

EKSEMPELSAMLING I MEKANIKK

Fysisk Institutt
Norges landbrukshøgskole
Vollebekk

Norges landbrukshøgskoles
bibliotek

ql971/30

Eksempelsamling

EKSEMPELSAMLING I MEKANIKK

Fysisk Institutt
Norges landbrukshøgskole
Vollebekk

Disse eksemplene er lagt opp til forelesningene i mekanikk under faget Fysikk II studieåret 1969 slik at avsnittsnumrene her samsvarer med hverandre. F.eks. er eksemplene i avsnitt IV tilknyttet fasthetslæren.

Eksemplene er i det vesentligste tatt fra følgende lærebøker:

Sverre E. Kindem: Statikk og fasthetslære
Timoshenko and Young: Engineering Mechanics
Nils Evers: Hållfasthetslære I

I et tillegg er, utenfor pensum, tatt med teorien for vridningsspenninger. Fremstillingen her bygger på fremstillingen i:

Nils Evers: Hållfasthetslära I.

Vollebekk våren 1969

Olav M. Benestad

Eksempler.

II.b.

1. På fig. 1 støtter en stang seg ved sitt nedre endepunkt mot et fast fundament og er avstivet ved en bardun ved det øvre endepunkt. I samme punkt er det hengt opp en vekt $P = 2000$ kg. Bardunen er vannrett, og stangen danner 30° med denne mens den står loddrett på fundamentet. Vi skal bestemme kraftvirkningene i bardunen og ved fundamentet. Stangens egen vekt setter vi ut av betraktning.

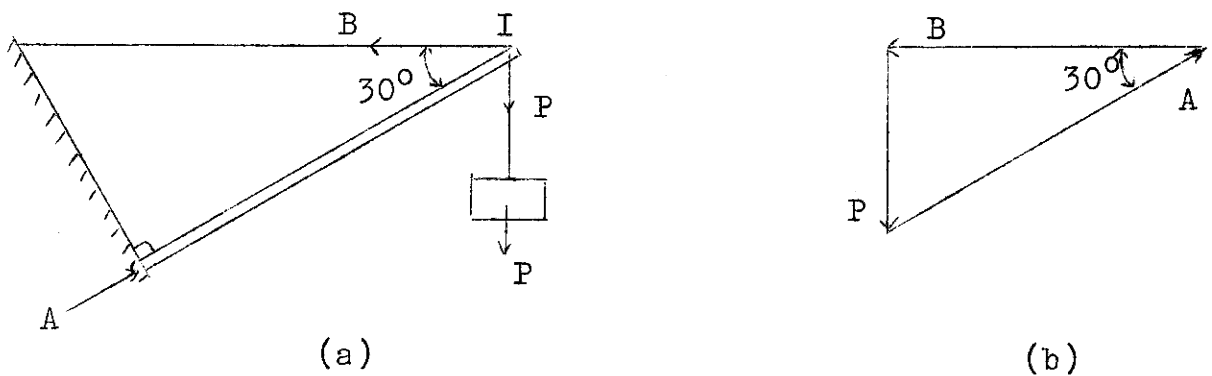


Fig. 1

Vi studerer likevekten av stangen. I punkt I virker belastningen \bar{P} og bardunstrekket \bar{B} , mens fundamentet understøtter stangen med en skyvekraft \bar{A} . I alt blir det 3 krefter som holder hverandre i likevekt. Kreftenes angrepslinjer må da skjære hverandre i samme punkt, og derved må også angrepslinjen for \bar{A} gå gjennom punkt I. Alle angrepslinjer er da kjente, og vi kan konstruere kraft-trianglet på fig. 1b. Derved blir:

$$\underline{B = \frac{P}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \sqrt{3} \cdot P = 3460 \text{ kp}}$$

$$\text{og } \underline{A = \frac{P}{\sin 30^\circ} = 2 \cdot P = 4000 \text{ kp}}$$

2. På fig. 2 har vi en kule som i det vertikale plan blir støttet av en snor BC og en glatt vegg AB. Finn snorkraften \bar{S} og reaksjonskraften fra veggen \bar{R}_v uttrykt ved kulens tyngde \bar{P} og snorens helningsvinkel α .

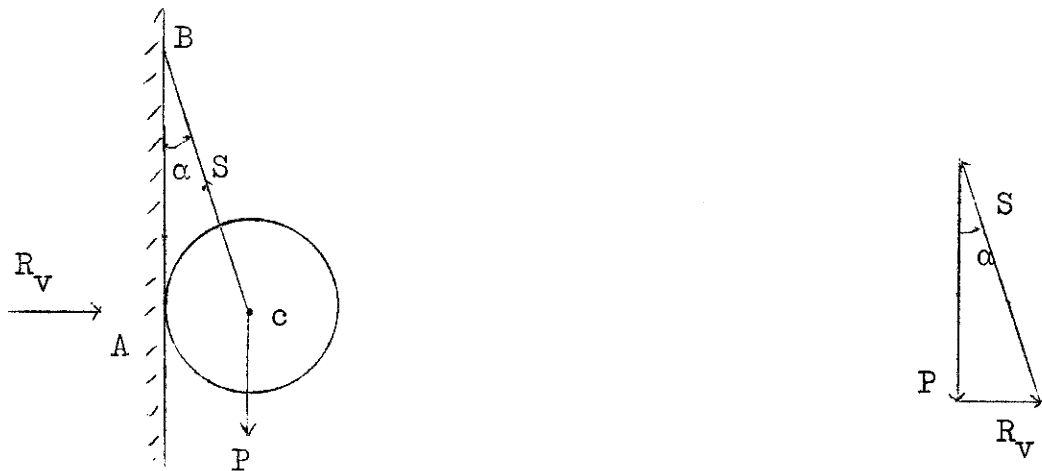


Fig. 2

Vi studerer kulens likevekt. Tyngdekraften P antas å virke i kulens sentrum C (se avsnittet om tyngdepunkt i kapittel III) og snorkraften går gjennom samme punkt. Gjennom dette punktet må da også reaksjonskraften R_V gå. Det vil si at den står loddrett på veggen. I og med at veggen er glatt, kunne den heller ikke tatt opp noen vertikal kraftkomponent, men i denne oppgaven ville vi fått samme resultat om ikke veggen hadde vært glatt. Alle angrepslinjer er nå kjente, og vi kan konstruere krafttriangleret på fig. 28b. Derved blir:

$$S = \frac{P}{\cos\alpha}$$

og $R_V = P \cdot \operatorname{tg}\alpha$

Hvis $P = 50 \text{ kp}$ og $\alpha = 30^\circ$, blir

$$\underline{S = 57,7 \text{ kp}} \quad \text{og} \quad \underline{R_V = 28,9 \text{ kp}}$$

3. En elektrisk gatelampe henger i en liten ring B som holdes oppe av to snorer AB og CB hvor de to endepunktene A og C ligger i samme høyde. Finn kraften i hver av disse snorene når $AD = 4 \text{ m}$, lampen veier 5 kg (dvs. dens tyngde er 5 kp) og avstanden DB er 1 m .

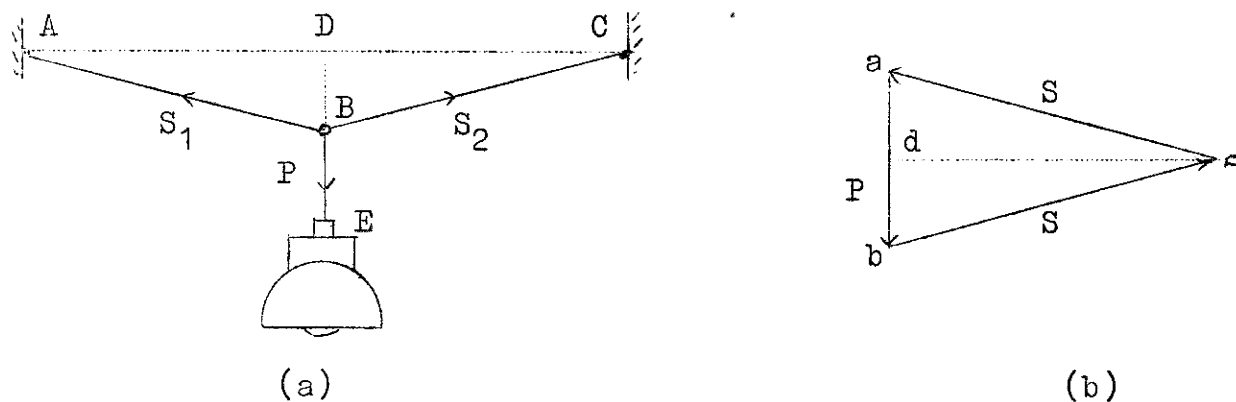


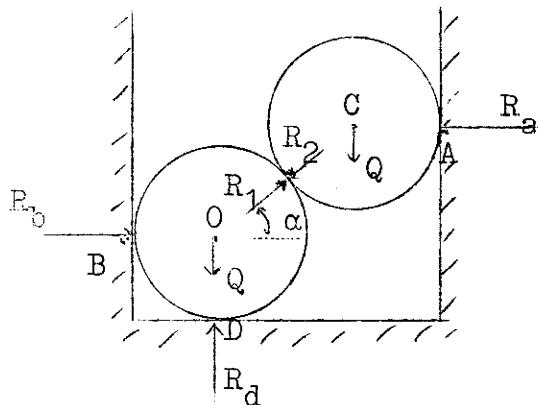
Fig. 3

Vi ser på likevekten av ringen B som blir påvirket av krefter langs de tre snorretningene AB, CB og EB. Hvis vi først ser på lampens likevekt, finner vi at snorkraften i EB må være like stor som tyngdekraften som virker på lampen, dvs. $P=5$ kp. Vi kan nå konstruere kraft-trianglet idet alle kraftretningene samt den ene kraftens størrelse er kjent. Vi ser at snorkreftene S_1 og S_2 får samme størrelse S . Ved å betrakte de likedannede trekantene DCB og dcb, ser vi at:

$$S : P/2 = \sqrt{4^2 + 1} : 1$$

$$S = \frac{P}{2} \cdot \sqrt{17} = 10,30 \text{ kp}$$

4. To glatte kuler, hver med radius r og vekt Q , ligger i en horisontal kanal med vertikale vegger. Avstanden mellom veggene er b . Finn trykkreftene som utøves på veggene og gulvet ved kontaktpunktene A, B og D, når $r = 10$ cm, $b = 36$ cm og $Q = 10$ kg.



(a)

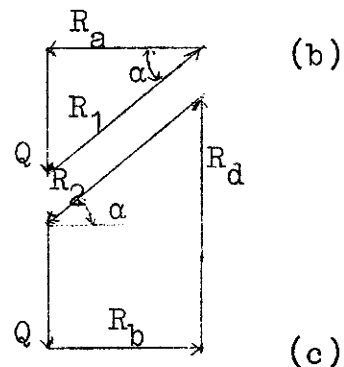


Fig. 4

Da kulene er glatte, må trykkreftene ved de forskjellige kontaktpunkter stå normalt på overflatene. Reaksjonskreftene fra vegger og gulv, \bar{R}_a , \bar{R}_b og \bar{R}_d , er like store og motsatt rettet de trykkreftene vi skal finne. Ved kontaktpunktet mellom de to kulene har vi to like store og motsatt rettede krefter \bar{R}_1 og \bar{R}_2 som må virke langs linjen OC som forbinder kulesentrene. Når vi betrakter likevekten av den øverste kule, tar vi bare med kraften \bar{R}_1 som representerer reaksjonen fra den nederste kule, likeledes når vi ser på den nederste kule, tar vi bare med kraften \bar{R}_2 . Vi ser nå at den øvre kule er i likevekt under virkning av tyngdekraften \bar{Q} og de to reaksjonskreftene \bar{R}_1 og \bar{R}_a , mens den nederste kule er i likevekt under virkning av de fire kreftene \bar{R}_2 , \bar{Q} , \bar{R}_b og \bar{R}_d . I begge tilfelle ligger alle kreftene i et plan, og deres virkningslinjer går alle gjennom sentrum av den kule de virker på.

Vi tegner så opp kraft-trianglet for den øverste kule og kraftpolygonet for den nederste, som vist på fig. 4b og c. Vinkelen α finnes fra fig. 4a av ligningen:

$$2r + 2r \cdot \cos\alpha = b$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{2r} - 1 = 0,80$$

$$\underline{\alpha = 37^\circ}$$

$$\underline{R_a = R_b = \frac{Q}{\operatorname{tg}\alpha} = 1,33 \cdot Q = 13,3 \text{ kp}}$$

$$\underline{R_d = 2Q = 20 \text{ kp}}$$

5. En liten ring B bærer en vertikal last P og er holdt oppe av to tråder BA og BC der BC i sin frie ende er festet til en vekt $Q = 10 \text{ kg}$ som vist på fig. 5. Finn størrelsen av lasten P og strekk-kraften \bar{S} i tråden AB dersom vinklene som trådene AB og BC danner med den vertikale akse er som vist på figuren og systemet er i likevekt.

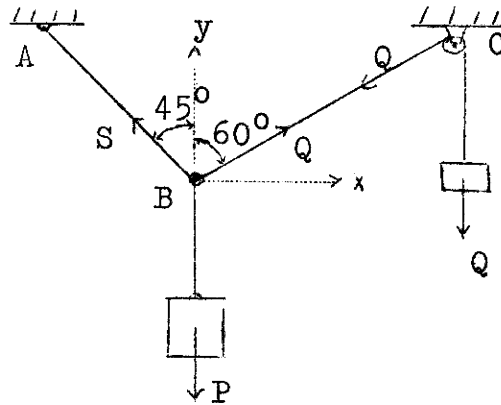


Fig. 5

Idet vi ser bort fra friksjon i trinsen ved C, må strekket i snoren BC være lik Q for at denne snoren skal holdes i likevekt. Vi har således tre krefter, S , P og Q som virker på ringen B og holder denne i likevekt. Ved å velge koordinat-akser som vist og dekomponere kreftene, får vi at:

$$(I): \quad Q \cos 30^\circ - S \cos 45^\circ = 0$$

$$(II): \quad Q \cos 60^\circ + S \cos 45^\circ - P = 0$$

Av (I) fås: $\underline{S = 5 \cdot \sqrt{6} \text{ kp} = 12,2 \text{ kp}}$

Fra (II) fås: $\underline{P = 5(1 + \sqrt{3}) = 13,7 \text{ kp}}$

6. En prismatisk stang AB med vekt Q og lengde $2l$ hviler på en liten friksjonsfri rulle ved D og mot en glatt vertikal vegg ved A, som vist på fig. 6. Finn den vinkel α stangen må danne med horisontalen for at vi skal kunne ha likevekt. Avstanden mellom rullen og veggene er $a < l$.

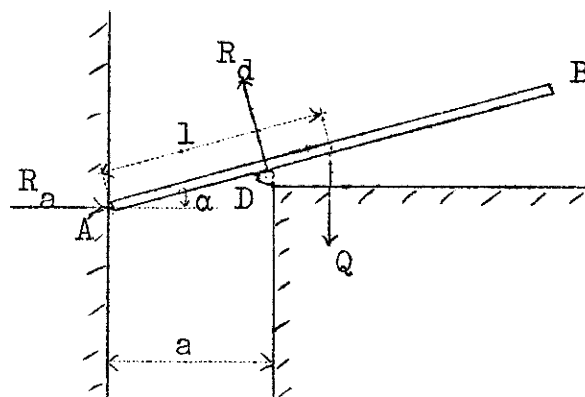


Fig. 6

Vi betrakter likevekten av stangen AB. Reaksjonen ved A er normalt på veggen, dvs. horisontal, og reaksjonen ved D er normal på AB. Når stangen er i likevekt, møtes de tre kreftene \bar{Q} , \bar{R}_a og \bar{R}_d i ett punkt, og den algebraiske sum av komponentene på enhver akse må være lik 0. Likeledes må den algebraiske sum av alle kreftenes momenter med hensyn på ethvert punkt i planet være lik 0.

Ved å projisere kreftene på en vertikal akse, får vi:

$$R_d \cos\alpha - Q = 0$$

Ved å ta momentene om punkt A, får vi:

$$\frac{R_d \cdot a}{\cos\alpha} - Q l \cos\alpha = 0$$

Ved å eliminere den ukjente reaksjon R_d fra disse to ligningene, får vi:

$$\cos\alpha = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}$$

som definerer stangens likevektsstilling.

7. En bjelke AB av lengde l er støttet opp som vist på fig. 7 og belastet med de like store, men motsatt rettede, vertikale krefter \bar{P} ved dens to endepunkter. Finn reaksjonene ved støttene C og D.

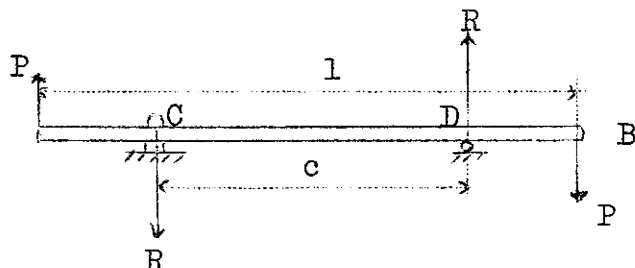


Fig. 7

Siden de aktive kreftene P danner et kraftpar med moment $P \cdot l$ med klokken, må reaksjonene i C og D danne et kraftpar med moment $P \cdot l$ mot klokken. Reaksjonen i rullelageret D må være vertikal, og:

$$R \cdot c = P \cdot l$$

$$R = \frac{P \cdot l}{c} \quad \text{og med retning}$$

som vist på figuren.

8. Fig. 8 viser tverrsnitt av en kaikonstruksjon. Kaien er opplagret på bakken ved en skrårettet strever og et uforskyvelig boltelager. Gjennom streveren får vi en opplagerkraft \bar{A} som er rettet langs streverens senterlinje. Boltelageret er i stand til å yte en opplagerkraft \bar{B} i en hvilken som helst retning. Kaien er belastet med en gjenstand som veier 500 kg, kaiens egen vekt er 1500 kg og et skrårettet taudrag er 800 kp. I alt blir det 5 krefter som holder kaien i likevekt.

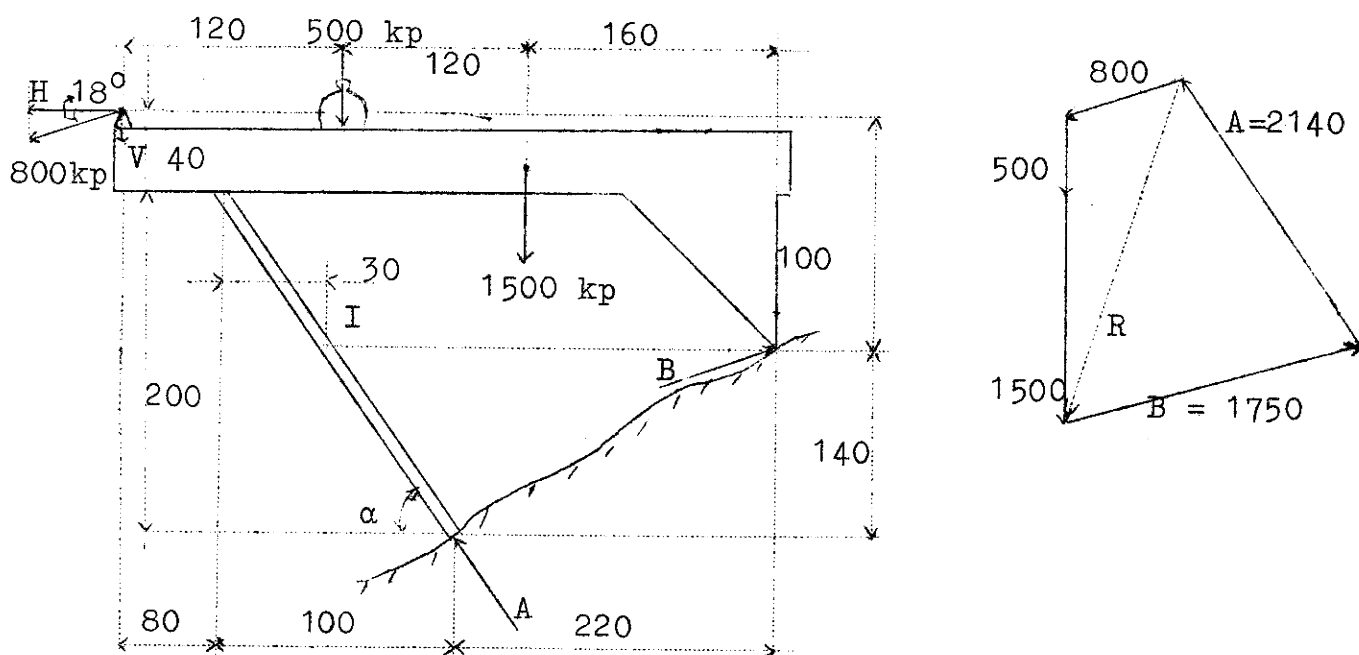


Fig. 8

Vi kan først løse oppgaven grafisk. De kjente belastninger settes sammen til en resultant \bar{R} , og antall krefter reduseres da til 3. Likevekten krever at disse 3 kreftenes angrepslinjer går gjennom samme punkt, og at kreftene gir et lukket kraft-triangel. Angrepslinjen for opplagerkraften \bar{B} må derfor gå gjennom skjæringspunktet av de kjente angrepslinjene for \bar{A} og \bar{R} . Kraft-trianglet fremkommer ved at det fra \bar{R} 's endepunkter i kraftpolygonen trekkes rette linjer parallelt med angrepslinjene for \bar{A} og \bar{B} . Ved avlesning i kraftmålestokken finner vi $A = 2140$ kp og $B = 1750$ kp.

Nå er en slik løsningsmetode avhengig av nøyaktigheten i den grafiske oppteigning, og den kan ofte bli unøyaktig. Vi skal derfor også se på en analytisk beregning av de ukjente opplagerkrefter.

Ved A vet vi at resultanten skal ha samme retning som stangen, og det må da være et bestemt forhold til stede mellom komponentene. Vi får:

$$\frac{A_y}{A_x} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{200}{100} = 2 \quad \text{dvs. } A_x = 0,5 A_y \quad (1)$$

Komponentene av det skrårettede taudrag 800 kp blir:

$$H = 800 \text{ kp} \cdot \cos 18^\circ = 761 \text{ kp}$$

$$V = 800 \text{ kp} \cdot \sin 18^\circ = 247 \text{ kp}$$

Likevektslikningene blir:

$$\Sigma P_x = 0 : A_x + B_x + 761 \text{ kp} = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma P_y = 0 : A_y + B_y - 247 \text{ kp} - 500 \text{ kp} - 1500 \text{ kp} = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_B = 0 : & -A_x \cdot 140 - A_y \cdot 220 + 761 \text{ kp} \cdot 100 + 247 \text{ kp} \cdot 400 \\ & + 500 \text{ kp} \cdot 280 + 1500 \text{ kp} \cdot 160 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Kreftene B_x og B_y har ingen momentarm her. Av disse likningene finnes:

$$A_y = 1913 \text{ kp} \quad A_x = 956 \text{ kp} \quad B_x = 1717 \text{ kp} \quad B_y = 334 \text{ kp}$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 2140 \text{ kp}$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 1750 \text{ kp}$$

9. På fig. 9 er en horisontal bjelke understøttet av 3 strevere som overfører opplagerkrefter i streverens lengderetning, henholdsvis \bar{A} , \bar{B} og \bar{C} . Bjelken veier 5 tonn og er belastet med en horisontal skyvekraft på 4000 kp.

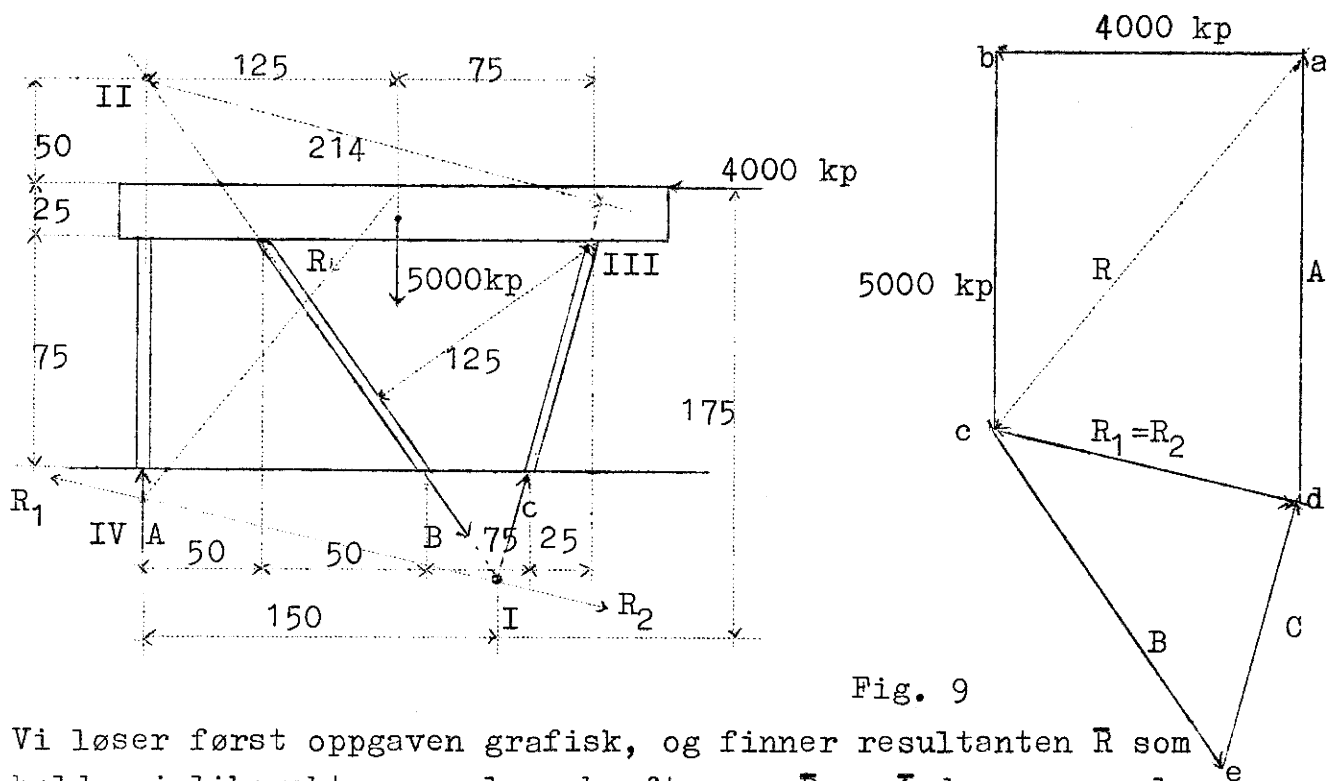


Fig. 9

Vi løser først oppgaven grafisk, og finner resultanten \bar{R} som holdes i likevekt av opplagerkreftene. \bar{R} og \bar{A} danner resultanten \bar{R}_1 som angriper i skjæringspunkt I. For at \bar{R}_1 og \bar{R}_2 skal holde hverandre i likevekt, må deres angrepslinjer falle sammen med linjen IV - I, de må være like store og motsatt rettede.

Kreftenes størrelse finnes ved kraftpolygon. Gjennom resultanten \bar{R} 's endepunkter i kraftpolygonen trekker vi rette

rette linjer parallelt med angrepslinjene for \bar{A} og \bar{R}_1 og får frem kraft-trianglet acd. Her setter vi på pilretninger, slik at \bar{R}_1 blir den vektorielle sum av \bar{A} og \bar{R} . Videre er $R_2 = R_1$ med motsatt pilretning. \bar{B} og \bar{C} fremkommer ved at \bar{R}_2 dekomponeres i strevernes retning (kraft-trianglet dce). Vi leser av $A = 5500$ kp, $B = 5000$ kp og $C = 3900$ kp.

Som kontroll på pilretningene kan vi undersøke om de opprinnelige krefter gir en lukket kraftpolygon, der alle kraftpiler peker i samme retning rundt polygonen. På figuren blir det polygonen abceda. De funne kraftpiler viser at streveren B er utsatt for strekk-påkjenning og må forankres til bjelken og fundamentet. De øvrige strevere får trykk-påkjenning og trenger ikke spesielle forankringer.

Vi skal så foreta den analytiske beregning av streverkreftene \bar{A} , \bar{B} og \bar{C} . Vi stiller først opp momentligninger om skjæringspunktene mellom to og to ukjente krefter, og får ligninger med bare én ukjent:

$$\Sigma M_I = 0 \quad : \quad -A \cdot 150 + 5000 \text{ kp} \cdot 25 + 4000 \text{ kp} \cdot 175 = 0$$

$$\text{dvs.} \quad \underline{A = 5500 \text{ kp}}$$

$$\Sigma M_{II} = 0 \quad : \quad C \cdot 214 - 5000 \text{ kp} \cdot 125 - 4000 \text{ kp} \cdot 50 = 0$$

$$\text{dvs.} \quad \underline{C = 3860 \text{ kp}}$$

Skjæringspunktet mellom \bar{A} og \bar{C} faller utenfor tegningen, og vi tar derfor til slutt momentene om streveren C's feste-punkt med bjelken.

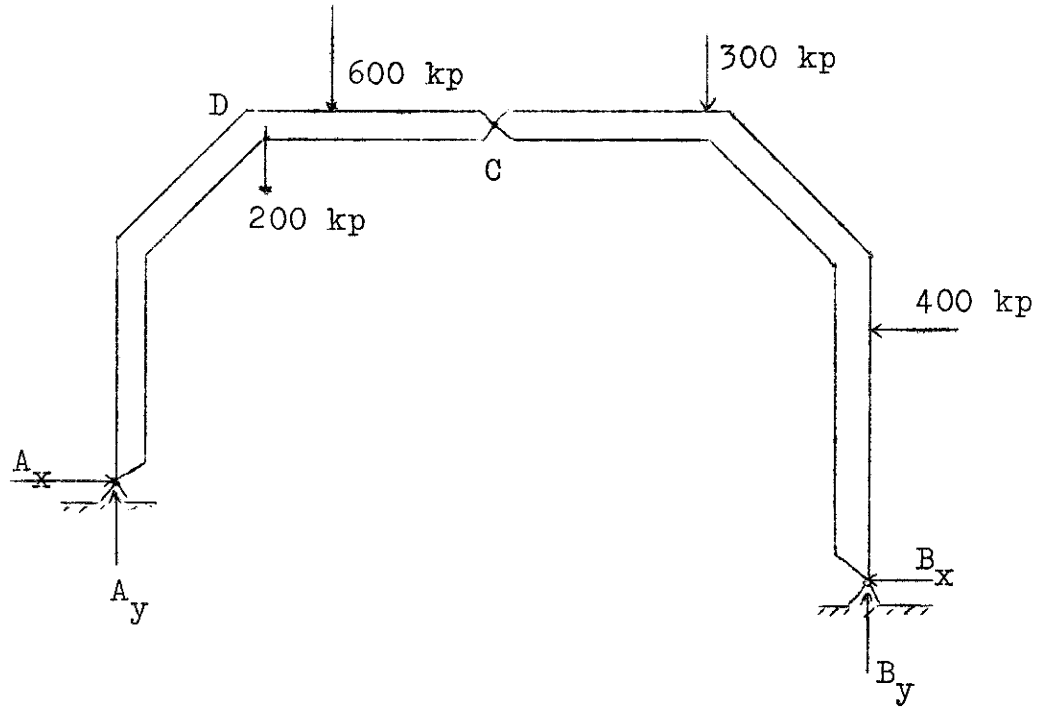
$$\Sigma M_{III} = 0 \quad : \quad B \cdot 125 - A \cdot 200 + 5000 \text{ kp} \cdot 75 + 4000 \text{ kp} \cdot 25 = 0$$

$$\text{dvs.} \quad \underline{B = 5000 \text{ kp}}$$

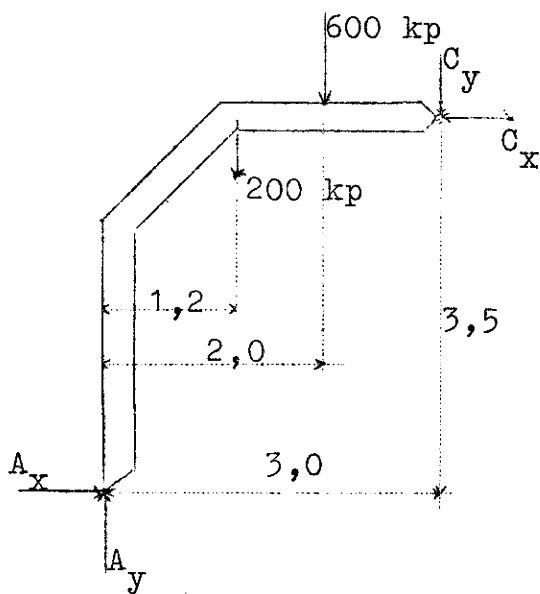
Oppgaven kunne også vært løst ved dekomponering av kreftene som vist i forrige eksempel. - Dersom en av kreftene i en likevektsoppgave skulle komme ut med negativt fortegn, betyr det at denne kraften er motsatt rettet av det vi har antatt.

10.

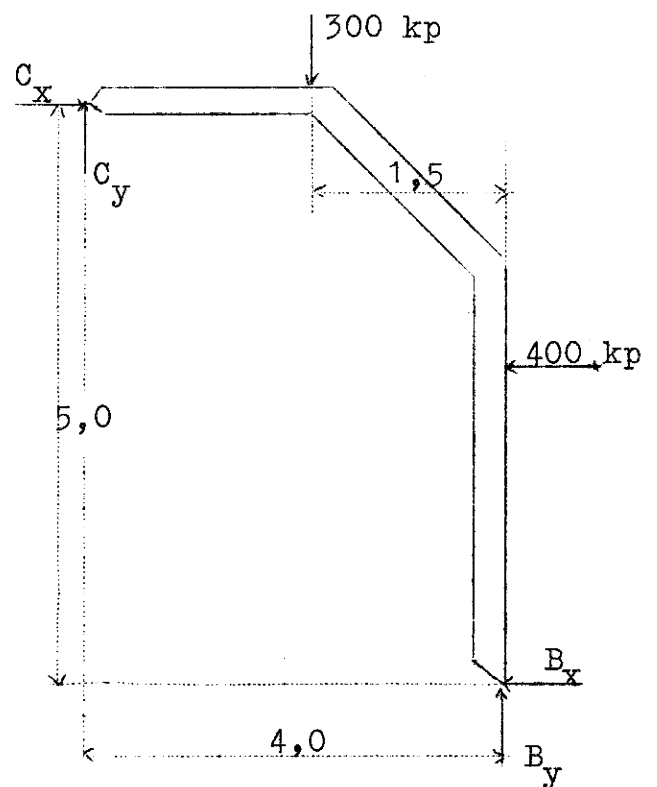
Den usymmetriske treleddbuen på fig. 10 består av to stive buedeler, som er oppstøttet av fotleddene A og B og er koplet sammen ved toppleddet C. Vi skal beregne kreftene i leddene.



(a)



(b)



(c)

Fig. 10

Vi studerer likevekten av hver buedel for seg. Hver buedel påvirkes av belastninger og holdes i likevekt av krefter i leddene, fig. b og c. Retningene av leddkreftene er ukjente, og vi tegner derfor horisontale og vertikale komponenter i den retning vi antar at kreftene virker. Her må vi huske at kreftene ved toppleddet er de to buedeleres gjensidige kraftvirkninger mot hverandre, og disse må ifølge vekselvirkningsloven være like store og motsatt rettet. Komponentene C_x og C_y må derfor tegnes med motsatte pilretninger på de to skissene. Skulle det vise seg at den antatte kraftretning er feil for f.eks. C_y , vil dette fremkomme som negativ løsning for C_y og denne leddkraften vil for begge buedeler virke i motsatt retning av den vi ser på skissene.

For begge buedelene kan vi stille opp 3 likevektsligninger, dvs. tilsammen 6 uavhengige ligninger, som stemmer med at det er 6 ukjente kraftkomponenter.

$$\text{Venstre del: } \Sigma M_A = 0 : C_x \cdot 3,5 - C_y \cdot 3 - 200 \text{ kp} \cdot 1,2 - 600 \text{ kp} \cdot 2 = 0$$

$$\text{Høyre del : } \Sigma M_B = 0 : -C_x \cdot 5 - C_y \cdot 4 + 300 \text{ kp} \cdot 1,5 + 400 \text{ kp} \cdot 2,5 = 0$$

$$\text{gir } \underline{C_x = 350 \text{ kp}} \quad \text{og} \quad \underline{C_y = -73,3 \text{ kp}}$$

$$\text{Venstre del: } \Sigma P_x = 0 : A_x - C_x = 0 \quad \text{dvs.} \quad \underline{A_x = 350 \text{ kp}}$$

$$\Sigma P_y = 0 : A_y - C_y - 200 \text{ kp} - 600 \text{ kp} = 0$$

$$\underline{A_y = 200 \text{ kp} + 600 \text{ kp} + (-73,3 \text{ kp}) = 727 \text{ kp}}$$

$$\text{Høyre del : } \Sigma P_x = 0 : B_x - C_x + 400 \text{ kp} = 0$$

$$\underline{B_x = -400 \text{ kp} + 350 \text{ kp} = -50 \text{ kp}}$$

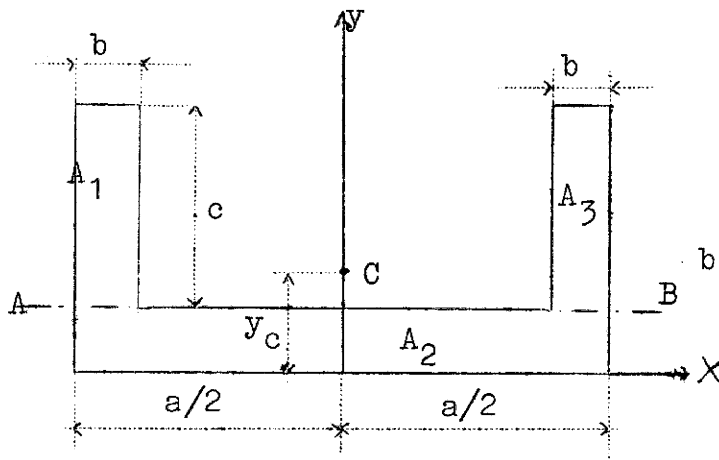
$$\Sigma P_y = 0 : B_y + C_y - 300 \text{ kp} = 0$$

$$\underline{B_y = 300 \text{ kp} - (-73,3 \text{ kp}) = 373 \text{ kp}}$$

Kreftene B_x og C_y er negative. Horisontalkraften ved B og vertikalkraften ved C er altså rettet motsatt av det som skissene viser.

III b.

1.



a) Bestem koordinaten y_c til tyngdepunktet på figuren. Følgende dimensjoner er gitt: $a=6$ cm, $b=1$ cm, $c=2$ cm.

b) Hvis dimensjonene a og b på figuren er faste, finn størrelsen på c for at tyngdepunktet skal ligge på linjen AB.

$$a) \quad y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{2b c \left(\frac{c}{2} + b\right) + a b \frac{b}{2}}{2 \cdot bc + a \cdot b}$$

$$\underline{y_c} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 2 + 6 \cdot \frac{1}{2}}{4 + 6} = \frac{11}{10} = \underline{\underline{1,10 \text{ cm}}}$$

$$b) \quad b = \frac{2bc\left(\frac{c}{2} + b\right) + a \cdot \frac{b^2}{2}}{2bc + ab} = \frac{c^2 + 2bc + \frac{ab}{2}}{2c + a}$$

$$ab + 2bc = c^2 + 2bc + \frac{ab}{2}$$

$$c^2 = \frac{ab}{2}$$

$$\underline{\underline{c = \sqrt{\frac{ab}{2}}}}$$

2.

På fig. 12 er tegnet en alminnelig brukt fagverkstype ved takkonstruksjoner. Takbelastningen overføres til knutepunktene. Fagverket støttes oppe av 2 lager - ett friksjonsløst glidelager og ett som kan oppta mulige horisontale krefter.

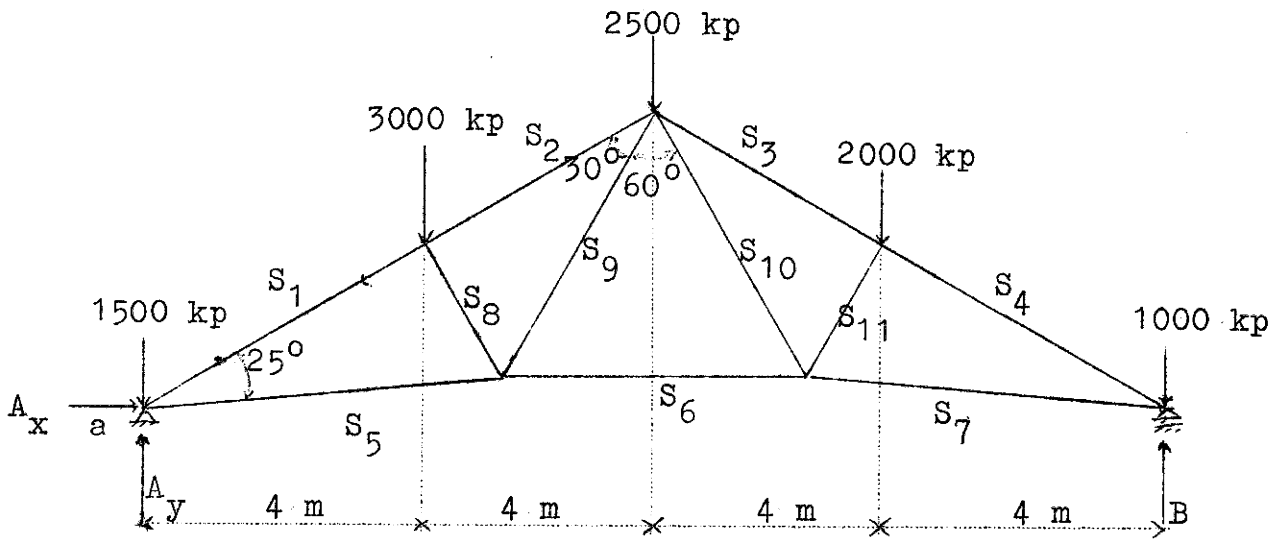


Fig. 12

Antall knutepunkter $k = 7$, $n = 11$ og $o = 3$

$$\therefore 2k = 14 = n + o = 14$$

Fagverket er altså statisk bestemt. Ved uforskyvelige lagre må en regne med 2 ukjente kraftkomponenter, selv om en på forhånd kan fastslå at den ene kraftkomponent er null.

Oppgaven er å tegne fagverkets Cremonaplan.

Før vi begynner konstruksjonen, kan vi beregne opplagerkreftene som vanlig for stive legemer. De ytre belastninger er tegnet inn på fig.

$$\Sigma P_x = 0 \quad \text{gir} \quad \underline{A_x = 0}$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad \therefore A_y \cdot 16 + 1500 \cdot 16 + 3000 \cdot 12 + 2500 \cdot 8 + 2000 \cdot 4 = 0$$

$$\text{dvs.} \quad \underline{A_y = 5500 \text{ kp}}$$

$$\Sigma P_y = 0 \quad : \quad \underline{B = 1000 + 2000 + 2500 + 3000 + 1500 - A_y = 4500 \text{ kp}}$$

Ved opptegningen av Cremonaplanet starter vi med punkt a.

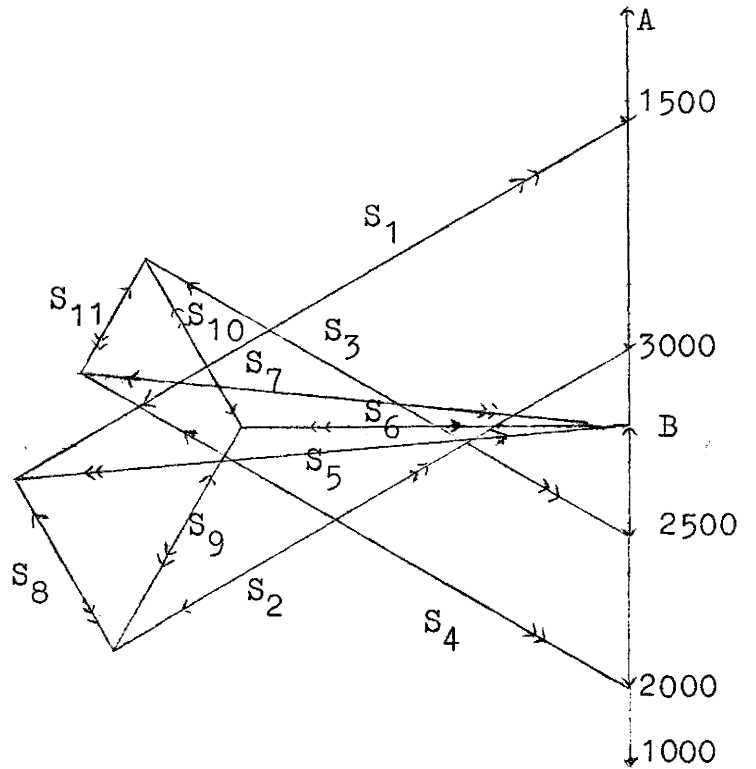


Fig. 13

Kraftretningene blir som vist på figur 14.

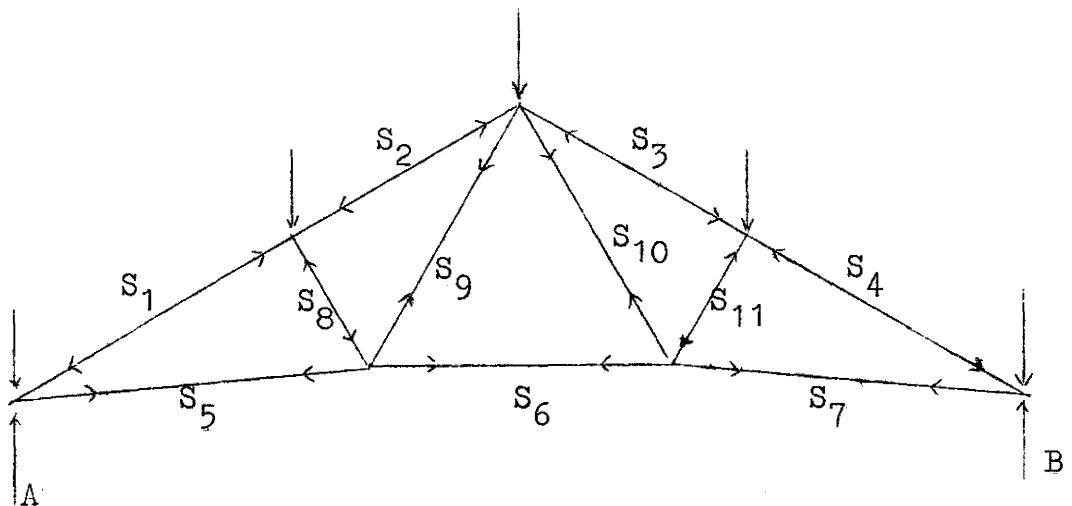


Fig. 14

3.

Et fagverk er vist på figuren. To belastninger på 1000 kp virker på boltene C og E. Vi skal bestemme kraften i hver stav og bestemme om det er strekk eller trykk i staven. Vi ser bort fra vekten av stavene.

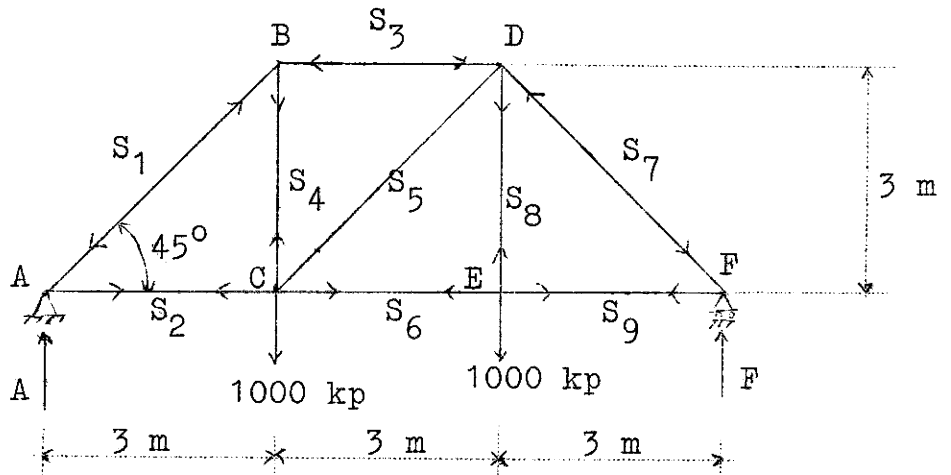


Fig. 15

Av symmetri grunner (kunne også betraktet summen av momentene om A og deretter summen av de vertikale krefter som virker på fagverket) ser vi at $A = F = 1000$ kp og rettet vertikalt. Vi tegner Cremonaplanet idet vi starter med punkt A, deretter B, C, D, E og F. Herav ser vi at vi har strekk i stavene:

S_2, S_4, S_6, S_8 og S_9

og trykk : S_1, S_3 og S_7 .

Staven S_5 er ubelastet og kalles en nullstav.

Av Cremonaplanet ser vi at:

$$\underline{S_2 = S_3 = S_4 = S_6 = S_8 = S_9 = 1000 \text{ kp}}$$

$$\underline{S_1 = S_7 = 1414 \text{ kp}}$$

$$(1414 = 1000 \sqrt{2}).$$

$$\underline{S_5 = 0 \text{ kp}}$$

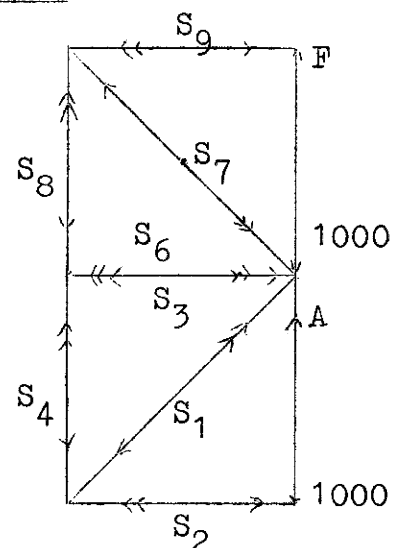


Fig. 16

4.

På fig. 17 er vist en bil som kjører opp en bakke som danner en vinkel θ med horisontalen. Hvis den statiske og den kinetiske friksjonskoeffisient mellom bildekkene og veien er henholdsvis 0,5 og 0,4, hva er den maksimale helningsvinkel bilen kan klatre? Den har bakhjulsdrift og veier lastet 2000 kp. Tyngdepunktets beliggenhet er vist på figuren.

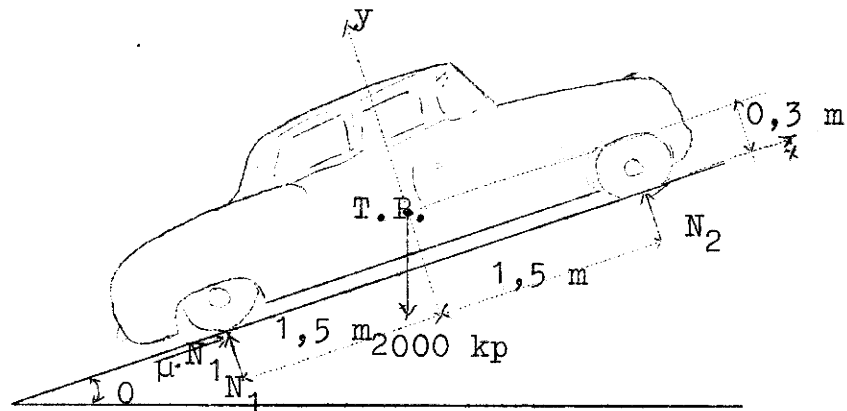


Fig. 17

Den maksimale friksjonskraft vi kan oppnå har vi like før hjulene begynner å spinne. Vi ser at det er friksjonskraften som er den kraft utenfra mot bilen som driver bilen oppover bakken.

Vi kan betrakte dette som et problem med to ukjente krefter, \vec{N}_1 og \vec{N}_2 som virker i samme plan som bilens tyngdekraft. Den tredje ukjente størrelse er helningsvinkelen θ_{\max} . Vi har bare friksjon mellom drivhjulene og underlaget og kan her regne som om den opptrer i ett punkt i figurplanet - kontaktpunktet mellom bakhjulet og bakken. Ved å bruke koordinataksene xy på figuren som referanseramme får vi da følgende tre likevektsligninger:

$$\Sigma P_x = 0 : \quad 0,5 \cdot N_1 - 2000 \cdot \sin \theta_{\max} = 0 \quad (a)$$

$$\Sigma P_y = 0 : \quad N_1 + N_2 - 2000 \cdot \cos \theta_{\max} = 0 \quad (b)$$

$$\Sigma M_A = 0 : \quad 3 \cdot N_2 - 1,5 \cdot 2000 \cdot \cos \theta_{\max} + 0,3 \cdot 2000 \cdot \sin \theta_{\max} = 0 \quad (c)$$

$$(a) \text{ i } (b) \text{ gir: } N_2 = 2000 \cdot \cos\theta_{\max} - 4000 \cdot \sin\theta_{\max} \quad (d)$$

$$(d) \text{ i } (c) \text{ gir: } 6000 \cdot \cos\theta_{\max} - 12000 \cdot \sin\theta_{\max} - 3000 \cos\theta_{\max} + \\ + 600 \sin\theta_{\max} = 0$$

$$\text{dvs. } 3000 \cos\theta_{\max} = 11400 \sin\theta_{\max}$$

$$\cot\theta_{\max} = 3,80$$

$$\theta_{\max} = 14,7^\circ$$

5.

En 4m lang stige som veier 25 kg står mot en vertikal vegg med en vinkel av 30° . En mann som veier 100 kg skal klatre opp stigen. Hvor høyt opp kommer han før stigen glir ned når den statiske friksjonskoeffisient er lik 0,20 for kontaktflatene med vegg og med gulv?

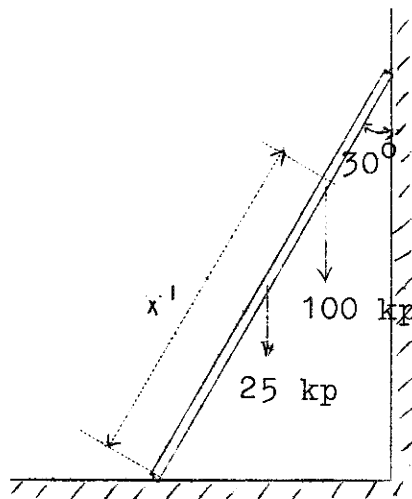


Fig. 18

Før stigen begynner å gli, må vi ha maksimal friksjonskraft langs begge kontaktflatene. Vi nytter oss av det på fig. 19 der alle kreftene som virker på stigen er tegnet inn. Friksjonskreftene er lik μ_S ganger normalkreftene like før stigen glir, og friksjonskreftenes retning er slik at de

prøver å hindre bevegelse. Kontaktflatene antas å være infinitesimale slik at virkningslinjene for normal- og friksjonskreftene blir som på fig. 19.

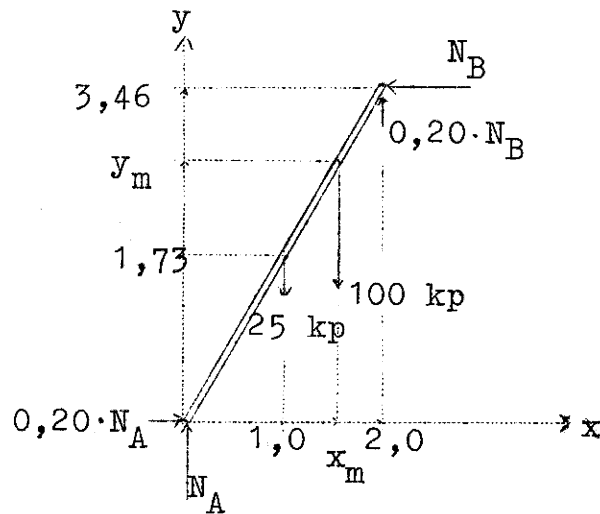


Fig. 19

Vi kan så sette opp tre likevektsligninger:

$$\Sigma P_x = 0 : 0,20 \cdot N_A - N_B = 0 \quad (a)$$

$$\Sigma P_y = 0 : N_A - 25 - 100 + 0,20 \cdot N_B = 0 \quad (b)$$

$$\Sigma M_A = 0 : N_B \cdot 3,46 + 0,20 \cdot N_B \cdot 2,0 - 100 \cdot x_m - 25 \cdot 1,0 = 0 \quad (c)$$

$$(a) \text{ i } (b): \frac{N_B}{0,20} - 25 - 100 + 0,20 \cdot N_B = 0$$

$$\Rightarrow N_B = \frac{125}{5,20} = 24 \text{ kp}$$

$$(c) : 24 \cdot 3,46 + 24 \cdot 0,4 - 100 \cdot x_m - 25 = 0$$

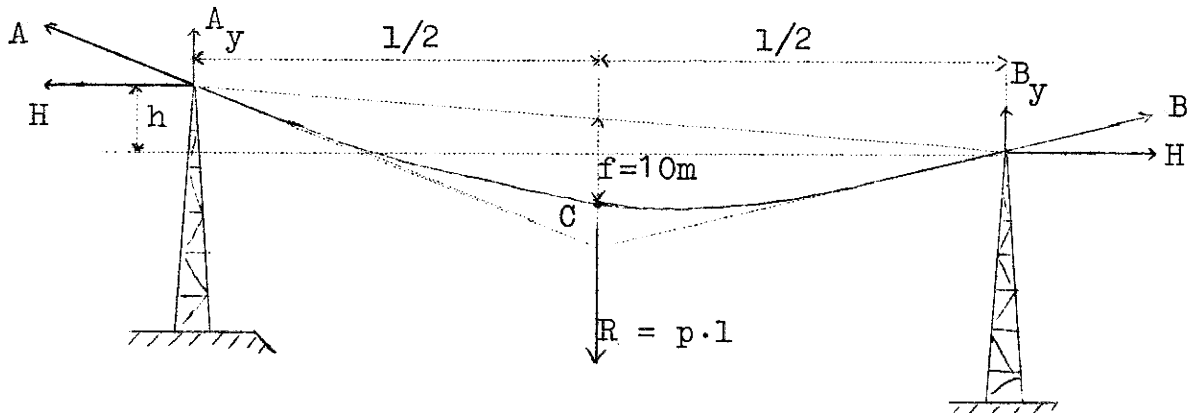
$$\underline{x_m = 0,68 \text{ m}}$$

Han kommer $x^l = \frac{x_m}{\sin 30^\circ} = 1,36 \text{ m}$ opp langs stigen

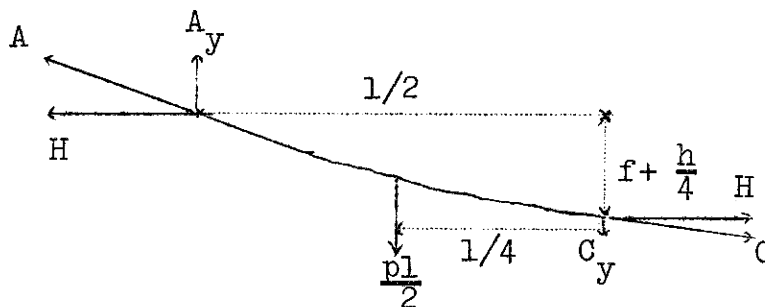
Hvis han hadde vært tyngre, ville N_A og N_B økt i samme forhold. Av lign. (c) ser vi da at x_m ville bli større, og han kan klatre høyere opp jo tyngre han er. (Men det vil ikke dreie seg om så svært mange cm).

6.

Figuren viser en kraftledning som er forankret i ledningsmaster ved A og B. Det er gitt horisontalavstanden $l = 100$ m og høydeforskjellen mellom opphengningspunktene $h = 12$ m, samt pilhøyden $f = 10$ m ved midten av spennvidden (se figuren). Ledningens totale vekt er 160 kg, som regnes jevnt fordelt langs spennvidden med $p = 160$ kg/100 m = 1,6 kg pr. meter horisontalprojeksjon. Vi skal beregne stramningen i ledningen.



(a)



(b)

Fig. 20

For å nytte kjennskapet til beliggenheten av midterste punkt C, kan vi betrakte likevekten av f.eks. venstre halvdel av ledningen foruten likevekten av ledningen som helhet. De ytre kraftvirkninger er tegnet inn på figurene a og b.

Hele ledningen:

$$\Sigma M_B = 0 : H \cdot h - A_y \cdot l + pl \cdot \frac{1}{2} = 0 \quad | \cdot (-1)$$

Venstre halvdel:

$$\Sigma M_C = 0 : H(f + \frac{h}{2}) - A_y \cdot \frac{1}{2} + \frac{pl}{2} \cdot \frac{1}{4} = 0 \quad | \cdot 2$$

$$A_y \text{ elimineres: } H \cdot 2f - pl \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$\text{dvs. } H = \frac{pl^2}{8f} = 200 \text{ kp}$$

Ved å sette inn i første ligning får vi:

$$A_y = \frac{pl}{2} + H \cdot \frac{h}{l} = 104 \text{ kp}$$

Største stramning har vi i A der helningen er størst:

$$\underline{\underline{S_{\max} = A = \sqrt{H^2 + A_y^2} = 226 \text{ kp}}}$$

IV. b.

1.

Vi skal beregne diameteren d på kjettingen på figuren. Kjettingen skal bære en last P på 1000 kp og tillatt strekkspenning er $\sigma_{tn} = 530 \text{ kp/cm}^2$.

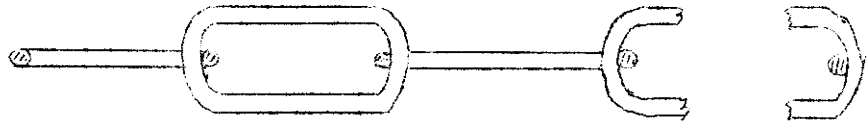


Fig. 21

Vi ser av figuren at en lenke som brister får to bruddflater. Anta at én slik flate er $A \text{ cm}^2$.

Etter spenningsloven fås:

$$\sigma_{tn} = \frac{P}{2 \cdot A} \quad \text{eller} \quad A = \frac{P}{2 \sigma_{tn}}$$

$$A = 2 \frac{1000}{530} \text{ cm}^2 = 0,944 \text{ cm}^2$$

$$\text{Fra } A = \frac{\pi}{4} d^2 \quad \text{finnes} \quad \underline{d = 1,1 \text{ cm}}$$

Det vil si at vi må bruke 11 mm's lenke.

2.

Finn treghetsmomentet for et rektangel $b \times h$ omkring en akse langs rektanglets endekant.

Vi fant at treghetsmomentet om tyngdepunktsaksen er lik:

$$I_o = \frac{bh^3}{12}$$

Vi anvender så parallellforskyvningsloven

$$I_a = I_o + A \cdot a^2$$

Her er $a = \frac{h}{2}$ og $A = b \cdot h$. Da blir:

$$I_a = \frac{b \cdot h^3}{12} + b \cdot h \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

3.

Finn treghetsmomentet for en trekant tatt om tyngdepunktet.

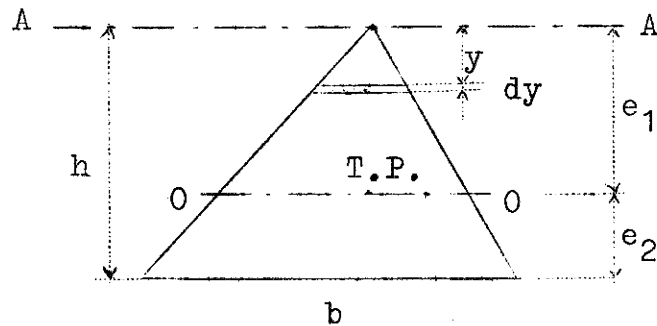


Fig. 22

For en akse $A - A$ parallell med grunnsiden b er:

$$I_A = \int_A y^2 dA$$

Geometrisk ser vi at : $\frac{x}{b} = \frac{y}{h}$

Dvs. $x = \frac{b \cdot y}{h}$ og $dA = x \cdot dy = \frac{b \cdot y}{h} \cdot dy$

Da blir: $I_A = \int_0^h y^2 \cdot \frac{b \cdot y}{h} \cdot dy = \frac{b}{h} \int_0^h y^3 dy = \frac{b}{h} \left[\frac{y^4}{4} \right]$

$$I_A = \frac{b}{h} \cdot \frac{h^4}{4} = \frac{b \cdot h^3}{4}$$

I_C kan så finnes av parallellforskyvningsloven:

$$I_A = I_O + A e_1^2$$

Vi antar som kjent at tyngdepunktet ligger i avstanden $\frac{h}{3}$ fra

grunnlinjen, så at $e_2 = \frac{h}{3}$ og $e_1 = \frac{2h}{3}$. Da blir:

$$I_o = I_A - A \cdot e_1^2 = \frac{b \cdot h^3}{4} - \frac{b \cdot h}{2} \left(\frac{2h}{3}\right)^2$$

$$I_o = \frac{b \cdot h^3}{4} - \frac{2}{9} b \cdot h^3$$

$$\underline{I_o = \frac{b \cdot h^3}{36}}$$

4.

Finn I_x og W_x for flaten på figuren. Mål i cm.

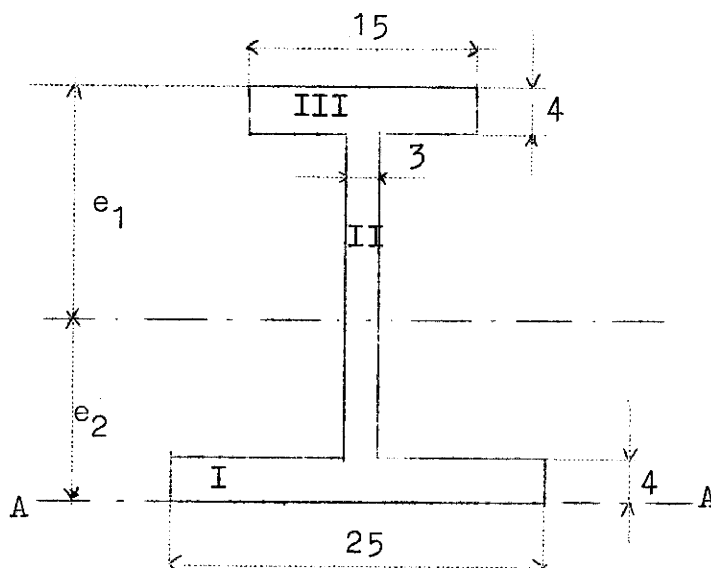


Fig. 23

Nøytrallaget går gjennom tverrsnittets tyngdepunkt, som derfor først må bestemmes. Flaten deles opp i tre rektangler, og vi regner ut tyngdepunktets beliggenhet i forhold til aksene A-A, dvs. avstanden e_2 .

$$\underline{e_2} = \frac{\sum_i y_i \cdot A_i}{\sum_i A_i} = \frac{25 \cdot 4 \cdot 2 + 20 \cdot 3 \cdot 14 + 15 \cdot 4 \cdot 26}{25 \cdot 4 + 20 \cdot 3 + 15 \cdot 4} = \frac{2600}{220} \text{ cm} = \underline{11,8 \text{ cm}}$$

		$I = I_0 + A \cdot a^2$
Del I	$a = 9,8$	$133 + 9600 = 9733$
Del II	$a = 2,2$	$2000 + 290 = 2290$
Del III	$a = 14,2$	$80 + 12100 = 12180$
		$I_x = \Sigma I = 24203$

Vi setter da $I_x = 24200 \text{ cm}^4$

$$W_1 = \frac{I_x}{e_1} = \frac{24200}{16,2} \approx 1500 \text{ cm}^3$$

$$W_2 = \frac{I_x}{e_2} = \frac{24200}{11,8} = 2050 \text{ cm}^3$$

5.

I et kvadrat med siden 10 cm er det laget et sentralt hull med diameteren 6 cm. Beregn W_x .

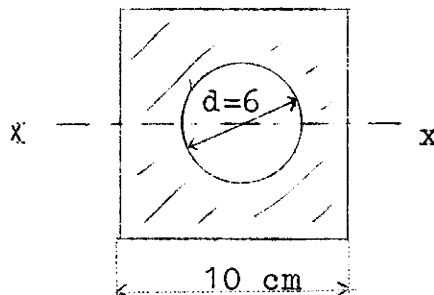


Fig. 24

Fra tabell finnes at treghetsmomentet om en tyngdepunktsakse for en sirkel er lik $\pi d^2/64$. Treghetsmomentet for det gitte tverrsnitt blir da:

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{10 \cdot 10^3}{12} - \frac{\pi \cdot 6^4}{64} = 770 \text{ cm}^4$$

$$W_x = \frac{I_x}{e} = \frac{770}{5} = 154 \text{ cm}^3$$

Da W_x inneholder en variabel størrelse i nevneren, kan vi ikke

legge sammen eller trekke fra hverandre bøyingsmotstander for sammensatte flater.

6.

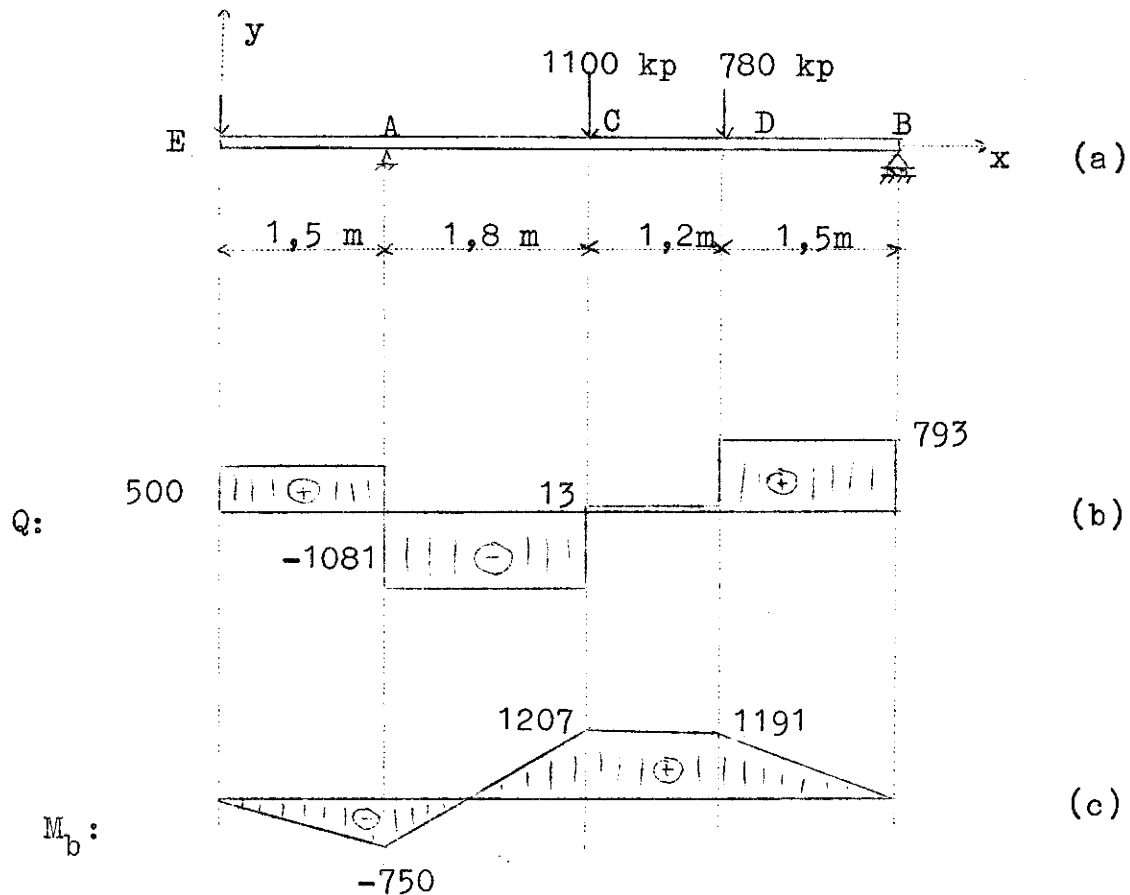


Fig. 25

En bjelke er belastet som vist i fig. (a). Tegn opp Q - og Mb-diagram.

Først bestemmes lagerreaksjonene R_A og R_B . Med B som momentpunkt får vi:

$$\Sigma M_B = 0 : 500 \cdot 6 - R_A \cdot 4,5 + 1100 \cdot 2,7 + 780 \cdot 1,5 = 0$$

som gir: $R_A = 1587 \text{ kp}$

$$\Sigma P_y = 0 : R_A + R_B = 500 + 1100 + 780$$

gir: $R_B = 793 \text{ kp}$

Umiddelbart til høyre for hver konsentrert kraft og lagerreaksjon tenker vi oss lagt inn et snitt, og finner Q og M_b her.

Like til høyre for E er $Q = 500$ kp og $M_b = 0$.

Like til høyre for A er $Q = (500 - 1587)kp = -1087$ kp og

$$M_b = -500 \cdot 1,5 \text{ kpm} = -750 \text{ kpm}$$

Like til høyre for punkt C er:

$$Q = (500 - 1587 + 1100) \text{ kp} = 13 \text{ kp}$$

$$M_b = (-500 \cdot 3,3 + 1587 \cdot 1,8) \text{ kpm} = 1207 \text{ kpm}$$

Like til høyre for punkt D er:

$$Q = (500 - 1587 + 1100 + 780)kp = 793 \text{ kp}$$

$$M_b = (-500 \cdot 4,5 + 1587 \cdot 3,0 - 1100 \cdot 1,2)kpm = 1191 \text{ kpm}$$

Like til høyre for punkt D er bjelken slutt. Der må både Q og $M_b = 0$. En kan også kontrollere på tilsvarende måte som over at dette stemmer.

-Skjærkraftdiagrammet tegnes så opp som vist på fig.

(b). Vi finner to farlige snitt, et i A og et i C. Vi har funnet $M_A = -750$ kpm og $M_C = 1207$ kpm. M_C er altså størst.

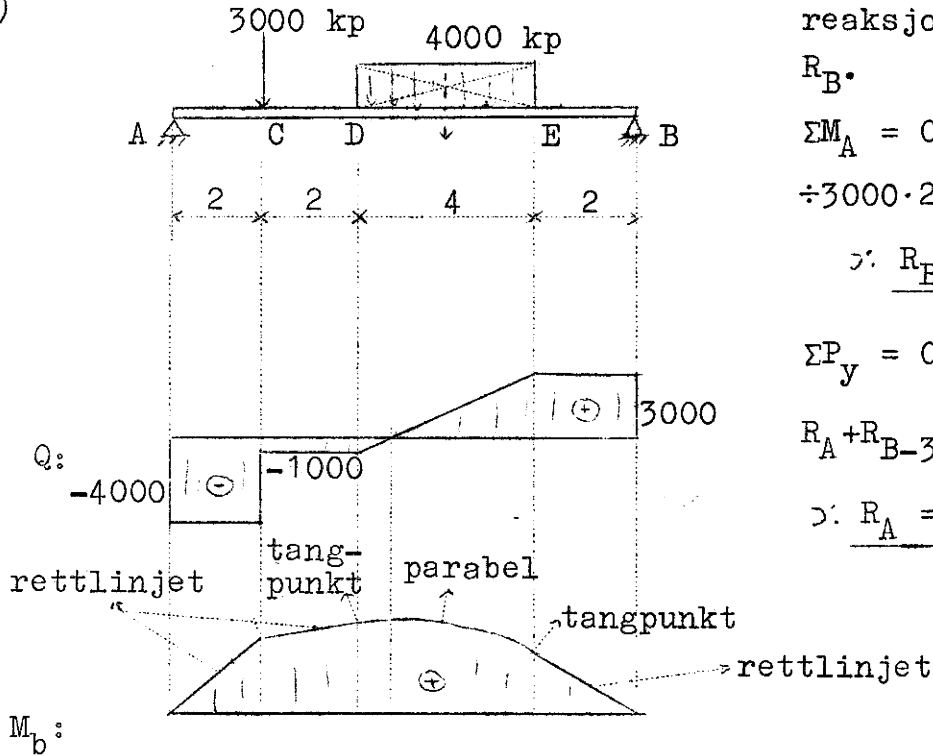
- Vi ser at for en punktbelastet bjelke er skjærkraften konstant i hvert felt mellom punktbelastningene.

Av Q -diagrammet ser vi at bøyningmomentkurven mellom E og A har konstant negativ helning (dvs. en rett linje). Mellom A og C er momentkurvens helning omtrent 2 ganger så stor, men positiv. Mellom C og D har kurven så en svak negativ helning, mens den mellom D og B er negativ og litt større enn i felt EA. - For punktbelastet bjelke består altså momentdiagrammet av rette linjer. Det maksimale moment oppstår ved en av punktlastene eller ved et opplagerpunkt.

7.

Finn skjærkraft- og bøyningmomentdiagram for belastningstilfellene a og b under.

a)



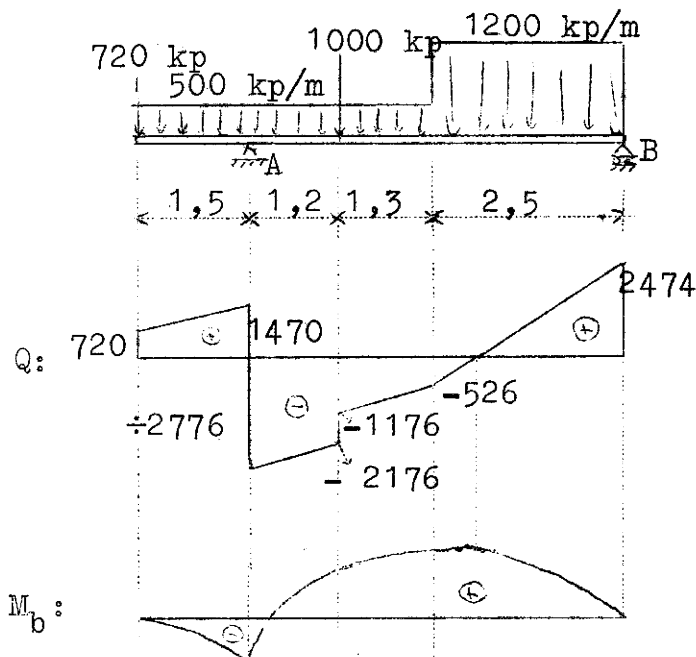
Vi må først finne reaksjonskreftene R_A og R_B .

$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= 0: \\ \div 3000 \cdot 2 - 4000 \cdot 6 + R_B \cdot 10 &= 0 \\ \therefore R_B &= 3000 \text{ kp} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma P_y &= 0: \\ R_A + R_B - 3000 - 4000 &= 0 \\ \therefore R_A &= 4000 \text{ kp} \end{aligned}$$

Fig. 26

b) Vi må også her først finne reaksjonskreftene R_A og R_B .



$$\begin{aligned} \Sigma M_B &= 0: \\ 720 \cdot 6,5 - R_A \cdot 5 + 1000 \cdot 3,8 + \\ &+ (500 \cdot 4) \cdot 4,5 + (1200 \cdot 2,5) \cdot \\ &\cdot 1,25 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{4680 + 3800 + 9000 + 3750}{5} \\ R_A &= 4246 \text{ kp} \end{aligned}$$

Fig. 27

$$\Sigma P_y = 0:$$

$$R_A + R_B - 720 - 1000 - (500 \cdot 4) - (1200 \cdot 2,5) = 0$$

$$R_B = (6720 - 4246) \text{kp} = \underline{2474 \text{ kp}}$$

8.

En trebjelke med tverrsnitt $b \times h$, der $h = 3b$, er belastet som på figuren. Beregn b og h for en tillatt bøyningsspenning av 100 kp/cm^2 . (Legg merke til at det lønner seg å stille bjelken med den smaleste siden ned slik at treghetsmomentet blir størst mulig).

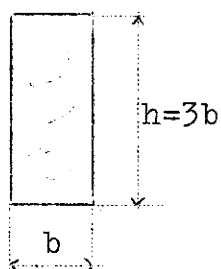
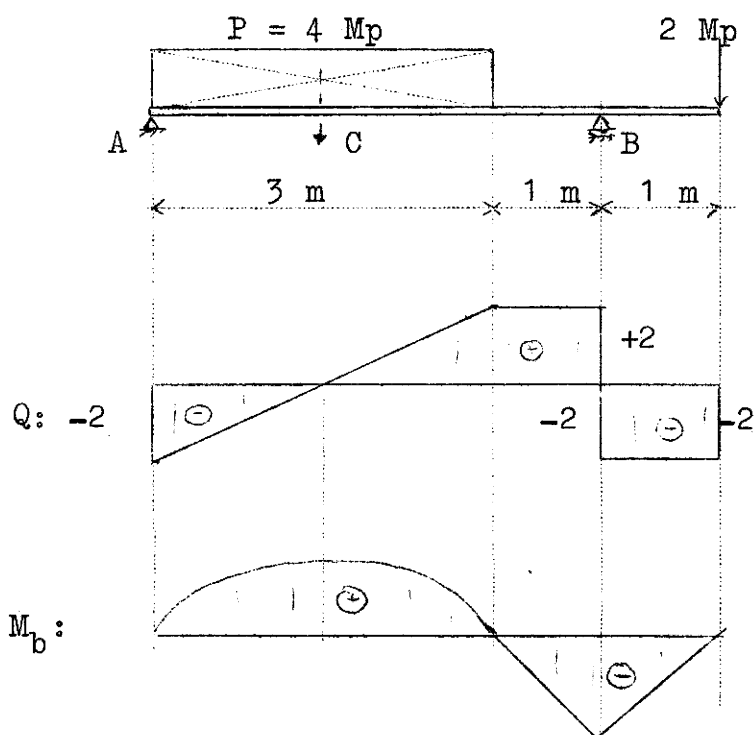


Fig. 28



Vi bestemmer først reaksjonene R_A og R_B .

$$\Sigma M_A = 0: R_B \cdot 4 - 4 \cdot 1,5 - 2 \cdot 5 = 0$$

$$R_B = \underline{4 \text{ Mp}}$$

$$\Sigma P_y = 0: R_A + R_B = 6 \text{ Mp}$$

$$R_A = \underline{2 \text{ Mp}}$$

Vi tegner opp skjærkraftdiagrammet og finner to farlige snitt, et i B og et i C.

$$M_B = - 2 \cdot 1 \text{ Mpm} \quad (= -2 \cdot 4 + 4 \cdot 2,5)$$

$$M_C = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1,5 \text{ Mpm} = 1,5 \text{ Mpm}$$

dvs. $M_{bmax} = M_B = - 200000 \text{ kpcm}$

Spenningsloven gir: $\sigma_b = \frac{M_b}{W_x}$

$$\sigma_{tn} = \frac{M_{bmax}}{W_x}$$

$$\therefore W_x = \frac{M_{bmax}}{\sigma_{tn}} = \frac{200000}{100} = 2000 \text{ cm}^3$$

Men $W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b(3b)^2}{6} = \frac{3}{2} b^3$

$$b^3 = \frac{2}{3} \cdot 2000 = 1333 \text{ cm}^3$$

$$\underline{\underline{b = 11 \text{ cm}}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{h = 33 \text{ cm}}}$$

9.

En 10 m lang bjelke med jevnt fordelt belastning 10 Mp hviler på to lagre A og B med avstand 6 m. Skissér Q - og M_b - diagram samt bestem farlige snitt og maksimalt bøyningmoment.

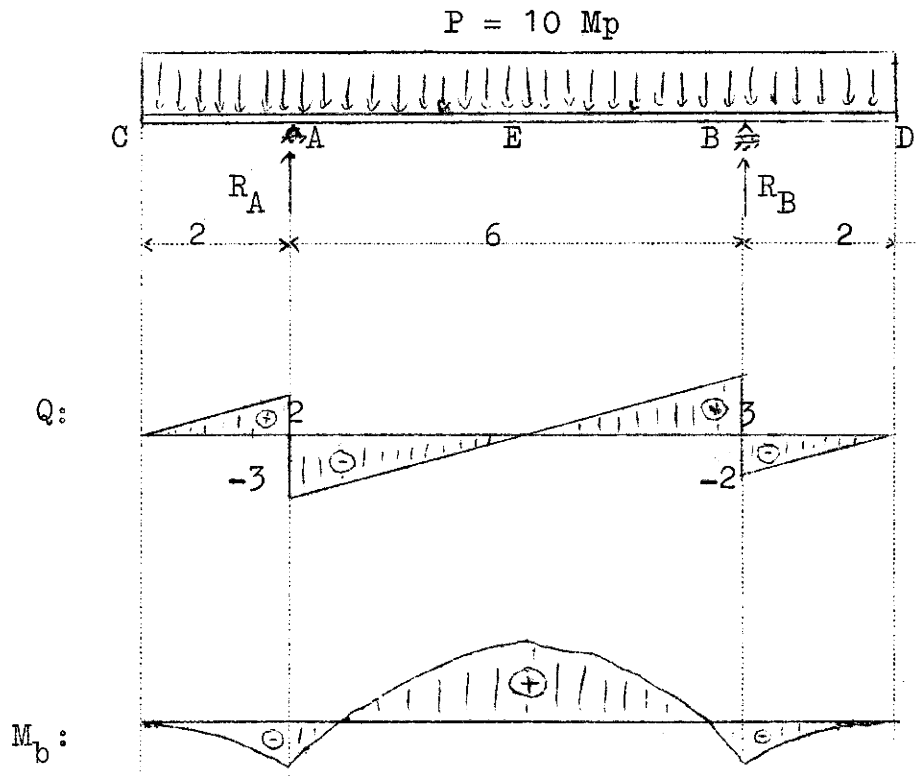


Fig. 29

Av symmetrigrunner får vi at $R_A = R_B = 5 \text{ Mp}$

a) Skjærkraftdiagrammet.

Belastningsintensiteten $q = \frac{10}{10} = 1 \text{ Mp/m}$. For hver meter av bjelken endres således skjærkraften med 1 Mp. Mellom C og A er endringen 2 Mp oppover. I A kommer reaksjonskraften $R_A = 5 \text{ Mp}$ nedover, dvs. til -3 Mp. Herfra øker skjærkraften med 1 Mp pr. meter, og passerer 3 m til høyre for A, dvs. midt på bjelken. Ved B er Q blitt +3 Mp, reaksjonskraften R_B virker med et bidrag på 5 Mp nedover i skjærkraften, hvorefter skjærkraften stiger jevnt til null ved punkt D.

b) Momentdiagrammet.

Vi går ut fra punkt C. Her er vinkelkoeffisienten for momentkurven (lik \div Q) null, og den avtar (dvs. øker i tallverdi) mer og mer frem til punkt A, der vinkelkoeffisienten går over fra negativ til positiv verdi. Kurven er brattere til høyre for punkt A enn til venstre, og den har en vannrett tangent

på midten av bjelken der $Q = 0$.

Vi får farlige snitt i A, B og E.

$$M_A = M_B = - 2 \text{ 1 Mpm.}$$

Bøyningsmomentet i punkt E, motsatt like stort som summen av de momenter som virker om punktet fra venstre, blir da:

$$M_E = (5 \cdot 3 - 5 \cdot 2,5) \text{ Mpm} = + 2,5 \text{ Mpm}$$

Den numerisk største M_b fås midt på bjelken og er $+2,5$ Mpm.

10.

En 5 m lang stålbejelke er opplagret og belastet som vist på fig. a.

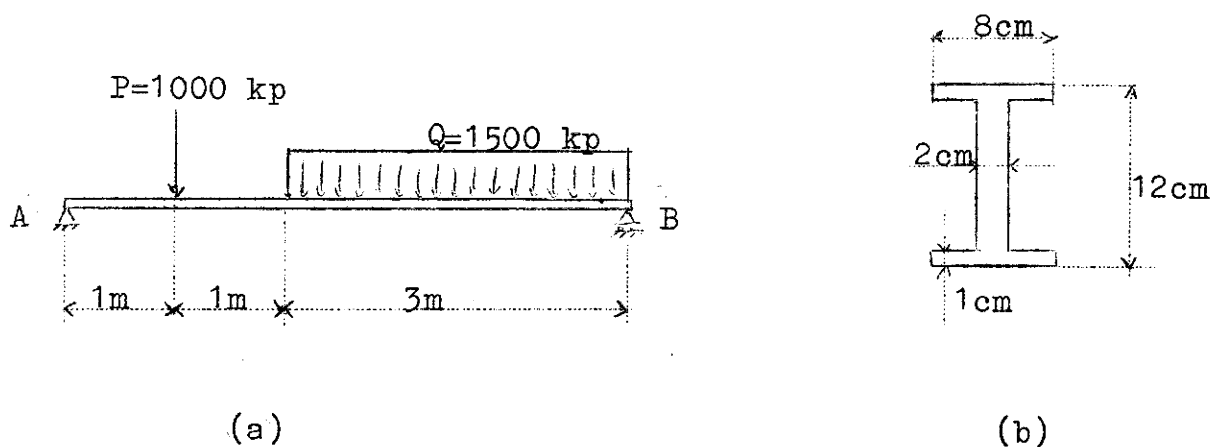


Fig. 30

En kraft $P = 1000$ kp trykker mot bejelken i en avstand lik 1 m fra dens venstre opplagringspunkt, A, og bejelken er utsatt for en jevn belastning av tilsammen $Q = 1500$ kp over de 3 m som ligger nærmest dens høyre opplagringspunkt B. Bejelkens egen vekt kan neglisjeres i forhold til belastningene P og Q.

- Finne opplagerkreftene og skissér skjærkraftdiagrammet.
- Bejelken er av stål med elasticitetsmodul $E = 2100\ 000$ kp/cm². Den har et tverrsnitt som vist på fig. b.

Beregn maksimal skjærspenning i bjelken.

c) Skissér bøyningmomentdiagrammet, og beregn maksimal bøyningsspenning i bjelken.

Løsning:

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0: \quad & 1000 \cdot 1 + 1500 \cdot 3,5 \div R_B \cdot 5 = 0 \\ & R_B = (200 + 1050) \text{ kp} = \underline{1250 \text{ kp}} \end{aligned}$$

$$\Sigma P_y = 0: \quad R_A + R_B - 1000 - 1500 = 0$$

$$\underline{R_A = 1250 \text{ kp}}$$

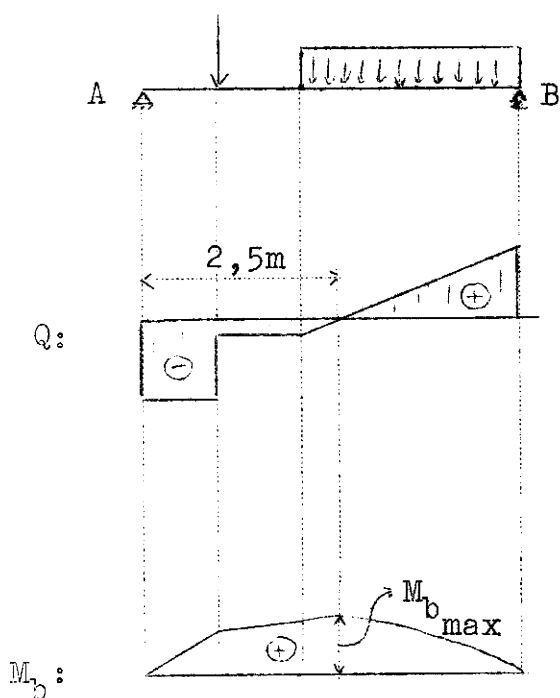


Fig. 31

$$M_{b_{\max}} = (1250 \cdot 1 + 250 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 250 \cdot 0,5) \text{ kpm} = \underline{1562,5 \text{ kpm}}$$

$$\underline{\underline{\tau_{\max} = \frac{M_{b_{\max}}}{I} \cdot \frac{h}{2} = \frac{156250}{652} \cdot 6 \text{ kp/cm}^2 = 1430 \text{ kp/cm}^2}}$$

$$I = \frac{2 \cdot 10^3}{12} + 2 \cdot \left(\frac{8 \cdot 1^3}{12} + 8 \cdot 1 \cdot 5,5^2 \right)$$

$$I = \left(\frac{1000}{6} + \frac{4}{3} + 484 \right) \text{ cm}^4 = \underline{652 \text{ cm}^4}$$

$$S_{\max} = (2 \cdot 5 \cdot 2,5 + 8 \cdot 1 \cdot 5,5) \text{ cm}^3 = \underline{69 \text{ cm}^3}$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}}{b I} = \frac{1250 \cdot 69}{2 \cdot 652}$$

$$\underline{\underline{\tau_{\max} = 66 \text{ kp/cm}^2}}$$

11.

En bjelke er tilvirket av to U-formede plater, som er sveiset sammen slik at sveisens tykkelse er lik godstykkelsen som overalt er lik 5 mm. Bjelken er fast innspenst i ene enden. I den ytre frie enden er bjelken belastet med en punktlast på 800 kp. Den frie bjelkelengden er 75 cm.

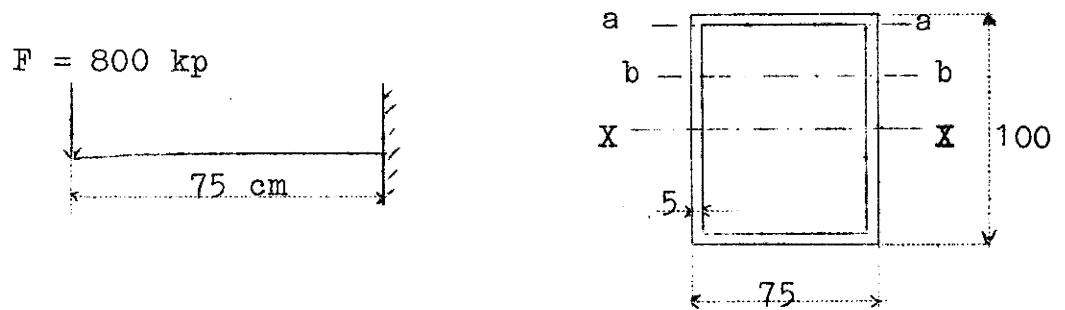


Fig. 32

- Beregn:
- Maksimal bøyningsspenning i bjelken.
 - Maksimal skjærspenning.
 - Skissér et diagram over skjærspenningenes fordeling over flaten. Som grunnlag for dette diagrammet regnes ut τ -verdiene i snitt a - a og b - b som ligger 45 resp. 25 mm fra nøyttallet.
 - Vi definerer et tverrsnittets μ -verdi etter:

$$\tau_{\max} = \mu \cdot \tau_{\text{middel}} = \mu \cdot \frac{Q_{\max}}{A}$$

Hvor stor er dette tverrsnittets μ - verdi?

Løsning.

Vi vet at en fast innspenst bjelke påvirket ytterst med en enkeltlast har sitt maksimale bøyningmoment ved innspenningsstedet, lik $M_{b_{\max}} = -F \cdot l$, og konstant skjærkraft lik $Q = F$

langs hele bjelkens lengde. Vi regner her med tallverdier, da strekkspenningene på oversiden er like store som trykkspenningene på undersiden.

$$a) \quad M_{b_{\max}} = 800 \cdot 75 \text{ kpcm} = 60\,000 \text{ kpcm}$$

$$I = \left(\frac{7,5 \cdot 10,0^3}{12} - \frac{6,5 \cdot 9,0^3}{12} \right) \text{ cm}^4 = 230 \text{ cm}^4$$

$$\underline{\underline{\sigma_{b_{\max}}}} = \frac{M_{b_{\max}} \cdot e}{I} = \frac{60\,000 \cdot 5}{230} \text{ kp/cm}^2 = \underline{\underline{1300 \text{ kp/cm}^2}}$$

b) I et symmetrisk tverrsnitt som dette vil vi ha maksimal skjærspenning midt på tverrsnittet. Da skjærkraften er konstant langs hele bjelken, $Q=Q_{\max}$ for alle x , er det likegyldig hvor vi velger tverrsnittet.

$$\tau_{\max} = \frac{Q S_{\max}}{b_y I}$$

$$Q = 800 \text{ kp}$$

$$b_y = 1 \text{ cm (NB! 2 sidekanter à 0,5 cm)}$$

$$I = 230 \text{ cm}^4 \text{ (fra a)}$$

$$S_{\max} = (7,5 \cdot 0,5 \cdot 4,75 + 2 \cdot 4,5 \cdot 0,5 \cdot 2,25) \text{ cm}^3 = (17,81 + 10,1) \text{ cm}^3 = 28 \text{ cm}^3$$

$$\underline{\underline{\tau_{\max}}} = \frac{800 \cdot 28}{1 \cdot 230} = \underline{\underline{97,4 \text{ kp/cm}^2}}$$

c) Det statiske moment av flaten utenfor snitt a - a er lik:

$$S_{aa} = 7,5 \cdot 0,5 \cdot 4,75 \text{ cm}^3 = 17,8 \text{ cm}^3$$

Det statiske moment av flaten utenfor snitt b - b er lik:

$$S_{bb} = (17,8 + 2 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 3,5) \text{ cm}^3 = 24,8 \text{ cm}^3$$

Derved blir:

$$\tau_{aa_1} = \frac{800 \cdot 17,8}{1 \cdot 230} \text{ kp/cm}^2 = \underline{61,5 \text{ kp/cm}^2}$$

(like under a - a)

$$\tau_{aa_2} = \frac{800 \cdot 17,8}{7,5 \cdot 230} \text{ kp/cm}^2 = \underline{8,2 \text{ kp/cm}^2}$$

(like over a - a)

$$\tau_{bb} = \frac{800 \cdot 24,8}{1 \cdot 230} \text{ kp/cm}^2 = \underline{86,2 \text{ kp/cm}^2}$$

Bjelken er symmetrisk, dvs. skjærspenningene blir symmetriske, og fordelingen blir:

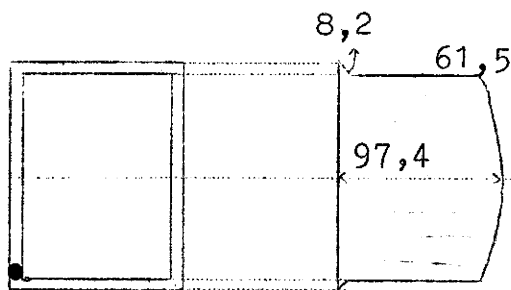


Fig. 33

$$d) \quad \tau_{\max} = \mu \cdot \tau_{\text{middel}} = \mu \frac{800}{16,5} \quad ,$$

$$\text{da tverrsnittsarealet: } \underline{A = (7,5 \cdot 10 - 6,5 \cdot 9) \text{ cm}^2 = 16,5 \text{ cm}^2}$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{\mu = \frac{97,4 \cdot 16,5}{800} = 2,0}}}$$

12.

En 1 m lang INP 300 er innspent i ene enden og i den frie enden belastet med en kraft på 4 Mp. Beregn den største spenningen etter formendringshypotesen. For INP 300 settes $\mu = 2,5$.

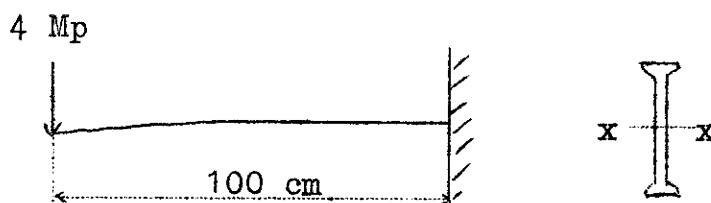


Fig. 34

Av tabellen for INP 300 finner vi:

$$A = 69,1 \text{ cm}^2 \quad I_x = 9800 \text{ cm}^4 \quad W_x = 653 \text{ cm}^3$$

Skjærkraften er konstant lik $Q = 4000 \text{ kp}$ over hele stangens lengde.

Det maksimale bøyningmoment har vi ved innspenningsstedet lik $M_{b_{\max}} = -400000 \text{ kpcm}$. Da bjelken er symmetrisk om

x-aksen, har vi her den maksimale skjærspenning i et snitt, mens bøyningsspenningen er lik null. Vi undersøker σ_{sml} i 3 steder på tverrsnittet, 1) Ytterste fiber, 2) Midten, 3) Overgangen flens/steg på undersiden. Tverrsnittet tas ved innspenningsstedet.

1) Ytterste fiber.

Her er:

$$\underline{\sigma_{b_{\max}}} = \frac{M_{b_{\max}}}{W_x} = \frac{400\ 000}{653} \text{ kp/cm}^2 = 612 \text{ kp/cm}^2 = \underline{\sigma_{\text{sml}}}$$

da τ her er lik null.

2) Midten:

$$\tau_{\max} = \mu \frac{Q}{A} = 2,5 \cdot \frac{4000}{69,1} \text{ kp/cm}^2 = 145 \text{ kp/cm}^2$$

Her er $\tau = 0$, dvs:

$$\underline{\sigma_{\text{sml}}} = \tau_{\max} \cdot \sqrt{3} = 145 \cdot 1,73 \text{ kp/cm}^2 = \underline{250 \text{ kp/cm}^2}$$

3) Overgangen flens/steg på undersiden:

Fra tabellen over INP-bjelker ser vi at:

$$t = 1,62 \text{ cm} , b = 12,5 \text{ cm} \text{ og } c = 1,08 \text{ cm}.$$

Setter vi flensen tilnærmet lik en rektangelflate, får denne arealet $A_f = b \cdot t = 12,5 \cdot 1,62 \text{ cm}^2 = 20,25 \text{ cm}^2$

Tyngdepunktet for A_f ligger i avstanden:

$$y_f = \frac{a}{2} - \frac{t}{2} = 14,2 \text{ cm}$$

fra tverrsnittets tyngdepunktsakse, og avstanden fra denne tyngdepunktsaksen og til overgangen flens/steg blir:

$$y_3 = \frac{a}{2} - t = 13,38 \text{ cm}$$

Vi har da i denne overgangen:

$$\sigma_b = \sigma_{\max} \cdot \frac{13,38}{15,0} = 612 \cdot \frac{13,38}{15,0} \text{ kp/cm}^2 = 546 \text{ kp/cm}^2$$

$$S_f = A_f \cdot y_f = 20,25 \cdot 14,2 \text{ cm}^3 = 285 \text{ cm}^3$$

$$\tau_f = \frac{Q \cdot S_f}{c \cdot I} = \frac{4000 \cdot 285}{1,08 \cdot 9800} \text{ kp/cm}^2 = 108 \text{ kp/cm}^2$$

Da blir:

$$\sigma_{\text{sml}} = \sqrt{546^2 + 3 \cdot 108^2} \text{ kp/cm}^2 = \sqrt{334800} \text{ kp/cm}^2$$

$$\underline{\sigma_{\text{sml}} = 580 \text{ kp/cm}^2}$$

Av de tre verdiene vi nå har funnet for σ_{sml} , ser vi at den største verdi har vi i ytterste fiber lik 612 kp/cm^2 .

13.

En bjelke med 20 cm bredde og 36 cm høyde samt 3 m lengde er opplagret ved endene A og B. Ved C, 1 m fra A, angriper en vertikal last $F = 4800$ kp. Hvor stor er σ_{snl} i et punkt D, 0,5 m fra A og 9 cm under nøytrallaget, ifølge formendringshypotesen?

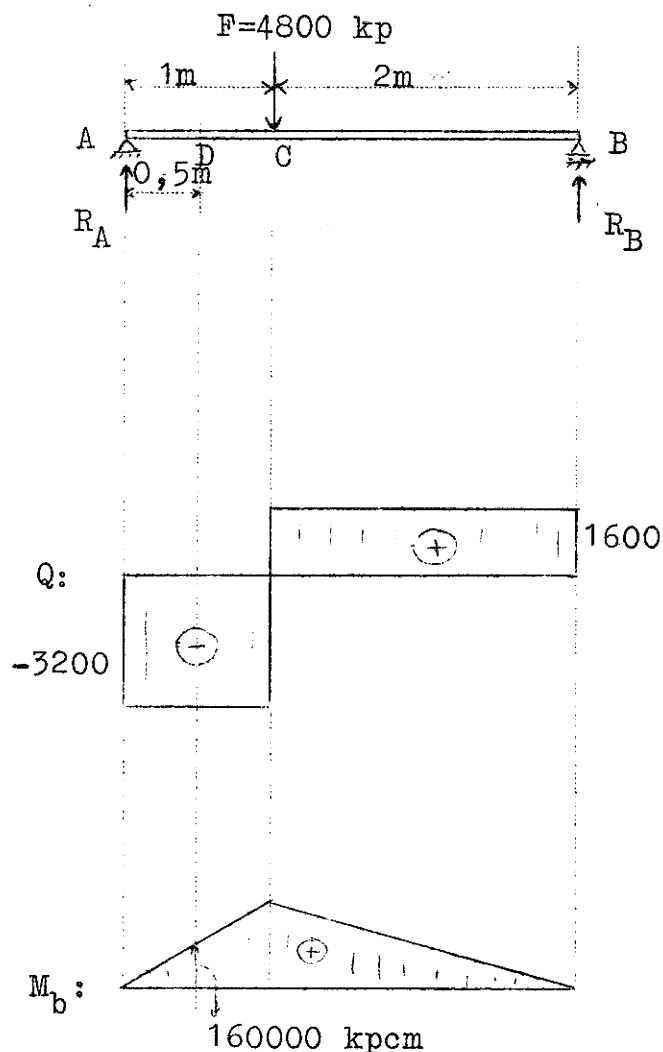


Fig. 35

Vi finner først opplagerreaksjonene R_A og R_B .

$$\Sigma M_B = 0 :$$

$$-R_A \cdot 3\text{m} + 4800 \cdot 2 \text{ kpm} = 0$$

$$\underline{R_A = 3200 \text{ kp}}$$

$$\Sigma P_y = 0 :$$

$$\underline{R_B = (4800 - 3200)\text{kp} = 1600 \text{ kp}}$$

I tverrsnitt D er:

$$Q = -3200 \text{ kp} \quad \text{og}$$

$$M_b = 3200 \cdot 50 \text{ kpcm} = 160\,000 \text{ kpcm}$$

$$\text{Tverrsnittets treghetsmoment: } I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{20 \cdot 36^3}{12} \text{ cm}^4 = 77760 \text{ cm}^4$$

For dette symmetriske bjelketverrsnittet vil også skjærspen-

ningene fordele seg symmetrisk om tyngdepunktsaksen. Det statiske moment av flaten utenfor snittet EF blir:

$$S_{EF} = A_{EF} \cdot y_{EF}$$

der arealet av flaten utenfor EF, $A_{EF} = 20 \cdot 9 \text{ cm}^2$ og A_{EF} 's tyngdepunktsavstand fra bjelketverrsnittets tyngdepunktsakse blir: $y_{EF} = (9 + \frac{9}{2}) \text{ cm} = 13,5 \text{ cm}$

Da blir i snittet EF:

$$\sigma_{EF} = \frac{M_b}{I} \cdot a = \frac{160\ 000}{77\ 760} \cdot 9 \text{ kp/cm}^2 = 18,5 \text{ kp/cm}^2$$

$$\tau_{EF} = \frac{Q \cdot S_{EF}}{b_{EF} \cdot I} = \frac{3200 \cdot 180 \cdot 13,5}{20 \cdot 77760} \text{ kp/cm}^2 = 5,5 \text{ kp/cm}^2$$

$$I \text{ EF er } \sigma_{sml} = \sqrt{\sigma_{EF}^2 + 3 \cdot \tau_{EF}^2} = \sqrt{18,5^2 + 3 \cdot 5,5^2} \text{ kp/cm}^2 = \sqrt{433} \text{ kp/cm}^2$$

$$\underline{\underline{\sigma_{sml} = 20,8 \text{ kp/cm}^2}}$$

14.

To såkalte U-bjelker er fritt opplagret i punktene A og B som ligger 24 cm fra hverandre. Bjelkene er på midten påvirket av en kraft på 20000 kp som fordeler seg jevnt på de to bjelkene. Beregn etter formendringshypotesen den største sammenligningsspenning ved å finne den i

- tværsnittets ytterste fiber.
- overgangen mellom flens og steg.
- midt på tværsnittet.

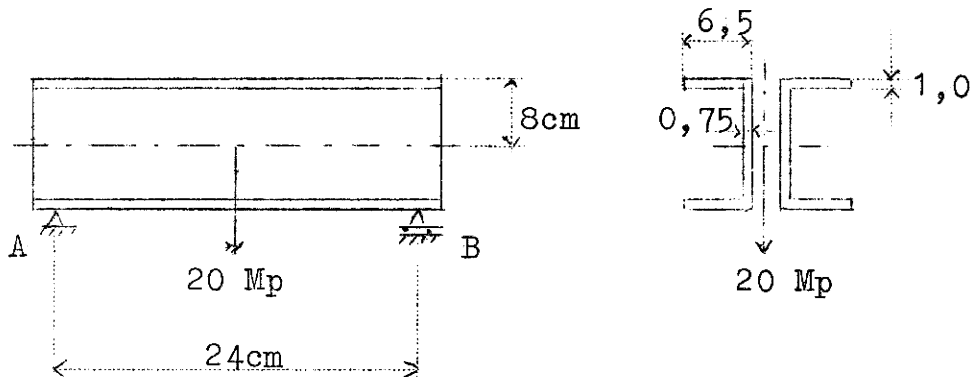


Fig. 36

Løsning:

Vi finner først reaksjonskrefter, skjærkraft- og bøyningmomentdiagram. P.g.a. symmetri er reaksjonskreftene i A og B like store, og tilsammen like stor, men motsatt rettet, den ytre belastning. Dvs.:

$$\underline{R_A = R_B = 10 \text{ Mp} = 10000 \text{ kp}}$$

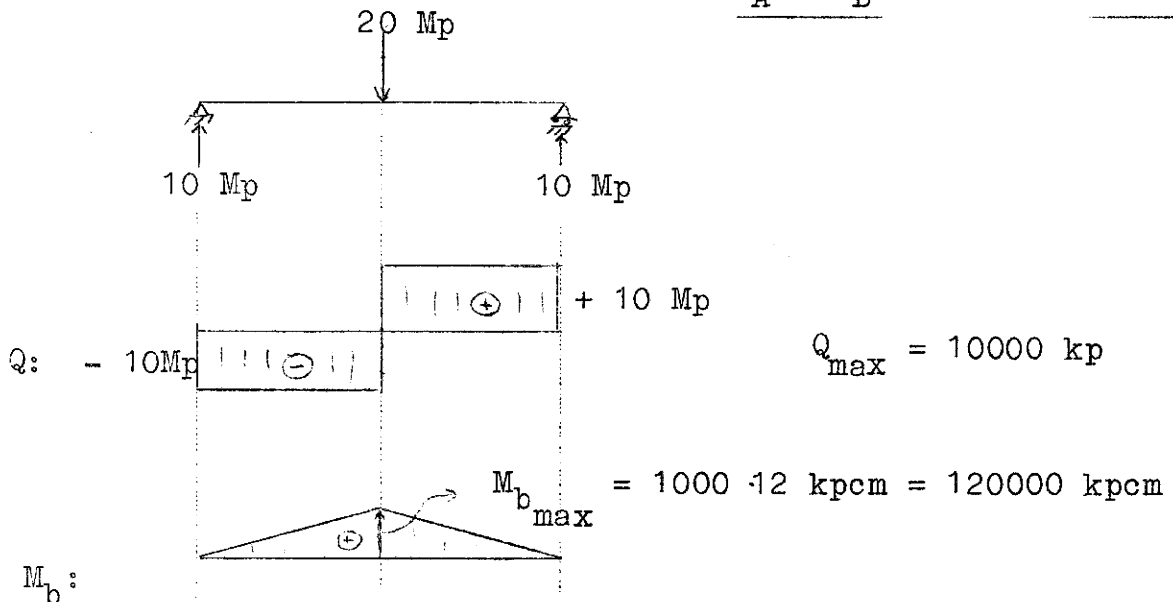


Fig. 37

Vi må så finne tverrsnittets treghetsmoment I.

Den letteste måten å finne I på er ved å betrakte tverrsnittet som differansen mellom to rektangler. Da er:

$$I = \left(\frac{13 \cdot 16^3}{12} - \frac{11,5 \cdot 14^3}{12} \right) \text{cm}^4 = 1808 \text{ cm}^4$$

a) Ved ytterfibrene:

$$\sigma_{b_{\max}} = \frac{M_{b_{\max}}}{W} = \frac{M_{b_{\max}}}{I} \cdot e = \frac{120\,000}{1808} \cdot 8 \text{ kp/cm}^2 = 531 \text{ kp/cm}^2$$

Ved ytterfibrene er $\tau = 0$ da det statiske moment $S = 0$.

Her er:

$$\underline{\sigma_{sml} = \sigma_{b_{\max}} = 531 \text{ kp/cm}^2}$$

b) Ved overgangen mellom flens og steg:

Bøyningsspenningene går rettlinjjet og er proporsjonale med avstanden fra tverrsnittets tyngdepunkt. Her er da:

$$\sigma_{b_{\text{ov}}} = \sigma_{b_{\max}} \cdot \frac{7}{8} = 531 \cdot \frac{7}{8} \text{ kp/cm}^2 = 465 \text{ kp/cm}^2$$

Det statiske moment av de to øverste flensene er:

$$S_f = 13 \cdot 1 \cdot 7,5 \text{ cm}^3 = 97,5 \text{ cm}^3$$

Skjærspenningen blir da her (like under flensen):

$$\tau = \frac{Q \cdot S}{b \cdot I} = \frac{10000 \cdot 97,5}{1,5 \cdot 1808} \text{ kp/cm}^2 = 360 \text{ kp/cm}^2$$

$$\underline{\sigma_{sml} = \sqrt{\sigma_b^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{465^2 + 3 \cdot 360^2} \text{ kp/cm}^2 = 778 \text{ kp/cm}^2}$$

c) Midt på tverrsnittet:

$$\text{Her er: } S_m = S_f + 1,5 \cdot 7 \cdot 3,5 \text{ cm}^3 = 134,25 \text{ cm}^3$$

$$\text{og: } \tau = \frac{Q \cdot S}{b \cdot I} = \frac{10000 \cdot 134,25}{1,5 \cdot 1808} \text{ kp/cm}^2 = 495 \text{ kp/cm}^2$$

Her er $\sigma_b = 0$, og $\underline{\sigma_{sml} = \sqrt{3\tau^2} = 1,73 \cdot 495 \text{ kp/cm}^2 = 856 \text{ kp/cm}^2 = \sigma_{sml_{\max}}}$

15.

En trebjelke 20x30 cm av 3 m lengde bærer en jevnt fordelt belastning på 2 Mp. Den ene enden er fast innspent og den andre enden er lagt opp midt på en 5 m lang INP 260. I-bjelken er fritt opplagt ved begge endene, se figuren. Bestem maksimal bøyningsspenning for begge bjelkene, og for trebjelken også maksimal skjærspenning. E for tre er $1,0 \cdot 10^5$ kp/cm² og for stål lik $2 \cdot 10^6$ kp/cm².

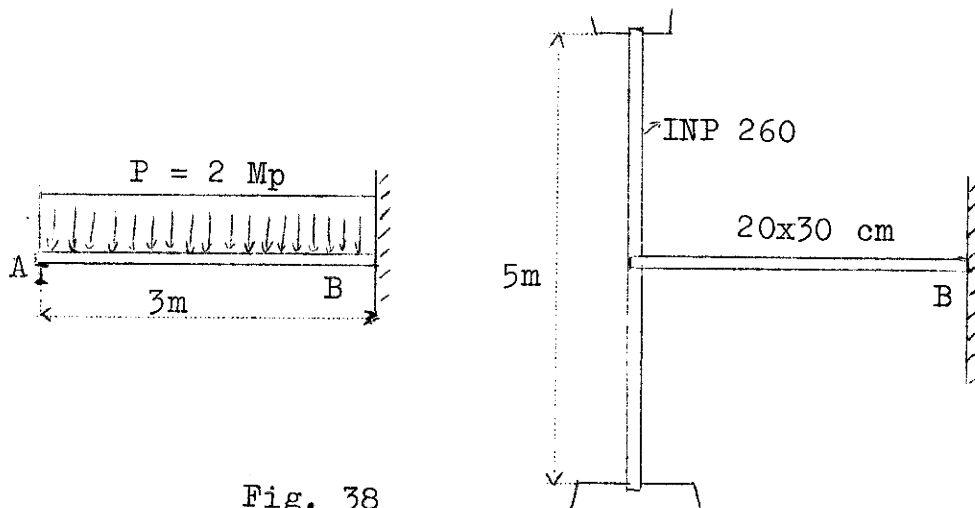
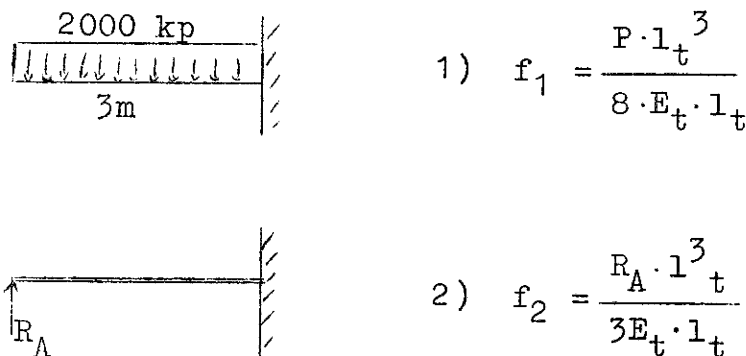


Fig. 38

Reaksjonskraften i punkt A, R_A , er ukjent og må først finnes ved nedbøyningsformlene.

Ser først på den innspente bjelken AB og deler belastningen i to. Indeks t betegner trebjelken.



$$1) f_1 = \frac{P \cdot l_t^3}{8 \cdot E_t \cdot I_t}$$

$$2) f_2 = \frac{R_A \cdot l_t^3}{3E_t \cdot I_t}$$

Fig. 39

$$f_t = f_1 - f_2 = \frac{l_t^3}{E_t I_t} \left(\frac{P}{8} - \frac{R_A}{3} \right)$$

$$f_t = \frac{27000000 \cdot 12}{10^5 \cdot 20 \cdot 30^3} \left(250 - \frac{R_A}{3} \right) = \frac{6}{10^3} \left(250 - \frac{R_A}{3} \right)$$

Ser så på INP-bjelken, med indekser I.



$$f_I = \frac{R_A \cdot l^3}{48 \cdot E_I \cdot I_I} = \frac{R_A \cdot 125 \cdot 10^6}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 5740} = \frac{R_A}{4,4 \cdot 10^3}$$

Fig. 40

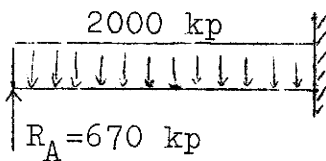
Da bjelkene ligger på hverandre, må:

$$f_t = f_I, \text{ dvs:}$$

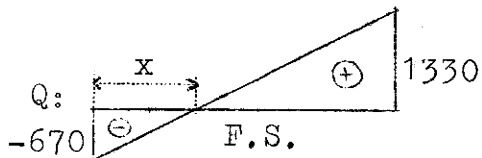
$$\frac{R_A}{4,4 \cdot 10^3} = \frac{6}{10^3} \left(250 - \frac{R_A}{3} \right)$$

$$\frac{R_A}{4,4} = 1500 - 2 R_A \quad \text{dvs.} \quad R_A = 670 \text{ kp}$$

Bjelke AB:



Av likedannede trekanter følger:



$$\frac{x}{670} = \frac{3 - x}{1330} \quad \text{dvs.} \quad 2x = 3 - x$$

Fig. 41

$$\underline{x = 1 \text{ m}}$$

Det maksimale bøyningmoment er lik arealet av høyre trekant minus arealet av venstre trekant i skjærkraftdiagrammet.

$$M_{b_{\max}} = \left(\frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 1330 - \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 670 \right) \text{ kpcm} = 99500 \text{ kpcm}$$

$$\underline{\underline{\sigma_{b_{\max}} = \frac{M_{b_{\max}}}{W} = \frac{M_{b_{\max}} \cdot 6}{b^2 \cdot h} = \frac{99500 \cdot 6}{900 \cdot 20} \text{ kp/cm}^2 = 33,3 \text{ kp/cm}^2}}$$

$$Q_{\max} = 1330 \text{ kp}$$

$$\tau_{\max} = \frac{3 \cdot Q_{\max}}{2 \cdot A} = \frac{3 \cdot 1330}{2 \cdot 20 \cdot 30} \text{ kp/cm}^2 = 3,32 \text{ kp/cm}^2$$

I-bjelken har p.g.a. symmetri opplagerkrefter på hver $R_A/2$.



Fig. 42

Det maksimale bøyningmoment blir lik arealet av venstre rektangel i Q-diagrammet.

$$M_{b_{\max}} = 335 \cdot 250 \text{ kpcm}$$

$$\text{og: } \sigma_{b_{\max}} = \frac{335 \cdot 250}{442} \text{ kp/cm}^2 = 190 \text{ kp/cm}^2$$

16.

En to meter lang trebjelke er fast innspent i den ene enden og påvirkes av en jevnt fordelt belastning på 1000 kp. Bjelkens tverrsnitt er rektangulært lik 10x20 cm. Bjelkens andre ende er opphengt ved en stålstang. Denne stangen har sirkulært tverrsnitt med diameter lik 2,0 cm og den er ubelastet 3 m lang (se fig.). Beregn de største spenninger i begge materialer når elastisitetsmodulene er for stål:

$$E_s = 2,0 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 \text{ og for tre: } E_t = 1,0 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2.$$

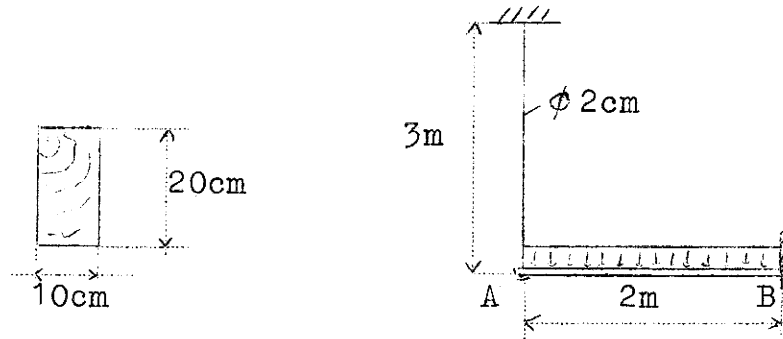


Fig. 43

Løsning:

Systemet er statisk ubestemt, da vi ikke kan finne reaksjonskraften R_A mellom stang og bjelke ved likevektsbetraktninger. Kraften R_A vil avhenge av stangens og bjelkens dimensjoner og elastisitetsmoduler. Vi må for å finne denne beregne nedbøyningen av bjelken og stangen.

Bjelkens nedbøyning om stangen ikke fantes, er:

$$f_1 = \frac{P \cdot l^3}{8 \cdot E_t \cdot I}$$

der:

$$I = \frac{10 \cdot 20^3}{12} \text{ cm}^4$$

$$\therefore f_1 = \frac{1000 \cdot 200^3 \cdot 12}{8 \cdot 1,0 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 20^3} \text{ cm} = \frac{12}{8} \text{ cm} = 1,5 \text{ cm}$$

Bjelkens oppbøyning p.g.a. reaksjonskraften R_A fra stangen blir:

$$f_2 = \frac{R_A \cdot l^3}{3E_t I} = \frac{R_A \cdot 200^3 \cdot 12}{3 \cdot 1,0 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 20^3} = \frac{R_A}{250}$$

Bjelkens totale nedbøyning blir da:

$$f_t = f_1 - f_2 = 1,5 - \frac{R_A}{250}$$

f_t må være like stor som forlengelsen i stangen. Stangen blir påvirket av kraften R_A (kraft og reaksjonskraft er like store), og får forlengelsen:

$$\Delta l = \frac{R_A}{A_S} \cdot \frac{l}{E_S}$$

etter formelen $\sigma = \epsilon E$, der $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$ og $\sigma = \frac{R_A}{A_S}$

når en antar at R_A virker jevnt over stangens tverrsnittsareal A_S .

$$\Delta l = \frac{R_A}{3,14} \cdot \frac{300}{2,0 \cdot 10^6} = \frac{R_A}{20933}$$

$$f_t = \Delta l \quad \text{d:} \quad 1,5 - \frac{R_A}{250} = \frac{R_A}{20933}$$

$$R_A (0,00400 + 0,00005) = 1,5$$

$$\underline{R_A} = \frac{1,5}{0,00405} = \underline{370 \text{ kp}}$$

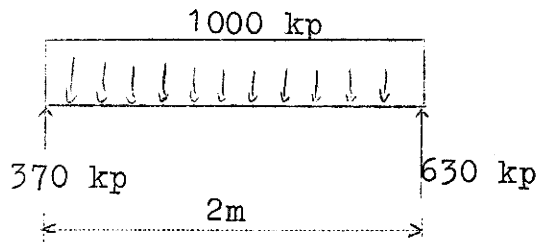
Vi kan nå finne strekkspenningen i stålstangen:

$$\underline{\sigma_{st}} = \frac{R_A}{A_{st}} = \frac{370}{3,14} = \underline{118 \text{ kp/cm}^2}$$

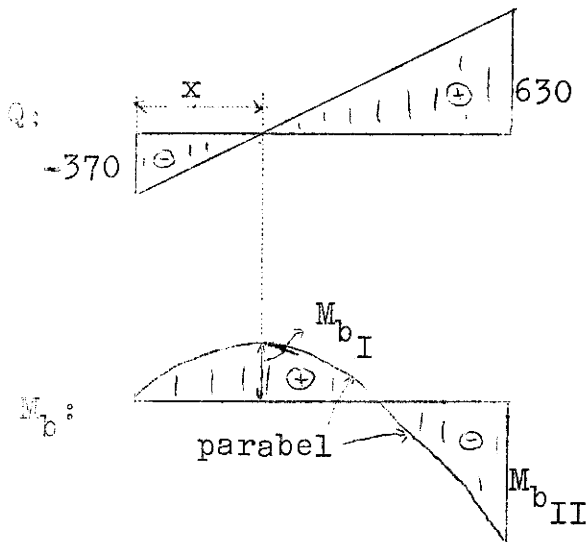
For å finne maksimal bøyningsspenning i trebjelken må vi først finne skjærkraft- og bøyningmoment-diagram. Av $\Sigma P_y = 0$ finnes R_B , da:

$$R_A + R_B = 1000 \text{ kp} \quad \text{d:} \quad \underline{R_B} = (1000 - 370) \text{ kp} = \underline{630 \text{ kp}}$$

Bjelken er da belastet på følgende måte:



Vi har to muligheter for maksimalt bøyningsmoment; i avstand x fra venstre ende og ved innspenningsstedet. Vi finner først x ved å betrakte skjærkraftdiagrammets to likedannede trekanter.



$$\frac{x}{370} = \frac{200 - x}{630}$$

$$630x = 74000 - 370x$$

$$\underline{x = 74 \text{ cm}}$$

Fig. 44

$$M_{bI} = \frac{1}{2} \cdot 370 \cdot 74 \text{ kpcm} = 13690 \text{ kpcm}$$

$$M_{bII} = \div \frac{1}{2} \cdot 630 \cdot 126 + 13690 = \div (39690 - 13690) = \div 26000 \text{ kpcm}$$

M_{bII} har størst tallverdi og gir:

$$\underline{\underline{\sigma_{\max} = \frac{M_{bII}}{W} = \frac{26000 \cdot 6}{10 \cdot 20^2} = 39 \text{ kp/cm}^2}}$$

V.b.

1.

En ung mann står i bakenden av en kano og venter på en ung dame. Se fig. Mannen veier 80 kp og kanoen veier 100 kp. Da den unge damen kommer til syne, styrter han fremover for å ta imot henne, men da han har beveget seg 5 m til kanoens forende, finner han til sin overraskelse ut at han ikke kan nå henne. Hvor langt har kanoen glidd ut fra bryggen når vår "galante" venn har beveget seg de 5 meter? Kanoen er ikke bundet fast, og det er ingen strøm i vannet.

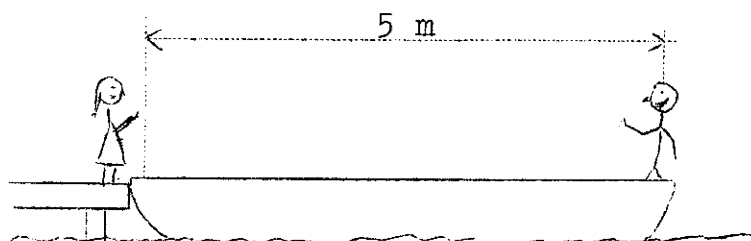


Fig. 45

Løsning: Dersom vi ser mann og kano som ett system, virker det ikke noen ytre krefter på dette systemet. I følge Newtons 1. lov må derved det felles tyngdepunkt ligge i ro. Glir kanoen ut et stykke x m, kan vi sette at betingelsen for at tyngdepunktet skal være i ro må bli:

$$80 \cdot 5 \text{ kpm} + 100 \cdot 2,5 \text{ kpm} = 80 \cdot x \text{ kpm} + 100 (x + 2,5) \text{ kpm}$$

$$650 = 180 x + 250$$

$$180x = 400$$

$$\underline{x = 2,22}$$

Kanoen har glidd 2,22 m.

2.

En snor henger over en trinse, og et lodd henger i hver ende. Vi antar at trinsen er friksjons- og treghetsfri og at snoren er vektløs. Loddenes masser er henholdsvis m_1 og m_2 der $m_1 > m_2$. Finn loddenes bevegelse.

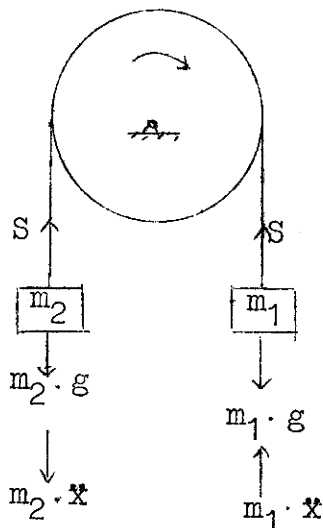


Fig. 46

I og med at $m_1 > m_2$ går vi ut fra at bevegelsesretningen er som vist på trinsen. Vi går ut fra at snoren ikke forlenges, og får da en akselerasjon \ddot{x} oppover av loddet m_2 og en akselerasjon \ddot{x} nedover av loddet m_1 . De tilhørende treghetskrefter virker som vist på figuren. Ved å legge disse treghetskreftene til de virkelige krefter (m_1g og m_2g og snorreaksjonene S) får vi for hvert lodd et system av krefter i likevekt. Da må også hele systemet av krefter være i likevekt. Derfor kan vi skrive

én likevektsligning for hele systemet i stedet for én ligning for hvert lodd. Dette kan vi for eksempel gjøre ved å sette den algebraiske sum av momentene til alle krefter (inkludert treghetskreftene) om trinseaksen lik null. Da armene til hvert lodd er like store, og snorkreftenes moment opphever hverandre, kan vi skrive:

$$m_2g + m_2 \ddot{x} + m_1g + m_1 \ddot{x} = 0$$

hvorav:

$$\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

3.

Et tau henger over en trinse, og i hver tauende henger en gutt. Trinsen er friksjons- og treghetsfri, tauet antas vektløst, og guttene har samme masse m , og henger i samme høyde fra gulvet. De skal nå se hvem som kan komme

først opp til trinsen. Gutt A, som ikke kan mekanikk, begynner å klatre oppover, mens B forholder seg rolig. Hvorledes vil det da gå?

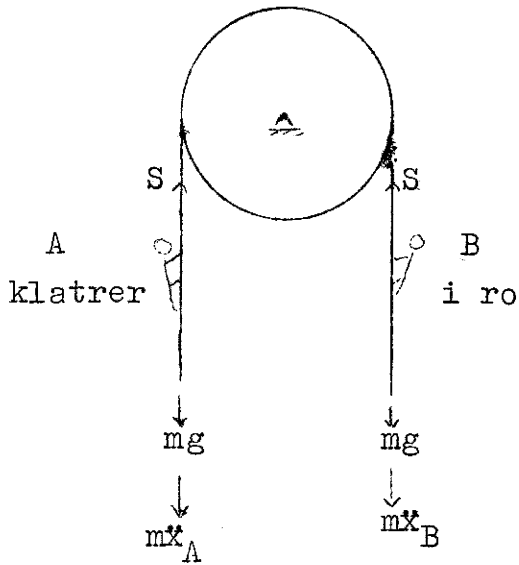


Fig. 47

Vi betrakter også nå begge guttene og tauet som ett system. Da tauet er vektløst, blir snorkraften på hver side den samme, lik S . Tyngdekraften er på hver gutt lik mg . Vi kjenner ennå ikke akselerasjonene \ddot{x}_A og \ddot{x}_B , og setter derfor begge akselerasjoner oppover, dvs. begge treghetskrefter nedover. Også her vil vi ha et system i dynamisk likevekt. Vi kan som i forrige eksempel sette den algebraiske sum av momentene til alle krefter (inkludert treghetskreftene) om trinseaksen lik null. Da momentarmene

til hver tauende er like store, og snorkreftenes moment opphever hverandre, kan vi skrive:

$$mg + m\ddot{x}_A - mg - m\ddot{x}_B = 0$$

$$\text{dvs. } \ddot{x}_A = \ddot{x}_B$$

både i fortegn og størrelse. Det vil si at både A og B får samme akselerasjon oppover. Når A heiser seg opp, øker snorkraften til å bli større enn mg og tauet med B dras oppover. De starter med samme hastighet (lik 0), og får hele tiden samme hastighetsforandringer (akselerasjoner) og dermed samme hastigheter. De vil derfor komme samtidig opp til trinsen selv om det er den ene som gjør hele arbeidet.

5.

En liten kule med masse m og festet til enden av en snor, blir holdt oppe av en glatt (friksjonsfri) horisontal plate, og går med jevn hastighet v_0 i en sirkulær bane med radius r . Ved å dra i snorens nedre ende blir banens radius redusert til $r/2$. Bestem kulas nye hastighet.

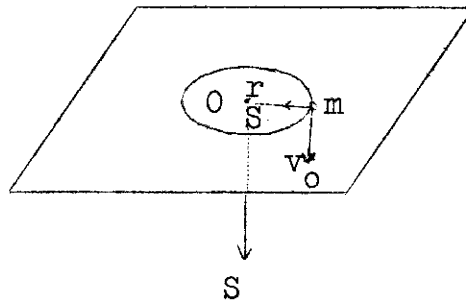


Fig. 49

Den eneste kraft som virker på kula (bortsett fra tyngdekraften og en like stor og motsatt rettet reaksjonskraft fra underlaget) er snordraget S som går gjennom sirkelens sentrum. Derved er momentet av de ytre krefter som virker på kula lik null, og kula har derved et konstant spinn. Kaller vi den søkte hastighet for v , får vi derved:

$$m v_0 r = m v \frac{r}{2}$$

dvs. $\underline{\underline{v = 2 v_0}}$

6.

En horisontal friksjonsfri dreieskive har festet en liten kanon i A, og roterer med vinkelhastigheten ω_0 om sin vertikale geometriske akse. Beregn økningen i vinkelhastighet $\Delta\omega$ som dreieskiven vil få dersom kanonen fyrer av en kule med masse m med tangensiell munningshastighet v . Dreieskiven er jevntykk med masse m_d og radius a , og selve kanonen har en masse m_k som tenkes konsentrert i avstanden r fra dreieskivens sentrum.

Det virker intet ytre moment på skiven.

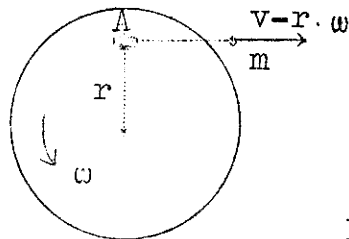


Fig. 50

Kaller vi dreieskivens og kanonens (minus kulas) samlede treghetsmoment I_0 , blir:

$$I_0 = \frac{1}{2} m_d \cdot a^2 + m_k \cdot r^2$$

Vi har vist, formel V 14, at et fast legemes spinn, H , kan skrives som $I \cdot \dot{\theta} = I \cdot \omega$ der I er legemets treghetsmoment om den aksene der legemet roterer med vinkelhastighet ω . Det totale spinn for hele systemet (inkludert kule) om rotasjonsaksen blir da før skuddet går av:

$$H_0 = (I_0 + m \cdot r^2) \omega_0$$

Skivens vinkelhastighet etter at skuddet er gått av, betegnes med ω . Systemets samlede spinn etter skuddet blir da:

$$H = I_0 \cdot \omega - m (v - r\omega) \cdot r$$

der $v - r\omega$ er kulas hastighet i forhold til underlaget. Da det ikke virker noe ytre moment på systemet, må spinnet være konstant, dvs. $H = H_0$. Innsatt blir da:

$$(I_0 + mr^2) \omega_0 = I_0 \omega - m(v - r\omega)r$$

eller: $(I_0 + mr^2)(\omega - \omega_0) = m \cdot v \cdot r$

hvorav:
$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \frac{m v r}{I_0 + mr^2}$$

Til slutt kan en sette inn uttrykket for I_0 funnet i begynnelsen av oppgaven.

Vi ser at økningen i vinkelhastighet $\Delta\omega$ er uavhengig av begynnelseshastigheten ω_0 .

7.

En horisontal sirkulær skive av jevn tykkelse, radius a og masse m_s kan rotere friksjonsfritt om sin vertikale akse. Langs et sirkulært spor med radius r går en flue med masse m_f . Til å begynne med er både skive og flue i ro. Hvilken vinkelhastighet vil skiven få når fluen går rundt sporet med en konstant hastighet v i forhold til skiven? Det virker intet ytre moment på systemet.

Da det ikke virker noe ytre moment på systemet, skive og flue, må systemets samlede spinn være konstant. Før fluen begynner å gå er det samlede spinn lik null, dvs. at det hele tiden må være lik null. Da må fluens og skivens spinn om O være motsatt like store.

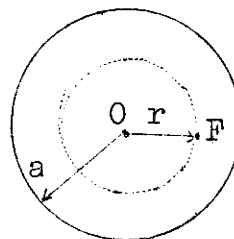


Fig. 51

Skiven får en ukjent vinkelhastighet ω som fører til at sirkelen med radius r beveger seg med en hastighet av $r \cdot \omega$ i forhold til underlaget. Fluens hastighet i forhold til underlaget blir da: $v - r\omega$, og dens spinn blir:

$$H_f = m_f(v - r\omega) r$$

Skivens spinn blir:

$$H_S = \frac{1}{2} m_S \cdot a^2 \cdot \omega$$

i motsatt retning. Settes derfor tallverdiene like, blir:

$$m_f \cdot (v - r\omega) \cdot r = \frac{1}{2} m_S \cdot a^2 \cdot \omega$$

$$m_f \cdot v \cdot r - m_f \omega r^2 = \frac{1}{2} m_S \cdot a^2 \omega$$

$$\omega = \frac{m_f \cdot v \cdot r}{\frac{1}{2} m_S a^2 + m_f r^2}$$

Talleksempel:

$$m_S = 10g \quad , \quad m_f = 1g \quad , \quad v = 4,8 \text{ cm/s}$$

$$a = 10\text{cm} \quad , \quad r = 6\text{cm} \quad \text{gir:}$$

$$\omega = 0,054 \text{ sek}^{-1}$$

8.

En vektløs snor er viklet opp på en homogen sylinder med masse m_S og radius r , som kan rotere friksjonsfritt om akselen. I den andre snorenden er det festet et lodd med masse m_1 .

Bestem hastigheten av dette fallende loddet som funksjon av avstanden fra dets hvilestilling.

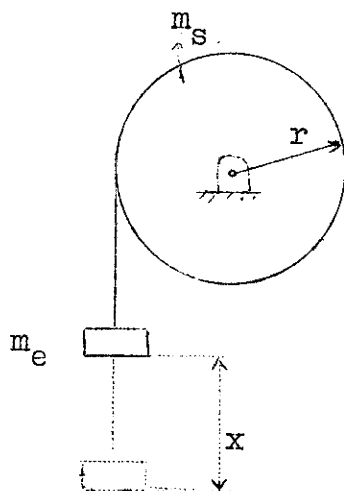


Fig. 52

Den kinetiske energi av lodd pluss sylinder er til å begynne^ med null. Når loddet har falt en avstand x og fått en hastighet v , har sylindereen fått en vinkelhastighet $\omega = v/r$. Systemets, dvs. loddets og sylindereens, totale kinetiske energi er da:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_e \cdot v^2 + \frac{1}{2} I_S \cdot \omega^2$$

der sylindereens treghetsmoment $I_S = \frac{1}{2} m_s r^2$

Innsatt blir da:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_e v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_s \cdot r^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} = \frac{v^2}{2} \left(m_e + \frac{m_s}{2} \right)$$

Denne kinetiske energi må systemet ha fått fra minskingen i loddets potensielle energi som er lik $m_e g \cdot x$.

Setter vi disse energier lik hverandre, blir:

$$\frac{v^2}{2} \left(m_e + \frac{m_s}{2} \right) = m_e g x$$

dvs.:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot m_e \cdot g \cdot x}{m_e + \frac{1}{2} \cdot m_s}}$$

9.

Et lokomotivhjul ruller uten å gli langs en horisontal skinne AB med konstant hastighet $v_c = 6,0$ m/s. Finn hastigheten til punkt E på kanten av hjulet ved å bruke det øyeblikkelige rotasjonssenter.

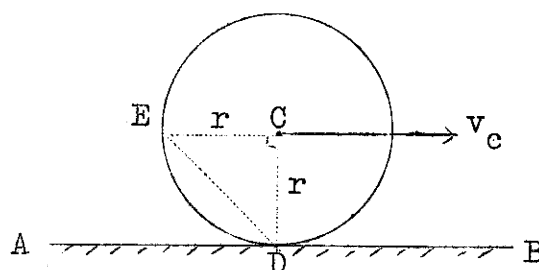


Fig. 53

Kaller vi berøringspunktet med skinnen D, er dette det øyeblikkelige rotasjonssenter. Avstanden DE er lik $r\sqrt{2}$. Kaller vi vinkelhastigheten om punkt D for ω , blir hastigheten av C :

$$v_c = r \cdot \omega$$

og hastigheten av E :

$$v_E = r\sqrt{2}\omega$$

Ved divisjon får vi derved:

$$\frac{v_E}{v_c} = \frac{r\sqrt{2}\omega}{r \cdot \omega} = \sqrt{2}$$

eller:

$$\underline{v_E = \sqrt{2} \cdot v_c = 1,414 \cdot 6,0 \text{ m/s} = 8,48 \text{ m/s}}$$

og rettet normalt på forbindelseslinjen DE.

10.

I hvilken høyde h over bordflaten må en biljardkule[^] av radius r treffes av et horisontalt støt K_x dersom den ikke skal gli på underlaget? En kules treghetsmoment er lik $I = \frac{2}{5} mr^2$, der m er kulens masse. Vi regner med friksjonsfritt underlag.

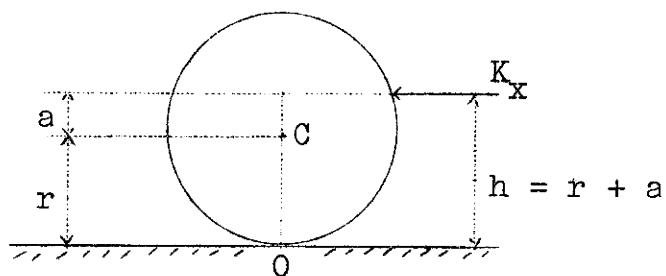


Fig. 54

Dynamisk kraftlikevekt i horisontal retning krever at:

$$K_x - m \cdot \ddot{x}_c = 0 \quad (a)$$

Dynamisk momentlikevekt om tyngdepunktet C krever at:

$$M_c - I_c \cdot \dot{\omega} = 0 \quad (b)$$

Dersom kulen ikke skal gli, må:

$$\ddot{x}_c = r \cdot \dot{\omega} \quad (c)$$

Vi har her kontaktpunktet O som øyeblikkelig rotasjons-sentrum, og $\dot{x}_c = r \cdot \omega$. Da må også ved derivasjon ligning (c) over gjelde. Vi setter inn i (b) uttrykket for I_c og får:

$$K_x \cdot a = \frac{2}{5} m r^2 \cdot \dot{\omega} \quad (b^1)$$

og (c) i (a) gir:

$$K_x = m \cdot r \cdot \dot{\omega} \quad (a^1)$$

Ved å dividere (b¹) på (a¹) blir:

$$a = \frac{2}{5} r$$

Derved blir:

$$\underline{\underline{h = r + a = \frac{7}{5} r}}$$

Dersom vi treffer biljardkulen over h, vil den gli mot urviseren om underlaget; - dersom vi treffer under h, vil den gli med urviseren.

11 a.

En spole med masse m og treghetsmoment I_C om den geometriske akse trekkes langs et horisontalt plan av en kraft P langs enden av en tråd som er vundet opp på spolen. Se fig.

Finn akselerasjonen \ddot{x}_C av spolen dersom den ruller langs planet uten å gli. Numeriske data er gitt som: $P = 0,5 \text{ kp}$, $m = 1 \text{ kg}$, $a = 2 \text{ cm}$, $r = 1 \text{ cm}$, $\alpha = 30^\circ$. Videre er det oppgitt at spolens treghetsmoment kan skrives:

$$I_C = m \cdot \frac{a^2}{9}$$

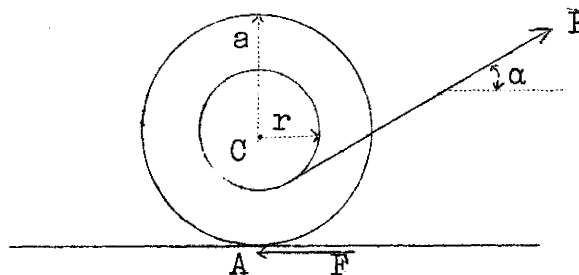


Fig. 55

Fra underlaget virker den ukjente friksjonskraft F . Momentligningen om C gir:

$$F \cdot a + P \cdot r = I_C \cdot \ddot{\theta} = m \cdot \frac{a^2}{9} \cdot \frac{\ddot{x}_C}{a} = \frac{ma \cdot \ddot{x}_C}{9} \quad (a)$$

da betingelsen for rulling er at:

$$\dot{x}_C = a \cdot \dot{\theta} \quad \text{eller} \quad \ddot{x}_C = a \cdot \ddot{\theta}$$

da spolens kontaktpunkt med underlaget da er det øyeblikkelige rotasjonssenter.

Videre har vi at kreftene i horisontal retning gir:

$$P \cdot \cos \alpha - F = m \ddot{x}_c \quad (b)$$

Herav finnes: $F = P \cdot \cos \alpha - m \ddot{x}_c$

som innsatt i (a) gir:

$$(P \cos \alpha - m \ddot{x}_c) a - P \cdot r = \frac{m \ddot{x}_c}{9}$$

$$P \cdot a \cdot \cos \alpha - P r = \frac{10}{9} m \ddot{x}_c$$

$$\ddot{x}_c = \frac{9 \cdot P \cdot (a \cos \alpha - r)}{10 m \cdot a} = \frac{9 \cdot 0,5 \cdot (\sqrt{3} - 1)}{10 \cdot 2} g$$

$$\ddot{x}_c = 0,164 \cdot g$$

der g er tyngdens akselerasjon. Vi har bevyttet oss av at fra $K = m \cdot g$ der K er 1 kp og $m = 1$ kg ser vi at omregningsfaktoren fra kp til kg er tyngdens akselerasjon g .

11b.

Finne den grensevinkel α under hvilken spolen vil rulle til høyre og over hvilken spolen vil rulle til venstre.

- Vi ser her kontaktpunkt A som spolens øyeblikkelige rotasjonssenter. Grensevinkelen kommer da frem når P 's virkningslinje skjærer A .

Vi har ved geometribetraktning at:

$$\cos \alpha = \frac{r}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \underline{\underline{\alpha = 60^\circ}}$$

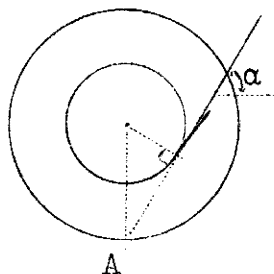


Fig. 56

Utsatt prøve i fysikk II

Onsdag 10/9 1969, kl. 9-14

Oppgave 1.

a) Onkel Skrue skal frakte gull med jernbane fra gruvene sine i El Dorado. Hver jernbanevogn veier 40 tonn lastet med gull, og tyngden fordeler seg jevnt på de fire hjulene. Vognenes lengde mellom hjulparene er 2m. Jernbaneskinnene har et symmetrisk profil om en horisontal akse med treghetsmoment på $I = 800 \text{ cm}^4$ og motstandsmoment på $W = 135 \text{ cm}^3$. For stålet som skinnene er laget av, settes elastisitetsmodulen til $E_s = 2\,000\,000 \text{ kp/cm}^2$, og bruddfastheten settes lik $\sigma_B = 3700 \text{ kp/cm}^2$. Hvilken høyde har skinneprofilet?

b) Underveis kjører toget over en bro med profil som vist på fig. 1. Hver side av broen er støttet oppe med et fagverk som vist her.

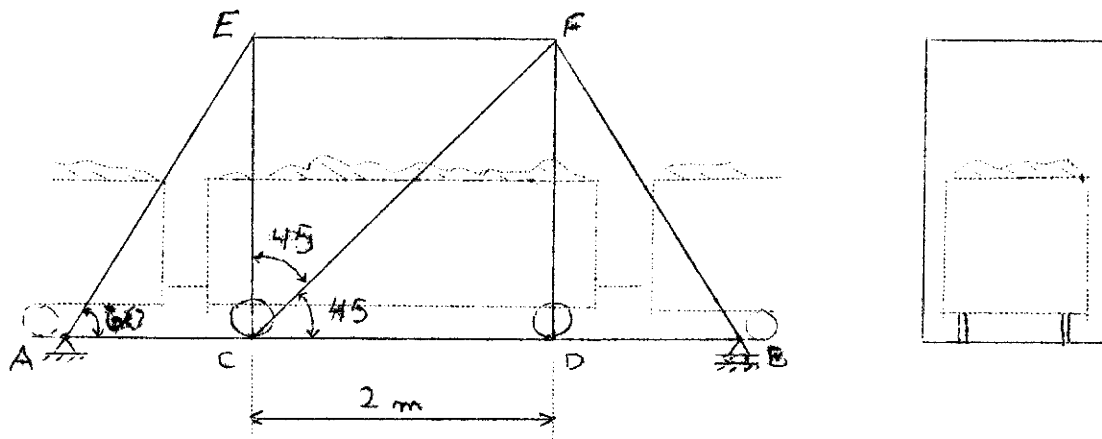


Fig 1

Når en vogn er i den posisjon som antydnet på figuren, regner vi med at belastningen på hvert sitt hjul overføres til hvert sitt knutepunkt C og D (og C', D' på andre side av broen). Alle andre belastninger ser vi bort fra. I hele denne oppgaven ses bort fra horisontale friksjonskrefter mellom hjul og skinner, og en ser bort fra broens egen tyngde. - Finn stavkreftene i fagverket.

c) B-gjengen har fått nyss om forsendelsen, og graver på et øde sted ut en grøft under jernbanelinjen som vist på fig. 2.

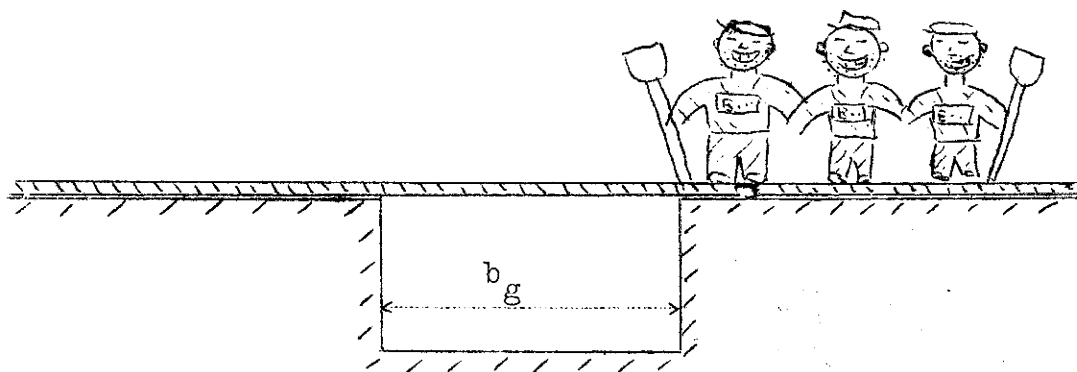


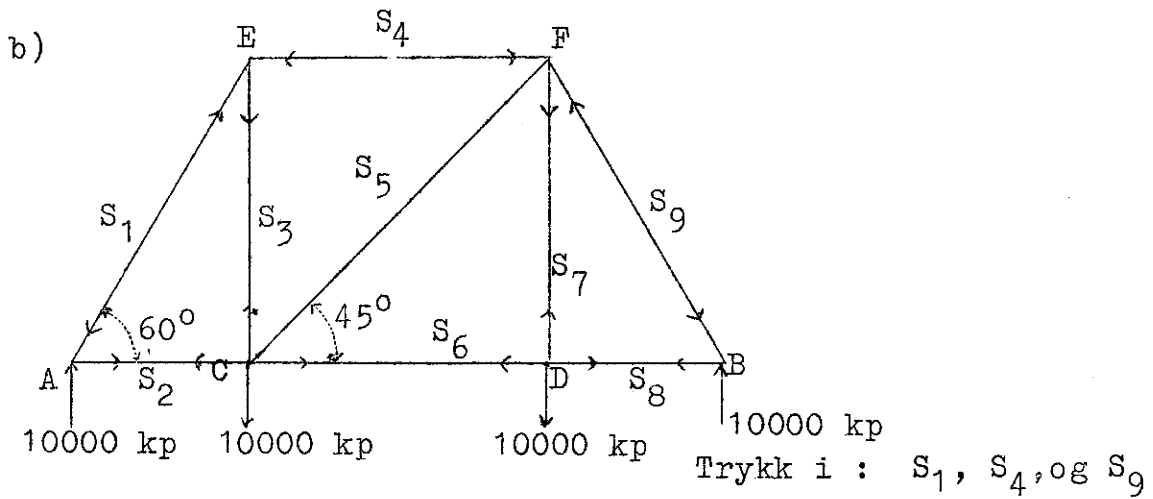
Fig. 2

Hvor bred, b_g , må grøften graves dersom skinnene skal knekke sammen ved at toget kjører over den? Vis ved beregning hvor vognhjulet befinner seg i bruddøyeblikket. Sett som tilnærming at skinnene er fritt opplagret over grøften. Lokomotivet er lettere enn en pålastet vogn.

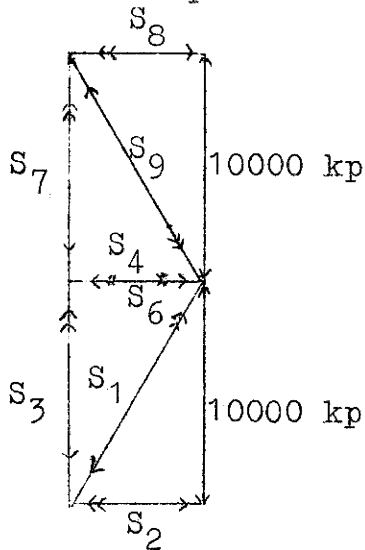
d) Ole, Dole og Doffen oppdager hva B-gjengen har fore. De oppsøker Petter Smart som nettopp har funnet opp et materiale med elastisitetsmodul $E = 40\,000 \text{ kp/cm}^2$. Sammen med guttene går han ut og fester en støtte av dette materialet midt i grøften under hver skinne. Støttene er sylindriske med diameter 5 cm og med lengde lik dybden av grøften som er 1m. Bredden av grøften er b_g som funnet under punkt c, og en regner med at underlaget ikke gir etter for belastning. Skinnene regnes også nå som fritt opplagret. Hvor stor vil nå den maksimale bøyningsspenning i skinnen bli når et vognhjul be inner seg over støtten? (Dersom du ikke har funnet b_g , så sett den her lik 2m).

Løsning 1

a) $\frac{h}{2} = \frac{I}{W} = \frac{800}{135} \text{ cm} = 5,9 \text{ cm} \quad \therefore \quad \underline{\underline{h = 11,8 \text{ cm}}}$



Cremonplanet:



Strekk i : S_2, S_3, S_6, S_7 og S_8

$S_5 = 0$ (nullstav)

$S_7 = S_3 = 10000 \text{ kp}$

$S_2 = S_4 = S_6 = S_8 = 10000 \text{ kp} \cdot \text{tg } 30^\circ$
 $= 5770 \text{ kp}$

$S_1 = S_9 = 2 S_2 = 11540 \text{ kp}$

c)

Generelt er:

$R_A \cdot b_g = P (b_g - a)$

$R_A = P \frac{b_g - a}{b_g}$

$M_{b_{\max}} = R_A \cdot a = P \frac{b_g a - a^2}{b_g}$

$\frac{dM_{b_{\max}}}{da} = \frac{P}{b_g} (b_g - 2a) = 0$ for $\underline{\underline{a = \frac{b_g}{2}}}$

Dvs. at det maksimale bøyningmoment opptrer når belastningen er midt mellom A og B.

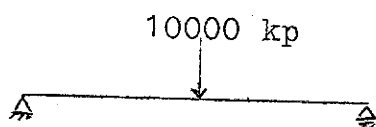
Da er $R_A = R_B = 5000 \text{ kp}$

$$\text{og } M_{b_{\max}} = 5000 \text{ kp} \cdot \frac{b}{2}$$

$$\sigma_{b_{\max}} = \frac{2500 \text{ kp} \cdot b}{135 \text{ cm}^3} = 3700 \text{ kp/cm}^2$$

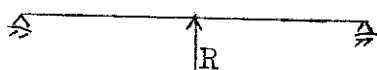
$$\underline{\underline{b_g = \frac{3700 \cdot 135}{2500} \text{ cm} = 200 \text{ cm}}}$$

a)



Nedbøyning om den ytre belastning virket alene:

$$f_1 = \frac{10000 \cdot 8 \cdot 10^6}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 800} \text{ cm} = \frac{100}{96} \text{ cm}$$

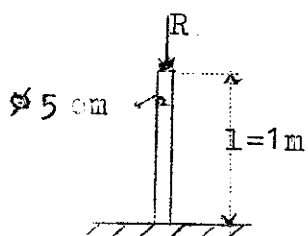


Oppbøyning om reaksjonskraften virket alene:

$$f_2 = \frac{R \cdot 8 \cdot 10^6}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 800} = \frac{R}{9600} \text{ cm/kp}$$

Sammentrykning av bjelken: f_3

$$\frac{R}{A} = E \cdot \frac{f_3}{l} \Rightarrow f_3 = \frac{R \cdot 100}{19,64 \cdot 40000} \text{ kp}$$



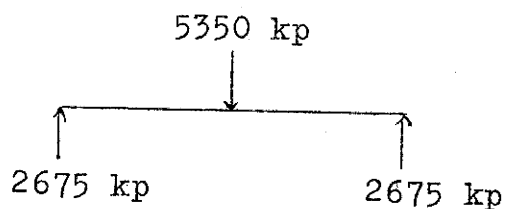
Betingelse: $f_1 - f_2 = f_3$

$$\frac{100}{96} - \frac{R}{9600} = \frac{R}{7856}$$

\Rightarrow

$$\underline{\underline{R = 4650 \text{ kp}}}$$

Den resulterende belastning midt på bjelken blir da 5350 kp.



Dette gir:

$$M_{b_{\max}} = 267500 \text{ kpcm}$$

$$\sigma_{b_{\max}} = \frac{267500}{135} \text{ kp/cm}^2 = 2000 \text{ kp/cm}^2$$

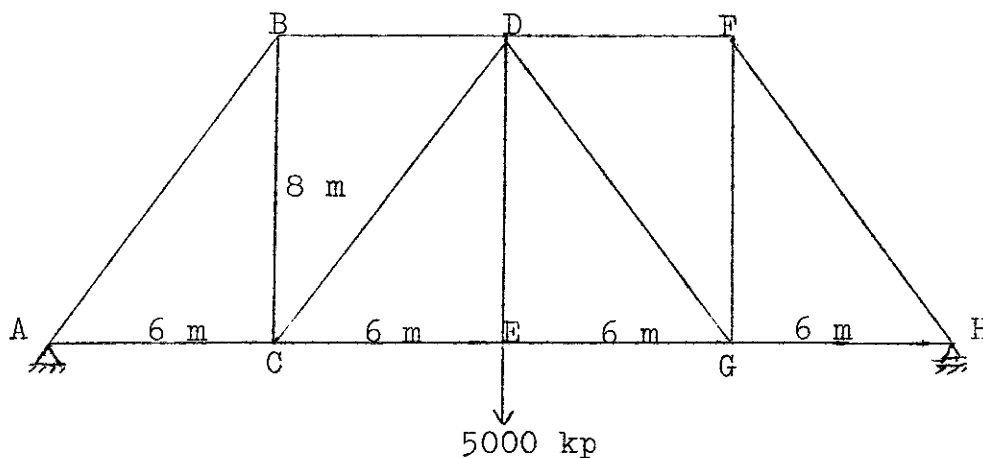
Eksamen i fysikk II

Lørdag den 13.12.69, kl. 9 - 14

Tillatte hjelpemidler: Alle innbundne bøker og hefter. Regnestav.

Oppgave 1.

a) Et fagverk som vist på fig. 1 skal holde en enkeltlast på 5000 kp. Beregn stavkreftene og angi om det er strekk- eller trykk-krefter.



b) Fagverkstavene blir laget av stål med elastisitetsmodul $E = 2,0 \cdot 10^6$ kp/cm² og med bruddgrense $\sigma_B = 3700$ kp/cm². Alle fagverkstavene skal ha sirkulært tverrsnitt med samme diameter. Finn den diameter som er tilstrekkelig dersom vi skal ha en sikkerhet mot brudd på 3,7. Finn også forlengelsen av staven DE. En antar bare å ha aksielle, sentriske, krefter i stavene.

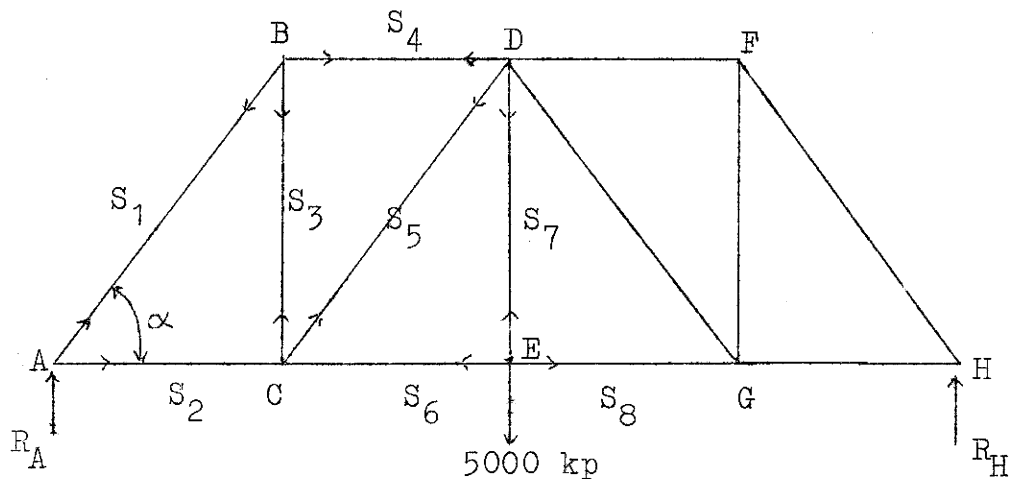
c) Vi erstatter fagverket mellom A og H med en INP-bjelke av samme materiale som fagverkstavene, og utsetter den for samme belastning. Sikkerhetsgraden mot brudd skal også nå være 3,7, og vi kan se bort fra skjærspenningene. Hvilket profilnummer må vi velge når vi også tar hensyn til bjelkens egen tyngde? Bruk tabell A1.

d) Hvor stor blir nedbøyningen midt på bjelken? Dersom du ikke har funnet det riktige bjelkeprofil i punkt c, kan du her velge INP 400.

e) Nevn i få ord hva du ser som fordelene ved fagverkskonstruksjonen fremfor INP-bjelken.

Løsning

a)



P.g.a. symmetri er $R_A = R_H = 2500 \text{ kp}$

P.g.a. symmetri er det videre nok å beregne halvparten av stavkreftene.

Likevekt av punkt A:

$$\Sigma P_x = 0 : \quad S_2 + S_1 \cos \alpha = 0 \quad (\text{I})$$

$$\Sigma P_y = 0 \quad R_A + S_1 \sin \alpha = 0 \quad (\text{II})$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \quad \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\text{Av (II):} \quad \underline{S_1} = - \frac{R_A}{\sin \alpha} = - \frac{2500}{4} \cdot 5 \text{ kp} = \underline{- 3125 \text{ kp}}$$

$$\text{Innsatt i (I):} \quad \underline{S_2} = - S_1 \cos \alpha = \frac{2500 \cdot 5}{4} \cdot \frac{3}{5} \text{ kp} = \underline{1875 \text{ kp}}$$

Likevekt av punkt B:

$$\Sigma P_x = 0 : \quad S_4 - S_1 \cos \alpha = 0 \quad (\text{III})$$

$$\Sigma P_y = 0 : \quad - S_3 - S_1 \sin \alpha = 0 \quad (\text{IV})$$

$$\text{Av (III):} \quad \underline{S_4} = S_1 \cos \alpha = - S_2 = \underline{- 1875 \text{ kp}}$$

$$\text{Av (IV):} \quad \underline{S_3} = - S_1 \sin \alpha = R_A = \underline{2500 \text{ kp}}$$

Likevekt av punkt C.

$$\Sigma P_x = 0 : \quad -S_2 + S_5 \cos \alpha + S_6 = 0 \quad (V)$$

$$\Sigma P_y = 0 : \quad S_3 + S_5 \sin \alpha = 0 \quad (VI)$$

$$\text{Av (VI) :} \quad \underline{S_5} = -\frac{S_3}{\sin \alpha} = S_1 = \underline{-3125 \text{ kp}}$$

$$\text{Av (V) :} \quad \underline{S_6} = S_2 - S_5 \cos \alpha = S_2 - S_1 \cos \alpha = 2S_2 = \underline{3750 \text{ kp}}$$

Av symmetrigrunner er $S_6 = S_8$, dvs. likevekt av punkt E gir:

$$\underline{S_7 = 5000 \text{ kp}}$$

Resten av stavkreftene finnes ved symmetriresonnement.

Vi har da flg. stavkrefter:

Stavene AB, CD, DG og FH	har en trykkraft på	3125 kp
Stavene AC og GH	" " strekkraft "	1875 kp
Stavene BD og DF	" " trykkraft "	1875 kp
Stavene BC og FG	" " strekkraft "	2500 kp
Stavene CE og EG	" " strekkraft "	3750 kp
Staven IE	" " strekkraft "	5000 kp

b)

Den største kraften, dvs. S_7 , bestemmer fagverkstavens dimensjon.

$$\text{Tillatt spenning:} \quad \sigma_{tn} = \frac{\sigma_B}{3,7} = \frac{S_7}{A}$$

$$A = \frac{S_7 \cdot 3,7}{\sigma_B} = \frac{5000 \cdot 3,7}{3700} \text{ cm}^2 = 5,00 \text{ cm}^2$$

Av tabell F₁ finnes derved tverrsnittets diameter
 $d = 2,6 \text{ cm}$ som gir alle stavene den til-
strekkelige sikkerhet på minst 3,7.

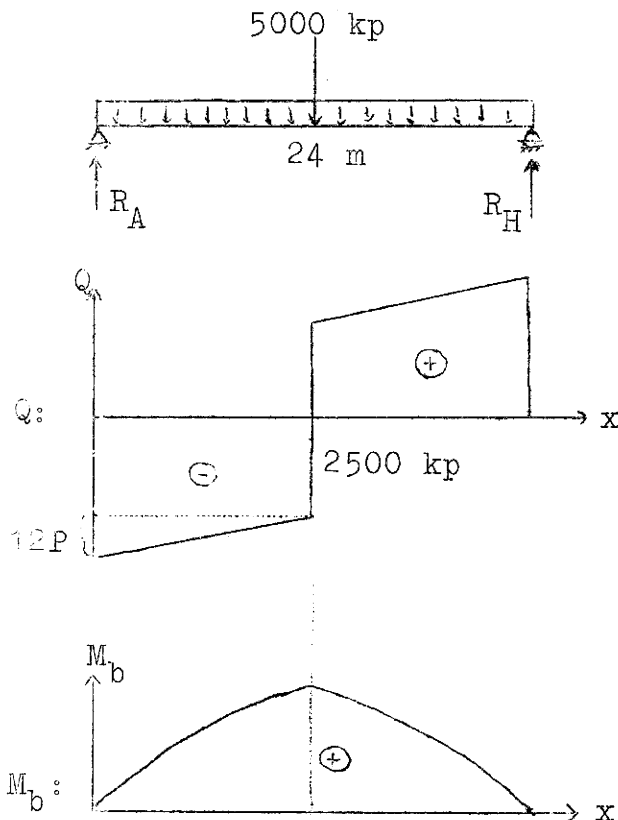
For staven DE har vi da videre:

$$\sigma_{tn} = \epsilon \cdot E = \frac{\Delta l}{l} \cdot E \quad \text{dvs.} \quad \Delta l = \sigma_{tn} \cdot \frac{l}{E}$$

$$\text{Forlengelse av staven DE : } \underline{\underline{\Delta_{DE}}} = \frac{\sigma_B}{3,7} \cdot \frac{800}{2,0 \cdot 10^6} \text{cm} = 0,40 \text{cm}$$

$$= \underline{\underline{4 \text{ mm}}}$$

c)



INP-bjelken er laget av samme materiale som fagverkskonstruksjonen
 $E = 2,0 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$ $\sigma_{tn} = 1000 \text{ kp/cm}^2$

P = belastning i kp/m p.g.a. bjelkens egen vekt.

$24P$ = Bjelkens totale vekt.

På grunn av symmetri er:

$$R_A = R_B = 2500 + 12 \cdot P$$

Vi ser at vi har det maksimale bøyningmoment midt på bjelken. Det er i tallverdi lik arealet som er begrenset av Q-diagrammet og lengdeaksen til venstre for det punkt vi betrakter (midtpunktet).

$$M_{b_{\max}} = 2500 \cdot 1200 + \frac{1}{2} \cdot 12P \cdot 1200 = (3000000 + 7200P) \text{ kpcm}$$

$$\sigma_{tn} = \frac{M_{b_{\max}}}{W_{\min}} \quad \text{eller} \quad \text{(I): } \underline{\underline{W_{\min}}} = \frac{M_{b_{\max}}}{\sigma_{tn}} = \underline{\underline{(3000 + 7,2 P) \text{cm}^3}}$$

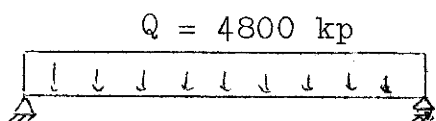
Vi går inn i tabell A1 og ser først på profil nr. 550 som har $W = 3610 \text{ cm}^3$ og $P = 167 \text{ kp/m}$. Bjelkeprofilets motstandsmoment må være minst lik høyre side av lign. (I) dersom sikkerheten mot brudd minst skal være lik den fastsatte. Ved innsetting av $P = 167 \text{ kp/m}$ i (I), får vi $W_{\min} = 4200 \text{ cm}^3$, mens vi hadde for dette profilet $W = 3610 \text{ cm}^3$. Det holder

altså ikke, og vi prøver profil nr. 600 med $P=200$ kp/m. Her blir: $W_{\min} = 4400 \text{ cm}^3$ som er mindre enn profilets motstandsmoment på $W = 4630 \text{ cm}^3$. Vi kan altså bruke profil nr. 600 og får da en sikkerhet mot brudd på vel 3,7.

d)

Vi bruker superposisjonsloven og legger sammen nedbøyningen for hver belastning.

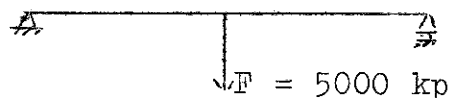
1)



Nedbøyning p.g.a. egen tyngde:

$$f_1 = \frac{5Ql^3}{348 \cdot EI}$$

2)



Nedbøyning p.g.a. ytre last:

$$f_2 = \frac{Fl^3}{48 \cdot EI}$$

Total nedbøyning på midten:

$$f_{\text{tot}} = f_1 + f_2 = \frac{l^3}{EI} \left(\frac{5Q}{348} + \frac{F}{48} \right)$$

$$I = 139\,000 \text{ cm}^4 \approx 140\,000 \text{ cm}^4$$

$$f_{\text{tot}} = \frac{24^3 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^6 \cdot 1,4 \cdot 10^5} \left(\frac{24000}{348} + \frac{5000}{48} \right) \text{ cm}$$

$$= \frac{6 \cdot 24^2}{70} \cdot \left(\frac{6}{87} + \frac{5}{48} \right) \text{ cm}$$

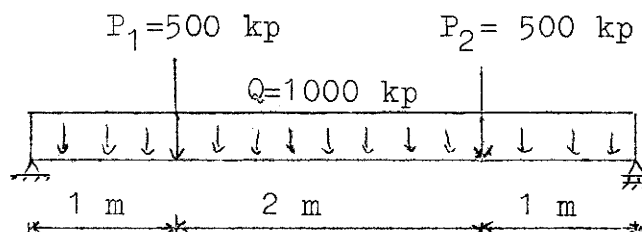
$$\underline{\underline{f_{\text{tot}}}} = (3,40 + 5,14) \text{ cm} = \underline{\underline{8,5 \text{ cm}}}$$

e)

Vi ser at fagverket har meget mindre vekt (dvs. trenger mindre materiale) enn INP-bjelken (som dessuten er en gunstig bjelketype). Nedbøyningen er også mindre - i alle fall i dette idealiserte tilfellet.

Oppgave 1.

En bjelke er belastet som vist på figuren.



Bjelken er 4 m lang. Krefte P_1 og P_2 angriper 1 m fra hver ende. Foruten den jevnt fordelte belastning Q skal en også regne med bjelkens egen tyngde. Bjelken er laget av stål med elastisitetsmodul $E = 2,0 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$ og egenvekt $s = 8 \text{ kp/dm}^3$. Bruddgrensen er $\sigma_B = 3700 \text{ kp/cm}^2$ og sikkerhetsgraden mot brudd skal være 3,7. Bjelkens tverrsnitt skal velges rektangulært med bredde lik 6 cm.

a)

Tegn opp skjærkraft- og bøyningmomentdiagram. Bokstavuttrykk for skjærkraft og bøyningmoment skal finnes ved opplagringspunktene og under P_1 og P_2 .

b)

Hvilken høyde må en velge på bjelketverrsnittet forat bøyningsspenningen ikke skal overstige den tillatte verdi?

c)

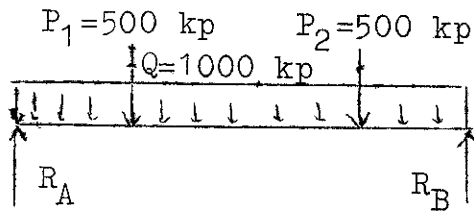
Finn maksimal skjærspenning og angi hvor den opptrer. Dersom du ikke har funnet bjelketverrsnittets høyde, settes den fra nå av lik 15 cm.

d)

Finn bjelkens helningsvinkel ved opplagringspunktene. Som tilnærmelse settes tangens til helningsvinkelen lik selve helningsvinkelen.

Løsning 1

a)



Total jevnt fordelt belastning:

$$Q_t = Q + s \cdot b \cdot h \cdot l$$

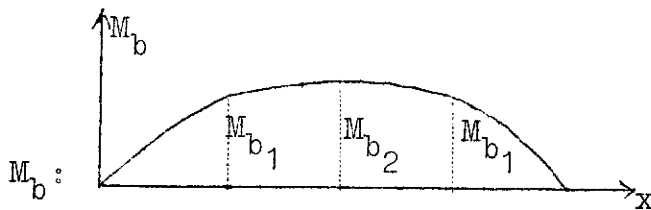
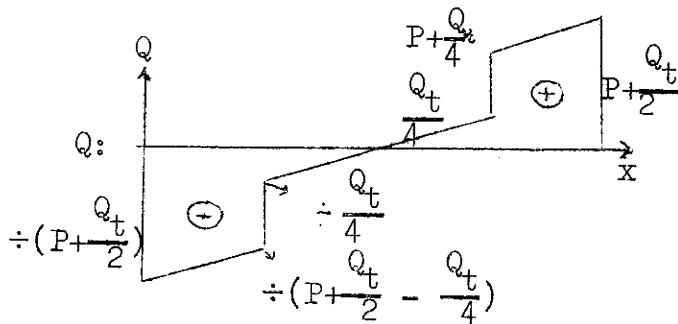
der b står for bjelketverrsnittets bredde, h dets høyde og l bjelkens lengde.

Videre er:

$$P_1 = P_2 = P$$

Belastningen er symmetrisk og:

$$R_A = R_B = P + \frac{Q_t}{2}$$



Skjærkrefter og bøyningmoment blir som vist på figuren.

$$M_{b2} = (P + \frac{Q_t}{2}) \cdot \frac{l}{4} \quad (\text{arealet under } Q\text{-diagrammet})$$

$$M_{b1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4} (P + \frac{Q_t}{2} + P + \frac{Q_t}{2} - \frac{Q_t}{4})$$

$$M_{b1} = (P + \frac{3Q_t}{8}) \cdot \frac{l}{4}$$

$$b) \quad \sigma_{tn} = \frac{\sigma_B}{n} = \frac{3700}{3,7} \text{ kp/cm}^2 = 1000 \text{ kp/cm}^2 = \frac{M_{b \max}}{W}$$

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{M_{b \max}}{\sigma_{tn}} = \frac{M_{b2}}{\sigma_{tn}}$$

Tallverdier settes inn i kp og i cm:

$$\frac{6 \cdot h^2}{6} \text{ cm} = \frac{(500 + 500 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 400 \cdot h) \cdot 100}{1000}$$

$$h^2 = 100 + 0,96 \cdot h$$

$$h^2 - 0,96 \cdot h - 100 = 0 \quad \text{Feil tallverdier herfor}$$

$$\underline{h} = \frac{0,96 + \sqrt{0,96^2 + 400}}{2} \text{ cm} = \underline{\underline{14,6 \text{ cm}}}$$

c) For rektangulært tverrsnitt er:

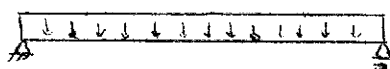
$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{\max}}{b \cdot h}$$

$$Q_{\max} = P + \frac{Q_t}{2} = (500 + 500 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 14,6 \cdot 400) \text{ kp} = 1140 \text{ kp}$$

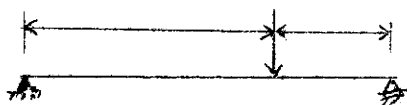
$$\underline{\tau_{\max}} = \frac{3 \cdot 1140}{2 \cdot 6 \cdot 14,6} \text{ kp/cm}^2 = \underline{\underline{19,6 \text{ kp/cm}^2}}$$

Vi har τ_{\max} midt i tverrsnittet ved opplagerpunktene.

d) Vi bruker superposisjonsprinsippet.



$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{Q_t \cdot l^2}{24 \cdot EI}$$



De to enkeltlastene er symmetrisk plassert. Sammenlagt gir de da en helningsvinkel som er lik summen av vinklene

i hver ende av bjelken når vi bare har én last. Vi får:

$$\text{tg } \alpha_2 = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot (1 + \beta)}{6} \cdot \frac{P \cdot l^2}{EI} \quad \text{og} \quad \text{tg } \alpha_3 = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot (1 + \alpha)}{6} \cdot \frac{P \cdot l^2}{EI}$$

Den totale helningsvinkel α_t :

$$\alpha_t = \operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{l^2}{6EI} \left(\frac{Q_t}{4} + P\alpha\beta \cdot (2 + \alpha + \beta) \right)$$

$$\alpha = \frac{3}{4} \quad , \quad \beta = \frac{1}{4}$$

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{6 \cdot 14,6^3}{12} \text{ cm}^4 = \underline{1556 \text{ cm}^4}$$

$$\underline{\underline{\alpha_t}} = \frac{16 \cdot 10^4}{6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1556} \left(320 + 500 \cdot \frac{3}{16} \cdot 3 \right) = \frac{4 \cdot 600}{300 \cdot 1735} = \underline{\underline{4,6 \cdot 10^{-3}}}$$

$$\underline{\underline{\alpha_t \approx 16 \text{ bueminutter}}}$$