineres, dvs. vi venter at det eksakte uttrykk for S_a^b er gitt ved

$$\boxed{S_a^b = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(T_i)\Delta t_i}$$

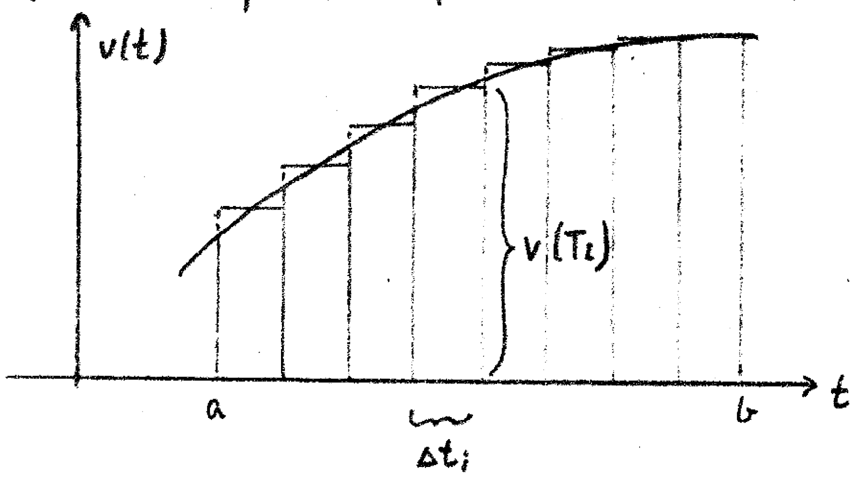
Vi sitter da igjen med to problemer, først å vise at en slik grenseverdi eksisterer, og deretter å finne en måte vi kan bruke til å beregne denne grenseverdien.

Før vi går løs på disse oppgavene, skal vi gjøre oppmerksom på at en rekke størrelser som inngår fysiske, biologiske og økonomiske teorier etableres som grenseverdi for en sum på tilsvarende måte som S_a^b. For eksempel vil tilveksten N_a^b i antall bakterier i en bakteriekultur fra tiden a til tiden b være gitt ved

$$\boxed{N_a^b = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(T_i)\Delta t_i}$$

når funksjonen v tas som veksthastigheten for bakteriekulturen $\frac{dN}{dt}$.

Det er alltid nyttig å tegne et diagram av den funksjonen vi undersøker. I dette tilfelle vil vi tegne diagram av $v(t)$. La oss anta at det ser slik ut (avhengig av funksjonsforskriften v)



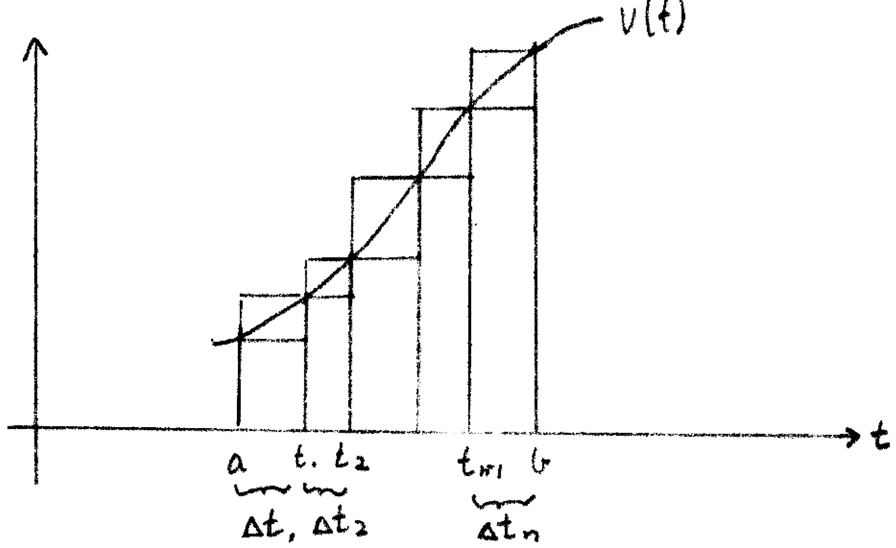
Da ser vi at $\sum_{i=1}^{n} v(T_i)\Delta t_i$ er et tilnærmet uttrykk for arealet mellom kurven og t-aksen og avgrenset av de rette linjene $t=a$ og $t=b$. Videre ser vi at jo finere oppdelingen er, jo bedre tilnærmelse får vi for arealet, og vi vil vente at det eksakte uttrykk for arealet vil være gitt ved

$$\boxed{A_a^b = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(T_i)\Delta t_i}$$

Dette betyr at hvis vi klarer å beregne arealet under kurven for en kontinuerlig funksjon, kan vi også løse andre problemer så som beregning av veilengde og bakterieantall fordi matematikken som inngår er den samme.

Vi skal først vise at det eksisterer en entydig grenseverdi A_a^b definert ved det innrammede uttrykk ovenfor, uavhengig av hvordan vi velger delintervallene Δt_i

og uavhengig av hvilken verdi T_i i Δt_i vi setter inn i funksjonen v. Vi må bare forutsette at funksjonen v er kontinuerlig, slik at grafen er en sammenhengende, "pen og pyntelig" kurve som kan avgrense et areal. For å gjøre undersøkelsen enklest mulig, forutsetter vi at funksjonen v er positiv og voksende.



Vi har nå at

$$\underline{S}_n < A_a^b < \overline{S}_n$$

hvor $\underline{S}_n$ og $\overline{S}_n$ er henholdsvis den innskrevne og den omskrevne "mangekant" (areal under step-funksjon). Vi har

$$\overline{S}_n = v(t_1)\Delta t_1 + v(t_2)\Delta t_2 + \cdots + v(t_{n-1})\Delta t_{n-1} + v(b)\Delta t_n$$

$$\underline{S}_n = v(a)\Delta t_1 + v(t_1)\Delta t_2 + \cdots + v(t_{n-2})\Delta t_{n-1} + v(t_{n-1})\Delta t_n$$

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n = (v(t_1)-v(a))\Delta t_1 + (v(t_2)-v(t_1))\Delta t_2 + \cdots + (v(b)-v(t_{n-1}))\Delta t_n$$

$$\leq (v(t_1)-v(a))\Delta t + (v(t_2)-v(t_1))\Delta t + \cdots + (v(b)-v(t_{n-1}))\Delta t$$

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n \leq (v(b)-v(a))\Delta t$$

hvor Δt betegner det største delintervallet.

Men da ser vi at $\overline{S}_n - \underline{S}_n$ kan gjøres mindre enn ethvert oppgitt positivt tall ε, bare vi foretar oppdelingen på en slik måte at det største delintervallet, Δt, tilfredsstiller

$$\Delta t < \frac{\varepsilon}{v(b)-v(a)} .$$

Vi har nå vist at differensen mellom oversummen $\overline{S}_n$ og undersummen $\underline{S}_n$ kan gjøres vilkårlig liten. Det betyr at hvis det eksisterer en grenseverdi for $\underline{S}_n$, så må denne også være grenseverdi for $\overline{S}_n$ og lik A_a^b som ligger mellom oversum og undersum.

Det er mulig å vise at det alltid eksisterer en grenseverdi for $\underline{S}_n$ når $\Delta t \to 0$ hvis funksjonen v er kontinuerlig i $[a,b]$. Beviset er besværlig og utelates her.

Siden vi også har at

$$\underline{S}_n < \sum_{i=1}^{n} v(T_i)\Delta t_i < \overline{S}_n$$

må vi ha at

$$A_a^b = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(T_i)\Delta t_i \text{ eksisterer når v er kontinuerlig}$$

Denne grenseverdien er et tall som er entydig bestemt av funksjonsforskriften v og grensene a og b, vi kaller dette tallet for det bestemte integral av v fra a til b (Riemann-integralet), og bruker følgende symbol for det:

$$\left(\int_a^b dt\, v(t) = \right) \quad \boxed{\int_a^b v(t)\,dt = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(T_i)\Delta t_i}$$

Vår forutsetning om at funksjonen v var voksende har ingen innflytelse på konklusjonene.

Vi forutsatte også at funksjonen var positiv. Selv når dette ikke er tilfelle eksisterer allikevel det bestemte integralet, men det er ikke lik arealet mellom kurven og x-aksen.

Hvordan skal vi beregne et bestemt integral? Eksemplet med beregning av tilbakelagt distanse S_a^b (side 23) fra $t=a$ til $t=b$ gir en indikasjon:

$$S_a^b = S(b) - S(a) = \int_a^b v(t)\,dt$$

hvor $S(t)$ er posisjonsfunksjonen som er forbundet med $v(t)$ gjennom

$$\frac{dS(t)}{dt} = v(t).$$

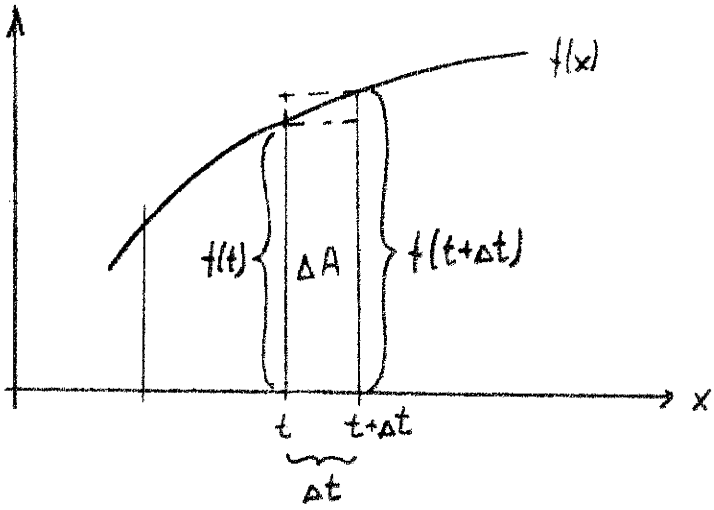
Gjelder det generelt at

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \text{når} \quad \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \qquad ?$$

Vi forutsetter at f er kontinuerlig, og igjen for enkelhets skyld at funksjonen også er positiv og voksende. Vi skal nå studere det bestemte integral av f når øvre grense varierer: Da det til enhver verdi t av øvre grense svarer en verdi for integralet, er

$$A_a^t = \int_a^t f(x)\,dx = A(t)$$

en funksjon av øvre grense t. Vi skal finne den deriverte av denne funksjonen:



$$f(t)\,\Delta t < \Delta A < f(t+\Delta t)\,\Delta t$$

$$f(t) < \frac{\Delta A}{\Delta t} < f(t+\Delta t)$$

når $\Delta t \to 0$:

$$f(t) \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA(t)}{dt} \qquad f(t)$$

dvs

$$\frac{dA(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = f(t)$$

Hvis vi kjenner en eller annen funksjon $F(t)$ som har $f(t)$ til derivert:

$$\frac{dF(t)}{dt} = f(t)$$

må vi ha

$$A(t) = F(t) + C$$

hvor C er en konstant. C bestemmes av at $A(a) = 0$:

$$A(t) = F(t) - F(a) .$$

Men da må vi også ha

$$A_a^b = A(b) = F(b) - F(a)$$

og

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) .$$

Integralregningens fundamentalteorem:
Hvis f er kontinuerlig i $[a,b]$, eksisterer

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(X_i)\Delta x_i .$$

Hvis dessuten $f = F'$, er

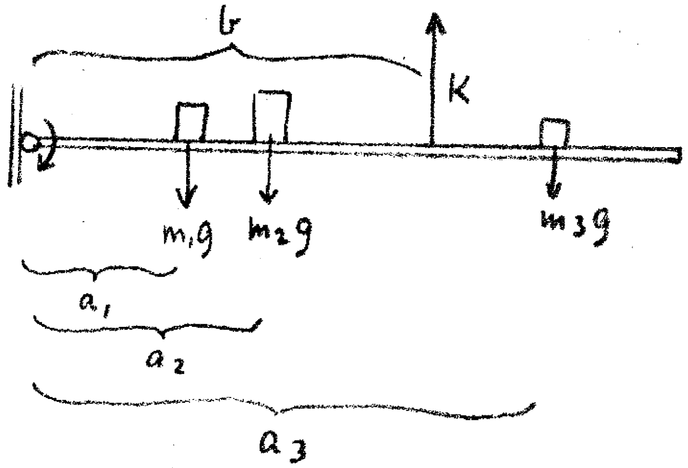
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) .$$

<u>Eksempler på anvendelse av bestemt integral</u>

<u>1. Moment og tyngdepunkt</u>

Fra fysikken vet vi at en enarmet vektstang er i likevekt hvis

a) summen av kreftene er lik null,
b) summen av momentene er lik null.



Ser vi bort fra vekta av stanga, har vi

a) $m_1 g + m_2 g + m_3 g - K = 0$,

b) $m_1 g a_1 + m_2 g a_2 + m_3 g a_3 - Kb = 0$.

Vi må følgelig ha at

$$K = (m_1 + m_2 + m_3) g = \left(\sum_{i=1}^{3} m_i\right) g ,$$

$$Kb = (m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3) g = \left(\sum_{i=1}^{3} m_i a_i\right) g .$$

Hvis vi har n laster, får vi tilsvarende

$$K = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) g \quad , \quad Kb = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i a_i\right) g .$$

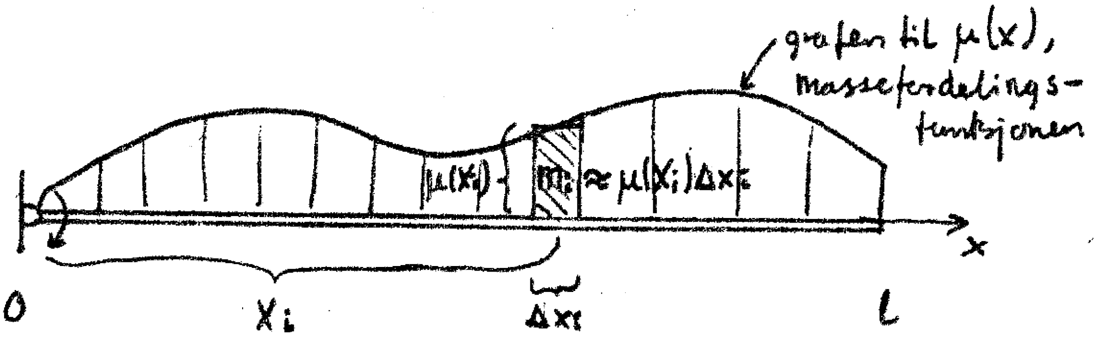
Vi kaller

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \quad , \quad M = \sum_{i=1}^{n} m_i a_i$$

h.h.vis for vektenes <u>totale masse</u> og vektenes <u>totale moment m.h.p. opplagringspunktet</u>. Vektenes <u>tyngdepunkt</u> er bestemt ved avstanden b fra opplagringspunktet:

$$b = \frac{M}{K} = \frac{\sum m_i a_i}{\sum m_i} .$$

Hva vis lasten er kontinuerlig fordelt over vektstangen (vi kan nå medregne stangvekta om vi vil)?



Vi kan nå <u>tilnærme</u> total masse og totalt moment ved

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \mu(X_i)\Delta x_i \ ,$$

$$M \approx \sum_{i=1}^{n} (\mu(X_i)\Delta x_i) X_i = \sum_{i=1}^{n} (X_i\, \mu(X_i))\Delta x_i \ .$$

Tilnærmelsen består i at vi regner massefordelingsfunksjonen konstant innen hvert delintervall.
Feilen ved tilnærmelsen vil bli stadig mindre ved stadig finere oppdeling, og vi får

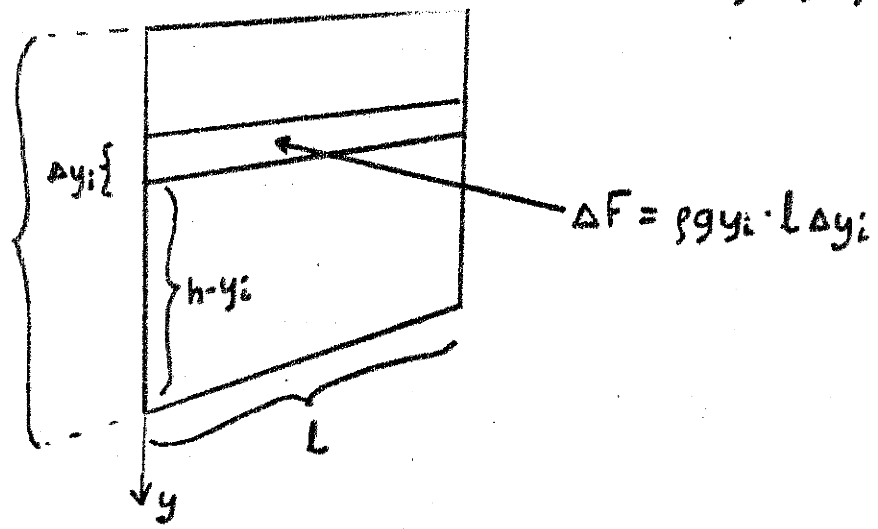
$$m = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(X_i)\Delta x_i = \int_0^l \mu(x)\,dx \ ,$$

$$M = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} (X_i\,\mu(X_i))\Delta x_i = \int_0^l x\mu(x)\,dx \ ,$$

$$b = \frac{\int_0^l x\mu(x)\,dx}{\int_0^l \mu(x)\,dx} \ .$$

Størrelsene m, M og b gir verdifulle opplysninger om fordelingsfunksjonen $\mu(x)$. Undersøkelse av fordelingsfunksjoner er viktig i mange andre fag enn fysikk, f.eks. i statistikk og økonomi. Størrelsen b definert ovenfor kaller en da ikke tyngdepunktskoordinaten, men <u>middelverdien av x over fordelingen $\mu(x)$</u>, eller i statistikken, forventningsverdien av x. Se Sydsæter s.324: Inntektsfordelingen i en befolkningsgruppe.

Bak en demning står vannet i en høyde h og i en lengde l. Vanntrykket forårsaker horisontale krefter på demningen, som altså må være forankret så den ikke skyves vekk. Demningen må også være sikret mot velting da de horisontale kreftene har et moment mhp dammens nederste kant. Vanntrykket i dybden y er lik $\rho g y$ (ρ: vannets tetthet, g: tyngdens akselerasjon)



Den totale horisontale kraft som virker på dammen er

$$F = \lim_{\Delta y_i \to 0} \sum_i F_i = \lim_{\Delta y_i \to 0} \sum_i \rho g y_i \, l \Delta y_i = \int_0^h \rho g l y \, dy = \frac{1}{2} \rho g l h^2 .$$

Det totale moment mhp dammens nederste kant er

$$M = \lim_{\Delta y_i \to 0} \sum_i F_i (h - y_i) = \int_0^h \rho g l y (h-y) \, dy = \frac{1}{6} \rho g l h^3 = \frac{1}{3} F h .$$

2. Middelverdi av en kontinuerlig funksjon

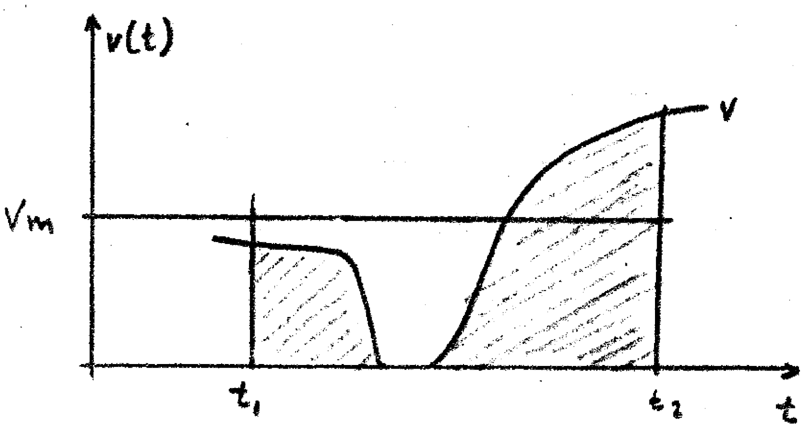
La oss nok en gang kjøre bil. I tidsintervallet fra t_1 til t_2 tilbakelegger vi en veilengde

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \, dt .$$

Med middelhastigheten mener vi

$$V_m = \frac{s}{t_2 - t_1}$$

dvs den konstante hastighet vi måtte benytte for å tilbakelegge distansen s i tidsrommet $t_2 - t_1$.



Det skraverte areal representerer tilbakelagt veilengde, arealet under den rette linje v_m mellom t_1 og t_2 skal være like stort.

I overensstemmelse med dette eksemplet definerer vi middelverdien av en kontinuerlig funksjon f(x) fra a til b ved

$$f_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Andre nyttige eksempler: Middelverdien av temperaturen ved en målestasjon eller strømforbruket i en by som funksjon av tiden, over en dag eller en måned eller et år.

En rekke anvendelser av bestemt integral i problemer i geometri og fysikk er inneholdt i Ayres, Chapters 34-43.

X TAYLORS FORMEL

1. Polynomtilnærmelse.

De opprinnelige fire regningsarter er nå blitt tilføyd to nye, derivasjon og multiplikasjon. Denne utvidelse av begrepsapparatet muliggjør en tilsvarende utvidelse av matematikkens anvendelsesområde. Ved hjelp av elektroniske regenmaskiner omfatter dette praktisk talt alle områder som kan beskrives ved kvantitative størrelser. Men ikke alle har en elektronisk regnemaskin (mange kan ikke engang bruke en regnestav!), og da kommer vi fort tilkort.

Får man f.eks.en differens mellom to nesten like tall, går ofte mange siffers nøyaktighet tapt (se oppgave 7.13). Det blir da nødvendig å regne med mange flere siffer enn det som kreves i svaret. Vanlige tabeller blir ikke alltid nøyaktige nok.

Andre ganger gir integrasjoner nye funksjoner som ikke kan uttrykkes ved de velkjente "elementære" funksjoner. Et eksempel er funksjonen

$$p(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

som forekommer bl. a. i statistikken. Vi trenger derfor metoder som setter en person med alminnelige kunnskaper i matematikk istand til å beregne verdien av slike funksjoner.

Ofte er også de funksjoner som framkommer som løsning av spesifikke problemer så kompliserte at det er ønskelig å kunne approksimere (tilnærme) dem med enklere funksjoner. De enkleste funksjonene vi kjenner til er polynomer, bl.a. fordi de kan beregnes ved hjelp av de fire elementære regningsarter.

Vi slår derved to fluer i ett smekk, har vi først tilnærmet en funksjon med et polynom, kan vi også beregne funksjonsverdien. Tilvekstformelen (kap.5) er et eksempel på dette, den består i tilnærmelse med et førstegradspolynom.

Men tilvekstformelen hadde to svakheter: Vi kunne ikke forbedre nøyaktigheten, og det var ikke mulig å angi hvor stor feil som ble begått. Begge disse svakheter skal vi nå rette på.

Praktisk talt alle de funksjoner vi benytter oss av har følgende egenskaper:

1) De er ubegrenset mange ganger deriverbare.
2) Funksjonene selv og deres deriverte kan beregnes eksakt i visse spesielle punkter.

Vi skal av disse grunner foreta polynomtilnærmelsen ved å kreve at funksjonen og polynomet er "mest mulig like" i ett punkt. Dette er ingen presis matematisk formulering, hva menes med "mest mulig like" ?

Et polynom P_n av n-te orden (n er høyeste potens) kan vi skrive

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n . \qquad (1)$$

Dette polynomet har meget enkle egenskaper i punktet x = 0, fordi

$$P_n(0) = a_0 \ , \ P_n'(0) = a_1 \ , \ P_n''(0) = 2a_2 \ , \ \text{osv.}$$

I andre punkter får vi mere kopliserte formler. Et polynom med enkle egenskaper i et vilkårlig punkt a skriver vi heller

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n . \qquad (2)$$

Da har vi

$$P_n(a) = a_0 \ , \ P_n'(a) = a_1 \ , \ P_n''(a) = 2a_2 \ , \ \text{osv.}$$

En egenskap til ved P_n må nevnes: Alle de høyere deriverte fra og med nr. n+1 er identisk lik 0. (Vis det for $P_3(x) = 1 + 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3$.)

Når vi presiserer "mest mulig lik" på følgende måte, kaller vi det polynomet vi kommer fram til for et Taylor polynom:

Taylor polynomet P_n av n-te orden til en funksjon f omkring punktet x=0 finnes ved å kreve

$$\left.\begin{aligned} P_n(0) &= f(0), \\ P_n'(0) &= f'(0), \\ P_n''(0) &= f''(0), \\ &\dots \\ P_n^{(n)}(0) &= f^{(n)}(0), \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

eller kortere

$$P_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) \ , \quad k = 0, 1, 2, \dots, n . \qquad (4)$$

(Hva mener vi med den nullte deriverte av f?)

Når vi bruker formen (1) for P_n er utregningen av a_0, a_1,.. osv. enkel (Sydsæter kap. 10, §1) og gir

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\,x^n. \qquad (5)$$

(Kontroller at betingelsene (3) er oppfylt. Hvorfor nøyer vi oss med disse n+1 betingelsene?)

Vi har grunn til å tro at $P_n(x)$ vil være en god tilnærmelse til $f(x)$ omkring $x=0$, og at tilnærmelsen blir bedre jo større n er. (Regn oppgave 7.3 eller se Sydsæter fig. 10.1.)

Det kan imidlertid også være aktuelt å tilnærme omkring andre punkter enn $x=0$, siden det er liten grunn til å vente at polynomet (5) gir noen brukbar tilnærmelse langt vekk fra origo. Helt analogt med definisjonen ovenfor definerer vi:

> Taylorpolynomet P_n av n-te orden til en funksjon f omkring punktet $x=a$ er gitt ved
>
> $$P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \quad , \quad k=0,1,2,\dots n. \qquad (6)$$

Dette står ikke direkte i læreboka. Vi bruker nå formen (2) for P_n. Vi får da

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n. \qquad (7)$$

(Kontroller denne formelen for $n=3$.)

Det er særlig en egenskap ved Taylorpolynomene som er nyttig. Hvis vi øker graden av polynomet, vil dette ikke forandre på de leddene vi allerede har. F.eks.

$$P_4(x) = P_3(x) + \frac{1}{4!}f^{(4)}(a)(x-a)^4.$$

Det er denne egenskap som gjør Taylorpolynomene praktisk brukbare.

Resultatene hittil kan sammenfattes i formlene

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + R_{n+1}(x), \qquad (8)$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_{n+1}(x), \qquad (9)$$

der den ukjente funksjonen R_{n+1} er feilen vi begår ved å approksimere f med P_n. Vi betegner gjerne R_n som restleddet. Merk at (8) er et spesialtilfelle av (9). Det eneste vi foreløpig kan si om R_n er at det er rimelig å vente at R_n blir mindre (i tallverdi) når n øker og når $x-a$ blir mindre.

For å forstå formlene (8) og (9) er det ikke minst viktig å se strukturen i dem, særlig fordi det brukes så mange forskjellige skrivemåter. La oss skrive dem som tilvekstformler:

$$f(x)-f(0)=f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+R_{n+1}(x),$$

$$f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n+R_{n+1}(x).$$

Strukturen i disse ligningene ser vi av følgende figur:

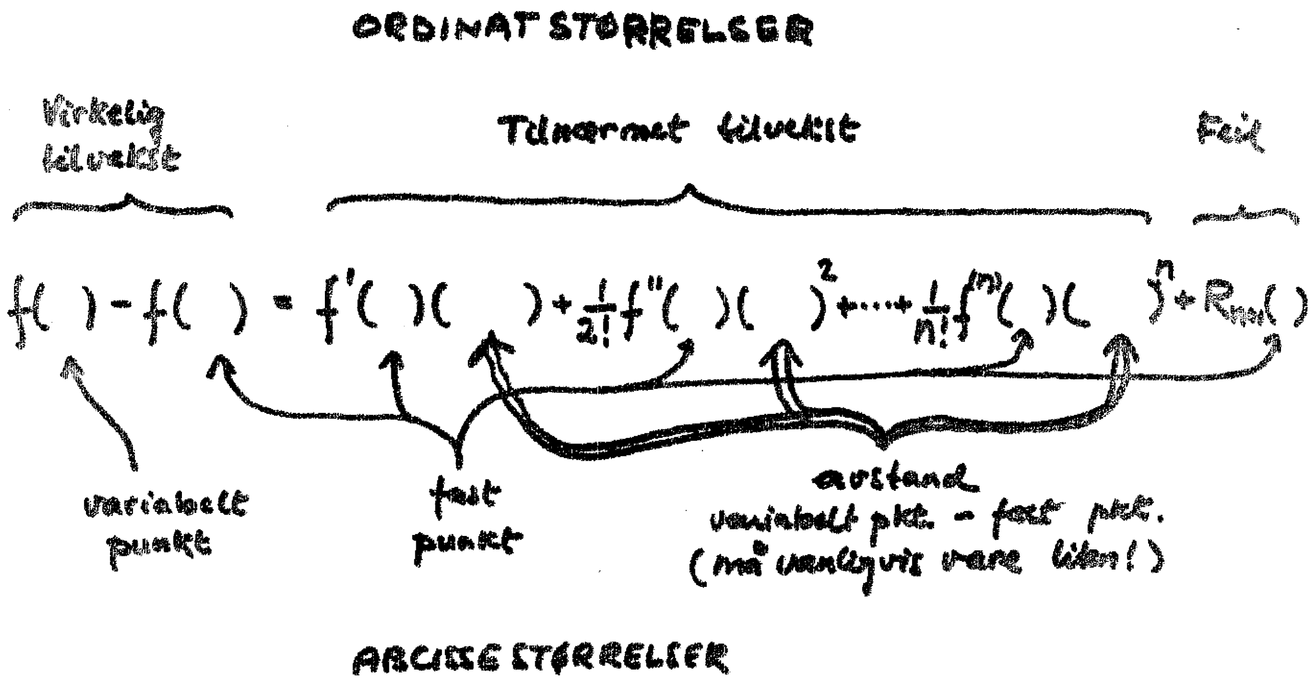


Fig. 1

De samme størrelser finner vi igjen på Fig. 2.

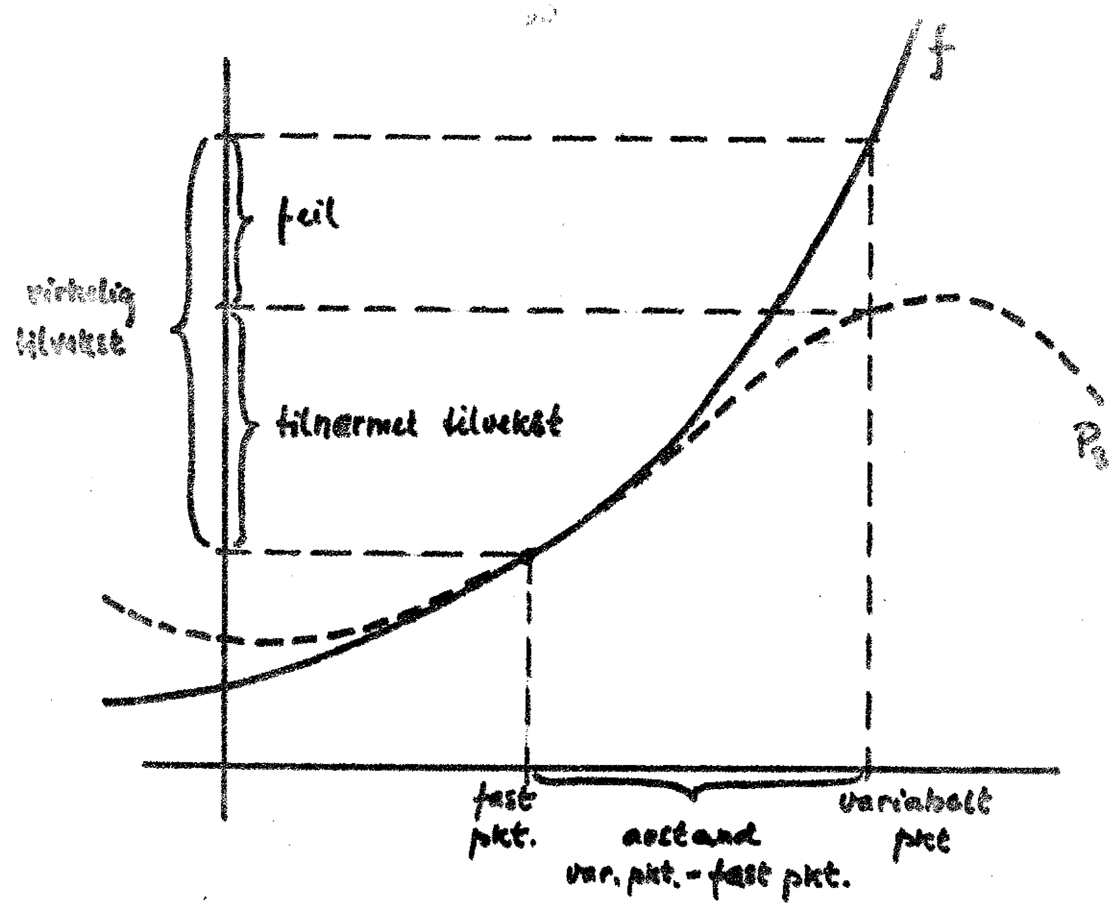


Fig.2

<u>NB: Det er avstanden mellom det variable punkt og det faste punkt som må være liten og som opptrer som den variable i polynomet.</u>

Følgende skrivemåter er alle riktige (n=2):

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + R_3 \quad ; \quad x-a \text{ liten},$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0) + R_3 \quad ; \quad x-x_0 \text{ ''},$$

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + \frac{1}{2!}f''(a)x^2 + R_3 \quad ; \quad x \text{ ''},$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!}f''(a)h^2 + R_3 \quad ; \quad h \text{ ''},$$

$$f(a+\Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(a)\Delta x^2 + R_3 \quad ; \quad \Delta x \text{ ''},$$

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x)\Delta x^2 + R_3 \quad ; \quad \Delta x \text{ ''}.$$

(Sammelign med figurene og finn faste og variable punkter i hvert enkelt tilfelle. Bla også tilbake til s. 42-44 og se at tilvekstformelen er et spesialtilfelle av formlene (8) og (9) ovenfor.)

Alle disse formlene er ekvivalente. og <u>vi kan i hvert enkelt tilfelle bruke den formelen som er den mest hensiktsmessige.</u>

<u>Eksempel</u>: Vi kan nå finne et tilnærmet uttrykk for $\sqrt{1{,}32}$. Vi må da velge

a) funksjon
b) avstanden (som må være liten)
c) det faste punkt.

Disse tre valg er ikke uavhengige.

La oss først velge f gitt ved

$$f(x) = x^{1/2} .$$

Som fast punkt kan vi velge a=1, eller et annet fast punkt nær 1,32 som vi kjenner kvadratroten av. Bruker vi lign (9), har vi altså

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad , \; a = 1.$$

og vi må sette inn x=1,32 i polynomet.

Regningen kan vi sette opp slik:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{\frac{1}{2}} , & f(1) &= 1 , \\
f'(x) &= \tfrac{1}{2} x^{-1/2} , & f'(1) &= \tfrac{1}{2} , \\
f''(x) &= -\tfrac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} , & f''(1) &= -\tfrac{1}{4} , \\
f'''(x) &= \tfrac{3}{8} x^{-5/2} , & f'''(1) &= \tfrac{3}{8} , \quad \text{osv.}
\end{aligned}$$

Dette gir, innsatt i lign. (9)

$$x^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{8}(x-1)^2 + \tfrac{1}{16}(x-1)^3$$

og

$$\begin{aligned}
1.32^{\frac{1}{2}} &\approx 1 + 0.16 - \frac{0.32^2}{8} + \frac{0.32^3}{16} = 1.16 - 0.0128 + 0.00205 \\
&= 1.14925 .
\end{aligned}$$

Riktig svar med 7 desimaler er $1{,}32^{\frac{1}{2}} = 1{,}1489125$, dvs. feilen er ca. $3{,}4 \cdot 10^{-4}$.

Vi kunne også ha valgt funksjonen

$$F(x) = (1+x)^{1/2}.$$

Da må vi velge a=0 og x=0,32. Regningene blir nesten identiske, men nå kan vi bruke lign. (8) siden a=0.

$$F(x) = (1+x)^{1/2}, \qquad F(0) = 1,$$
$$F'(x) = \tfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, \qquad F'(0) = \tfrac{1}{2},$$
$$F''(x) = -\tfrac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, \qquad F''(0) = -\tfrac{1}{4},$$
$$F'''(x) = -\tfrac{3}{8}(1+x)^{-5/2}, \qquad F'''(0) = -\tfrac{3}{8},$$

som gir

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3.$$

Innsetting av x=0,32 gir det samme som ovenfor.

Vi kunne også ha valgt et annet punkt nærmere 1,32 som det faste punkt. La oss velge a=1,21 = $1,1^2$. Vi får da x-a = 0,11 og

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}, \qquad f(a) = 1.1,$$
$$f'(x) = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \qquad f'(a) = \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{1.1},$$
$$f''(x) = -\tfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}, \qquad f''(a) = -\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{1.1^3},$$
$$f'''(x) = \tfrac{3}{8}x^{-5/2}, \qquad f'''(a) = \tfrac{3}{8}\,\tfrac{1}{1.1^5}.$$

Dette ser komplisert ut, men akkurat i dette tilfellet går det bra likevel:

$$1.32^{1/2} \approx 1.1 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{1.1}\cdot 0.11 - \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{1.1^3}\,0.11^2 + \tfrac{1}{16}\cdot\tfrac{1}{1.1^5}\,0.11^3$$
$$= 1.1 + 0.05 - 0.0011364 + 0.0000508$$
$$= 1.148914.$$

Svaret blir nå nøyaktigere, feilen er bare ca. 10^{-6}, men vi må betale med mere komplisert regning. Somregel lønner det seg å bruke en av de to første metoder og heller ta med flere ledd i polynomet.

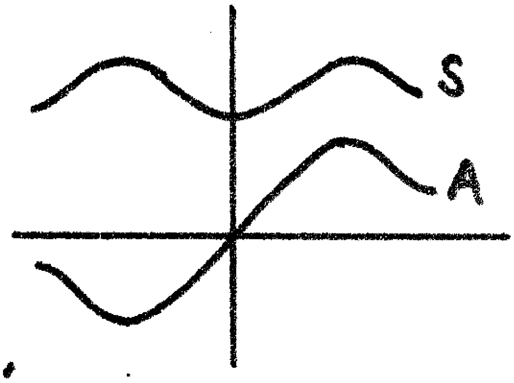
Til slutt i dette avsnittet skal vi behandle symmetriegenskaper. En symmetrisk funksjon S er en funksjon som tilfredstiller

$$S(-x) = S(x).$$

En antisymmetrisk funksjon A tilfredstiller

$$A(-x) = -A(x) .$$

Typiske diagrammer for S og A er



For S har vi ved derivasjon

$$-S'(-x) = S'(x) \text{ , ɔ: } S'(0) = 0 \text{ ,}$$
$$S''(-x) = S''(x) \text{ ,}$$
$$-S'''(-x) = S'''(-x) \text{, ɔ: } S'''(0) = 0 \text{ ,}$$

altså

$$S^{(2n+1)}(0) = 0 .$$

Taylorpolynomet for S er derfor av formen

$$S(x) \approx a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + a_{2n}x^{2n} .$$

Tilsvarende finner vi for A(x) (gjør det!)

$$A(x) \approx a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots + a_{2n+1}x^{2n+1} .$$

Kjennskap til disse egenskapene på forhånd forenkler ofte regningene.

Eksempel: sinx er en antisymmetrisk funksjon og har Mclaurinpolynomet

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

mens cosx er symmetrisk, og

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Siden tgx er antisymmetrisk, har vi

$$tg x \approx a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots + a_{2n+1}x^{2n+1} .$$

Koeffisientene kan vi bestemme ved ubestemte koeffisienters metode fra ligningen tgx cosx = sinx. Ved symmetribetraktningen sparer vi halve arbeidet.

2. Taylors formel. Restleddsbetraktninger.

Strengt tatt kan vi ikke vite at Taylorpolynomene virkelig er brukbare approksimasjoner før vi i hvert enkelt tilfelle har undersøkt restleddet R_n. Restleddet uttrykkes oftest ved den såkalte Lagranges restleddsform (Sydsæter kap.10, § 2)

$$R_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a+\theta(x-a))\,(x-a)^n, \qquad (10)$$

som innsatt i lign. (8), (9) gir hhv. Maclaurins formel (8') og Taylors formel (9'):

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}, \qquad (8')$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))\,(x-a)^{n+1}. \qquad (9')$$

Det siste leddet i hver formel er restleddet R_{n+1}. Størrelsen θ er et (ukjent) tall mellom 0 og 1. Det følger da at

θx ligger mellom 0 og x,
$a+\theta(x-a)$ —"— a og x.

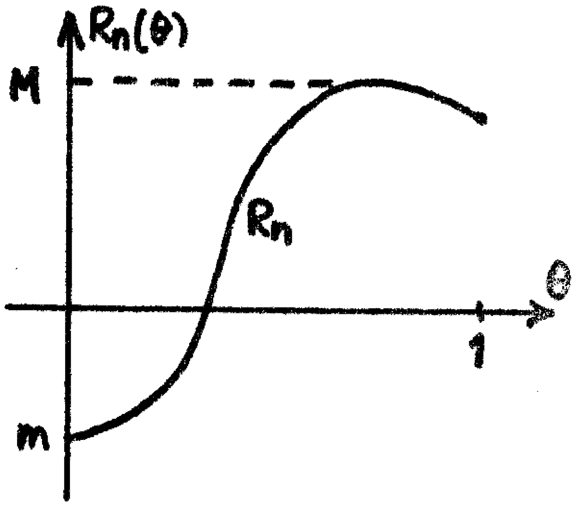
Det kan bevises at det alltid (hvis f er tilstrekkelig mange ganger deriverbar) finnes minst en verdi av θ i intervallet slik at ligningene (8'), (9') er oppfylt. (Dette minner om skjæringsetningen på side 30. Se etter i Sydsæter om beviset har noe med skjæringsetningen å gjøre!)

Siden vi ikke vet hvilken verdi θ har, kan vi ikke regne ut restleddet, vi kan bare estimere det. Vi går da fram slik: For gitte verdier av a og x er R_n, gitt ved lign. (10), en funksjon av θ,

$$R_n = R_n(\theta).$$

Vanligvis er $R_n(\theta)$ også definert for $\theta=0$ og $\theta=1$, dvs. i $[0,1]$. $R_n(\theta)$ har da et maksimum og et minimum i dette intervallet

$$m \leq R_n(\theta) \leq M.$$



Feilen ved approksimasjonen er da

$$|R_n| < Max(|m|,|M|).$$

Som oftest opptrer m og M i endepunktene av intervallet.

<u>Eksempel</u>: La oss undersøke restleddet i Maclaurins formel for funksjonen

$$f(x) = (1+x)^{1/2}.$$

Ved n gangers derivasjon og innsetting (gjør det!) får vi

$$R_n = \binom{\frac{1}{2}}{n}(1+\theta x)^{-n+\frac{1}{2}}\, x^n,$$

$\binom{\frac{1}{2}}{n}$ er en binomialkoeffisient (se formelsamling).

Vi må undersøke faktoren

$$r_n(\theta) = (1+\theta x)^{-n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{(1+\theta x)^{n-\frac{1}{2}}}.$$

Hvis $x>0$ har vi

$$r_n(\theta) < 1,$$

$$|R_n| < \left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right| x^n$$

som er det neste leddet i polynomet. Hvis $-1 < x < 0$ er

$$r_n(\theta) < \frac{1}{(1-|x|)^{n-\frac{1}{2}}},$$

$$|R_n| < \left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right| \frac{|x|^n}{(1-|x|)^{n-\frac{1}{2}}}.$$

I begge tilfelle kan det vises at

$$R_n \to 0 \quad \text{når } n \to \infty \quad \text{for } |x|<1.$$

Det betyr at vi kan få så god tilnærmelse vi ønsker bare vi tar med tilstrekkelig mange ledd. I eksempelet foran var x=0,32 og derfor

$$|R_4| < \left|\binom{\frac{1}{2}}{4}\right| 0.32^4 \approx 4\cdot 10^{-4}.$$

(Den virkelige feil var som vi så $\approx 3{,}4\cdot 10^{-4} < 4\cdot 10^{-4}$.) Ved hjelp av restleddet kan vi altså selv finne nøyaktigheten uten å sammenligne med en tabellverdi.

For bruk av Taylors formel gjelder:

<u>For at Taylorpolynomene skal gi en tilnærmelse til funksjonen, er det helt nødvendig at restleddet kan gjøres tilstrekkelig lite når n økes, dvs. at $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.</u>

Hvis vi ønsker en feil mindre enn ϵ , må vi ta med så mange ledd at

$$|R_{n+1}| < \epsilon .$$

Det er da n ledd i polynomet. Vanligvis må n finnes ved prøving og feiling.

<u>Eksempel</u>: Anta vi må beregne e med en feil mindre enn 10^{-8}. Maclaurins formel for e^x er

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + R_{n+1},$$

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta x} x^{n+1}.$$

For x=1 er

$$e^{\theta x} = e^{\theta} < e < 3, \;\supset:\; R_n < \frac{3}{n!}.$$

Vi må velge n så stor at

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-8},$$

$$(n+1)! > 3\cdot 10^8.$$

Ved prøving ser vi at

$$11! < 3\cdot 10^8 \;;\; 12! > 3\cdot 10^8.$$

Vi må altså ta med 12-1 = 11 ledd i polynomet, og er da <u>garantert</u> en feil mindre enn 10^{-8}.

3. Polynomtilnærmelse av sammensatte funksjoner.

Ved sammensatte eller kompliserte funksjoner er formlene (8) og (9) til liten hjelp fordi de deriverte ofte blir altfor kompliserte. Prøv f.eks. å finne Maclaurinpolynomet for funksjonen gitt ved

$$G(x) = (1+x+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

på denne måten. Etter noen få gangers derivasjon må man gi opp.

I dette avsnittet skal vi nevne uten bevis tre setninger som kan være til nytte i slike tilfelle.

La f og g være to funksjoner med Taylorpolynom p_n og q_n omkring et felles punkt a.

1) Taylorpolynomet P_n for produktfunksjonen $F(x)=f(x)\cdot g(x)$ er

$$P_n(x) \overset{n}{=} p_n(x)\cdot q_n(x)$$

der n-en over likhetstegnet betyr at alle ledd med potens høyere enn n skal utelates.

2) Hvis konstantleddet i q_n er null, er Taylorpolynomet Q_n for den sammensatte funksjonen $G(x)=f(g(x))$ gitt ved

$$Q_n(x) \overset{n}{=} p_n(q_n(x)) .$$

Setningene kan bevises ved å bruke derivasjonsreglene for produkt og sammensatte funksjoner.

Eksempel 1): La oss finne Maclaurinpolynomet P_3 for funksjonen

$$F(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} .$$

Fra formelsamlingen har vi

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 ,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 ,$$

følgelig

$$P_3(x) \overset{3}{=} \left(1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{1}{16}x^3\right)\left(1+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{3}{8}x^2+\tfrac{5}{16}x^3\right)$$

$$\begin{aligned} &\overset{3}{=} 1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{1}{16}x^3 \\ &\qquad +\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}x^2-\tfrac{1}{16}x^3+\tfrac{1}{32}x^4 \\ &\qquad\qquad +\tfrac{3}{8}x^2+\tfrac{3}{16}x^3-\tfrac{3}{64}x^4+\tfrac{3}{128}x^5 \\ &\qquad\qquad\qquad +\tfrac{5}{16}x^3+\tfrac{5}{32}x^4-\tfrac{5}{128}x^5+\tfrac{5}{256}x^6 \\ &= 1+x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}x^3. \end{aligned}$$

Merk at f.eks. 4.ordens leddene ikke er fullstendige. Åpenbart blir det problematisk å drive regningen til høye potenser.

Eksempel 2): Funksjonen $Q(x)=(1+x+x^2)^{\frac{1}{2}}$ er en sammensatt funksjon. Maclaurinpolynomet til kjernen $x+x^2$ er rett og slett $x+x^2$. Vi får

$$Q_3(x) \overset{3}{=} 1+\tfrac{1}{2}(x+x^2)-\tfrac{1}{8}(x+x^2)^2+\tfrac{1}{16}(x+x^2)^3$$

$$\begin{aligned} &\overset{3}{=} 1+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}x^2 \\ &\qquad -\tfrac{1}{8}x^2-\tfrac{1}{4}x^3-\tfrac{1}{8}x^4 \\ &\qquad\qquad +\tfrac{1}{16}x^3+\tfrac{3}{16}x^4+\tfrac{3}{16}x^5+\tfrac{1}{16}x^6 \\ &= 1+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{3}{8}x^2-\tfrac{3}{16}x^3. \end{aligned}$$

Også i dette tilfellet er 4.grads leddene ufullstendige.

Taylorpolynomene kan også integreres (og deriveres).

3) Hvis $p_n(x)$ er Taylorpolynomet for $f(x)$, så er

$$P_{n+1}(x) = \int_0^x p_n(t)\,dt$$

Taylorpolynomet av grad n+1 for

$$H(x) = \int_0^x f(t)\,dt\ .$$

Man kan også bruke ubestemte integral og bestemme integrasjonskonstanten etterpå.

Eksempel 3): Ved hjelp av denne setningen og setning 2) kan vi lett finne Maclaurinpolynomet for Arctg. Vi har

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arctg} x + C$$

Dessuten er

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n,$$

følgelig

$$\frac{1}{1+x^2} \approx 1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}.$$

Ved integrasjon får vi

$$\operatorname{Arctg} x \approx x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+C .$$

For x=0 skal polynomet og Arctg ha sammenfallende verdier. Siden Arctg0=0 får vi C=0.

Med bestemt integral ser det slik ut

$$\begin{aligned}\operatorname{Arctg} x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}\\ &\approx \int_0^x \left[1-t^2+t^4-t^6+\cdots+(-1)^n t^{2n}\right] dt\\ &= \left[t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}t^{2n+1}\right]_0^x\\ &= x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} .\end{aligned}$$

Merk at det er håpløst å finne noe uttrykk for den n-te deriverte av Arctg. Vi kan behandle Arcsin på samme måte (gjør det!).

Ved å kombinere setningene 1) - 3) kan man på denne måten finne relativt enkelt (iallfall de første leddene i) Taylorpolynomene til nær sagt enhver funksjon. En ulempe ved denne metoden er at det vanligvis byr på problemer å finne et uttrykk for restleddet. Hvis funksjonen er symmetrisk/antisymmetrisk, kan vi spare oss å regne ut leddene med odde/like potenser, da disse blir null.

4. Taylor rekke.*

For de fleste funksjoner som er uendelig mange ganger deriverbare i et punkt går restleddet mot null når n går mot uendelig i et interval omkring dette punktet. Formelt kan vi da skrive

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + \cdots ,$$

dvs. vi skriver f(x) som en uendelig rekke. Før vi har definert hva en rekke er, har denne ligningen ingen mening. Vi må definere hva summen av uendelig mange ledd skal bety.

Anta at vi kan summere de n+1 første ledd, og la oss kalle summen S_n: (Vanligvis kan vi ikke utføre summasjonen og finne en enkel, sluttet form, men vi kan alltid tenke oss det gjort når n er endelig.)

$$S_n = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n .$$

Hvis nå

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S ,$$

sier vi at rekken

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots \qquad (11)$$

konvergerer eller er konvergent og har sum S

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} f_k .$$

I motsatt fall sier vi at rekken divergerer eller er divergent. En divergent rekke er ikke noe tall eller noen funksjon.

Ligning (9) kan vi skrive

---

* Den definisjon av rekker som gis her er ikke den mest generelle. En grundigere framstilling er gitt i Sydsæter kap. 10, § 7.

$$f(x) - R_{n+1}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n .$$

Hvis lim $R_n(x)$ eksisterer, er Taylorrekken

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + \cdots$$

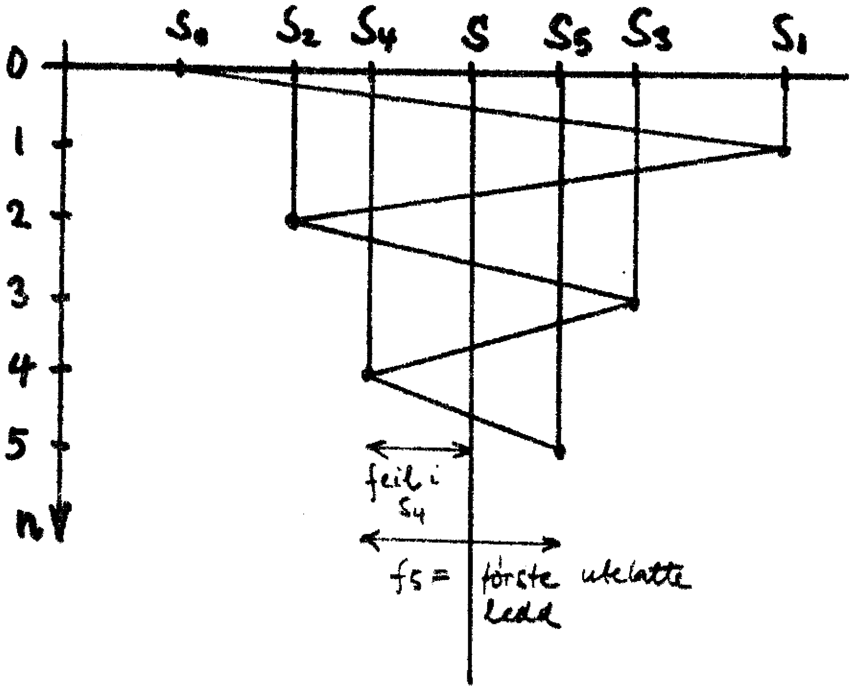
konvergent. For a=0 får vi tilsvarende Maclaurinrekka. For en del vanlig brukte funksjoner er Maclaurinrekka og dens konvergensområde gitt i formelsamlinga. Eksempler på utledning av Maclaurinrekkene er gitt i Sydsæter kap. 10, § 3.

Merk at bare hvis $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ er summen av rekka lik f(x), og bare da er ligning (10) oppfylt. For alle funksjoner av praktisk betydning er dette tilfelle i rekkas konvergensområde.

To setninger om rekker er nevnt i Sydsæter kap.10, § 7, s. 384. Men en viktig setning er ikke nevnt:

> Hvis det for rekka (11) gjelder:
> 1) leddene har alternerende fortegn,
> 2) hvert ledd er mindre enn det foregående i tallverdi,
>
> så er
> a) rekka konvergent,
> b) feilen (hvis rekka brytes av etter n ledd) mindre enn det første utelatte ledd.

Setningen er illustrert på figuren nedenfor.



5. Anvendelser av Taylors formel.

Mange anvendelser er nevnt i de foregående avsnitt. Eksempler finnes også i oppgavesamlingen.

Anvendelse	avsnitt her	oppgave
1) Polynomtilnærmelse	1, 3	7.1-7.4, 8.3
2) Numeriske beregninger	1	7.5-7.13
3) Tilnærmet løsning av ligninger		7.14-7.16
4) Løsning av dif.ligninger		7.17
5) Tilnærmet integrasjon		6.10
6) Ubestemte uttrykk	(Sydsæter kap. 10 § 6, Ayres kap.22)	7.18

7) Tabellinterpolasjon.

a) Trigonometriske tabeller. Anta vi ønsker å beregne $\cos 16,3^{\circ}$, og vi bare har tabell over cos og sin til hele grader. Tabellen gir

$$\cos 16^{\circ} = 0,96126, \qquad \cos 17^{\circ} = 0,95630.$$

Vanlig lineær interpolasjon gir da

$$\cos 16.3^{\circ} = \cos 16^{\circ} + 0.3(\cos 17^{\circ} - \cos 16^{\circ}) = 0.95977 .$$

Riktig svar er 0,95981, så feilen er 0,00004, dvs. bare fire riktige desimaler, mindre nøyaktighet enn tabellen gir.

Med Taylors formel kan vi oppnå samme nøyaktighet som tabellen gir med ubetydelig mere arbeid. Taylors formel for cosx gir

$$\cos x = \cos a - (x-a)\sin a - \frac{1}{2}(x-a)^2\cos a + R_3 ,$$

$$R_3 = \frac{1}{3!}(x-a)^3 \sin(a+\theta(x-a)) ,$$

$$\therefore \quad |R_3| < \frac{1}{3!}|x-a|^3 .$$

Innsatt får vi for $a=16^{\circ}$, $x=16,3^{\circ}$, $x-a=0,3^{\circ} = \frac{0.3\pi}{180} = 0.00524$. Merk at dette er et lite tall, så vi trenger ikke regne med så mange desimaler. Videre

$$\sin 16^\circ = 0.27563 \quad , \quad \cos 16^\circ = 0.96126$$

$$\cos 16.3^\circ \approx 0.96126 - 5.24 \cdot 0.27563 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{2} 5.24^2 \cdot 0.96126 \cdot 10^{-6}$$

$$= 0.96126 - 0.00144 - 0.00001$$

$$= 0.95981 ,$$

som er riktig med 5 desimaler. Dette er det beste vi kan oppnå, siden tabellen ikke er mere nøyaktig. Utregningene kan gjøres med regnestav siden korreksjonene er små.

Fordeler: Nesten like enkel regning,
mulig å vurdere nøyaktigheten,
større nøyaktighet,
regnestavberegninger.

b) Eksponensialtabeller. La oss beregne $e^{2,54}$ når tabellen gir

$$e^{2.5} = 12,182 \quad , \quad e^{2.6} = 13.464$$

Vi har at

$$e^{2.54} = e^{2.5} e^{0.04} = e^{2.5}\left(1 + 0.04 + \frac{1}{2} 0.04^2 + R_3\right)$$

Det lønner seg å multiplisere først, så summere. Hvorfor?

$$R_3 < \frac{1}{3!} e^{0.04} \cdot 0.04^3 \approx 10^{-5}$$

$$\supset: \quad e^{2.5} R_3 \approx 10^{-4}$$

$$e^{2.54} \approx 12.182 + 0.04 \cdot 12,182 + 0.0008 \cdot 12.182$$

$$= 12.182 + 0.487 + 0.010$$

$$= 12.679 .$$

Riktig svar er 12,680. (Hvorfor får vi likevel en feil?) Med lineær interpolasjon får vi

$$e^{2.54} \approx 12.182 + 0.4(13.464 - 12,182) = 12.695 .$$

Svaret er for stort som vi kunne vente, og feilen er 0,015, dvs. 10 ganger større enn ovenfor!