5492 (11)

L A N D B R U K S T E K N I S K I N S T I T U T T

Vollebekk.

S T E N S I L T R Y K K.

L.nr. 58/14 Serie C. nr. 11.

Even Glemmestad.

G R A F I S K F R A M S T I L L I N G

A V A R B E I D S S T U D I E R E S U L T A T E R

L A N D B R U K S T E K N I S K   I N S T I T U T T

Vollebekk.

S T E N S I L T R Y K K.

L.nr. 58/14   Serie C.   nr. 8

Even Glemmestad.

G R A F I S K   F R A M S T I L L I N G

A V   A R B E I D S S T U D I E R E S U L T A T E R

Innhold.

I. FUNKSJONER.

Sammenhengen mellom to variable størrelser - x og y - uttrykker vi symbolsk ved formelen

$$y = f(x)$$

(leses: "y er lik f-funksjonen av x"). Formelen sier oss at verdien av y på en eller annen måte er avhengig av den verdi vi gir x.

Vi kaller x for den uavhengige eller fri variable. x kalles også argumentet.

y kalles for den avhengig variable.

Som eksempel på funksjonen $y = f(x)$ skal vi ta

$$y = \pi \cdot x^2$$

som er formelen for flateinnholdet av en sirkel.

y = flateinnholdet og

x = sirkelens radius.

Funksjonen $y = f(x)$ inneholder bare en uavhengig variabel, nemlig x. Vi kan imidlertid også ha at en størrelse z er avhengig av to fri variable x og y samtidig. Dette kan vi uttrykke ved funksjonssammenhengen:

$$z = f(x, y).$$

Som eksempel på funksjonen $z = f(x, y)$ kan vi ta for oss kjøretida (z) pr. dekar ved pløying som er avhengig av kjørehastighet (x) og plogens arbeidsbredde (y):

$$z = 1000\, x \cdot \frac{1}{y}.$$

Innen arbeidsstudiene har vi som regel å gjøre med funksjoner som inneholder to eller flere frie variable.

II. FRAMSTILLING AV SAMMENHENGEN MELLOM TO VARIABLE.

Hvis vi har to variable størrelser - la oss kalle dem x og y - som er avhengig av hverandre, kan denne sammenhengen foreligge i forskjellige former:

1. Forsøksverdier samlet i en tabell.
2. Som en matematisk formel.

Både tabeller og matematiske formler har den svakheten at vi som regel har vanskelig for å danne oss et raskt bilde av sammenhengen mellom de to størrelsene. For å skaffe oss det framstiller vi sammenhengen grafisk.

Som eksempel skal vi ta for oss sammenhengen mellom temperatur og tid i en smeltemasse (se fig. 1) Tabellen viser resultatet fra undersøkelsen hvor temperaturen

Tid i min.	Temp. °C
0	20
10	30
20	50
30	90
40	160
50	230
60	300
70	350
80	390
90	420
100	440
110	450

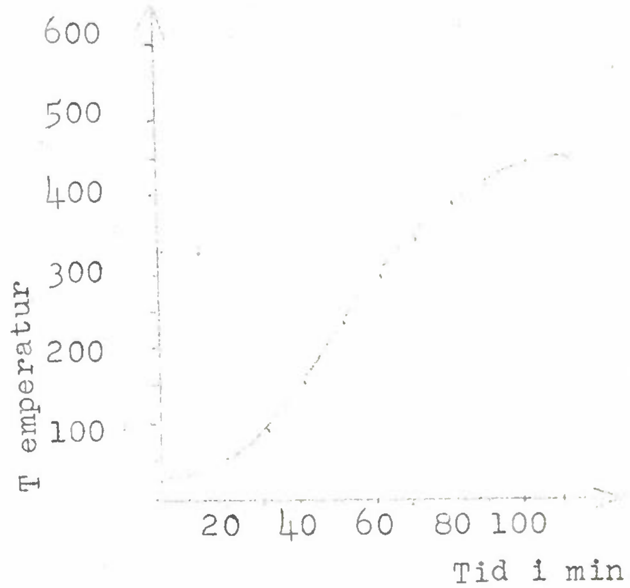


Fig. 1.

ble avlest hvert 10. minutt. Det grafiske bildet av tabellen er gitt i diagrammet i fig. 1.

I tillegg til at den grafiske framstillinga gir oss et mye klarere bilde av sammenhengen mellom tida og temperaturen enn tabellen, gjør den det også mulig å lese av alle mellomverdier.

A. Diagram.

Et diagram tegner vi vanligvis inn i et rettvinklet koordinatsystem, som kommer fram ved å plasere to akser vinkelrett på hverandre (se fig. 2).
Den loddrette aksen kaller vi gjerne y-aksen og den vannrette aksen for x-aksen. Ethvert punkt P i planet er fullstendig kjennetegnet ved en bestemt verdi for både x og y.

De to tall x og y som kjennetegner beliggenheten av punktet P kaller vi for punktets koordinater.

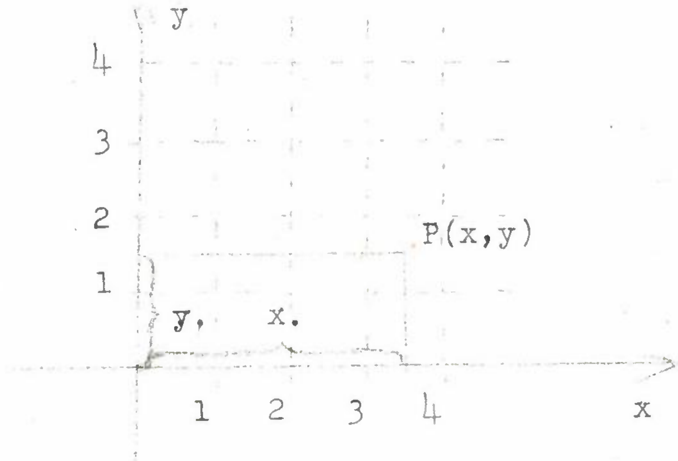


Fig. 2.

x_1 kalles abscisse og y_1 ordinat. De to aksene x og y som angir punktets beliggenhet kalles på tilsvarende måte for abscisse- og ordinataksene.

Enhver alminnelig funksjon av typen y = f (x) kan framstilles grafisk i et rettvinklet koordinatsystem. Til hver verdi av x svarer nemlig en bestemt verdi av y, altså et tallpar (x, y) som vi merker av ved det tilsvarende punkt i koordinatsystemet. Ved å velge verdiene av x tettere og tettere, vil de tilsvarende punkter i planet også som regel ligge tettere og tettere. Når vi har merket av et tilstrekkelig antall punkter, kan vi forbinde dem med en sammenhengende kurve som kalles det grafiske bildet eller diagrammet for funksjonen y = f (x). Omvendt kaller vi y = f (x) for kurvens likning. Kurvepunktet (x, y) som beskriver kurven, kaller vi for det løpende punkt.

Når det gjelder inndelingen av aksene, skiller vi mellom:

1. Ekvidistant deling på begge akser.
2. Den ene eller begge akser er forsynt med en funksjonsskala.

(Tilfelle 2 skal vi komme tilbake til seinere etter at vi har behandlet funksjonsskalaen.)

Under behandlinga av diagrammer kan vi i hovedsaken skille mellom 3 ulike oppgaver, nemlig:

1. Framstilling av diagram fra tabell.
2. Framstilling av diagram fra formel.
3. Sette opp en formel som tilnærmet tilfredsstiller et gitt diagram.

1. Framstille diagram fra tabell.

Som eksempel skal vi ta for oss tabell 1 nedenfor. Tabellen viser sammenhengen mellom avling og gjødselmengde (eksemplet er fingert). Vår oppgave er nå å lage et diagram på grunnlag av tallene i tabellen. Løsningen består av disse trinn.

Tabell 1.

Kg gjødsel x	Kg avling y
10	150
20	200
30	250
40	300
50	340
60	370
70	390
80	400
90	400
100	390

a. Velg lengdeenheter for de 2 aksene.

Valget her er avhengig av hvor stort vi ønsker å lage diagrammet. Som regel bør vi velge enhetene slik at de to aksene blir omlag like lange og slik at diagrammet får en høvelig størrelse. I eksemplet varierer gjødselmengden fra 10 til 100 og avlingsmengden fra 150 til 400. Bestemmer vi at 10 kg gjødsel skal svare til 10 mm og 10 kg avling til 5 mm, får vi et diagram på 9 x 12,5 cm.

b. Sett av de gitte verdier som punkter i koordinatsystemet.

c. Forbind punktene med en kurve.

Resultatet går fram av fig. 3 nedenfor.

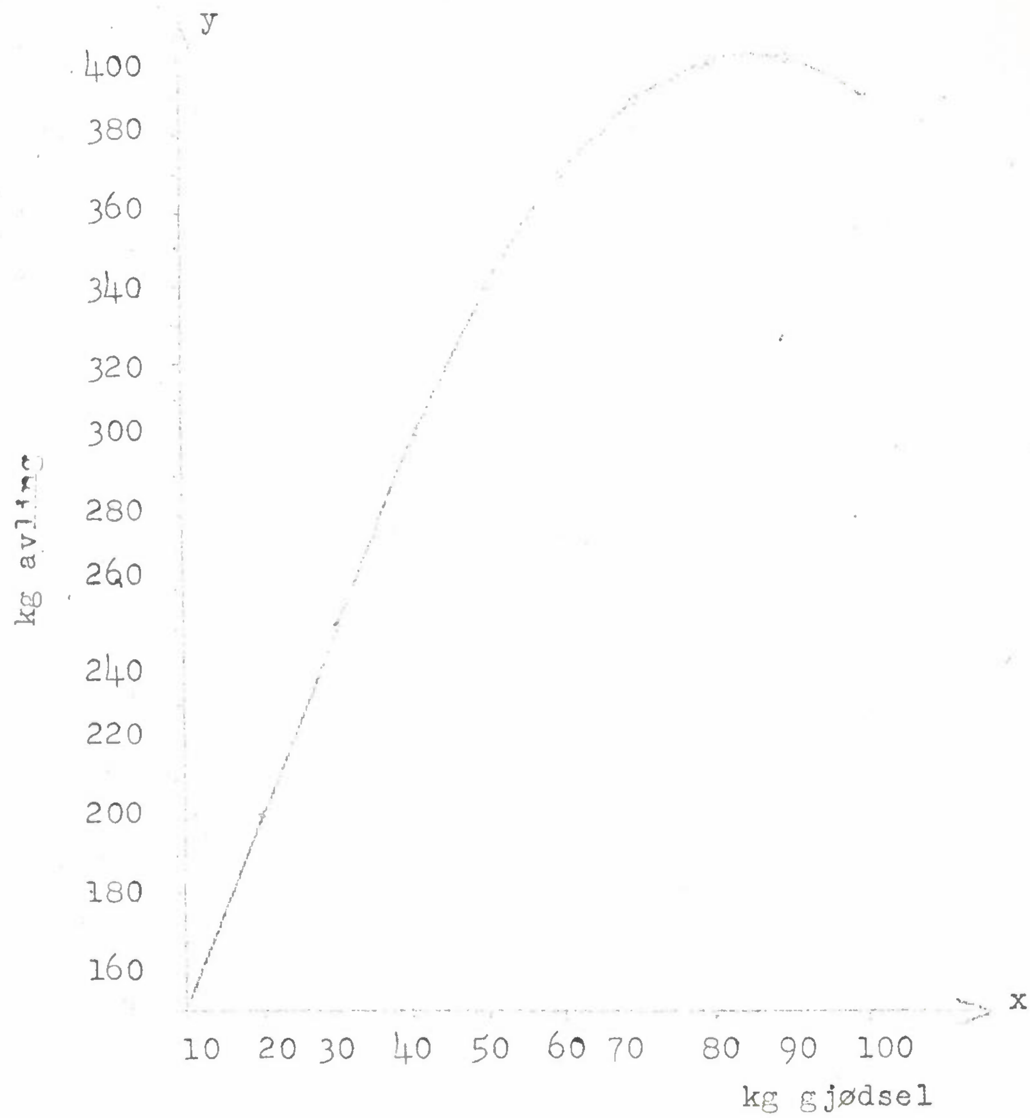


Fig. 3.

Det er imidlertid ikke i alle tilfelle at det er riktig å forbinde de avsatte punkter til en kurve. Vi kan ha tilfeller der den ene eller begge de variable forandrer seg sprangvis, diskontinuerlig. I slike tilfeller vil vi gjøre en feil dersom vi forbinder punktene til en glatt kurve. La oss som eksempel ta månedsomsetningen ved en fabrikk for landbruksmaskiner. Eksemplet går fram av fig. 4. Omsetningen er avsatt som funksjon av

Måned	Omsetn. i kr.
Januar	10 000
Februar	20 000
Mars	30 000
April	40 000
Mai	70 000
Juni	100 000
Juli	110 000
August	100 000
Sept.	60 000
Okt.	20 000
Nov.	10 000
Des.	10 000

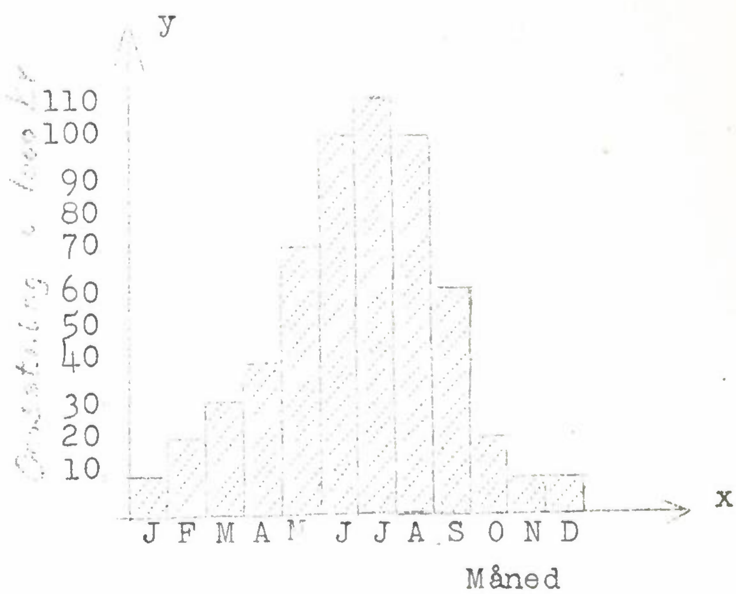


Fig. 4.

årets måneder. Den uavhengige variable (måneden) kan bare forandre seg sprangvis, og det ville gi et helt galt bilde om vi forbinder punktene med en glatt linje. I figuren er det brukt søyleframstilling. Det finnes også andre brukbare framstillingsmåter. De skal imidlertid ikke behandles nærmere her da de har liten betydning ved grafisk framstilling av arbeidsstudieresultater.

2. Framstille diagram fra formel.

Hvis sammenhengen mellom de to variable (x og y) foreligger som en formel $y = f(x)$, kan vi rekne ut sammenhørende verdier av x og y. På den måten får vi fram en tabell, og oppgaven videre blir den samme som behandlet foran.

Som eksempel skal vi ta for oss

$$y = x^2 + 10.$$

Vi skal her nøye oss med å tegne den del av diagrammet som svarer til $0 \leq x \leq 4$. Først rekner vi ut verdiene av y for de valgte verdier av x. Dette gir følgende tabell:

x	0	1	2	3	4
y	10	11	14	19	26

Hvis vi nå velger y = 80 mm og x = 80 mm får vi:

80 : 4 = 20 mm for hver enhet på x aksen og

80 :(26-10)= 5 " " " " " y " .

I fig. 5 har vi satt av de sammenhørende verdier av x og y som

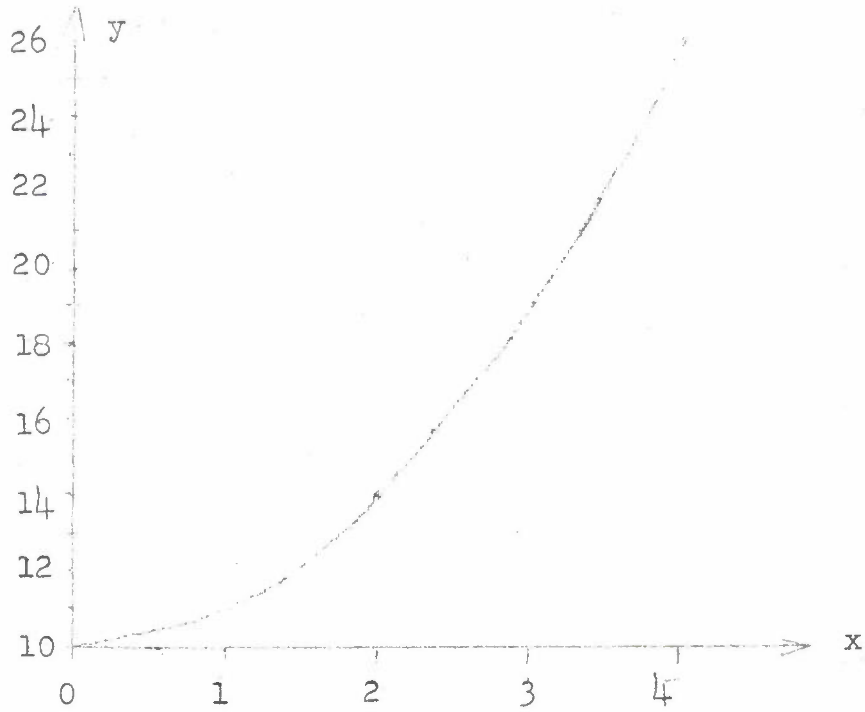


Fig. 5.

punkter og har trukket kurven mellom punktene.

3. Finne formelen for et gitt diagram.

Vi kan komme ut for tilfeller da resultatene fra en undersøkelse bare foreligger i form av et diagram. Det vil da være av interesse å finne formelen (likningen) som tilfredsstiller kurven i diagrammet. Har vi foran oss en rett kurve, er oppgaven relativt enkel. Å finne en likning som tilnærmet tilfredsstiller en krum kurve er derimot ingen enkel sak. I matematikken er det utviklet metoder for å finne formler som med tilstrekkelig stor sikkerhet tilfredsstiller de gitte kurver. Det ligger imidlertid utenfor rammen av det som vi skal behandle. Vi skal derfor innskrenke oss til å finne formelen for en rett linje.

Som eksempel skal vi ta for oss resultatene fra en studie over radlengdens virkning på kjørehastigheten ved radrensing med traktor. Resultatet er tegnet inn i diagrammet i fig. 6.

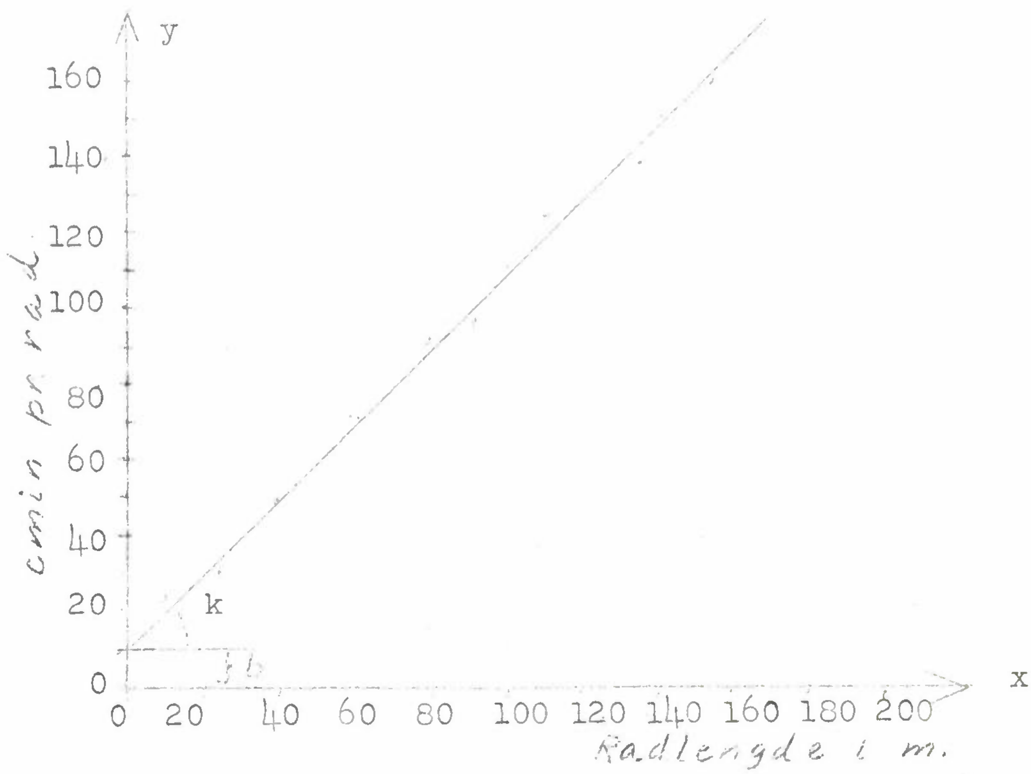


Fig. 6.

Da diagrammet er ei rett linje,må y være en funksjon av 1. grad. Funksjonen <u>y = kx + b</u> er den alminnelige førstegradsfunksjon eller hele linære funksjon. k er <u>linjens stigningskoeffisient</u> eller vinkelkoeffisient. <u>b er et konstantledd</u> som skyver linjen oppover eller nedover ettersom b er positiv eller negativ. b er altså verdien for y når x = o.

Vår oppgave er å bestemme størrelsene k og b. Av diagrammet ser vi at linjen skjærer y-aksen ved y = 10,

$\underline{):\ b = 10}$. (b = akselerasjon + retardasjon).

For x = 100 leser vi av: $\underline{y = 110}$. Dette gir:

$110 = k \cdot 100 + 10 \quad \underline{):\ k = 1}$.

Følgelig er den søkte funksjon:

$$\underline{\underline{y = 1x + 10}}$$

B. Funksjonsskala.

Funksjonsskalaen inntar en sentral plass ved framstilling av nomogrammer. Det er derfor av stor betydning å lære denne å kjenne så tidlig som mulig.

Definisjon:

En funksjonsskala er en skala hvor delstrekenes avstand fra et visst punkt på skalaen, skalaens begynnelsespunkt, er proporsjonale med verdiene for skalaens funksjon.

Likningen for gradering av skalaen er:

fl. $\boxed{a = M \cdot f(x)}$

a = avstanden i mm fra skalaens begynnelsespunkt for den valgte verdi av den frie variable x

M er en proporsjonalitetskonstant. Den kalles for modulen og har dimmensjonen lengde.

x = skalaens argument (den frie variable).

f(x) = skalaens funksjon. Etter den har skalaen fått sitt navn.

Ved opptegning av en funksjonsskala velger vi først begynnelsespunkt og retning for skalaen. Avstandsverdiene avsettes deretter fra skalaens begynnelsespunkt i skalaens retning hvis de er positive. Er verdiene negative, avsettes de derimot i motsatt retning.

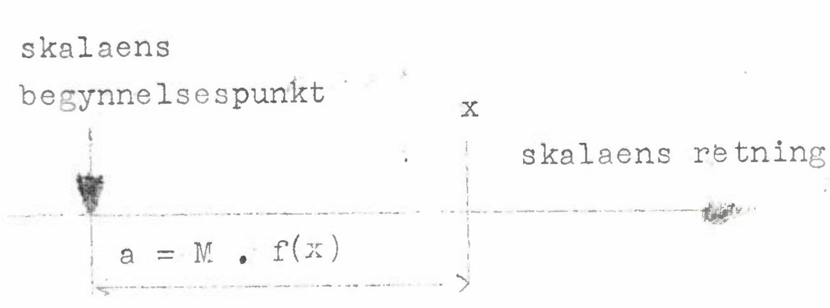


Fig. 7.

Før vi går videre skal vi definere enkelte begreper i forbindelse med funksjonsskalaen:

Begynnelsespunktet er det punktet på skalaen hvor funksjonen

$f(x) = 0.$

Nullpunktet er det punktet på skalaen hvor argumentet (x) = 0.
Sifferretningen angir retningen for stigende argument.
Skalaretningen angir retningen for stigende funksjonsverdier.

Når vi skal berekne avstandsverdiene på funksjonsskalaen, lager vi oss best en tabell med argumentets sifferverdi i første kolonne, funksjonsverdien i den andre og avstandsverdien i den tredje (se fig. 8). I siste kolonne står altså avstanden i mm fra skalaens begynnelsespunkt til det delstreket hvor sifferverdien fra første kolonne skal skrives.

$a = M \cdot f(x)$		
x	f (x)	a mm
-	-	-
-	-	-
-	-	-

Fig. 8.

Eksempel: Tegn funksjonsskalaen for $a = 10 \text{ mm} \cdot x^2$ med grensene 1 og 4. Løsningen går fram av fig. 9.

$a = 10 \text{ mm} \cdot x^2$		
x	$f(x) = x^2$	a mm
1	1	10
2	4	40
3	9	90
4	16	160

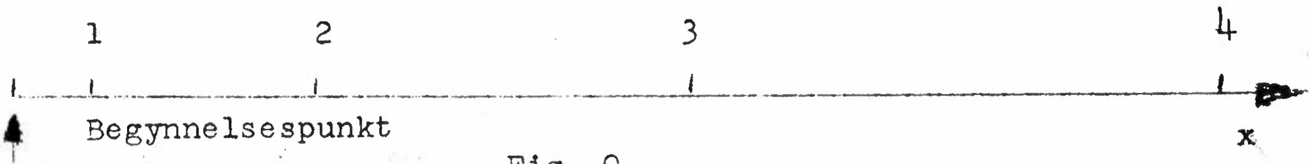


Fig. 9.

Funksjonsskalaens lengde og modul:

Funksjonsskalaens lengde betegnes med bokstaven L. Den angir lengden i mm mellom endedelstrekene på skalaen. Endedelstrekene betegnes med x_1 og x_n,

x_1 = argumentets minimumsverdi og
x_n = " maksimumsverdi.

Endedelstrekenes avstand fra skalaens begynnelsespunkt betegnes med henholdsvis a_1 og a_n. Se fig. 10.

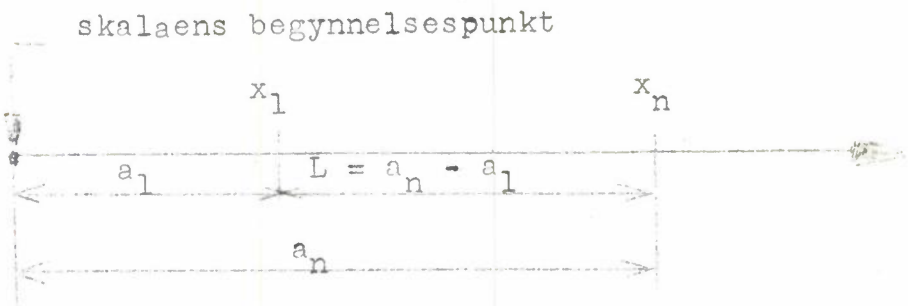


Fig. 10.

Av fig. 10 har vi at:

$$L = a_n - a, .$$

Ifølge funksjonsskalaens likning er:

$$a_1 = M \cdot f\ (x_1) \text{ og}$$
$$a_n = M \cdot f\ (x_n).$$

Følgelig er:

$$\text{f 2} \quad \boxed{L = M \cdot \left| f\ (x_n) - f\ (x_1) \right|}$$

Av denne likningen får vi:

$$\text{f 3.} \quad \boxed{M = \frac{L}{\left| f\ (x_n) - f\ (x_1) \right|} \text{mm}}$$

Dette er formelen for berekning av skalaens modul når skalaens lengde, funksjon og grenser er gitt. Formelen kommer svært ofte til anvendelse. Lengden og modulen reknes alltid positive.

Formelen f 2 er formelen for å berekne skalaens lengde(L) når skalaens funksjon, modul og grense er gitt.

- - - - -

Likningen for gradering av funksjonsskalaen,

$$a = M \cdot f\ (x)$$

gjelder bare under den forutsetning at $f\ (x_1) = 0$. Når $f\ (x_1)$ er forskjellig fra 0 gjelder likningen:

$$\text{f 4.} \quad \boxed{a = M \cdot \left| f(x) - f\ (x_1) \right|}$$

Dette er den mest vanlige formel for gradering av funksjonsskalaen.

Eksempel: Tegn funksjonsskalaen for $f(x) = 4x + 10$ med grensene 1 og 4. Skalaens lengde = 120 mm.

Løsning: $a = M \cdot (f(x) - f(x_1))$.

$$M = \frac{L}{f(x_n) - f(u_1)} = \frac{120}{26 - 14} = \underline{10}$$

$$f(x_n) = 4 \cdot 4 + 10 = 26$$

$$f(x_1) = 4 \cdot 1 + 10 = 14$$

x	f (x)	a = 10 mm (f (x) - 14)
1	14	0
2	18	40
3	22	80
4	26	120

Fingradering av funksjonsskalaen:

De eksempler som er tegnet opp gir bare den generelle framgangsmåten ved avmerkinga av delstrekene på skalaen. Når vi skal lage en funksjonsskala ved framstilling av nomogrammer, må vi vanligvis merke av langt flere punkter enn det som er gjort i eksemplene foran. Det blir da ikke plass til å skrive verdien ved hver delstrek. For å lette avlesinga bør vi da variere lengden på delstrekene. Som regel anbefales det å bruke inndeling etter desimalsystemet. Fig. 11 viser noen skalaer med riktig og uriktig inndeling. Fig. 11 a er avgjort raskest å avlese. Skalaen har delstreker av tre ulike lengder.

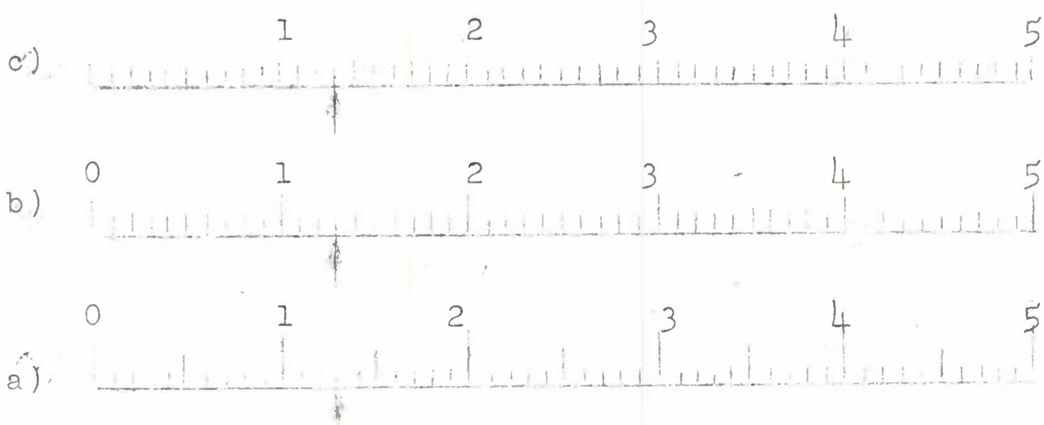


Fig. 11.

De korteste strekene markerer hver tidel. For hver 5 tideler er delstrekene gjort noe lenger, men ikke så lange som delstrekene for de hele tallverdier. Denne inndelinga gjør det raskt for øyet å oppfatte verdien ved en hvilken som helst delstrek. Vi kan f eks. med en gang se at tallverdien ved pila er 1,3. På skalaen b, hvor delstrekene bare har to ulike lengder, er avlesinga straks vanskeligere. På skalaen c hvor alle delstrekene er like lange, er avlesinga svært vanskelig. Vi har derfor den regel ved graderinga av en skala at høgst 4 delstreker av samme lengde skal komme etterhverandre. Avlesinga på en skala skjer ikke bestandig ved en avmerket delstrek, men også ofte mellom to delstreker. Det er derfor svært viktig at hver delstrek har en slik verdi at avlesinga mellom to delstreker blir enkel. Fig. 12 viser en skala som er svært uhensiktsmessig inndelt. For det første er det

Fig. 12.

mer enn fire delstreker av samme lengde etter hverandre. For det andre utgjør hver av de korte delstrekene 1/7. Pila viser en verdi mellom 1 2/7 og 1 3/7, men den eksakte verdien er meget vanskelig å lese av. Som nevnt foran bør vi derfor bruke desimalsystemet ved fininndelinga av skalaen. Både 1/10, 2/10 og 5/10 kan brukes, d.v.s. at vi foretar en finere inndeling for enten hver tidel, for hver annen tidel eller for hver femte tidel. Forskjellen i avlesing mellom to delstreker som følger etter hverandre betegner vi med Δx (uttales "delta x"), eller vi kan ha Δz, Δy osv. For å lette avlesinga har det også vist seg at avstanden mellom to delstreker vanligvis ikke bør være mindre enn 1,5 mm og større enn 5 mm.

Øvelser:

1. Tegn skalaen for $f(u) = 2 \cdot \sqrt{u} + 5$ når u varierer fra 0 - 5. $\Delta u = 0{,}5$. Lengde av skala 150 mm.
2. Beregn skalaens lengde når
   $M = 0{,}25$, $f(u_1) = 50$ og $f(u_n) = 800$.
3. Tegn skalaen for $y = \frac{1}{x}$ når x varierer fra 1 til 3. $\Delta x = 0{,}1$ og lengde av skala 200 mm.
4. Tegn skalaen for $K = 3a^2 - 15$ når a varierer fra 0 til + 3. $\Delta a = 0{,}1$ og $M = 5$ mm.

C. Dobbeltskala.

Vi skal nå gå tilbake til diagrammet i fig.1 og se at vi kan framstille sammenhengen mellom temperatur og tid på en annen måte, nemlig som en såkalt dobbeltskala. Vi går da fram på denne måten (se fig 13.):

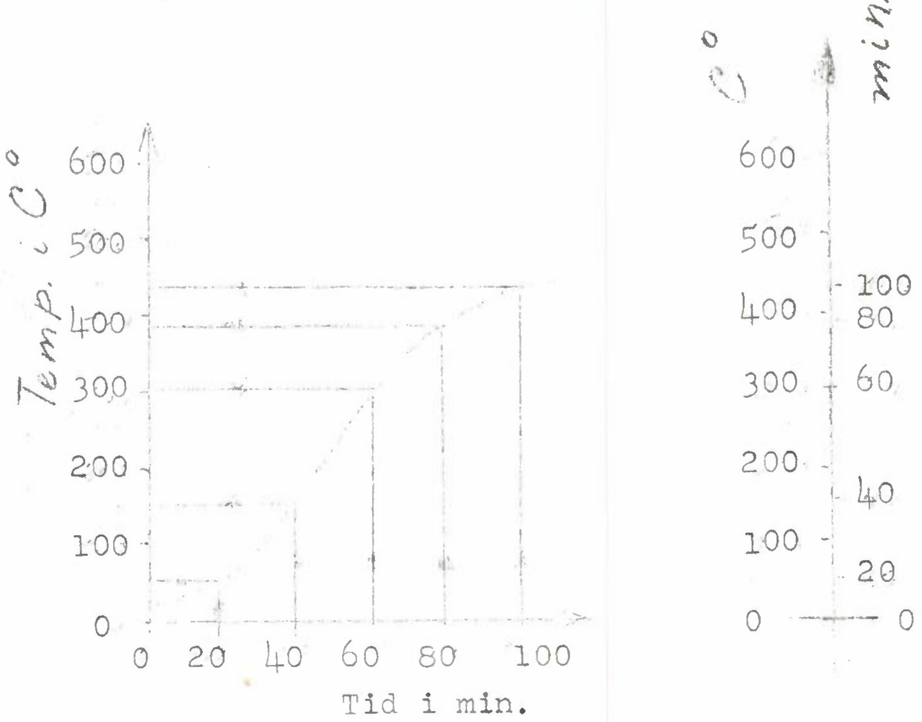


Fig. 13.

Fra delstrekene på abscissen (tidsaksen) trekker vi vertikale linjer til kurven. Fra skjæringspunktene med linjen trekker vi deretter vannrette linjer til ordinaten (temperaturaksen). Ved de punkter som vi på denne måten får på ordinaten, skriver vi det tallet som vi gikk ut fra på abscissen. Tidgraderingen overføres altså til ordinaten med kurven som brytningslinje. Dermed har vi fått en linje som er forsynt med en skala for temperatur og en skala for tid. Vi har med andre ord fått en dobbeltskala. Vi legger merke til at temperaturskalaen har ekvidistand inndeling som i diadrammet. Tidsskalaen har derimot fått varierende lengder mellom delpunktene. Dobbeltskalaen har den fordel sammenliknet med diagrammet at den tar liten plass og gir en raskere avlesing.

Resultatene fra et forsøk kan ofte foreligge i en slik form at det er vanskelig å få tegnet inn diagrammet på ett ark med stor nok nøyaktighet. Ved å framstille resultatene i dobbeltskala, kan denne avbrytes på et vilkårlig sted slik at vi kan få flere dobbeltskalaer ved sida av hverandre. Fig 14 viser en dobbeltskala som er delt i fire deler. På den måten har vi reusert plassbehovet i høgda til 1/4.

Dobbeltskala kan vi også framstille direkte fra en tabell. Som eksempel skal vi ta for oss tabellen i fig. 15. Vi avsetter y på den ene sida av skalaen med ekvidistant avstand.

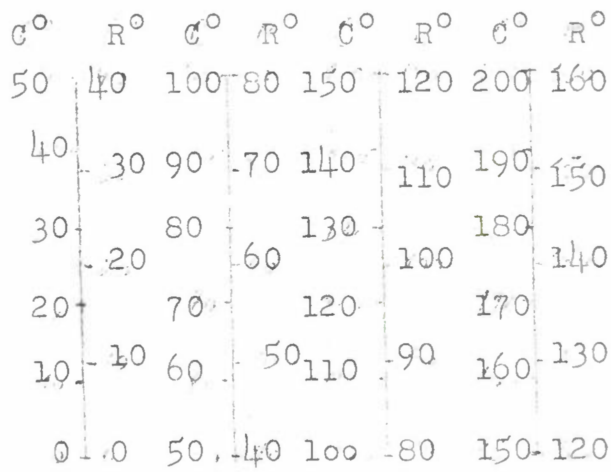


Fig. 14. Delt dobbeltskala.

x	Y
0	2
1	10
2	30
3	63
4	102
5	176

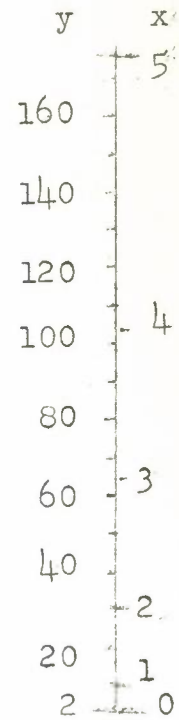


Fig. 15. Framstilling av dobbeltskala fra tabell.

Lengdeenheten, modulen, velger vi slik at vi får millimeterinndeling. Vi velger derfor y = 1 mm, dvs. at skalaen blir (176 - 2)= 174 mm.

Den andre variable, x, avsetter vi deretter på den andre sida av skalaen. Når vi har valgt millimeterinndeling for y, er dette en enkel sak. Vi avsetter x = 0 på den andre sida av y = 2. x= 3 avsetter vi rett ut for y = 63, d.v.s. 63 mm fra x = 0. Den ferdige dobbeltskalaen ser vi av fig 15.

Dobbeltskalaen kan vi oppfatte som to skalaer som ligger ved sida av hverandre. Det karakteristiske ved den er at dens ene skala har ekvidistant inndeling mens den andre er en funksjonsskala. Til grunn for en funksjonsskala ligger det altså en ekvidistant skala som angir den lengdeenhet (modul) som brukes ved tegninga av funksjonsskalaen.

Har vi to variable størrelser u og v, kan likningen skrives på denne måten:

$$f_1(u) = f_2(v).$$

Denne likningen kan framstilles som dobbeltskala. Vi framstiller funksjonsskalaer for begge funksjonene og graderer begge sider av linjen på en slik måte at hvert enkelt punkt på linjen gir verdier som tilfredsstiller likningen. Graderinga skjer fra samme begynnelsespunkt og i samme retning.

Likningene for graderinga er:

$$a = M_u \cdot f_1 (u) \text{ og}$$
$$b = M_v \cdot f_2 (v).$$

Følgelig er:

$$M_u \cdot f_1 (u) = M_v \cdot f_2 (v)$$

og vi får at

$$\boxed{M_u = M_v}$$

På en dobbeltskala bruker vi altså samme modul på begge skalaer.

D. Logaritmeskalaen.

Logaritmeskalaen som er en spesiell funksjonsskala, får vi ofte bruk for innen nomografien. Den har formelen

$$= \log x.$$

Logaritmen er definert ved $a^y = x$. Dette fører til denne definisjon: Ved logaritmen til x med a som grunntall forstår vi den eksponent som a må opphøyes i for at den fremkomne potens skal være lik x.

Det som er karakteristisk for logaritmeskalaen er at:

1. Graderinga er den samme fra 1 til 10 som fra 10 til 100 eller fra 0,01 til 0,1 osv. Graderinga gjentar seg altså uendret for hver ny potens av 10.
2. Modulen for en logaritmeskala er lik avstanden mellom to tierpotenser som følger etter hverandre, f.eks. mellom 10^1 og 10^2.
3. Tallene på logaritmeskalaen kan multipliseres med et hvilket som helst tall uten at hverken skalaens modul eller funksjon forandres. Det fører bare til at begynnelsespunktet forskyves.
4. Verdien $x = 0$ kan ikke fastlegges da log 0 ikke er definert.
5. Den relative feilen ved avlesinga er den samme i alle punkter.

Når vi skal konstruere en logaritmeskala, er det en stor fordel å bruke et logaritmisk papir. Det er å få kjøpt både enkelt og dobbelt logaritmepapir (se fig. 17, 18 og 19). Har vi et slikt papir, kan vi tegne en ny logaritmeskala med hvilken som helst modul.

Vi gjør det ved å projisere skalaen på logaritmepapiret over på en ny skala. Dette kan vi gjøre på to forskjellige måter:

1) Fig. 15 viser bruk av den såkalte logaritmiske harpe. Ved bruk av denne blir den kjente logaritmeskala S sentralprojisert fra punktet P på linjen L_2 som da gir en logaritmeskala med større modul enn den opprinnelige. På linjen L_1 vil vi derimot få en logaritmeskala med mindre modul enn den vi gikk ut fra. Ved denne framgangsmåten er det svært viktig at den linjen vi projiserer inn på er parallell med linjen S. Hvordan vi lager en logaritmeskala med f.-eks. grensene 2 og 10 samt lengden 100 mm går direkte fram av fig. 15.

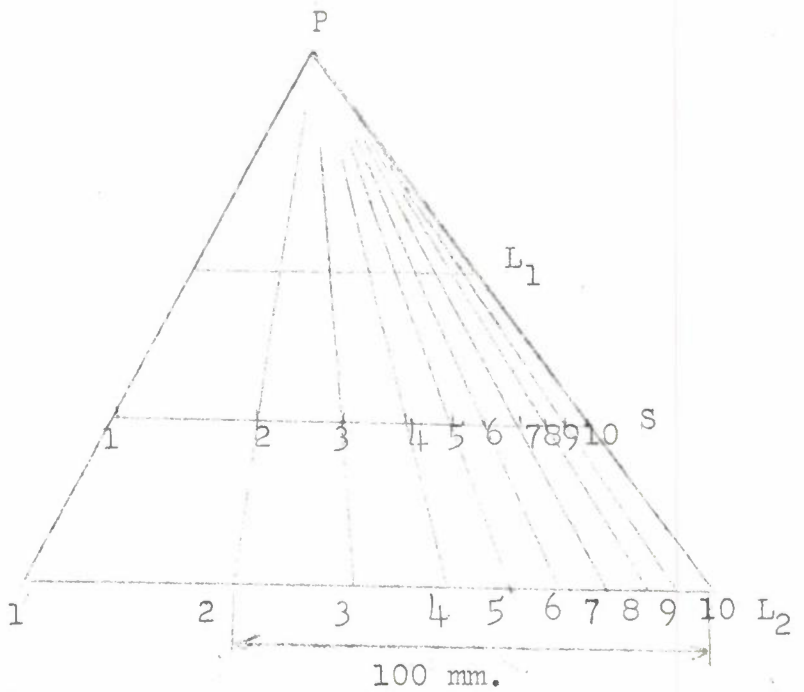


Fig. 15. Tegning av logaritmeskala ved hjelp av logaritmisk harpe.

2) Fig. 16 viser bruk av parallellprojeksjon. Framgangsmåten skal

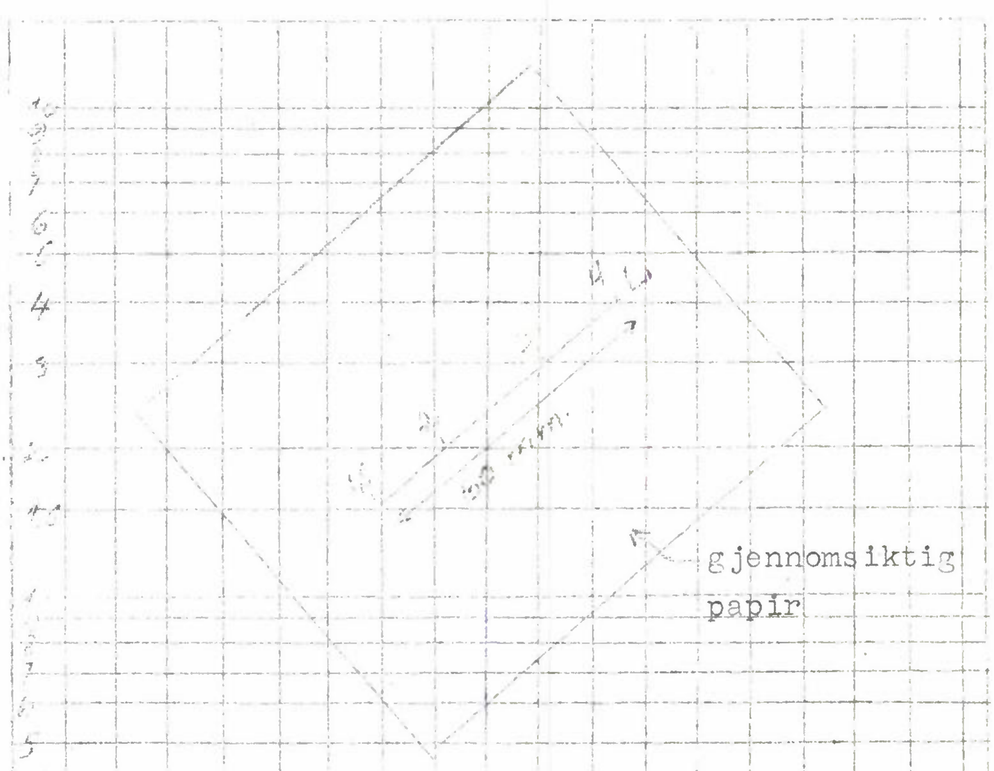


Fig. 16. Tegning av logaritmeskala ved hjelp av logaritmepapir og parallellprojeksjon.

belyses ved et eksempel.

Eksempel:

Tegn en logaritmeskala med grensene 1,5 og 4. Skalaens lengde skal være 60 mm. For å løse denne oppgaven går vi fram på følgende måte:

1. Vi avsetter skalaens lengde = 60 mm på et gjennomsiktig papir og skriver verdien 1,5 i den ene enden av skalaen og verdien 4,0 i den andre.
2. Deretter plaserer vi skalaen vi har tegnet , på logaritme-papiret slik som vist i fig. 16.
3. Til slutt merker vi av de mellomliggende verdier ved å parallellprojisere logaritmeskalaen inn på den skalaen vi skal tegne (linjen L).

Skal vi tegne en logaritmeskala på et ugjennomsiktig papir, må vi gå fram på en litt annen måte. Vi bruker da en logaritmeskala som er gradert på forhand, f.eks. ei remse av et logaritmepapir eller en reknestav. Skalaen legger vi fast på tegnepapiret. Framgangsmåten blir videre den samme som skissert ovenfor med unntak av at vi sjøl må trekke de nødvendige paralleller for skalaen.

E. Funksjonsnett.

Hvis vi skal tegne en eller flere krumme kurver i et regelmessig rutenett, krever dette mye tid når det forlanges stor nøyaktighet. For å forenkle dette kan vi i mange tilfelle bruke såkalt funksjonsnett for å få en rettlinjet funksjon.

Da vi behandlet den grafiske framstillinga av sammenhengen mellom to variable, gikk vi ut fra at vi hadde to akser med ekvidistant innstilling. Dette kaller vi et regelmessig rutenett. Hvis vi erstatter den ene eller begge aksene med en funksjonsskala, får vi vanligvis et uregelmessig rutenett som kalles et funksjonsnett. Vi skal her bare befatte oss med noen eksempler på logaritmiske funksjonsnett da disse spiller størst rolle. Det er heller ikke nødvendig å tegne opp disse da vi kan få kjøpt både enkel- og dobbel-logaritmisk papir. Det enkel-logaritmiske papiret har som navnet sier bare logaritmeskala på den ene aksen mens den andre skalaen har ekvidistant inndeling. På det dobbel-logaritmiske papiret har derimot begge akser logaritmeskala.

1. Bruk av enkel-logaritmisk papir.

Som eksempel på bruk av enkel-logaritmisk papir skal vi ta for oss eksponensial-funksjon $y = b \cdot a^x$ hvor a og b er konstanter. Tar vi logaritmen på begge sider får vi:

$$\underline{\log y = \log b + x \cdot \log a.}$$

Den siste likningen er en 1. grads likning av typen y = a x + b, og sammenhengen mellom y og x blir en rett linje når vi bruker logaritmisk inndeling på y-aksen. Når vi skal tegne den gitte eksponensial-funksjonen, kan vi da nøye oss med å berekne 2 verdipar i den gitte funksjonen. Deretter avsetter vi punktene på det enkel-logaritmiske papiret og trekker en rett linje mellom punktene.

Eksempel:

Tegn funksjonen $y = 3 \cdot 2^x$ med grensene $1 \leqq x \leqq 3$.

Løsning:

Vi berekner 2 verdipar ved å sette inn 2 forskjellige verdier av x i funksjonen:

$x = 1$ gir $y = 6$ og

$x = 3$ " $y = 24$.

Verdiparene merkes av på et enkel-logaritmisk papir og den rette linjen kan trekkes. Se fig. 17.

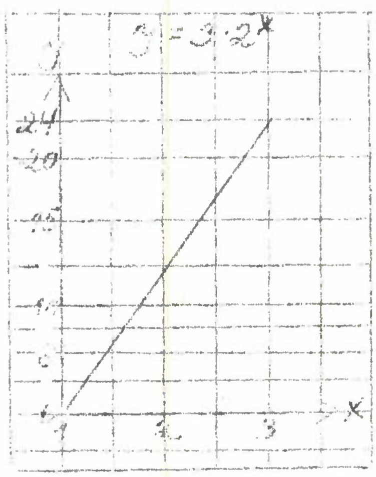


Fig. 17. Tegning av eksponensialkurve på enkel-logaritmisk papir.

Logaritmefunksjonen kan også overføres til rette linjer ved hjelp av enkel-logaritmisk papir. Tar vi for oss logaritmefunksjonen $y = a \cdot \log x^b$ hvor a og b er konstanter, kan denne funksjonen nemlig skrives slik:

$$\underline{y = b \cdot a \log x}$$

Av denne likningen ser vi at sammenhengen mellom y og x blir en rett linje når vi bruker <u>logaritmeskala på x-aksen</u>. Fig.18 viser et eksempel på tegning av en logaritmekurve på enkel-logaritmisk papir.

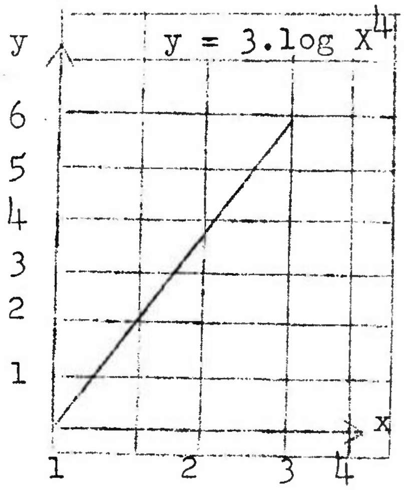


Fig. 18. Tegning av logaritmekurve på enkel-logaritmisk papir.

Enkel-logaritmisk papir overfører altså
eksponensial-kurver og
logaritmekurver
til rette linjer.

<u>2. Bruk av dobbel-logaritmisk papir.</u>

Potens-funksjonen

$$y = a \cdot x^b$$

hvor a og b er konstanter, kan framstilles som en rett linje ved hjelp av dobbel-logaritmisk papir. Tar vi logaritmen får vi nemlig:

$$\underline{\log y = \log a + b \cdot \log x.}$$

Av denne likningen ser vi at sammenhengen mellom x og y blir en rett linje når <u>både x - og y - aksen har logaritmisk inndeling.</u>

<u>Eksempel:</u>

Tegn funksjonen $y = 3 \cdot x^2$ med grensene $1 = x = 3$.

Løsning:

Vi berekner funksjonsverdiene for to forskjellige verdier av x:

x = 1 gir y = 3

x = 3 gir y = 27

Deretter avsetter vi verdiene på det dobbel-logaritmiske papiret og trekker den rette linjen mellom punktene. Se fig. 19.

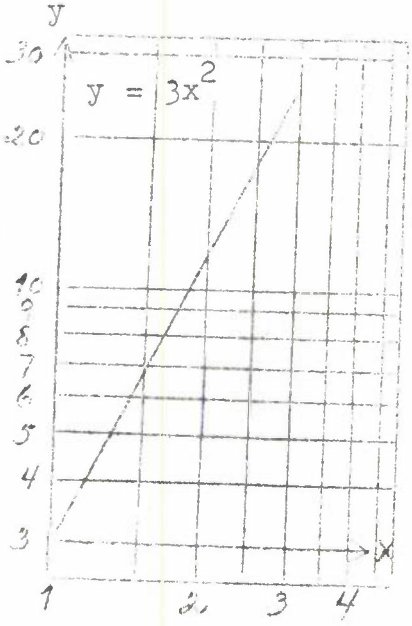


Fig 19. Tegning av potenskurve på dobbel-logaritmisk papir.

III. FRAMSTILLING AV SAMMENHENGEN MELLOM TRE VARIABLE.

I hovedavsnitt II har vi sett på hvordan sammenhengen mellom 2 variable kan framstilles grafisk ved hjelp av et diagram eller en dobbeltskala. Ut i fra det vi har lært kan vi utvikle nomografiske metoder som gjør det mulig med en grafisk framstilling av sammenhengen mellom 3 eller flere variable. Det grafiske bildet som vi får ved denne framstillinga, kalles et nomogram.[x)] Det fins flere typer av nomogrammer. Alle typer utmerker seg ved at de bygges opp ved hjelp av funksjonsskalaer.

Her skal vi bare behandle de to viktigste typer av nomogrammer, nemlig:

A. Rettlinje-nomogram og

B. Kurve-nomogram.

Det blir ikke plass til å ta for seg teorien for framstilling av slike nomogrammer. Vi skal nøye oss med å vise framgangsmåten når vi skal lage et nomogram ut fra en eller annen likning.

x) Nomogram = geometrisk bilde av ei gitt likning.

A. Rettlinjenomogram.

I sin enkleste form består et rettlinjenomogram av 3 skalaer, en for hver av de 3 variable. Skalaene er lagt slik i forhold til hverandre at ei rett linje som skjærer de 3 skalaene, skjærer i punkter som tilfredsstiller den gitt likning mellom de 3 variable. Skalaene kan være rette eller krumme linjer.

Vi skal her bare behandle rettlinjenomogrammer med rette skalaer. Disse kan vi skille i tre typer, nemlig:

1. Summeformen (fig. 20 a),
2. Resiprokformen (fig. 20 b) og
3. Produktformen (fig. 20 c).

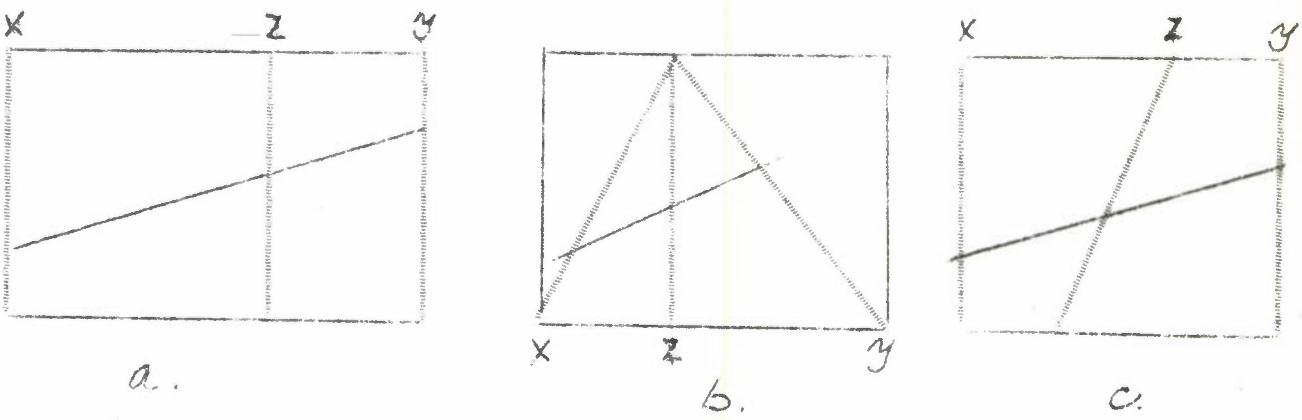


Fig. 20. Rettlinjenomogrammer.

1. Summeformen.

Rettlinjenomogram av summeform består av 3 paralelle skalaer(fig. 20a). De gitte variable (x og y) plaseres i alminnelighet på ytterskalane, og den søkte variable (z) på den mitre skalaen.

Nøkkelformen for framstilling av rettlinjenomogram av summeform er:

$$\text{f 5.} \quad \boxed{f_1\ (x) + f_2\ (y) = f_3\ (z)}$$

I formelen er x og y de gitte variable og z den søkte. Da et produkt kan overføres til en sum ved å ta logaritmen på begge sider, kan vi også framstille likninger av formen

$$f_1\ (x)\ .\ f_2\ (y) = f_3\ (z)$$

i summeform. Ved å ta logaritmen på begge sider får vi nemlig nøkkelformen ovenfor:

$$\log f_1\ (x) + \log f_2\ (y) = \log f_3\ (z).$$

Framgangsmåten ved framstilling av nomogrammet (se fig. 21):

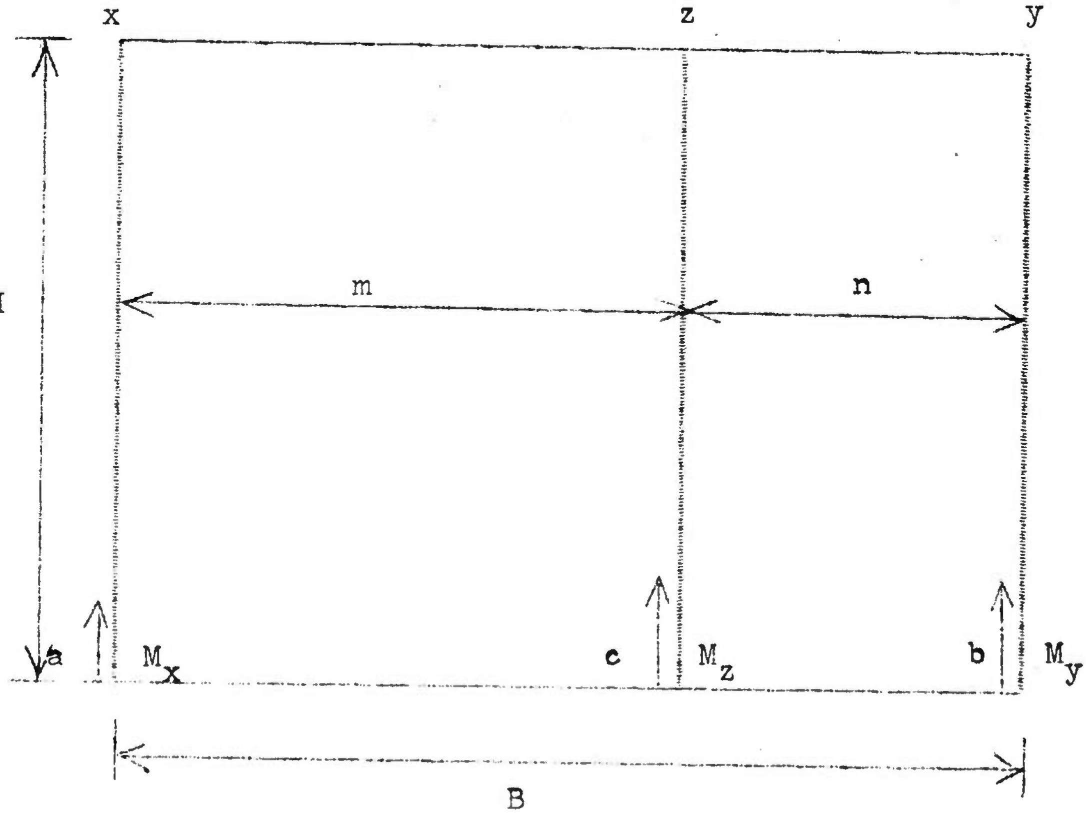


Fig. 21. Prinnsippfigur av rettlinjenomogram, summeform.

a) Bestem vilkårlig nomogrammets størrelse, dvs. bredden (B) og høyden (H).

b) Deretter bereknes modulene M_x og M_y ved hjelp av formelen f 3 på side 10.

c) Framstill funksjonsskalane for f_1 (x) og f_2 (y) etter disse formlene:

$$a = M_x \cdot f_1 (x) \text{ mm og}$$
$$b = M_y \cdot f_2 (y) \text{ mm.}$$

d) Det neste trinn ved framstillinga er å finne midtskalaens plasering i forhold til de to ytterskalaene. Skalaen for z plaseres slik at

f 6 $$\boxed{\frac{m}{n} = \frac{M_x}{M_y}}$$

e) Oppgaven videre er å berekne modulen (M_z) for gradering av z-skalaen etter denne formel:

f 7 $$\boxed{M_z = \frac{M_x \cdot M_y}{M_x + M_y}}$$

f) Til slutt graderes z-skalaen ved hjelp av formelen

$$c = M_z \cdot f_3 \ (z)$$

Angående graderinga av funksjonsskalaene gjelder at alle skalaene graderes i samme retning når alle ledd i likningen har samme fortegn. Har et ledd et annet fortegn enn de to andre, graderes funksjonsskalaen for dette leddet i motsatt retning av de to andre.

Eksempel:

Tegn nomogram for

$$T = 0{,}2\ s^2 + 1{,}5\ r$$

med grensene $1 = s = 3$ og $1 = r = 5$.

Nomogrammets størrelse skal være $B \times H = 100 \times 100$ mm.

Løsning:

Vi bestemmer osss for å plasere s og r på de to ytterskalaene, se fig. 22.

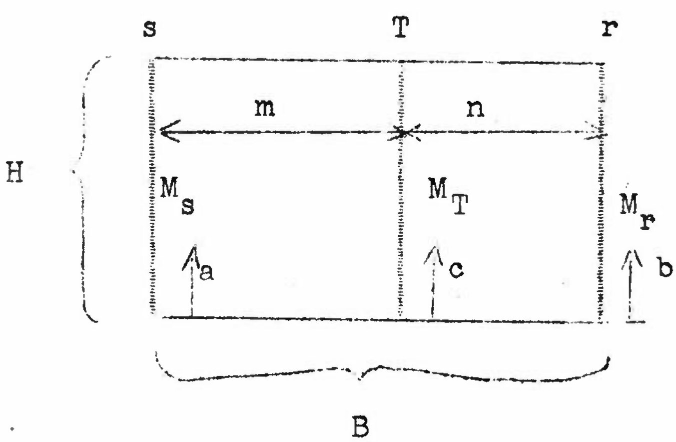


Fig 22.

Først berekner vi modulene M_s og M_r

$$M_s = \frac{H}{f\ (s_n) \div f\ (s_1)} = \frac{100}{1{,}8 \div 0{,}2} = \underline{62{,}5 \text{ mm.}}$$

$$f\ (s_n) = 0{,}2 \cdot 3^2 = 1{,}8$$

$$f\ (s_1) = 0{,}2 \cdot 1^2 = 0{,}2$$

$$M_r = \frac{H}{f\ (r_n) \div f\ (r_1)} = \frac{100}{7{,}5 \div 1{,}5} = \underline{16{,}67 \text{ mm.}}$$

$$f\ (r_n) = 1{,}5 \cdot 50 = 7{,}5$$

$$f\ (r_1) = 1{,}5 \cdot 1 = 1{,}5$$

Deretter lager vi oss tabeller over graderinga av s- og r- skalaene.

s	$f(s) = 0{,}2\ s^2$	$a = M_s\left[f(s) \div f(s_1)\right] = 62{,}5\ \text{mm}\left[f(s) \div 0{,}2\right]$
1	0,2	0
2	0,8	37,5
3	1,8	100

r	$f(r) = 1{,}5\ r$	$b = M_s\left[f(r) \div f(r_1)\right] = 16{,}67\ \text{mm}\left[f(r) \div 1{,}5\right]$
1	1,5	0
2	3,0	25
3	4,5	50
4	6,0	75
5	7,5	100

De berekna avstandsverdiene avsettes deretter i samme retning på de 2 ytterskalaene.

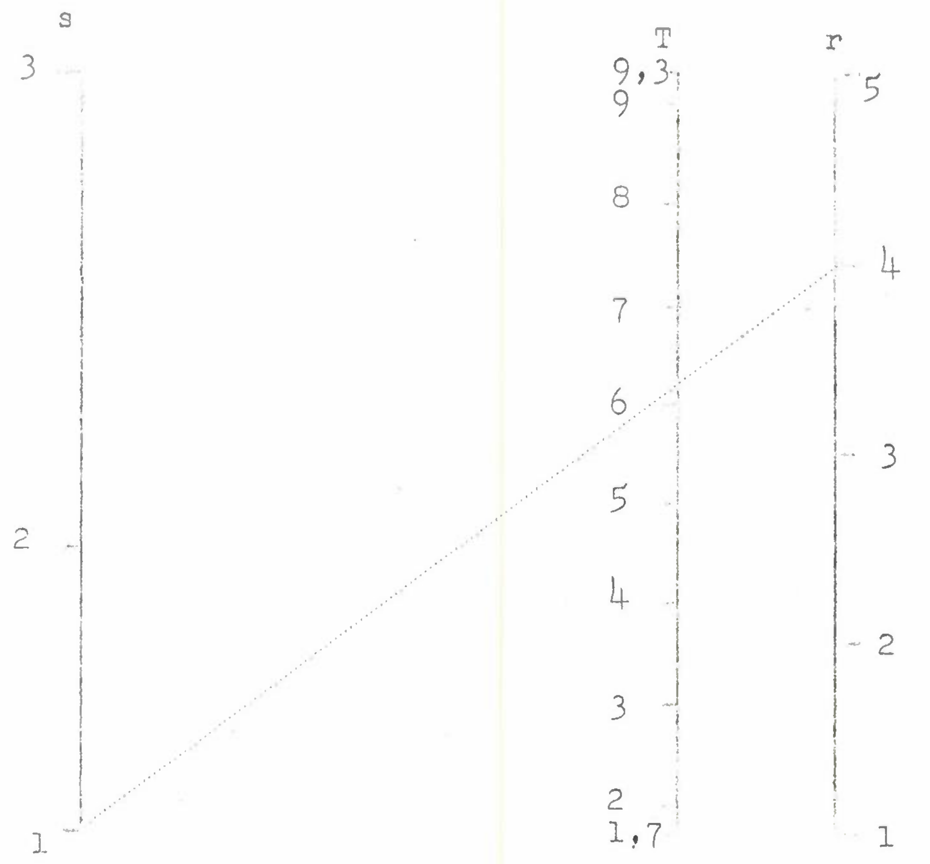


Fig. 23. Nomogram for $T = 0{,}2\ s^2 + 1{,}5\ r$.

Deretter bestemmer vi midtskalaens plasering.

$$\frac{m}{n} = \frac{M_s}{M_r}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{62,5}{16,67}$$

$$):\ m = \frac{100 \cdot 62,5}{(62,5 + 16,67)} = 78,95 \text{ og } n = 21,05$$

Midtskalaens modul blir

$$M_T = \frac{M_s \cdot M_r}{M_s + M_r} = \frac{62,5 \cdot 16,67}{62,5 + 16,67} = \underline{13,16 \text{ mm}} .$$

Hved hjelp av de gitte grensene for s og r berekner vi T_n og T_l.

$$T_n = 0,2 \cdot 3^2 + 1,5 \cdot 5 = 9,3$$

$$T_l = 0,2 \cdot 1^2 + 1,5 \cdot 1 = 1,7$$

Til slutt lager vi en tabell for gradering av T-skalaen.

T	$c = M_T \left[T \div T_l\right] = 13,16 \text{ mm} \left[T \div 1,7\right]$
1,7	0
2	3,9
3	17,1
4	30,3
5	43,4
6	56,6
7	69,7
8	82,9
9	96,1
9,3	100

Det ferdige nomogrammet er vist i fig. 23. Avlesingseksemplet med s = 1 og r = 4 gir T = ca. 6,2. Kontroller at resultatet er riktig ved å sette inn verdiene for s og r i formelen !

- - - -

Som vist foran finner vi midtskalaens plasering ved å berekne forholdet

$$\frac{m}{n} = \frac{M_x}{m_y}$$

Midtskalaens plasering kan vi imidlertid også finne ved grafisk konstruksjon. Vi velger da ut 2 verdipar for x og y som gir samme z-verdi. Midtskalaen må da gå gjennom skjæringspunktet for de to rette linjene som forbinder de verdiparene vi har berekna.

For å vise framgangsmåten ved den grafiske framstillinga skal vi igjen ta for oss formelen $T = 0,2\ s^2 + 1,5\ r$. Som første verdipar tar vi $s = 1$ og $r = 5$. Setter vi disse verdier inn i formelen får vi:

$$T = 0,2 \cdot 1^2 + 1,5 \cdot 5 = 7,7$$

For å få det andre verdiparet bruker vi $s = 3$ og $T = 7,7$. Setter vi disse verdiene inn i formelen får vi:

$$7,7 = 0,2 \cdot 3^2 + 1,5\ r$$
$$):\ r = 3,93$$

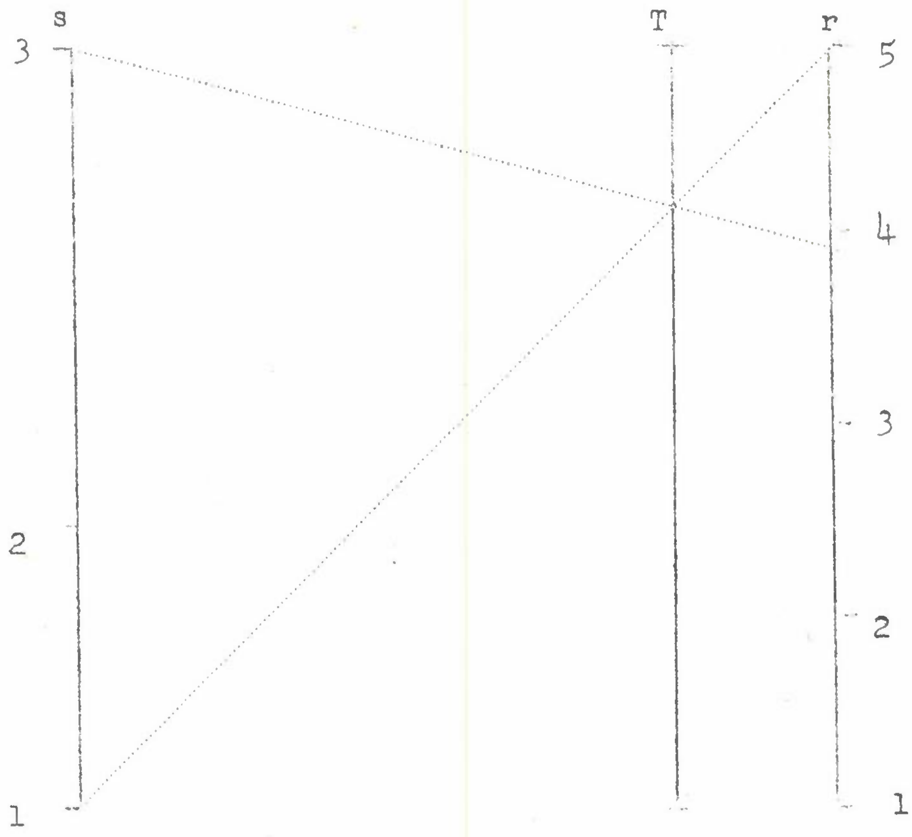


Fig. 24. Grafisk konstruksjon av midtskalaen.

Deretter trekker vi opp de to rette linjene (se fig. 24) og drar opp midtskalaen parallelt med ytterskalaene gjennom skjæringspunktet.

Øvelser:

1. Tegn rettlinjenomogram for $z = 3\ x + \frac{1}{2}\ y^2$.
   Nomogrammets størrelse: B x H = 70 x 100 mm.
   x varierer fra 0 til 10 og y fra 2 til 5.

2. Tegn rettlinjenomogram for $A = \frac{1}{10}\ t\ + 1{,}4\ b$ når t varierer fra 1 til 5 og b fra 0 til 3. $\Delta t = 1$ $\Delta b = 0{,}5$. Nomogrammets størrelse: b x H = 100 x 100 mm.

3. Lag et rettlinjenomogram for $z = \sqrt{x} \div 2\ y^2$ når x varierer fra 1 til 4 og y fra 1 til 3. $\Delta x = 1$ og $\Delta y = 1$. B x H = 50 x 50 mm.

4. Framstill $z = 0{,}5\ x \cdot y^2$ som rettlinjenomogram når x varierer fra 1 til 3 og y fra 2 til 5. $\Delta x = 0{,}5$ og $\Delta y = 1$. B x H = 60 x 10 mm.

2. Resiprokformen.

Rettlinjenomogram i resiprokform består av 3 skalaer som skjærer hverandre i ett punkt (fig.20 b). De gitte variable plaseres som ved summeformen på ytterskalaene og den søkte variable på midtskalaen.

Nøkkelformen for framstilling av rettlinjenomogram i resiprok form er:

$$\text{f 8.} \quad \boxed{\frac{1}{f_1\ (x)} + \frac{1}{f_2\ (y)} = \frac{1}{f_3\ (z)}}$$

Nøkkelformen er som vi ser, egentlig en summeform, men kalles resiprok form på grunn av nøkkelformens spesielle utseende.

Framgangsmåten ved framstilling av nomogrammet (se fig. 25):

a) Bestem vilkårlig vinkelen (u+v) mellom de to ytterskalaene og likeledes lengden på ytterskalaene.

b) Deretter bereknes modulene M_x og M_y på samme måten som vi har lært før, og de to ytterskalaene graderes fra skalaens felles begynnelsespunkt. Likningene for graderinga er som før:

$$\text{x-skalaen: } a = M_x \cdot f_1\ (x)$$
$$\text{y-skalaen: } b = M_y \cdot f_2\ (y) \text{ og for}$$
$$\text{z-skalaen: } c = M_z \cdot f_3\ (z).$$

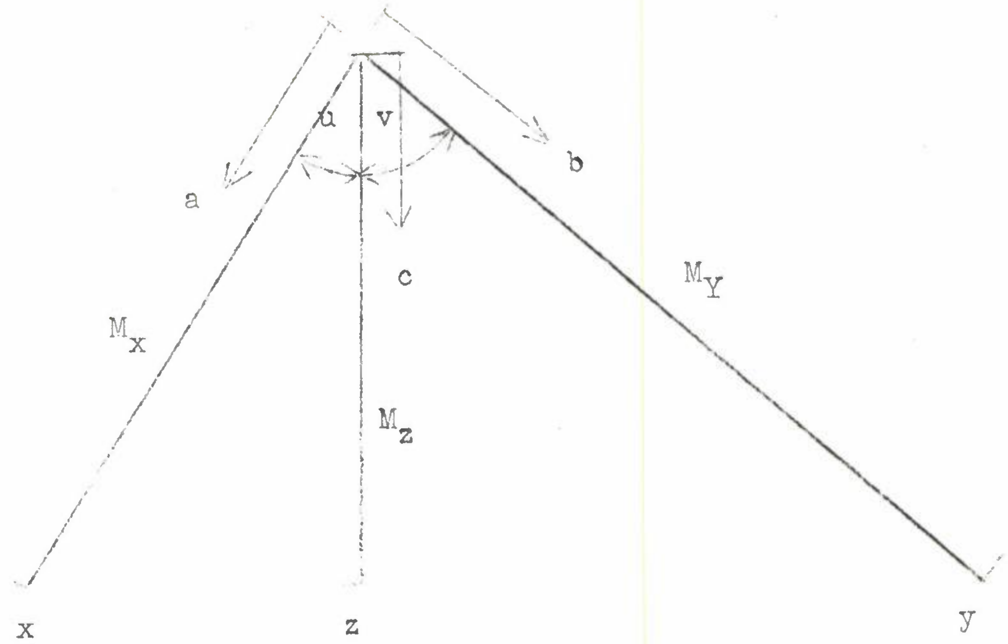


Fig. 25. Prinsippfigur av rettlinjenomogram, resiprok form

c) Midtskalaens retning bestemmes ved å berekne vinklene u og v:

f 9. $\boxed{\frac{\sin v}{\sin u} = \frac{M_x}{M_y}}$

d) Modulen M_z bereknes ved hjelp av formelen:

f 10. $\boxed{M_z = M_x \cdot \cos u + M_y \cdot \cos v}$

e) Til slutt graderes midtskalaen fra samme begynnelsespunkt som de to ytterskalaene. Retningen og modulen for midtskalaen kan imidlertid også bestemmes ved konstruksjon av det såkalte "modultriangel". Vi går da fram slik:

Vi avsetter først vinkelen (u + v) og de to ytterskalaene (fig. 26). På x-skalaen avsetter vi modulene M_x og på forlengelsen av y-skalaen modulen M_y (se fig. 27).

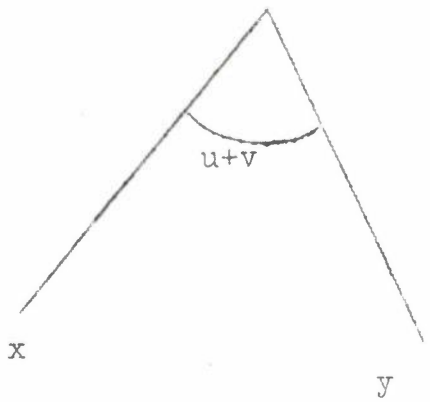


Fig. 26

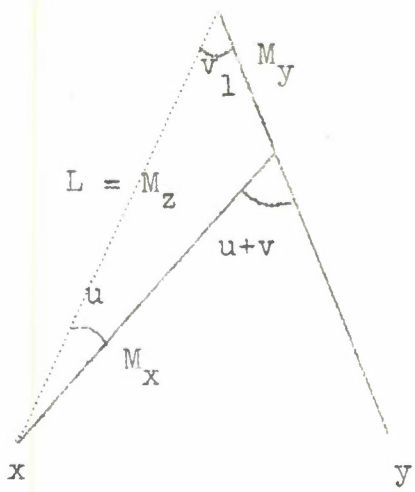


Fig. 27.

Linjen L mellom endepunktene for linjene M_y og M_x trekkes. På denne måten får vi fram "modultriangelen" hvor:

$$\angle u_1 + \angle v_1 = L\ (u + v) \text{ og}$$
$$L = M_z$$

Dermed har vi bestemt både midtskalaens retning og modul, og vi har bare å trekke en linje gjennom skalaens begynnelsespunkt slik at den er paralell med linjen L i "modultriangelen" (se fig. 28).

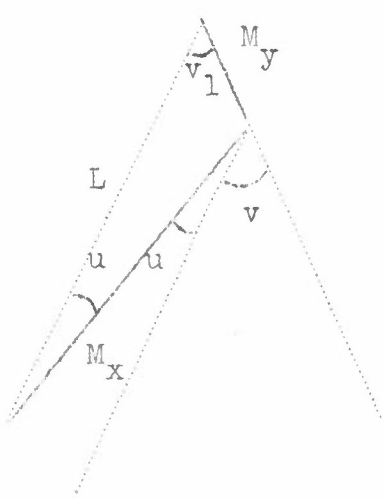


Fig. 28.

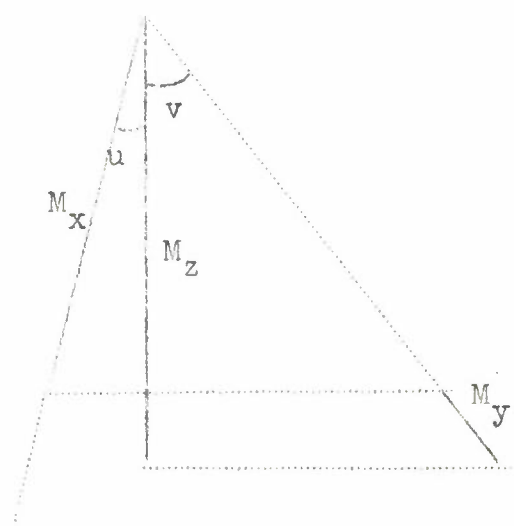


Fig. 29.

Har vi bereknet vinklene u og v ved hjelp av formel f 9, kan modulen M_z konstrueres direkte i følge formelen f 10. Fig. 29 viser konstruksjonen i dette tilfelle.

Eksempel:

Konstruer et rettlinjenomogram for $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ når x og y varierer mellom 0 og 50. Lengde på ytterskalaene = 200 mm. Vinkelen mellom ytterskalaene = 40°.

Løsning:

Først bereknes ytterskalaens modul.

$$M_x = \frac{200}{50 - 0} = \underline{4 \text{ mm}}$$

$$M_y = M_x = \underline{4 \text{ mm}}$$

Derpå berekner vi de nødvendige verdier for gradering av skalaene.

x	$f_1(x) = x$	$a = 4 \text{ mm} \cdot f(x)$
0	0	0
10	10	40
20	20	80
30	30	120
40	40	160
50	50	200

Den samme tabellen gjelder i dette tilfelle også for graderinga av y-skalaen.

For å bestemme midtskalaens retning har vi at $M_x = M_y$ og følgelig er $\angle u = \angle v = 20°$.

Videre får vi:

$M_z = (4 \cdot \cos 20°)\ 2 = 8 \cos 20° = \underline{7{,}52 \text{ mm}}$

Til slutt graderer vi z-skalaen:

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{0} + \frac{1}{0} \quad): z_1 = 0$$

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{50} + \frac{1}{50} \quad): z_n = 25$$

z	$f(z) = Z$	$c = 7{,}52 \text{ mm} \cdot z$
0	0	0
5	5	37,6
10	10	75,2
15	15	112,8
20	20	150,4
25	25	188,0

Det ferdige nomogrammet er vist i fig. 30.

3. Produktformen.

Et rettlinjenomogram i produktform består av 2 paralelle og 1 skråstilt skala (fig. 31). De to paralelle skalaene har motsatte positive retninger. Den skråstilte skalaens begynnelsespunkt går ut fra x-skalaens begynnelsespunkt og gjennom y-skalaens begynnelsespunkt.

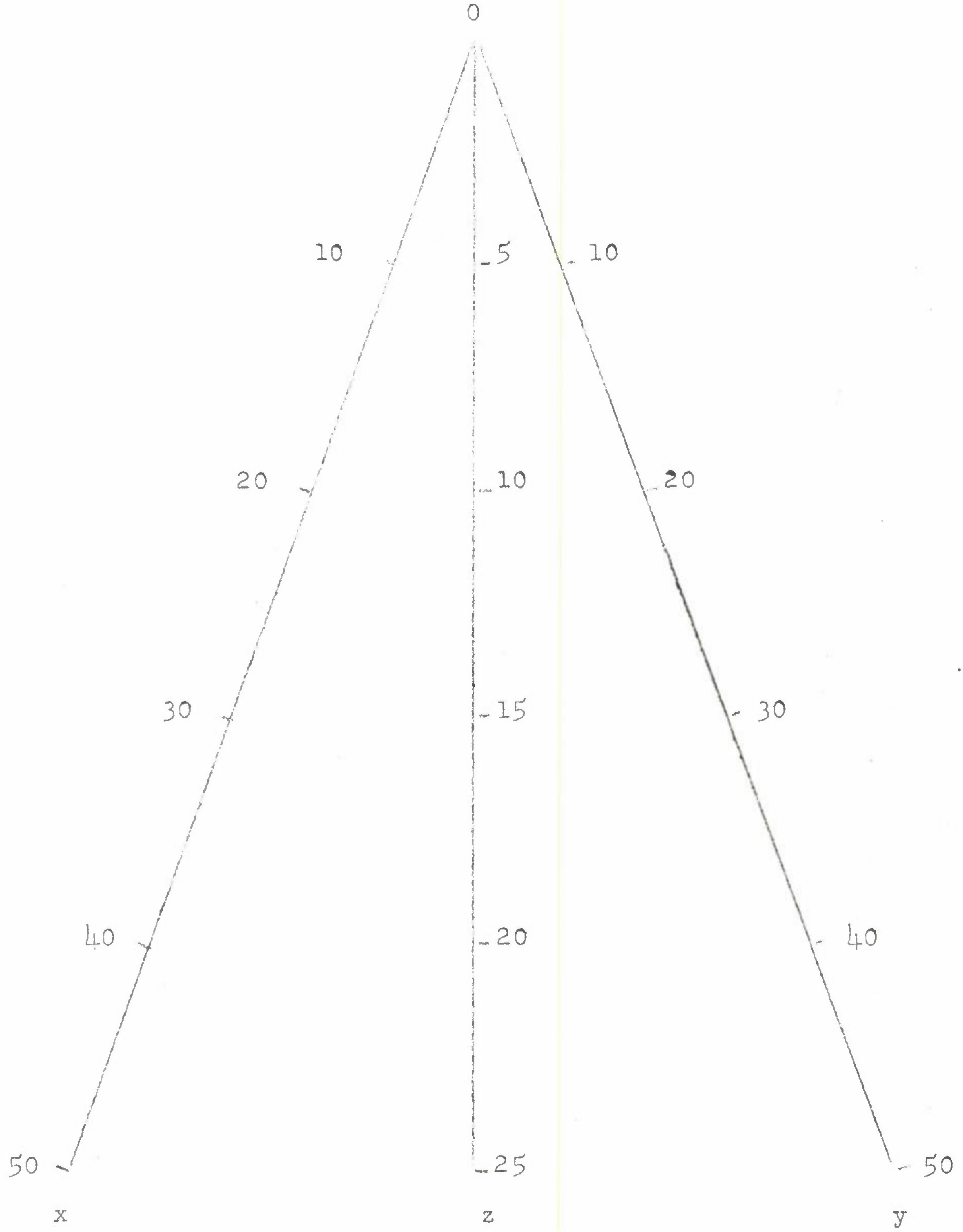


Fig. 30. Nomogram for $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

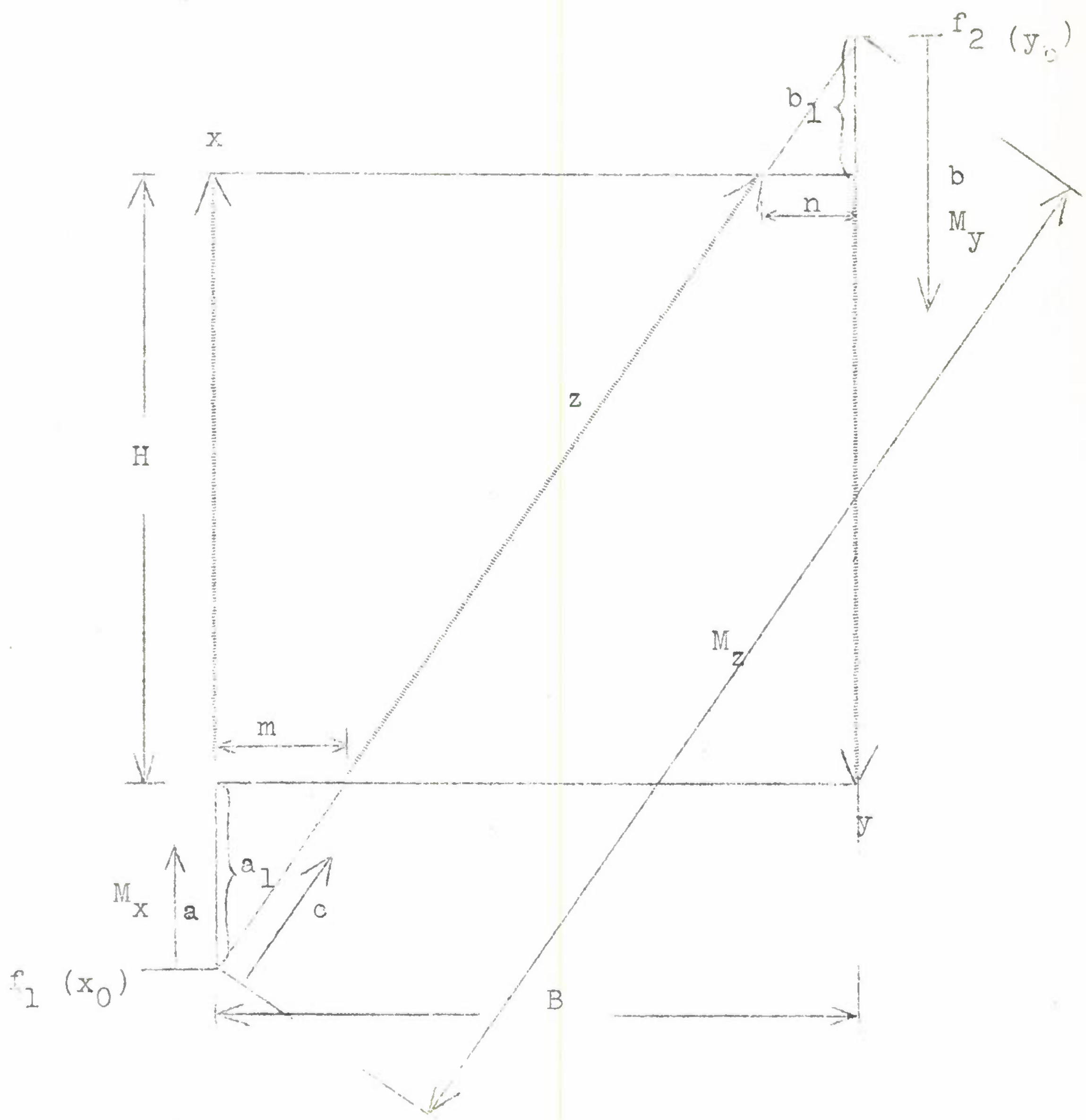


Fig. 31. Prinsippfigur av rettlinjenomogram i produktform.

Som regel plaseres de gitte variable på de parallelle skalaene og den søkte variable på den skråstilte.

I fig. 31 er:

x, y og z	= variabler
M_x og M_y	= a- og b-skalaens moduler
a, b og c	= avstandsverdiene for graderinga
m og n	= avstander som bestemmer den skråstilte skalaens stilling
a_1 og b_1	= avstandsverdien for f_1 (x_1) og f_2 (y_1).

Nøkkelformen for framstilling av rettlinjenomogram i produktform er:

$$\text{f 11.} \quad \boxed{\frac{f_1\,(x)}{f_2\,(y)} = f_3\,(z)}$$

Nomogrammet sies å være av produktform da produktet av de to funksjoner er lik en tredje funksjon.

Framgangsmåten ved konstruksjon av nomogrammet (se fig. 31):

a) Bestem vilkårlig nomogrammets størrelse, d.v.s. B x H.

b) Deretter bereknes modulene M_x og M_y og skalaene for x og y graderes:

$$a = M_x \cdot f_1\,(x)$$

$$b = M_y \cdot f_2\,(y)$$

Pass på at x og y graderes i motsatt retning.

c) Størrelsene m og n bereknes ved hjelp av:

$$\text{f 12.} \quad \boxed{\frac{m}{a_1} = \frac{n}{b_1} = \frac{B}{a_1 + b_1 + H}}$$

Er a_1 og b_n = 0, blir også m og n = 0.

Trekk deretter opp den skråstilte skalaen ved hjelp av de bereknede verdiene for m og n.

d) Modulen for z-skalaen bereknes:

$$\text{f 13.} \quad \boxed{M_z = \sqrt{B^2 + (a_1 + b_1 + H)^2}}$$

e) Til slutt graderes z-skalaen. For graderinga gjelder denne formel:

$$\text{f 14.} \quad \boxed{c = M_z \cdot \frac{f_3\,(z)}{\frac{M_y}{M_x} + f_3\,(z)}}$$

z-skalaen er ifølge formelen en projektiv skala og kan fås ved projeksjon av en skala med funksjonen f_3 (z).

I praksis vil vi vel overføre en likning som stemmer over ens med nøkkelformen f 11 til nøkkelformen f 5 ved å ta logaritmen på begge sider, d.v.s. at nomogrammet kan framstilles i summeform. Summeformen er nemlig enklere og raskere enn produktformen. Men vi har mange tilfeller hvor det ikke er mulig å få brukt summeformen, og i slike tilfeller kommer produktformen i bruk.

Eksempel:

Konstruer et rettlinjenomogram for

$$\frac{\sqrt{x}}{3 + 2y} = z$$

når x varierer fra 1 til 4 og y fra 2 til 5.

a) Vi bestemmer nomogrammets størrelse til : B x H = 60 x 80 mm.

b) Modulene M_x og M_y bereknes

$$M_x = \frac{H}{\sqrt{x_n} \div \sqrt{x_1}} = \frac{80}{\sqrt{4} \div \sqrt{1}} = \underline{80 \text{ mm}}$$

$$M_y = \frac{H}{(3+2y_n) \div (3+2y_1)} = \frac{80}{(3+2 \cdot 5) \div (3+2 \cdot 2)} = \underline{13,3 \text{ mm}}$$

Deretter graderes x- og y-skalaene. For graderinga berekner vi $f_1(x_1)$ og $f_2(y_1)$, og lager de nødvendige tabeller

$$f_1(x_1) = \sqrt{1} = 1$$

$$f_2(y_1) = 3 + 2 \cdot 2 = 7$$

x	$f(x) = \sqrt{x}$	$a = M_x \cdot [f_1(x) \div f_1(x_1)] = 80 \cdot (\sqrt{x} \div 1)$
1	1,000	0,0
2	1,414	33,1
3	1,732	58,7
4	2,000	80,0

y	$f(y) = 3+2y$	$b = M_y \cdot [f(y) \div f_2(y_1)] = 13,3 \cdot (2_y \div 4)$
2	7	0,0
3	9	26,6
4	11	52,3
5	13	80,0

x-skalaen graderes nedenfra og y-skalaen ovenfra.

c) Størrelsene m og n bereknes ved hjelp av formel f 12.

$$a_1 = M_x \cdot f(x_1) = 80 \cdot \sqrt{1} = \underline{80 \text{ mm}}$$

$$b_1 = M_y \cdot f(y_1) = 13,3 \cdot (3+2 \cdot 2) = \underline{93 \text{ mm}}$$

Setter vi disse verdier inn i formel f 12 får vi:

$$\frac{m}{80} = \frac{n}{93} = \frac{60}{80 + 93 + 80} = 0,236$$

Dette gir:

$$m = 18{,}9 \text{ mm og}$$
$$n = 22{,}0 \text{ mm}$$

Vi kan nå trekke opp den skråstilte midtskalaen.

d) Modulen M_z bereknes ved hjelp av formel f 13.

$$M_z = \sqrt{B^2 + (a_1 + b_1 + H)^2}$$
$$M_z = \sqrt{60^2 + (80 + 93 + 80)^2}$$
$$M_z = \underline{260 \text{ mm.}}$$

e) Til slutt lager vi oss en tabell for graderinga av z-skalaen etter at vi først har bereknet z_1 og z_n.

$$z_1 = \frac{\sqrt{1}}{3 + 2 \cdot 5} = 0{,}077$$
$$z_n = \frac{\sqrt{4}}{3 + 2 \cdot 2} = 0{,}286$$

z varierer altså fra 0,077 til 0,286.
For graderinga av midtskalaen gjelder formel f 14:

$$c = M_z \cdot \frac{f(z)}{\frac{M_y}{M_x} + f(z)}$$
$$c = 260 \cdot \frac{z}{\frac{13{,}3}{80} + z}$$
$$c = 260 \cdot \frac{z}{0{,}166 + z}$$

z	f (z) = z	$c = 260 \cdot \left[\frac{z}{0{,}166+z} \div \frac{0{,}077}{0{,}166+0{,}077}\right]$
0,10	0,10	15,3
0,15	0,15	41,1
0,20	0,20	59,6
0,25	0,25	73,6

Det ferdige nomogrammet er vist i fig. 32.

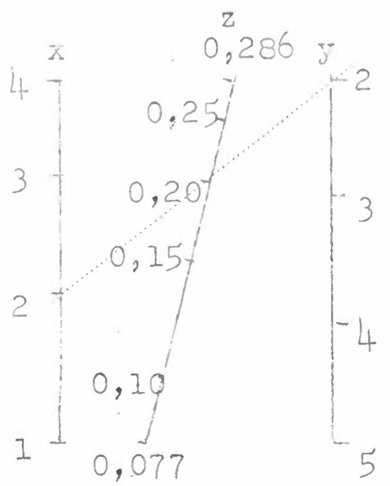


Fig. 32 Nomogram for $z = \dfrac{\sqrt{x}}{3 + 2y}$

Avlesingseksempel:

x = 2 og y = 2 gir
z = 0,202

Øvelser:

1. Lag et rettlinjenomogram for $z = \dfrac{x^2}{4y}$ når x varierer fra 1 til 4 og y fra 1 til 10. $\Delta x = 0,5$ og $\Delta y = 1$
2. Lag et rettlinjenomogram for $z = \dfrac{2x^2 + 10}{2\sqrt{y}}$ når x varierer fra o til 3 og y fra 1 til 4. Δ x = 1 og Δ y= 1. B x H = 100 x 100 mm.

B. Kurvenomogram.

Kurvenomogrammet er en annen metode for framstilling av sammenhengen mellom 3 variable.

Vi har tidligere vist hvordan sammenhengen mellom 2 variable kan framstilles som en kurve i et rettvinklet koordinatsystem. Som regel kan vi også framstille sammenhengen mellom 3 variable i et slikt koordinatsystem. Plaserer vi to av variablene på aksene i koordinatsystemet, vil vi få den tredje variable framstilt som en kurveskare. Vi får nemlig en kurve for hver ny verdi vi velger for den tredje variable. I fig. 33 har vi framstilt funksjonen $z = x \cdot y$,

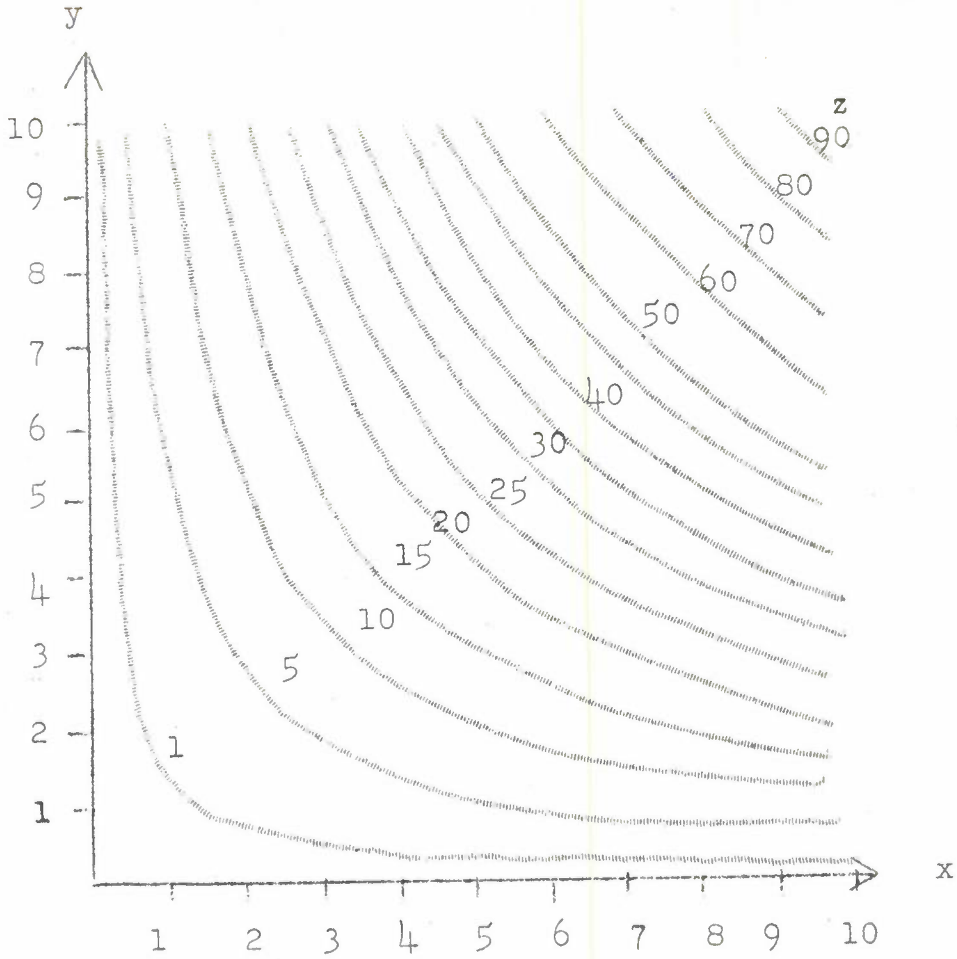
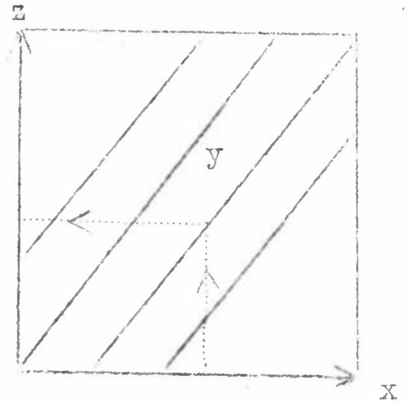


Fig. 33. Nomogram for z = x · y.

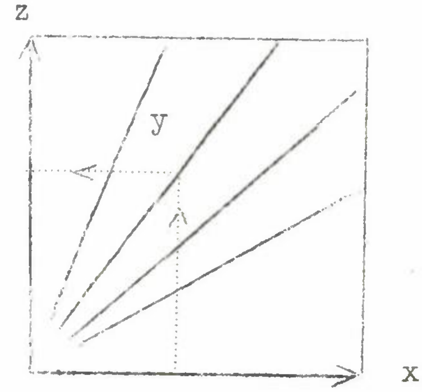
Av figuren ser vi at vi har fått fram z som en rekke krumme kurver. Denne framstillingsmåten krever svært mye arbeid og er derfor uhensiktsmessig. Vi vil derfor så langt det er mulig prøve å få framstilt kurveskaren som rette linjer, da det ikke er nødvendig å berekne mer enn to punkter for å trekke ei rett linje.

Kurvenomogrammer kan vi skille i to hovedtyper, nemlig:

1. Summeform (fig. 34 a).
2. Produktform (fig. 34 b).



a. summeform



b. Produktform.

Fig. 34. Kurvenomogrammer.

1. Summeformen.

Summeformen består av to akser som står vinkelrett på hverandre og en kurveskare med skråstilte parallelle linjer. For å få en gjennomgående avlesing ordner vi oss slik at en av de gitte variablene framstilles som kurveskaren (fig. 34 a).

Nøkkelformen for framstilling av summeformen er:

f 15. $\boxed{f_1\ (x) + f_2\ (y) = f_3\ (z)}$

Også funksjonen

$$f_1\ (x) \cdot f_2\ (y) = f_3\ (z)$$

kan overføres til summeform ved å ta logaritmen på begge sider. Vi får da

$$\log f_1(x) + \log f_2(y) = \log f_3\ (z).$$

Hvis vi i formelen f 15 setter inn bestemte verdier for $f_2\ (y)$, får vi for hver verdi av y ei rett linje. Setter vi

$$k.x = f_1(x)$$
$$b = f_2(y)$$
$$z = f_3(z)$$

og setter disse verdiene inn i formel f 15, får vi:

$$z = kx + b$$

Denne likningen er en 1. grads likning. Sammenhengen mellom x og z gir altså for hver b-verdi ei rett linje i nomogrammet. Linjens helling er bestemt av vinkelkoeffisienten k. Den er uavhengig av størrelsen b, slik at b blir framstilt som parallelle linjer.

Framgangsmåten ved framstilling av nomogrammet (fig. 35):

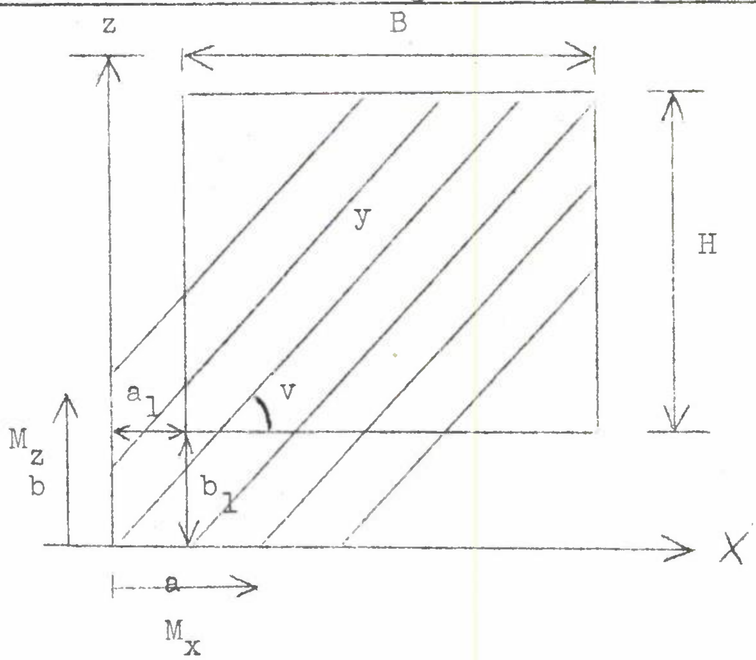


Fig. 35. Prinsippfigur av kurvenomogram, summeform.

I fig. 35 er:

x, y og z = variabler.
M_x og M_z = moduler.
a og b = avstandsverdiene for graderinga.
v = y-linjens hellingsvinkel.
B = nomogrammets bredde,
H = " høgde.

a) Bestem først vilkårlig nomogrammets størrelse, d.v.s. B x H.

b) Modulene M_x og M_z bereknes, og skalaene x og z graderes ved hjelp av:

$$a = M_x \cdot f_1 (x)$$

$$b = M_z \cdot f_3 (z)$$

c) Bestem retningen, altså vinkelen v, for y-linjene. For dette gjelder formelen:

f 16. $\boxed{tg\ v = k = \frac{M_z}{M_x}}$

I alminnelighet bruker vi imidlertid ikke denne formelen. Vi berekner i stedet to verdipar for x og z som gir samme y-verdi. På den måten får vi ei rett linje, og har dermed bestemt retningen for samtlige y-linjer.

d) Tegn deretter inn så mange y-linjer at nomogrammet gir den nødvendige nøyaktighet. Dette gjør vi enklest ved at vi for hver y-verdi berekner 1 verdipar for x og z som prikkes inn i nomogrammet. Deretter trekker vi linjer gjennom punktene slik at de blir parallelle med den linjen vi fant i punkt c.

Eksempel:

Konstruer et kurvenomogram for $K = 1{,}3\ A^2 + 0{,}9\ B$ når A varierer fra 1 til 10 og B fra 0 til 50. $\Delta A = 1$ og $\Delta B = 10$.

a) Vi bestemmer at nomogrammets størrelse skal være: B x H = 100 x 100 mm. Videre bestemmer vi oss for at B skal framstilles som linjeskaren.

b) Modulene M_A og M_K bereknes.

$$M_A = \frac{B}{f(A_n) \div f(A_1)} = \frac{100}{130 \div 1{,}3} = \underline{0{,}777\ \text{mm.}}$$

$$f(A_n) = 1{,}3 \cdot 10^2 = 130$$

$$f(A_1) = 1{,}3 \cdot 1^2 = 1{,}3$$

$$M_K = \frac{H}{K_n \div K_1} = \frac{100}{175 \div 1{,}3} = \underline{0{,}5757\ \text{mm}}$$

$$K_n = 130 + 0{,}9 \cdot 50 = 175$$

$$K_1 = 1{,}3 + 0{,}9 \cdot 0 = 1{,}3$$

Deretter lager vi oss de nødvendige tabeller for graderinga av x- og z-skalaene.

A	$f(A) = 1{,}3 \cdot A^2$	$a = 0{,}777\ \text{mm} \cdot (f(A) \div 1{,}3)$
1	1,3	0
2	5,2	3,0
3	11,7	8,1
4	20,8	15,2
5	32,5	24,2
6	46,8	34,4
7	63,7	48,5
8	83,2	63,6
9	105,3	80,1
10	130,0	100

K	f_3 (K) = K	b = 0,5757 mm · (K ÷ 1,3)
20	20	10,8
40	40	22,3
60	60	33,8
80	80	45,3
100	100	56,8
120	120	68,3
140	140	79,8
160	160	91,4

Når avstandsverdiene a og b er bereknet, graderer vi skalaene x og z (se fig. 36).

c) Nå er turen kommet til å bestemme retningen på B-linjene. Vi berekner 2 verdipar for A og K som gir samme B-verdi. Setter vi:

A = 1 og B = 0 får vi K = 1,3, og
A = 10 og B = 0 " " K = 130

Vi kan nå avsette disse punktene i nomogrammet og trekke den rette linjen for B = 0.

d) Deretter berekner vi 1 verdipar for A og K for de øvrige B-verdier.

B	A	$K = 1,3\ A^2 + 0,9\ B$	b = 0,5757 mm (K ÷ 1,3)
10	1	10,3	5,2
20	1	19,3	10,4
30	1	28,3	15,5
40	1	37,3	20,7
50	1	46,3	25,9

Det ferdige nomogrammet er vist i fig. 36.

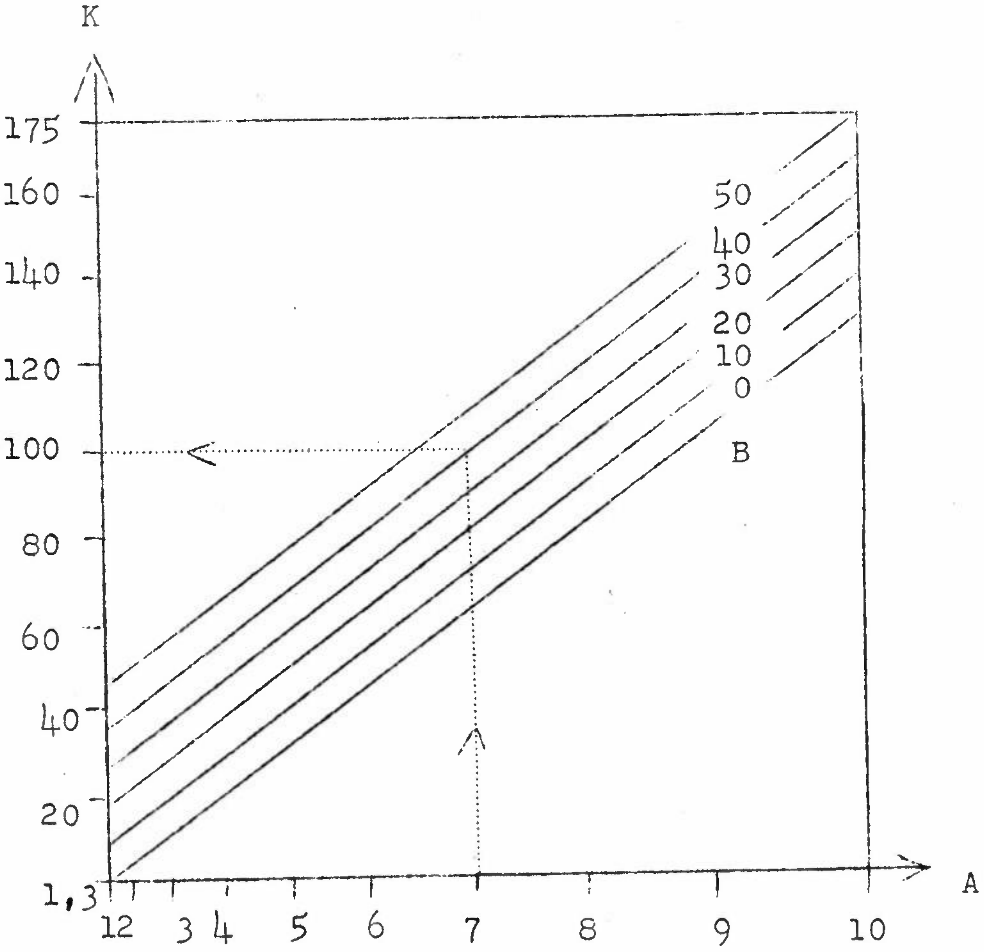


Fig 36. Nomogram for $K = 1,3\ A^2 + 0,9\ B$.

Avlesingseksempel:

A = 7 og B = 40 gir K = ca. 100.

__Øvelser:__

1. Konstruer et kurvenomogram for $T = \sqrt{s} \div (2a + 3)$ når s varierer fra 1 til 5 og a fra 0 - 4. B x H = 100 x 100 mm. $\Delta s = 1$ og $\Delta a = 1$.
2. Konstruer et kurvenomogram for $z = 2\ x^3 + \frac{10}{y}$ når x varierer fra 0 til 3 og y fra 1 til 4. Bruk M_x = 1,0 mm og M_z = 1,0 mm.

2. Produktformen.

Produktformen kjennetegnes av at linjeskaren stråler vifteformig ut fra origo i et rettvinklet koordinatsystem (fig. 34 b). For å få en gjennomgående avlesing ordner vi oss også her slik at en av de gitte variablene framstilles som kurveskaren.

Nøkkelformen for framstilling av produktformen er:

f 17. $\boxed{f_1\ (x) \cdot f_2\ (y) = f_3\ (z)}$

Også potensfunksjoner kan framstilles i kurvenomogrammer av produktform ved å ta logaritmen på begge sider. Funksjonen

$$f_1\ (x^y) = f_3\ (z)$$

gir nøkkelformen f 17 ved å ta logaritmen på begge sider.
Hvis vi i formel f 17 setter

$$x = f_1\ (x)$$
$$k = f_2\ (y)$$
$$z = f_3\ (z)$$

får vi $z = k \cdot x$. For hver verdi av x får vi altså ei rett linje som går gjennom origo i et rettvinklet koordinatsystem. Da vinkelkoeffisienten k også er en variabel, vil de forskjellige y-linjer ha forskjellig hellingsvinkel.

<u>Framgangsmåten ved framstilling av nomogrammet (fig. 37):</u>

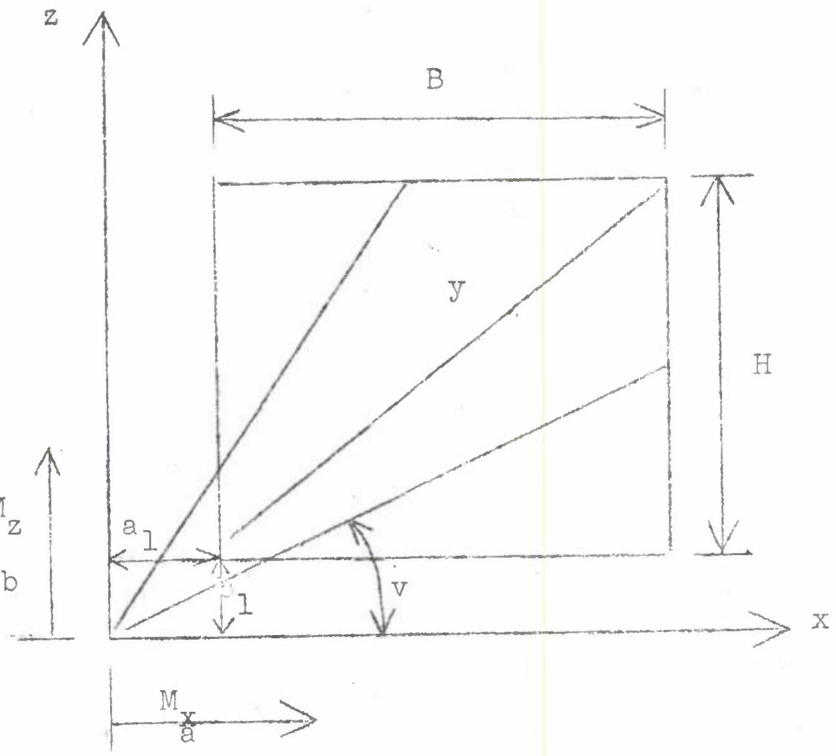


Fig. 37. Prinsippfigur av kurvenomogram, produktform. (Betegnelsene har samme betydning som i fig. 35).

a) Nomogrammets størrelse, d.v.s. H x B bestemmes vilkårlig. Likningen må om nødvendig omskrives så den får samme utseende som nøkkelformen.

b) Modulene M_x og M_z bereknes, og deretter graderes x- og z- skalaene ved hjelp av:

$$a = M_x \cdot f_1\ (x)$$

$$b = M_z \cdot f_3\ (z)$$

c) Retningen på y-linjene bereknes. Til dette kan vi bruke formelen:

$$\text{f 18.}\quad \boxed{tg\ v = \frac{M_z}{M_x} \cdot f_2\ (y)}$$

Det er imidlertid enklere å berekne 2 verdipar for x og z for de forskjellige y-verdier.

<u>Eksempel:</u>

Konstruer et kurvenomogram i produktform for $T = \frac{19,5}{x} \cdot \frac{1}{}$ når x varierer fra 0,55 til 0,75 og fra 0,28 til 0,40. $\triangle x = 0,05$ og $\triangle y = 0,02$.

a) Vi bestemmer at nomogrammets størrelse skal være: B x H = 100 x 100 mm. Videre bestemmer vi oss for at y skal framstilles som linjeskaren.

b) Modulene M_x og M_T bereknes.

$$M_x = \frac{B}{f\ (x_n) \div f_1\ (x_1)} = \frac{100}{35,45 \div 26,00} = \underline{10,58}$$

$$f\ (x_n) = \frac{19,5}{0,55} = 35,45$$

$$f\ (x_1) = \frac{19,5}{0,75} = 26,00$$

$$M_T = \frac{H}{T_n \div T_1} = \frac{100}{126,6 \div 65} = \underline{1,623}$$

$$T_n = 35,45 \cdot \frac{1}{0,28} = 126,6$$

$$T_1 = 26,0 \cdot \frac{1}{0,4} = 65,0$$

Til å berekne avstandsverdiene for graderinga lager vi oss tabeller

x	$f(x)=\frac{19,5}{x}$	a = 10,58mm. (f(x) -26,0
0,55	35,45	100,0
0,60	32,50	68,7
0,65	30,00	42,3
0,70	27,86	19,6
0,75	26,00	0

T	b = 1,623 mm. (T - 65)
65	0
70	8,1
75	16,2
80	24,3
85	32,4
90	40,5
95	48,7
100	56,8
105	64,9
110	73,0
115	81,2
120	89,3
125	97,4

c) Til slutt berekner vi 2 punkter for hver y - linje.

y	x	$T = \frac{19,5}{x} \cdot \frac{1}{y}$	b = 1,623.(T - 65,00)
0,28	0,55	126,60	100,0
0,28	0,75	92,86	45,2
0,30	0,55	118,17	86,2
0,30	0,75	86,67	35,1
0,32	0,55	110,78	74,3
0,32	0,75	81,25	26,3
0,34	0,55	104,26	63,7
0,34	0,75	76,47	18,6
0,36	0,55	98,47	54,3
0,36	0,75	72,22	11,7
0,38	0,55	93,29	45,9
0,38	0,75	68,42	5,5
0,40	0,55	88,63	38,3
0,40	0,75	65,00	0

Det ferdige nomogrammet er vist i fig. 38.

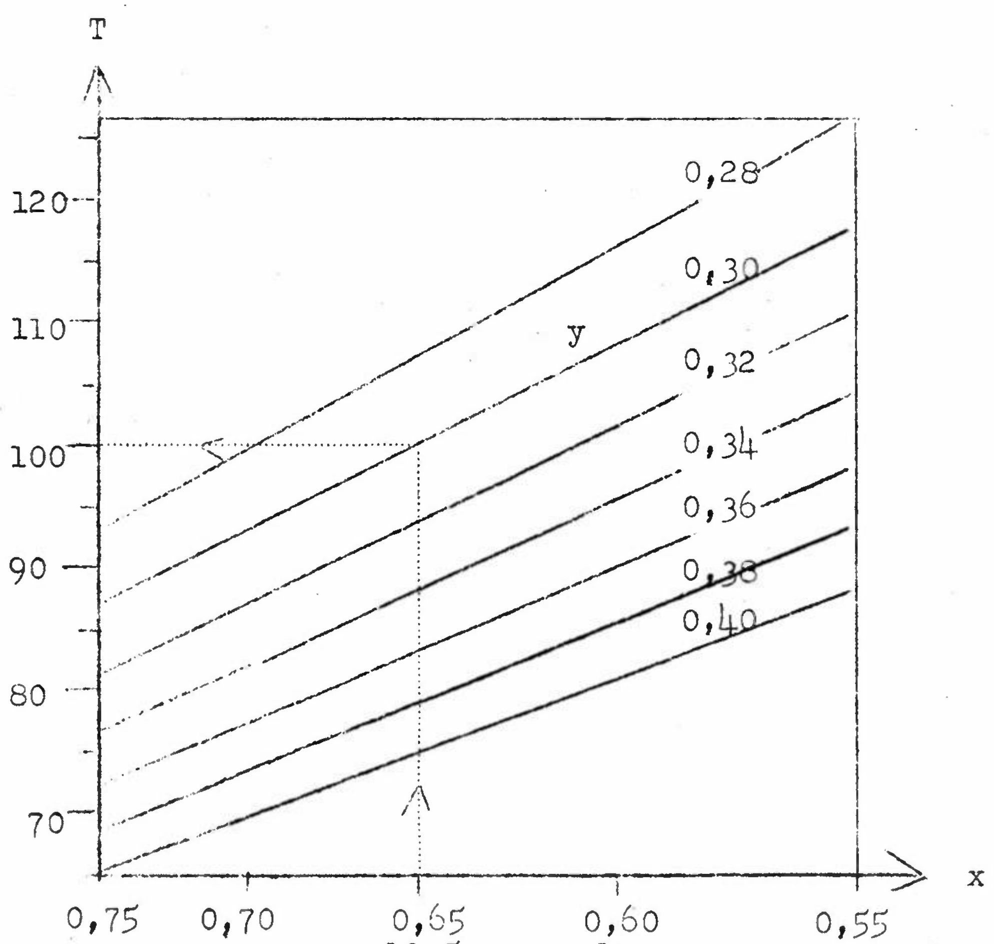


Fig. 38. Nomogram for $T = \frac{19,5}{x} \cdot \frac{1}{y.}$

Øvelser:

1. Konstruer nomogrammet for $z = (x^2 + 2).\ 4y$ når x varierer fra 1 til 4 og fra 0 til 5. $x = 0,5$ og $y = 1$. B x H = 60 x 60 mm.

2. konstruer nomogrammet for $\cancel{z} = \frac{3x}{y + 10}$ når x varierer fra 5 til 10 og y fra 0 til 3. Bx H = 100 x 100 mm.

IV: FRAMSTILLING AV SAMMENHENGEN MELLOM MER EN 3 VARIABLE:

Nomogrammer for funksjoner med mer enn 3 variable er vanligvis satt sammen av 2 eller flere av de nomogramtyper som vi har behandlet foran. Vi snakker derfor om sammensatte nomogrammer og delnomogrammer. Framgangsmåten ved framstilling av sammensatte nomogrammer er

1). at vi deler opp den gitte funksjonen i så mange delfunksjoner at hver enkelt delfunksjon bare innholder 3 variable og

2). at de enkelte delnomogrammer bindes sammen ved hjelp av hjelpevariabler. Sammenbindinga blir som regel gjort ved at skalaen for hjelpevariablen brukes som fellesskala for to delnomogrammer.

Både rettlinjenomogrammer og kurvenomogrammer kan framstilles som sammensatte nomogrammer. Se fig. 39 og 40.

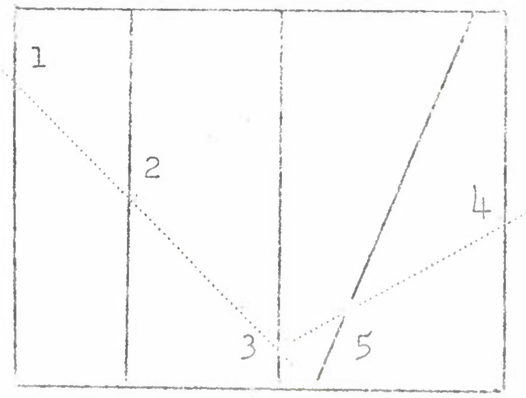


Fig. 39. Sammensatt rettlinjenomogram.

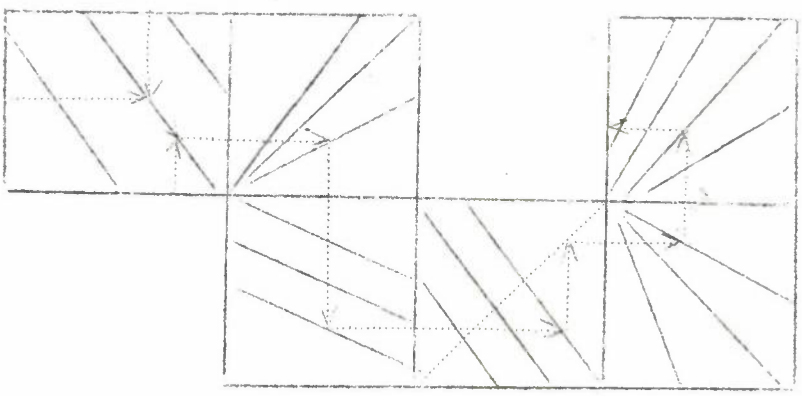


Fig. 40. Sammensatt kurvenomogram.

A. Sammensatt rettlinjenomogram (tapplinjenomogram).

Sammenhengen mellom 4 variable kan f.eks. være gitt ved likningen $f_1(x) + f_2(y) + f_3(w) = f_4(z)$.
Ved å innføre en hjelpevariabel T kan vi omdanne denne likninga til

f 19. $\boxed{f_1(x) + f_2(y) = T}$

f 20. $\boxed{T + f_3(w) = f_4(z)}$

Begge disse likningene innholder 3 variable og kan fra̸stilles som rettlinjenomogrammer i summeform. Vi må bare sørge for at T-skalaen kan brukes som felles hjelpe-skala. Det oppnår vi ved å bruke samme modul for T-skalaen i begge delnomogrammene. De to delnomogrammene kan da legges over hverandre slik at T-skalaene faller sammen. T-skalaen kan enten plaseres som midtskala i det første delnomogrammet (fig.41) eller som grenselinje mellom de to delnomogrammene (fig.42).

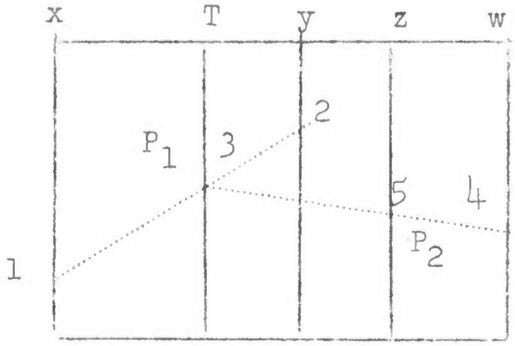


Fig.41.

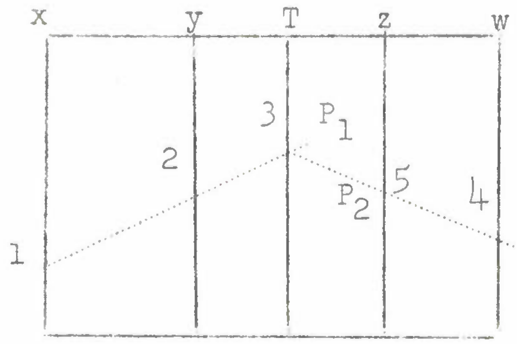


Fig.42.

Det kan i mange tillfelle være en fordel å plassere T-skalaen som grenselinje mellom delnomogrammene. I formelen f 19 er T- skalaen en midtskala. Ønsker vi den imidlertid som grenselinje, må formlen skrives om slik at T-skalaen blir en ytter-skala. Vi får da:

$$f_1(x) - T = -f_2(y)$$

Nå har vi fått plasert T-skalaen som ytterskala i begge delnomogrammene. Men som vi ser, har ikke T samme fortegn i begge likningene. Vi må derfor forandre fortegnene slik at T får samme fortegn i begge likningene. Når vi vil bruke T-skalaen som grenselinje, får vi derfor f 21. $\underline{\overline{T - f_1(x) = f_2(y)}}$

f 22. $\underline{\overline{T + f_3(w) = f_4(z)}}$

Vi har foran behandlet framstillinga av sammensatte rettlinjenomogrammer i summeform. Vi kan imedlertid også lage sammensatte rettlinjenomogrammer hvor summeformen og pruduktformen kombineres. Framgangsmåten blir prinsipielt den samme.

Eksempel:

Konstruer et nomogram for

$V = (1,5\ A.s + 0,8B)\ \frac{10}{u}$ når A varierer fra 0 til 10, s fra 1 til 2, B fra 0 til 20 og u fra 0,5 til 1,0.

$\Delta A = 1, \Delta s = 0,1, \Delta B = 1$ og $\Delta u = 0,1$.

Delnomogrammenes størrelse skal være: H x B = 100 X 80 mm.

Vi innfører de nødvendige hjelpevariabler og får disse likninger for framstilling av de enkelte delnomogrammer:

1). $T_1 = 1,5\ A.s$

2). $T_2 = T_1 + 0,8\ B$

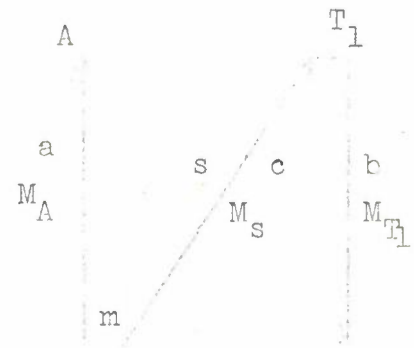
3). $V = T_2 \cdot \frac{10}{u}$

T_1 og T_2 ønsker vi å bruke som grenselinjer mellom delnomogrammene. Vi tar så for oss framstillinga av de enkelte delnomogrammer.

1). $\underline{T_1 = 1,5\ A\ .\ s}$

For å få nøkkelformen f 11(se side 33) omskriver vi likningen til:

$\frac{1,5\ A}{T_1} = \frac{1}{s}$



Likningene for graderinga av skalaene er:

$a = M_a\ .\ 1,5\ A$

$b = M_{T_1} .\ T_1$

$$c = M_s\ .\ \frac{\frac{1}{s}}{\frac{M_{T_1}}{M_a} + \frac{1}{s}}$$

Modulene M_a og M_{T_1} bereknes:

$$M_A = \frac{H}{f(A_n) - f(A_1)} = \frac{100}{15-0} = \underline{6,67}$$

$$f\,(A_n) = 1{,}5 \,.\, 10 = 15$$
$$f\,(A_1) = 1{,}5 \,.\, 0 = 0$$

$$M_{T_1} = \frac{H}{T_{1_n} - T_{1_1}} = \frac{100}{30 - 0} = \underline{3{,}33}$$

$$T_{1_n} = 15 \,.\, 2 = 30$$

$$T_{1_1} = 0 \,.\, 1 = 0$$

For berekninga av avstandsverdiene for A-skalaen lager vi oss en tabell (skalaen for hjelpevariabler graderer vi ikke).

A	f(A)	a = 6,67 mm.f(A)
0	0	0
1	1,5	10
2	3,0	20
3	4,5	30
4	6,0	40
5	7,5	50
6	9,0	60
7	10,5	70
8	12,0	80
9	13,5	90
10	15,0	100

Deretter plasserer vi s-skalaen i nomogrammet ved å berekne størrelsene m og n(formel f 12 på side 33.).

$$\frac{m}{a_1} = \frac{n}{b_1} = \frac{B}{a_1 + b_1 + H}$$

$$a_1 = M_A \cdot f(A_1) = 6{,}67 \,.\, 0 = 0$$

$$b_1 = M_{T_1} \cdot T_{1_1} = 3{,}33 \,.0 = 0$$

Da a_1 og b_1 = 0, blir også m og n = 0.

Modulen M_s berekhes og s-skalaen graderes:

$$M_s = \sqrt{B^2 + (a_1 + b_1 + H)^2}$$

$$M_s = 80^2 + 100^2$$

$$M_s = \underline{128 \text{ mm}}.$$

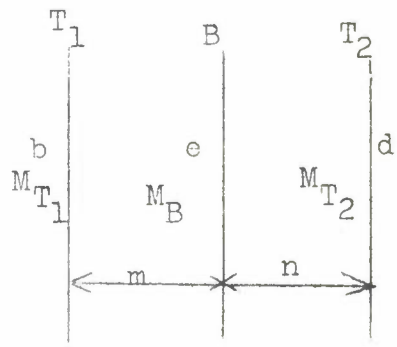
$$c = M_s \frac{\frac{1}{s}}{\frac{M_{T_1}}{M_A}} = 128 \,. \underline{\frac{\frac{1}{s}}{0{,}5 + \frac{1}{s}}}$$

$$f(s_1) = \frac{f(A_1)}{T_{1_n}} = \underline{0} \quad \text{og}$$

følglig er $c_1 = 128 \cdot \frac{0}{0,5 + 0} = \underline{128 \cdot 0 \text{ mm.}}$

s	f(s)	$c = 128\text{mm} \cdot \frac{\frac{1}{s}}{0,5 + \frac{1}{s}}$
1,0	1,000	85,2
1,1	0,909	82,5
1,2	o,833	80,0
1,3	0,770	77,5
1,4	0,714	75,2
1,5	0,666	73,0
1,6	0,625	71,1
1,7	0,588	69,1
1,8	0,555	67,3
1,9	0,526	65,6
2,0	0,500	64,0

Delnomogrammet for $T_1 = 1,5$ A . s er nå bereknet og kan tegnes opp.



2). $\underline{T_2 = T_1 + 0,8 \text{ B}}$

Vi ønsker å plasere B på midtskalaen. Konstruksjonsformen blir da:

$- T_1 + T_2 = 0,8 \text{ B}$

Vi må huske på at T_1-skalaen i det første delnomogrammet har graderingsretning ovenfra og nedover. Den må ha samme graderingsretning i delnomogram 2, og får derfor fortegnet - .

T_2 - og B- skalaene skal som vi ser, graderes nedenfra og oppover.

$$d = M_{T_2} \cdot T_2$$

$$e = M_B \cdot 0,8 \text{ B}$$

$$M_{T_2} = \frac{100}{T_{2_n} - T_{2_1}} = \frac{100}{46} = \underline{2,174 \text{ mm.}}$$

$$T_{2_n} = 30 + 0,8 \cdot 20 = 16$$

$$T_{2_1} = 0 + 0,8 \cdot 0 = 0$$

$$\frac{m}{n} = \frac{M_{T_1}}{M_{T_2}} = \frac{3,33}{2,174}$$

$$) \text{ m} = \frac{3,33 \cdot 80}{(3,33 + 2,174)} = \underline{48,4 \text{ mm}} \qquad \text{og}$$

$n = 80 - 48,4 = \underline{31,6 \text{ mm.}}$

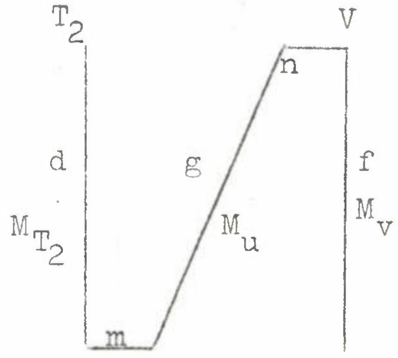
$$M_B = \frac{M_{T_1} \cdot M_{T_2}}{M_{T_1} + M_{T_2}} = \frac{3,33 \cdot 2,174}{3,33 \cdot 2,174} = \underline{1,316 \text{ mm.}}$$

$f(B_1) = - T_{1_n} + T_{2_1} = - 30 + 0 = \underline{- 30}$

B	f(B)	e= 1,316 mm.(f(B) + 30)
0	0	39,5
1	o,8	40,5
2	1,6	41,6
3	2,4	42,6
4	3,2	43,7
5	4,0	44,7
6	4,8	45,8
7	5,6	46,8
8	6,4	47,9
9	7,2	48,9
10	8,0	50,0
11	8,8	51,0
12	9,6	52,1
13	10,4	53,1
14	11,2	54,2
15	12,0	55,2
16	12,8	56,3
17	13,6	57,3
18	14,4	58,4
19	15,2	59,4
20	16,0	60,5

3). $\underline{V = T_2 \cdot \frac{10}{u}}$

Vi ønsker å plasere u på midtskalaen. Nøkkelformen for konstruksjonen blir da



$$\frac{T_2}{V} = \frac{1}{10} u.$$

$$f = M_V \cdot V$$

$$g = M_u \cdot \frac{0,1 u}{\frac{M_V}{M_{T_2}} + 0,1 u}$$

Modulen M_V bereknes, og V-skalaen graderes.

$$M_V = \frac{H}{V_n - V_1} = \frac{100}{900} = \underline{0,109}$$

$$V_n = 46 \cdot \frac{10}{0,5} = 920$$
$$V_1 = 0 \cdot \frac{10}{1} = 0$$

V	f = 0,109 mm . V
0	0
100	10,9
200	21,8
300	32,7
400	43,6
500	54,5
600	65,4
700	76,3
800	87,2
900	98,1

Midtskalaens plasering og modul bereknes og skalaen graderes.

$$\frac{m}{d_1} = \frac{n}{f_1} = \frac{B}{d_1 + f_1 + H}$$

$$d_1 = 2,174 \cdot 0 = 0$$
$$f_1 = 0,109 \cdot 0 = 0$$

Da d_1 og $f_1 = 0$, blir også m og n = 0.

$$M_u = \sqrt{B^2 + (d_1 + f_1 + H)^2}$$
$$M_u = \sqrt{80^2 + 100^2}$$
$$M_u = \underline{128 \text{ mm.}}$$

$$g = 128 \cdot \frac{0,1\,u}{\frac{M_V}{M_{T_2}} + 0,1\,u} = 128 \cdot \frac{0,1\,u}{0,05 + 0,1\,u}$$

$$f(u_1) = \frac{T_{2_1}}{V_n} = \frac{0}{920} \quad \frac{0}{}$$ og følgelig er

$$g_1 = 128 \cdot \frac{0}{0,05 + 0} = \underline{\cancel{128} \cdot \cancel{0} \text{ mm.}}$$

u	f(u)	$g = 128 \text{ mm} \cdot \frac{0,1\,u}{0,05 + 0,1\,u}$
0,5	0,05	64,0
0,6	0,06	69,8
0,7	0,07	74,6
0,8	0,08	78,7
0,9	0,09	82,3
1,0	0,10	85,2

Detferdige nomogrammet er vist i fig. 43.
Avlesningseksempel: A = 9 , s = 1,0 ,B = 20 og u = 0,5 gir V = 590.

Øvelser:

1). Konstruer et tapplinjenomogram for

$$x^2 + 5\,y \cdot 0{,}5\,w = z$$

når x varierer fra 1 til 4, y fra 2 til 5 og w fra 1 til 10. Del-nomogrammenes størrelse: B x H = 40 x 60 mm.

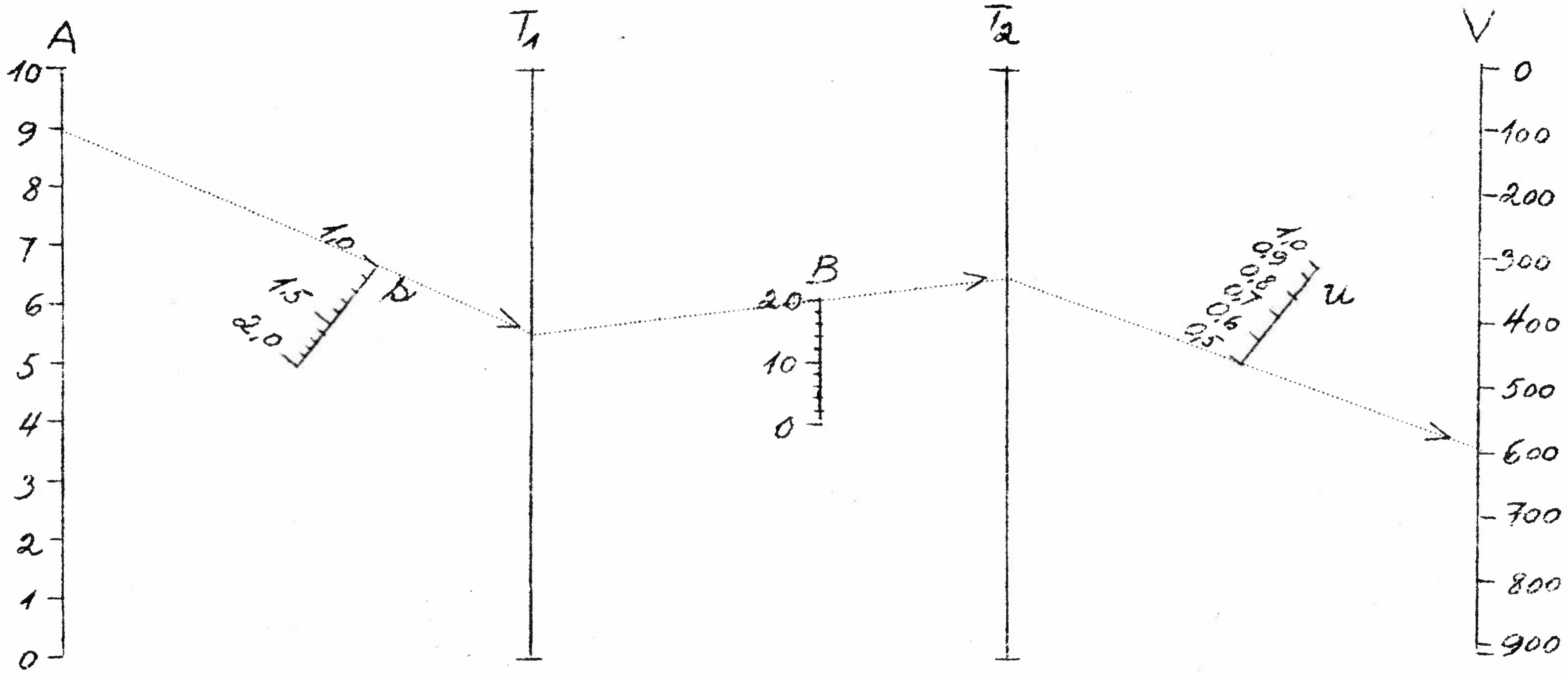


Fig . 43. Nomogram for funksjonen $V = (1{,}5\ A\ .s + 0{,}8\ B)\frac{10}{u.}$

B. Sammensatt kurvenomogram.

Prinsippet for framstilling av sammensatte kurvenomogrammer er det samme som for frammstilling av sammensatte rettlinjenomogrammer. Har vi f. eks. en likning med 5 variable

$$f_1(x) + f_2(y) + f_3(v) \cdot f_4(w) = f_5(z),$$

innfører vi 2 hjelpevariabler og likningen ovenfor kan ommdannes til:

$$1).\ f_1(x) + f_2(y) = T_1$$

$$2).\ T_1 + f_3(v) = T_2$$

$$3).\ T_2 \cdot f_4(w) = f_5(z).$$

Hver av disse tre likningene inneholder bare 3 variable, og kan derfor framstilles som kurvenomogrammer. For å få bundet sammen delnomogrammene, bruker vi hjelpevariablen T_1 som fellesskala for delnomogram 1 og 2, og hjelpevariablen T_2 som fellesskala mellom 2 Og 3.
Prinsippet for et sammensatt kurvenomogram er vist i fig.44

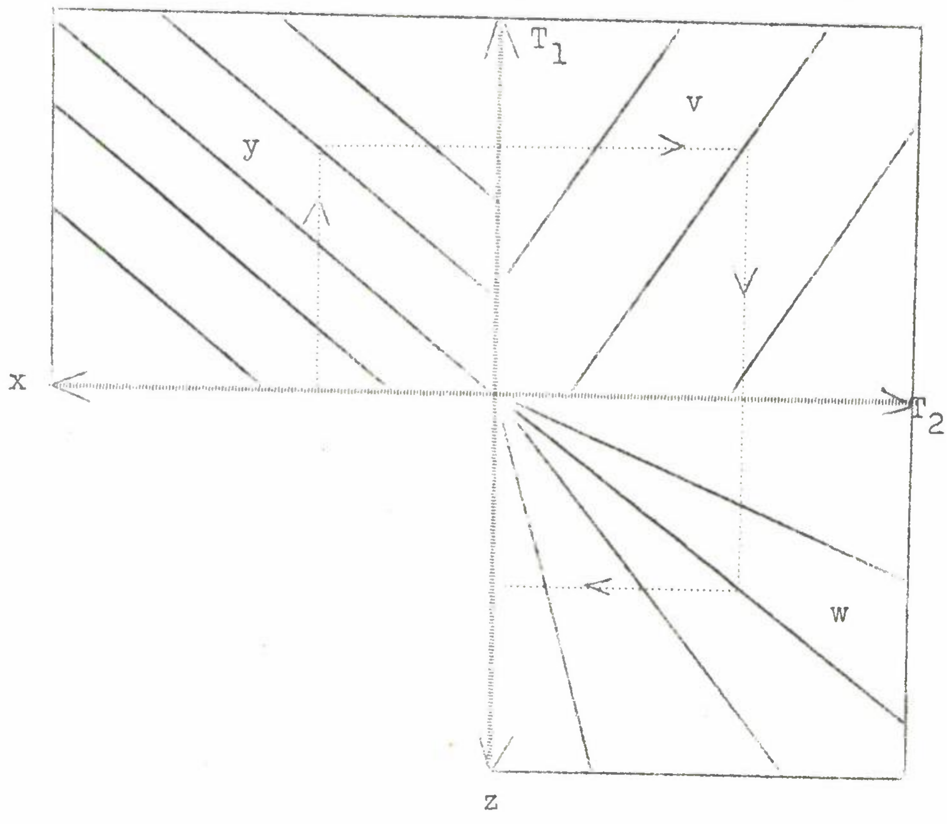


Fig. 44. Prinsippfigur av sammensatt kurvenomogram,
$f_1(x) + f_2(y) + f_3(v) \cdot f_4(w) = f_5(z)$.

Eksempel:

For å vise framgangsmåten ved framstillinga av et sammensatt kurvenomogram skal vi ta for oss likningen

$$Tea = (0{,}0131\ A \cdot \frac{1}{L} + 0{,}9\ B)\frac{1}{x}$$

Dette er likningen for virketida (Tea) ved potetsetting med to raders halvautomat.

Tea = virketid for arealet A i minutter,
A = areal i m^2,
L = knollavstand innen raden i meter,
B = åkerens største bredde vinkelrett på radene i meter,
x = redskapets arbeidsbredde i meter.

A varierer fra 0 til 50000 ($\Delta A = 10000$),
L " " 0,28 til 0,40 ($\Delta L = 0{,}02$),
B " " 0 til 100 ($\Delta B = 50$),
x " " 1,1 til 1,5 ($\Delta x = 0{,}1$).

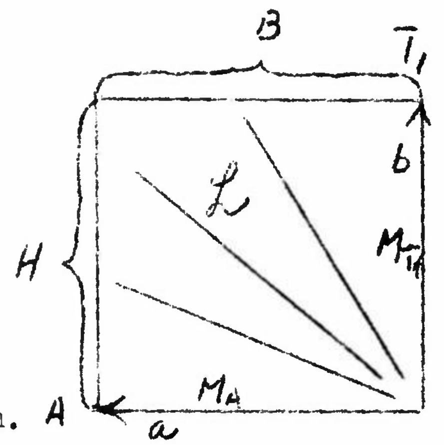
Ved å innføre de nødvendige hjelpevariabler får vi disse likninger for framstillinga av de enkelte delnomogrammer:

1). $T_1 = 0{,}0131\ A \cdot \frac{1}{L}$

2). $T_2 = T_1 + 0{,}9\ B$

3). $Tea = T_2 \cdot \frac{1}{x}$

T_1 og T_2 bruker vi altså som fellesskalaer for å binde delnomogrammene sammen.



1). $\underline{T_1 = 0{,}0131\ A \cdot \frac{1}{L}}$

I dette delnomogrammet framstiller vi L som linjeskaren. Skalaen for T_1 må legges slik at den blir felles for delnomogram 1 og 2. Vi bestemmer videre at størelsen på delnomogrammet skal være: H x B = 100x50 mm.

Vi berekner først modulene M_a og M_{T_1} og graderer deretter A-skalaen. Funksjonene for graderinga er

$$a = M_a \cdot 0{,}0131\ A$$

$$b = M_{T_1} \cdot T_1$$

$$M_A = \frac{B}{f(A_n) - f(A_1)} = \frac{50}{655} = \underline{0{,}0763 \text{ mm.}}$$

$$f(A_n) = 0{,}0131 \cdot 50000 = 655$$

$$f(A_1) = 0{,}0131 \cdot 0 = 0$$

$$M_{T_1} = \frac{H}{T_{1_n} - T_{1_1}} = \frac{100}{2339{,}3} = \underline{0{,}04275 \text{ mm.}}$$

$$T_{1_n} = 655 \cdot \frac{1}{0{,}28} = 2339{,}3$$

$$T_{1_1} = 0 \cdot \frac{1}{0{,}4} = 0$$

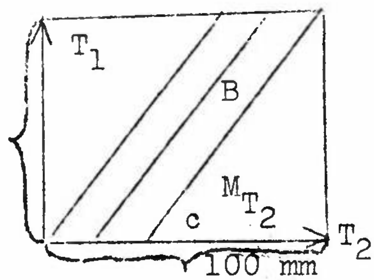
A	f(A) = 0,0131 A	a = 0,0763 mm. f(A)
0	0	0
10000	131	10
20000	262	20
30000	393	30
40000	524	40
50000	655	50

Deretter berekner vi to verdipar for A og T_1 for de forskjellige L-verdiene slik at L-linjene kan tegnes inn i nomogrammet.

L	f(A)	$T_1 = f(A) \cdot \frac{1}{L}$	b = 0,04275 mm. T_1
0,28	0	0	0
0,28	2339,3	2339,3	100
0,30	0	0	0
0,30	2339,3	2183,3	93,3
0,32	0	0	0
0,32	2339,3	2046,9	87,5
0,34	0	0	0
0,34	2339,3	1926,5	82,4
0,36	0	0	0
0,36	2339,3	1819,4	77,8
0,38	0	0	0
0,38	2339,3	1723,7	73,7
0,40	0	0	0
0,40	2339,3	1637,5	70,0

2). $T_2 = T_1 + 0,9\ B$

B framstilles som linjeskare. Da T_1 er en fellesskala, må den ha samme lengde som i 1. delnomogram. H blir derfor = 100 mm. Bredda på delnomogrammet setter vi = 100 mm. Modulen for T_1 har vi berekenet foran(vi har heller ikke bruk for den i dette delnomogrammet). Modulen M_{T_2} må vi derimot berekne.



$$M_{T_2} = \frac{B}{T_{2_n} - T_{2_1}} = \frac{100}{2609,3} = \underline{0,03832\ \text{mm.}}$$

$$T_{2_n} = 2339,3 + 0,9 \cdot 300 = 2609,3$$

$$T_{2_1} = 0 + 0,9 \cdot 0 = 0$$

Vi bestemmer deretter retningen på B-linjene. Ved å berekne 2 verdipar for T_1 og T_2 som gir samme B-verdi, får vi:

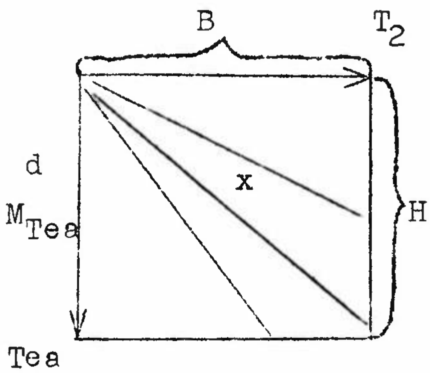
$T_1 = 0$ for $B = 0$ og $T_2 = 0$

$T_1 = 2339,3$ for $B = 0$ og $T_2 = 2339,3$

$T_2 = 2339,3$ gir $c = 0,03832\ \text{mm} \cdot 2339,3 = \underline{89,6\ \text{mm.}}$

For å bestemme beliggenheten av de øvrige B-linjene berekner vi ett punkt for hver linje og trekker linjene parallelt med linjen for B = 0.

B	T_1	T_2	$c = 0,03832$ mm. T_2
50	0	45	1,7
100	0	90	3,4
150	0	135	5,2
200	0	180	6,9
250	0	225	8,6
300	0	270	10,3



$d = M_{Tea} \cdot Tea$

3). $Tea = T_2 \cdot \frac{1}{x}$

x framstilles som linjeskare og H setter vi = ca. 100 mm. Lengden for T_2 = B har vi tidligere fastsatt til 100 mm.

Modulen M_{Tea} bereknes og Tea -skalaen graderes.

$$M_{Tea} = \frac{100}{2372} = 0{,}04216 \text{ mm.}$$

$$Tea_n = \frac{2609{,}3}{1{,}1} = 2372$$

$$Tea_1 = \frac{0}{1{,}5} = 0$$

Bruker vi nå M_{Tea} = 0,05 mm i stedet for 0,04216, får vi 20 Tea = 1mm. M_{Tea} = 0,05mm gjør derfor graderinga av skalaen raskere. Med den valgte modulen blir høgda på nomogrammet:

$$H = M_{Tea} \cdot Tea_n = 0{,}05 \cdot 2372 = 118{,}6 \text{ mm.}$$

Tea	d = 0,05 mm . Tea
0	0
100	5
200	10
300	15
400	20
500	25
600	30
700	35
800	40
900	45
1000	50
1100	55
1200	60
1300	65
1400	70
1500	75
1600	80
1700	85
1800	90
1900	95
2000	100
2100	105
2200	110
2300	115

Til slutt berekner vi 2 punkter på hver x-linje.

x	T_2	$Tea = T_2 \cdot \frac{1}{x}$	d = 0,05 mm . Tea
1,1	0	0	0
1,1	2609,3	2372	118,6
1,2	0	0	0
1,2	2609,3	2174	108,7
1,3	0	0	0
1,3	2609,3	2007	100,4
1,4	0	0	0
1,4	2609,3	1863	93,2
1,5	0	0	0
1,5	2609,3	1739	87,0

Det ferdige nomogrammet ser vi i fig. 44.

<u>Avlesningseksempel:</u> A = 30 da,l = 30 cm, B = 150 m og x = 1,3 gir Tea = ca. 1100.

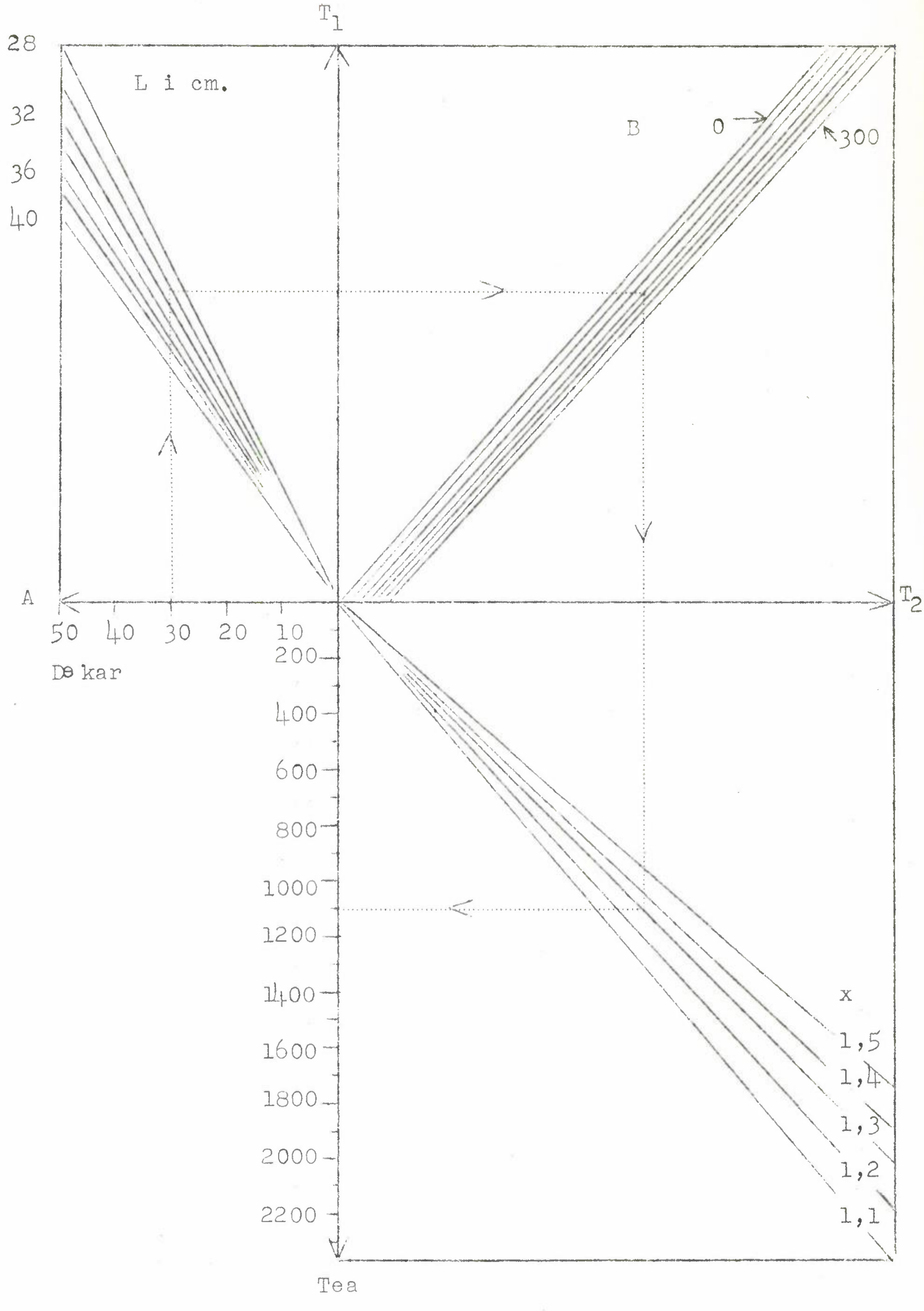


Fig. 44. Nomogram for Tea = $(0{,}0131\ A\ .\frac{1}{L} + 0{,}9\ B)\frac{1}{x.}$

1. Sammensatt kurvenomogram med brytningslinjer.

Hvis vi skal framstille sammenhengen mellom mange variable i et sammensatt kurvenomogram, må vi innføre brytningslinjer i enkelte av delnomogrammene for å få plasert de etter hverandre. Prinsippet for et sammensatt kurvenomogram med brytningslinjer er vist i fig. 45. Framgangs-

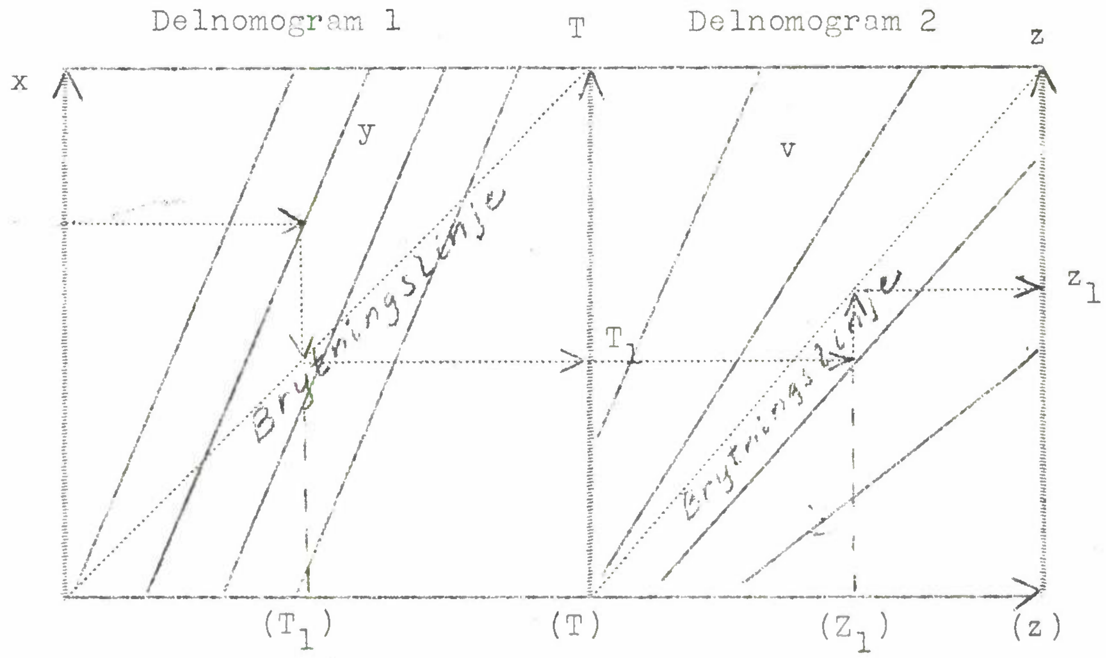


Fig. 45. Prinsippfigur av sammensatt kurvenomogram med brytningslinjer.

måten er at (T)-skalaen projiseres inn på T-skalaen ved hjelp av brytningslinjen. Delnomogram 2 konstrueres deretter med T-skalaen som utgangspungt og (Z)-skalaen projiseres gjennom brytningslinjen inn på Z-skalaen.

Fig. 46 viser hvordan nomogrammet i fig. 44 tar seg ut når vi bruker brytningslinjer i de to siste delnomogrammene. I det siste del-nomogrammet faller linjene for x = 1,1 og brytningslinjen sammen.

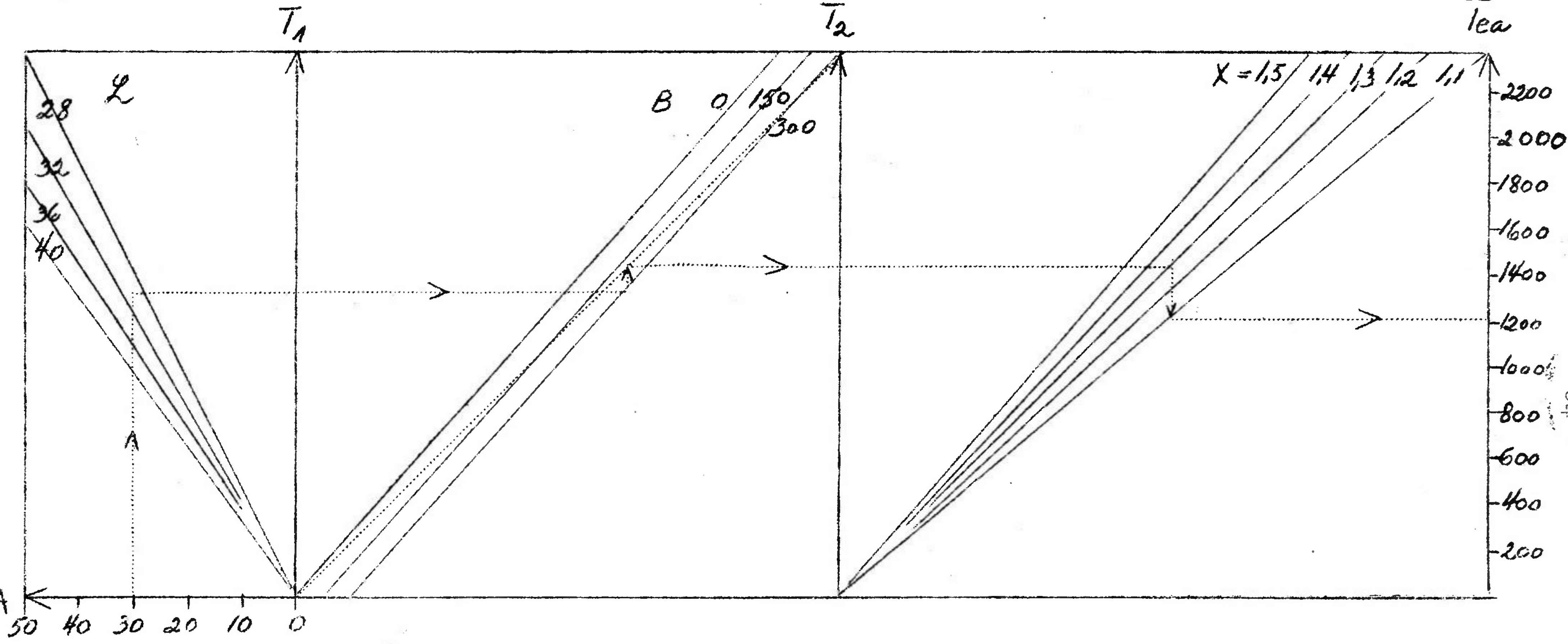


Fig. 46. Nomogram for Tea = $(0{,}0131\ A \cdot \frac{1}{L} + 0{,}9\ B)\frac{1}{x}$.

2. Spesiell metode for fire variable.

a. Summeform.

Har vi bare fire variable i en likning av summeform, kan vi framstille denne i et felles delnomogram ved hjelp av en spesiell framgangsmåte.

Ved å innføre en hjelpevariabel omskriver vi på vanlig måte likningen

$$f_1(x) + f_2(y) + f_3(v) = f_4(z)$$

$$f_1(x) + f_2(y) = T$$

$$T + f_3(V) = f_4(z)$$

Oppgaven er imidlertid nå å lage nomogrammet slik at vi får T som en felles linjeskare for de to delnomogrammene. Likningene får derved denne konstruksjonsformen:

$$T - f_2(y) = f_1(x) \text{ og}$$

$$T + f_3(v) = f_4(z).$$

Begge disse likningene kan framstilles som enkle kurvenomogrammer. Ved konstruksjonen ordner vi oss slik at A og B-aksene får dobbelskalaer. A-aksen graderes for variablene x og z og B-aksen for y og v. I praksis utfører vi imidlertid som regel graderinga slik som vist i fig. 47.

I stedet for å forsyne A-og B-aksene med dobbelskalaer, nytter vi linjene C og D for gradering av henholdsvis x og y. Prinnsippet er som det vil forstås, at de to delnomogrammene legges oppå hverandre i det hjelpevariablen blir brukt som en felles linjeskare. Videre må vi passe på at den søkte variable i de to likningene for konstruksjonen av delnomogrammene (i dette tilfelle x og z) plaseres påsamme skala.

I fig. 47 gir x og y et skjæringspunkt mellom T-linjen gjennom P_1 og linjen for den valgte v-verdi er P_2. Ved å gå fra P_2 til

z-

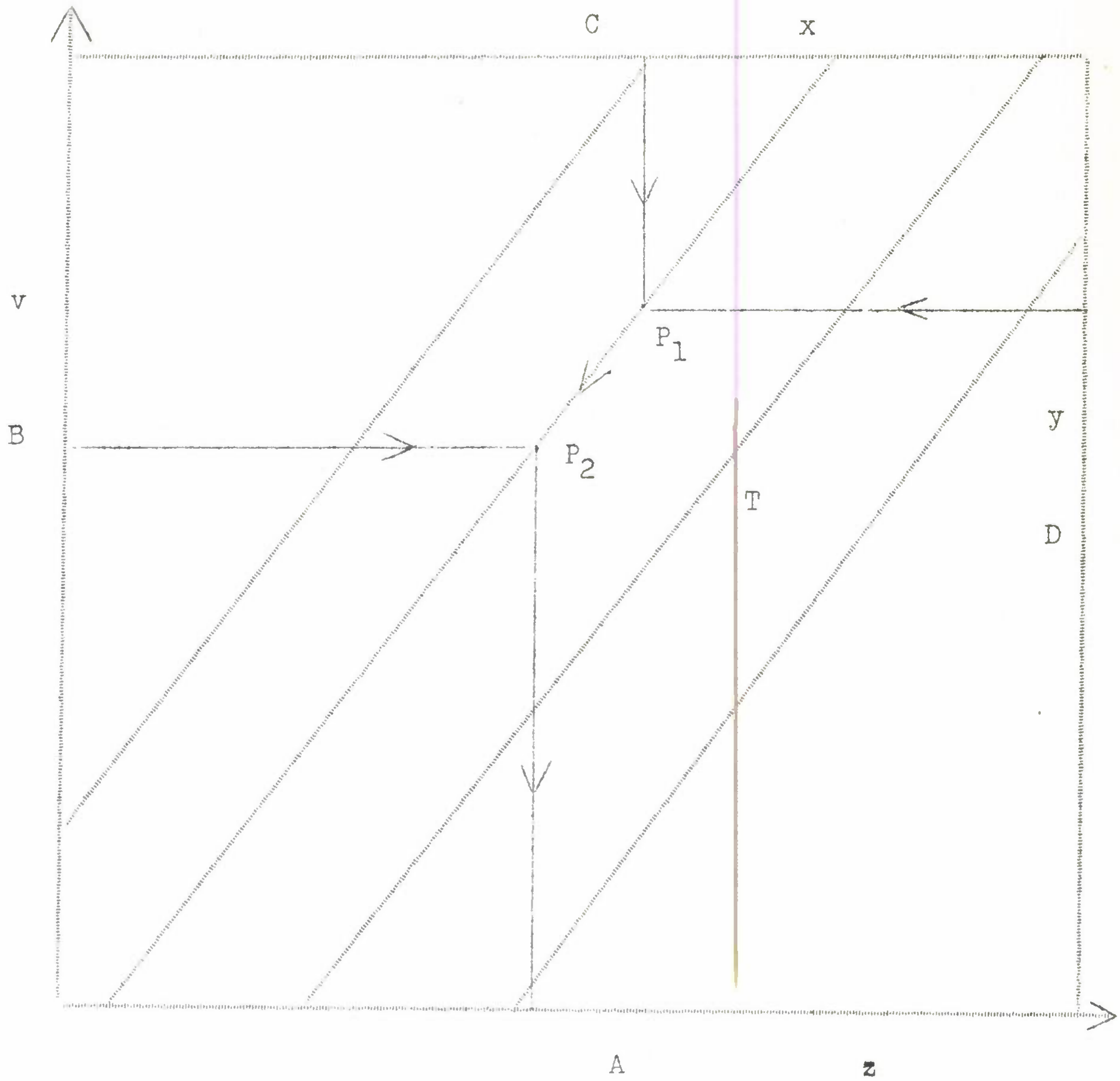


Fig. 47. Prinsippfigur av sammensatt kurvenomogram med 4 variable.

skalaen, finner vi den søkte verdi for Z.

Eksempel:

Konstruer et kurvenomogram for

$$Z = x^2 + 2y + \sqrt{v}$$

når x varierer fra 10 til 15,

y " " 1 " 5

v " " 0 " 16

Nomogrammets størrelse: BxH = 100 x 100 mm.

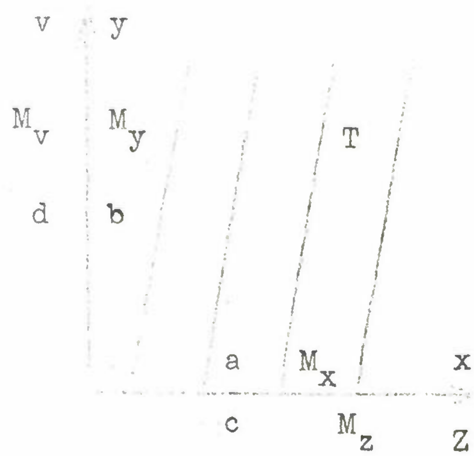
Ved å innføre hjelpevariabelen T får vi:

1). $x^2 + 2y = T$

2). $T + \sqrt{v} = Z$

1). $x^2 + 2y = T$

T skal framstilles som en felles linjeskare. Vi skriver derfor om likningen til



$T - 2y = x^2$

$a = M_x \cdot f(x)$

$b = M_y \cdot f(y)$

$$M_x = \frac{100}{233-92} = 0{,}7092 \text{ mm.}$$

$$f(x_n) = 15^2 + 2\cdot 5 - 2\cdot 1 = 233$$

$$f(x_1) = 10^2 + 2\cdot 1 - 2\cdot 5 = 92$$

$$M_y = \frac{100}{10-2} = 12{,}5 \text{ mm.}$$

$f(y_n) = 2\cdot 5 = 10$

$f(y_1) = 2\cdot 1 = 2$

x	f(x)	a = 0,7092 mm.(f(x) - 92)
10	100	5,7
11	121	20,6
12	144	36,9
13	169	54,6
14	196	73,8
15	225	94,4

y	f(y)	b = 12,5 mm. (f(y)-2)
1	2	0
2	4	25
3	6	50
4	8	75
5	10	100

Retningen på T-linjene bestemmes:

$T = 150$ og $y = 1$ gir $x^2 = 148$

$T = 150$ og $y = 5$ gir $x^2 = 140$

$x^2 = 148$ gir $a = 0{,}7092.(148 - 92) = \underline{39{,}7 \text{ mm.}}$

$x^2 = 140$ gir $a = 0{,}7092.(140 - 92) = \underline{34{,}0 \text{ mm.}}$

Deretter berekner vi ett punkt på de øvrige T-linjene.

$T_n = 15^2 + 2.5 = 235$

$T_1 = 10^2 + 2.1 = 102$

T	f(y)	f(x)	a = 0,7092 mm.(fx-92)
102	2	100	5,7
125	2	123	22,0
175	2	173	57,4
200	2	198	75,2
225	2	223	92,9
235	2	233	100,0

2). $\underline{T + \sqrt{v} = Z}$

$c = M_z \cdot Z$

$d = M_v \cdot f(v)$

$M_v = \dfrac{100}{4} = \underline{25 \text{ mm.}}$

$f(v_n) = \sqrt{16} = 4$

$f(v_1) = \sqrt{0} = 0$

$M_z = \dfrac{100}{239-102} = \underline{0{,}7299 \text{ mm.}}$

$Z_n = 235 + 4 = 239$

$Z_1 = 102 + 0 = 102$

v	f(v)	d = 25 mm. f(v)
0	0	0
2	1,414	35,4
4	2,000	50,0
6	2,450	61,3
8	2,828	70,7
10	3,162	79,0
12	3,464	86,6
14	3,742	93,6
16	4,000	100,0

z	c = 0,7299 mm.(Z-102)
110	5,8
120	13,1
130	20,4
140	27,7
150	35,0
160	42,3
170	49,6
180	56,9
190	64,2
200	71,5
210	78,8
220	86,1
230	93,4

Ved tegninga av nomogrammet må vi passe på at y-skalaen graderes i motsatt retning av v-skalaen da de har forskjellig fortegn. Det ferdige nomogrammet er vist i fig. 48. Avlesningseksemplet med

$x = 12$ $y = 3{,}2$ og $v = 2$ gir $z =$ ca 132.

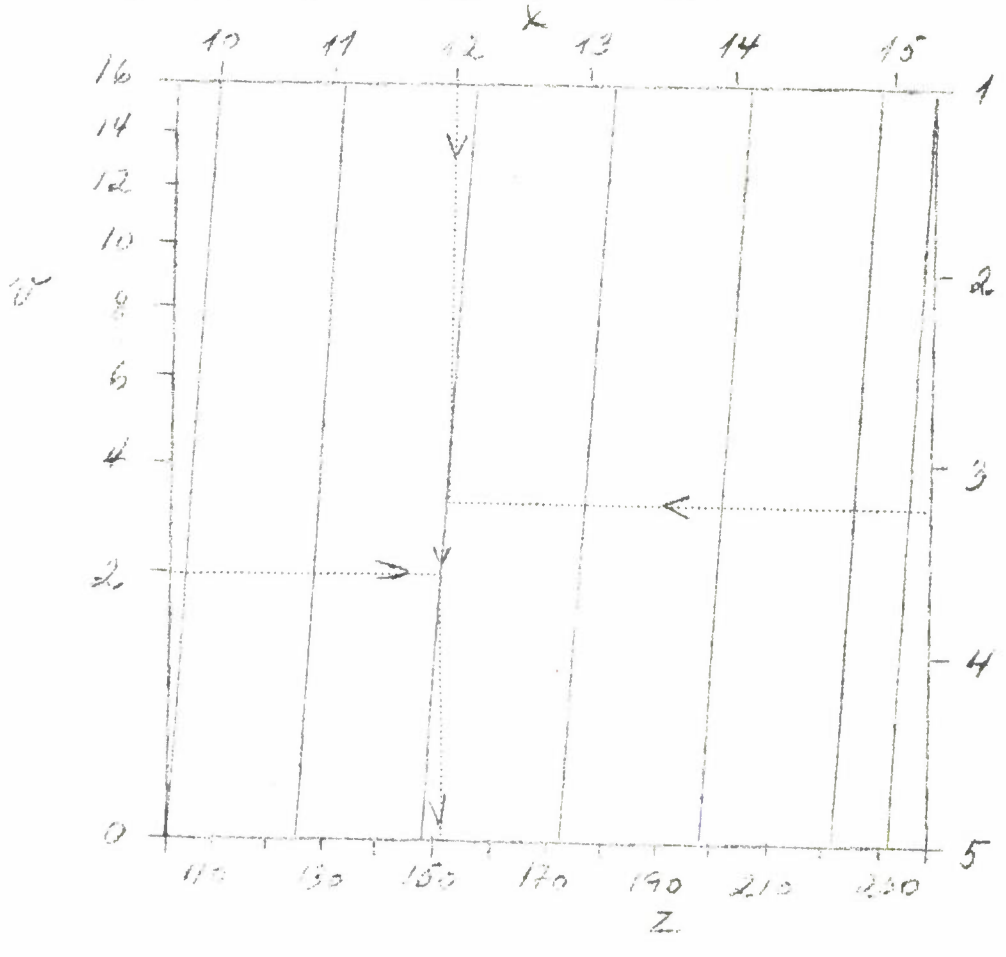


Fig. 48. Nomogram for $z = x^2 + 2y + \sqrt{v}$.

b. Produktform.

Sammenhengen mellom 4 variable kan f.eks. være gitt ved likningen

$$\frac{f_1(x)}{f_2(y)} = \frac{f_4(z)}{f_3(v)}.$$

Setter vi her

$$\frac{f_1(x)}{f_2(y)} = T \text{ og dermed } \frac{f_4(z)}{f_3(v)} = T,$$

ser vi at begge disse likningene innholder bare 3 variable. Skriver vi om likningene til nøkkelformen for framstilling av kurvenomogrammer i produktform får vi:

$$f_2(y) \cdot T = f_1(x) \text{ og}$$

$$f_3(v) \cdot T = f_4(z)$$

Delnomogrammene for disse likningene blir identiske. Bruker vi hjelpevariablen T som felles linjeskare, blir framgangsmåten akkurat den samme som vi brukte for summeformen i forrige avsnitt,se fig. 49. Vi skal derfor ikke behandle konstruksjonen av slike nomogrammer her.

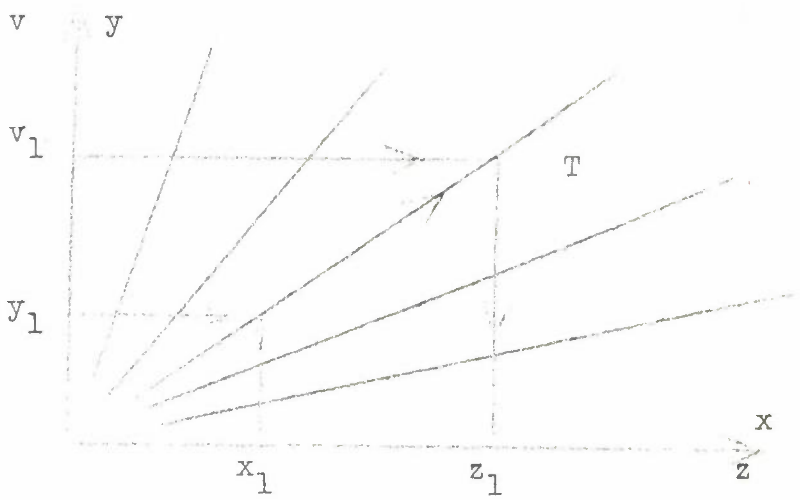


Fig. 49. Nomogram for $\frac{f_1(x)}{f_2(y)} = \frac{f_4(z)}{f_3(v)}.$

Vi skal derimot se litt på hvordan to kurvenomogrammer legges oppå hverandre når vi ikke bruker hjelpevariabelen som linjeskare.

Har vi gitt likningen

$$f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(v) = f_4(z),$$

får vi ved å innføre hjelpevariabelen T:

$$f_1(x) \cdot f_2(y) = T \text{ og}$$
$$T \cdot f_3(v) = f_4(z).$$

Det samansatte nomogrammet for disse to likningene kan framstilles slik som vi har lært foran ved å bruke hjelpevariabelen som en fellesskala (se fig.50).

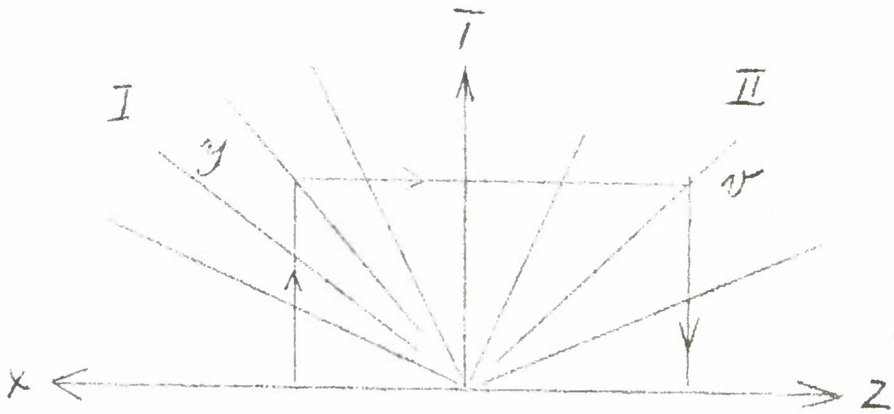


Fig. 50.

I mange tilfelle kan det imidlertid by på store fordeler å legge de to delnomogrammene oppå hverandre slik som fig. 51 viser. Dette gjøres ganske enkelt ved at delnomogrammene legges oppå

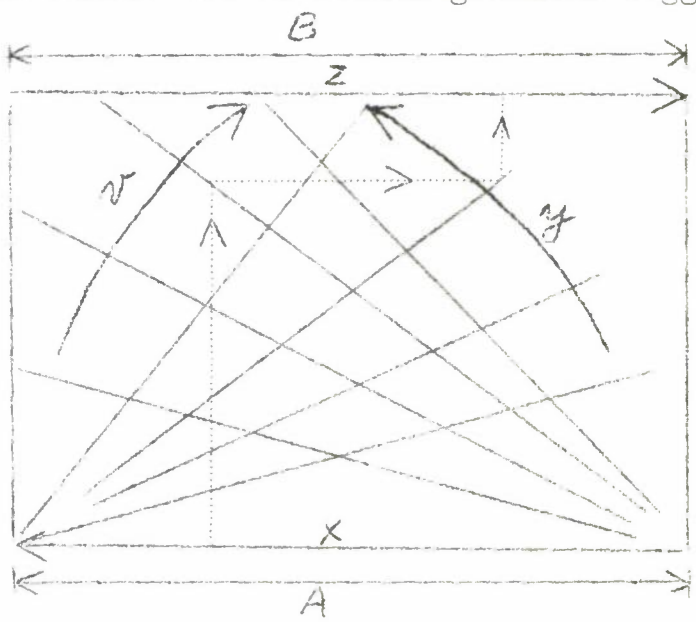


Fig. 51. Nomogram for $f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(v) = f_4(z)$.

hverandre i den stilling de har i fig. 50. x - og z - skalaene vil altså falle sammen. Ved konstruksjonen må vi sørge får at disse to skalaene får samme lengde og motsatte positive graderingsretninger. Av praktiske hensyn utstyrer vi ikke linje A med dobbelskala (for x og z) men nytter linje B for graderinga av den ene variable (fig.51).

Eksempel:

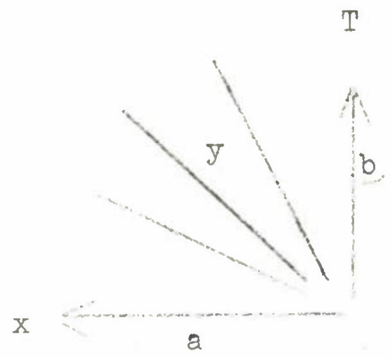
Konstruer nomogrammet for $4x \cdot y^2 \cdot 2v = z$ når

x varierer fra o til 4,
y " " 1 " 3 og
v " " 0 " 5.

Nomogrammets størelse: B x H = 100 x 100 mm.
y og v skal framstilles som linjeskarer.
Innføres hjelpevariabelen T, får vi

1). $4x \cdot y^2 = T$ og
2). $T \cdot 2v = Z$

1). $4x \cdot y^2 = T$



$a = M_x \cdot 4x$ og $b = M_T \cdot T$

$M_x = \frac{100}{16} = 6{,}25$ mm.

$f(x_n) = 4 \cdot 4 = 16$
$f(x_1) = 4 \cdot 0 = 0$

$M_T = \frac{100}{144} = 0{,}6944$ mm.

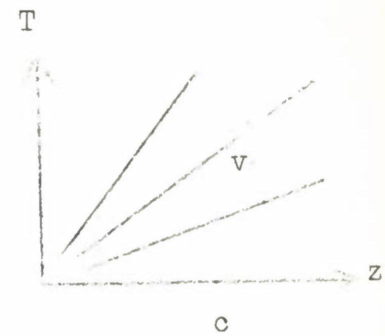
$T_n = 16 \cdot 3^2 = 144$
$T_1 = 0 \cdot 1 = 0$

x	f(x)	a = 6,25 mm . f(x)
0	0	0
1	4	25
2	8	50
3	12	75
4	16	100

y	f(y)	f(x)	T	b = 0,6944 mm. T
1	1	0	0	0
1	1	16	16	11,1
2	4	0	0	0
2	4	16	64	44,4
3	9	0	0	0
3	9	16	144	100,0

2). $T \cdot 2v = z$

$c = M_z \cdot z$



$$M_z = \frac{100}{1440} = 0{,}06944 \text{ mm.}$$

$$z_n = 144.2.5 = 1440$$

$$z_1 = 0.2.0 = 0$$

z	c = 0,06944 mm . z
0	0
100	6,9
200	13,9
300	20,8
400	27,8
500	34,7
600	41,7
700	48,6
800	55,5
900	62,5
1000	69,4
1100	76,4
1200	83,3
1300	90,3
1400	97,2

v	f(v)	T	Z	c = 0,06944 mm.Z
0	0	0	0	0
0	0	144	0	0
1	2	0	0	0
1	2	144	288	20
2	4	0	0	0
2	4	144	576	40
3	6	0	0	0
3	6	144	864	60
4	8	0	0	0
4	8	144	1152	80
5	10	0	0	0
5	10	144	1440	100

Det ferdige nomogrammet er vist i fig. 52. Avlesnings-eksemplet med $x = 1$, $y = 3$ og $v = 5$ gir $z = 360$.

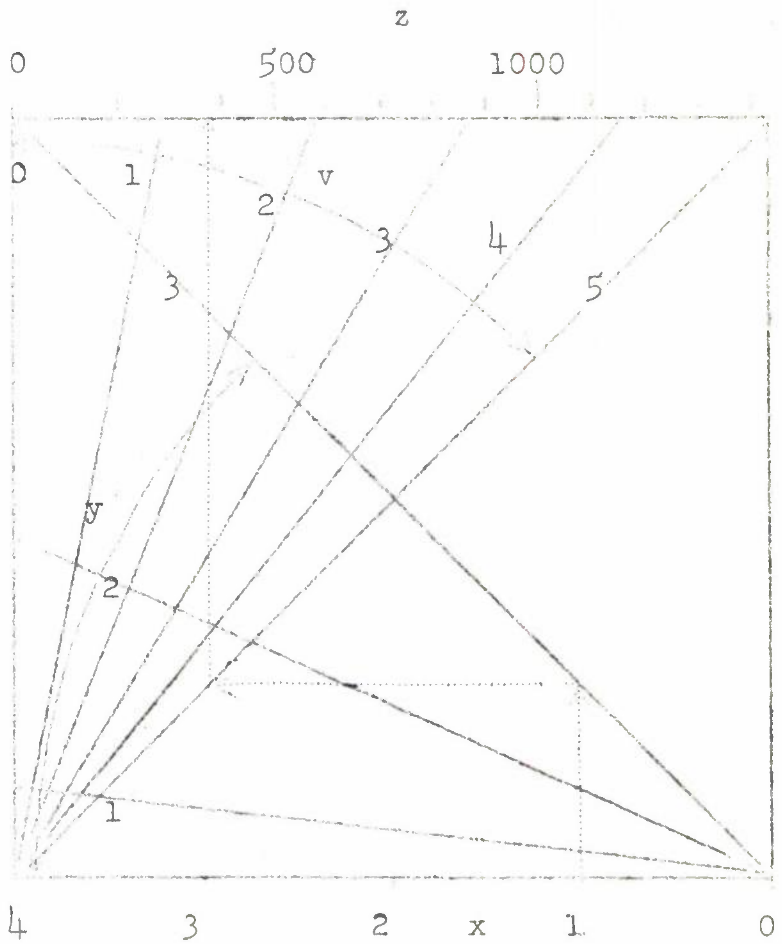


Fig. 52. Nomogram for $4x \cdot y^2 \cdot 2v = Z$

Øvelser:

1. Formelen for å berekne tidsforbruket ved potetsetting med helautomatisk settemaskin er:

$$Tea = \left((1000\ A\ \frac{te}{100})(1+ \frac{tas}{100}) + tav \cdot B \right) \frac{1}{b}$$

Tea = virketid i min.

A = areal i dekar

te = kjørehastighet i $^{min}/_{100}$ meter

tas = fylle poteter i %

tav = snutid i $^{min}/$snuing

B = åkerens største bredde i meter.

b = redskapets arbeddsbredde i meter.

Konstruer et sammensatt korvenomogram for likningen når:

A	varierer	fra	o	til	20,
te	"	"	1	"	2 ,
tas	"	"	10	"	50,
tav	"	"	0,3	"	1,0
B	"	"	0	"	300 og
b	"	"	1,0	".	1,5

Innfører vi de nødvendige hjelpevariabler får vi:

1). $1000\,A \cdot \frac{te}{100} = T_1$

2). $T_1 \cdot (1 + \frac{tas}{100}) = T_2$

3). $T_2 + tav \cdot B = T_3$

4). $T_3 \cdot \frac{1}{b} = Tea$

V. LITTERATUR.

1. E.Giljam : Lärobok i nomografi. Stockholm 1947.

2. H. Ager og I. Ander : Grafiska metoder inom arbetsstudietekniken. Stockholm 1946.

3. Arvesen : Innføring i nomografi. 1932.

4. Krauss : Die Nomographie oder Fluchtlinienkunst. 1922.