



Norges miljø- og
biovitenskapelige
universitet

Masteroppgave 2018 30 stp

Handelshøyskolen på NMBU

Hovedveileder: Glenn Roger Kristiansen

Black-Scholes vs. Hestons stokastiske volatilitetsmodell.

Hvem gir lavest prisingsfeil for opsjoner med OBX-indeksen som underliggende?

- Empirisk analyse av prestasjonen til Black-Scholes og Hestons stokastiske volatilitetsmodell for indeksopsjoner på det norske markedet.

Alireza Rahimizadeh

Master i Økonomi og Administrasjon

Handelshøyskolen på NMBU

Forord

Denne oppgaven markerer slutten av en toårig masterstudie i Økonomi og administrasjon ved Norges miljø- og biovitenskapelige universitet.

Oppgaven har bydd på flere utfordringer, men til gjengjeld gitt meg mye sårt trengt kunnskap innenfor databehandling, programmering og finansielle derivater. Dette er kunnskap jeg vil kunne dra stor nytte av og verdsetter høyt.

En spesiell takk er rettet til bi-veileder Kine Josefine Aurland-Bredesen for verdifull hjelp og veiledning under gjennomføringen av kalibreringen. Hennes veiledning og tilbakemelding var til uvurderlig hjelp under kalibreringsprosessen. Jeg vil også takke min veileder Glenn Roger Kristiansen for gode innspill og råd.

Mai 2018,

Alireza Rahimizadeh

Sammendrag

I denne avsluttende oppgaven evaluerer jeg prestasjonene til to opsjonsprisinde modeller, henholdsvis Black-Scholes og Hestons stokastiske volatilitetsmodell, og ser på deres resultater basert på prising av indeksopsjoner med OBX-indeksen som underliggende. Utvalgsperioden for kalibreringen er satt til 04.04.2018. Oppgaven belyser flere utfordringer som må tas hensyn til i kalibreringsprosessen. Resultatene fra analysen viser at Heston gir lavere prisingsfeil enn Black-Scholes i estimeringsutvalget og én dag utenfor utvalget, men at Black-Scholes gir lavere prisingsfeil fem dager utenfor utvalget. Resultatene bekrefter de empiriske svakhetene ved begge modeller.

Abstract

In this thesis, I evaluate the performance of two option pricing models, respectively Black-Scholes and Heston's Stochastic Volatility Model, and look at their performance based on pricing of index options with the OBX Index as underlying. The selection period for the calibration is set to April 4th, 2018. The task highlights several challenges that must be taken into account in the calibration process. The results from the analysis show that Heston offers lower pricing errors than Black-Scholes in-sample and one-day out-of-sample, but Black-Scholes gives lower pricing errors five days out-of-sample. The results confirm the empirical weaknesses of both models.

Innhold

Forord	i
Sammendrag	ii
Abstract	iii
Tabeller	viii
Figurer	x
1 Introduksjon	1
1.1 Tidligere studier	2
1.2 Problemstilling	2
1.3 Oppgavens struktur	3
1.4 Avgrensninger	3
1.5 Begreper og notasjoner	4
2 Grunnleggende opsjonsteori	6
2.1 Opsjonens prisdrivere	7
2.2 Lønnsomhetsgrad	8
2.3 Put-call-paritet	9
2.4 Stokastiske prosesser	10
2.4.1 Markov-prosess	10
2.4.2 Wiener-prosess	10
2.4.3 Generalisert Wiener-prosess	11
2.4.4 Itô-prosesser	12
2.4.5 Geometrisk bruinsk bevegelse	13
2.4.6 CIR-prosess	14
3 Modeller	15
3.1 Black-Scholes-modellen	15

3.1.1	Derivasjon av Black-Scholes partiell differensial ligning	16
3.1.2	Black-Scholes-modellen	18
3.2	Volatilitet	19
3.2.1	Historisk volatilitet	19
3.2.2	Implisitt volatilitet	19
3.3	Svakheter ved Black-Scholes-modellen	20
3.3.1	Svakheter ved Gaussiansk fordeling	20
3.3.2	Volatilitetsklynger og Leverage effect	22
3.3.3	Volatilitetssmil	24
3.4	Heston stokastiske volatilitetsmodell	25
3.4.1	Prisfastsettelse ved Hestons stokastiske volatilitetsmodell	26
3.4.2	Fordeler og ulemper med Heston-modellen	27
3.5	Sammenligning av modeller	27
4	Metode	32
4.1	Datakilde	33
4.2	Markedspris	33
4.3	Risikofri rente og dividende	33
4.4	Kalender- eller handelsdager	34
4.5	Sortering av datasett	34
4.6	Black-Scholes volatilitet	35
4.7	Heston-parametere	36
5	Kalibrering	40
5.1	Kalibreringsproblemet	40
5.2	Lokale og globale minimumspunkter	42
5.3	Optimeringsverktøy	43
5.4	Nedre og øvre grenseverdier - Heston-modellen	44
5.5	Kalibrering	45
6	Analyse	51
6.1	Empiriske resultater	52
6.1.1	In-sample prisingsfeil	52
6.1.2	Out-of-sample prisingsfeil	56
7	Oppsummering	60
	Referanse	61
	Appendix	66
A	Matematiske formler	66
A.1	Heston PDL	66
A.1.1	Betingelser Heston	67
B	Data	68
B.1	OptionData.m	68
B.2	Matlab Kalibreringskode	70

B.3	Excel VBA koder	71
B.3.1	Black-Scholes	71
B.3.2	Heston-modellen	72
B.3.3	Implisitt volatilitet	73
B.4	Pris-output fra de forskjellige parametersettene	74

Tabeller

2.1	Lønnsomhetsgraden til call-oppsjoner. Intervallene for lønnsomhetsgrad som blir brukt i oppgaven er hentet fra Dumas, Fleming og Whaley (1998).	8
3.1	Forutsetningene for Black-Scholes ligningen.	16
3.2	Notasjoner Black-Scholes.	18
3.3	Normalitetstest av log-avkastningene OBX Total Return Index.	21
3.4	Notasjoner Heston-modellen.	25
4.1	NIBOR-rente.	34
4.2	Tabellen viser den gjennomsnittlige opsjonsprisen for ulike kategorier av lønnsomhetsgrad $\frac{S}{K}$ og dager til forfall. S betegner nivået til OBX-indeksen og K er opsjonen innløsningskurs. Kortsiktige opsjonene har forfall 20.04.2018, mellom-lange har forfall 18.05 og langsiktige har forfallsdato 15.06.2018.	38
4.3	Tabellen viser gjennomsnittlig Black-Scholes implisitt volatilitet for kjøpsopsjoner med ulike kategorier av lønnsomhetsgrad $\frac{S}{K}$ og forfall. S betegner nivået til OBX-indeksen og K er opsjonens innløsningskurs. Implisitt volatilitet finner man ved å invertere Black-Scholes-formelen for hver enkelt kjøpsopsjon i utvalget. Koden for VBA er lagt ved i appendix del B.3.3.	39
5.1	Oppsummering av begrensningene satt i nedre og øvre grenseverdier i kalibreringen av nye parametere i Heston-modellen.	45
5.2	Inngangsparametere A, B, C og D er hentet fra respektive tekster av Bauer (2012), Forde, Jacquier og Lee (2012), Moodley (2005), Samuelson (1973). Startverdiene i parameterne til E har undertegnede lagt ved selv. κ , θ og σ er valgt ut i fra gjennomsnittet til de respektive parameterverdiene i A, B, C og D. ρ er korrelasjonen mellom NOVIX og OBX-indeksen siden oppstart av NOVIX og v_0 er gjennomsnittlig implisitt volatilitet fra 15. januar 2018 og frem til 04. april 2018. Dette er tegningsdatoen på opsjonene med kortest tid til forfall og frem til data ble lastet ned.	46
5.3	Kalibrerte parametere til Heston-modellen under ikke-lineær least square optimering.	47

5.4	Viser prisingsavvik for kalibrerte parametersett fordelt etter lønnsomhetsgrad og forfallperiode (kortsiktig, mellom-lang og langsiktig).	48
5.5	Tabellen viser gjennomsnittlig MAE og MPE for de kalibrerte settene.	49
5.6	Tabellen viser parameterverdiene som blir brukt til å regne ut prisen til Heston-modellen.	50
6.1	Tabellen viser gjennomsnittlig prisingsfeilen in-sample for alle opsjonene i utvalgperioden, uavhengig av lønnsomhetsgrad og forfallsperiode.	52
6.2	Tabellen viser prisingsfeilen til utvalget for opsjoner med 12 dager til forfall.	52
6.3	Tabellen viser prisingsfeilen til utvalget for opsjoner med 32 dager til forfall.	53
6.4	Tabellen viser prisingsfeilen til utvalget for opsjoner med 52 dager til forfall.	53
6.5	Viser in-sample prisingsfeil sortert etter forfallskategori og lønnsomhetsgrad.	53
6.6	Tabellen viser prisingsfeilen én dag out-of-sample for alle opsjonene i utvalgperioden.	57
6.7	Viser én dags out-of-sample prisingsfeil sortert etter forfallskategori og lønnsomhetsgrad.	57
6.8	Tabellen viser prisingsfeilen fem dager out-of-sample for alle opsjonene i utvalgperioden.	58
6.9	Viser fem dagers out-of-sample prisingsfeil sortert etter forfallskategori og lønnsomhetsgrad.	59
B.1	Data innlagt i Matlabs lsqnonlin.	69
B.2	Prisestimer gitt for opsjoner med 12 dager til forfall.	74
B.3	Prisestimer gitt for opsjoner med 32 dager til forfall.	75
B.4	Prisestimer gitt for opsjoner med 52 dager til forfall.	75

Figurer

2.1	Generalisert Wiener-prosess med $a = 0.3$ og $b = 1.5$. Figuren er hentet fra J. C. Hull og Basu (2016) kap. 13.	12
2.2	Eksempel på en simulering av en geometrisk bruinsk bevegelse. Parameterne i figuren er: $S_0 = 100$, $\sigma = 0,3$, $T = 5$ og $dt = 0,025$. Figuren er hentet fra Rasmussen (2009).	13
2.3	Eksempel på simulering av CIR-prosess. Her er det volatiliteten og ikke variansen som er vist i figuren. Parameterne som inngår i figuren er satt til: $\kappa = 0.7$, $\theta = 0.01$, $\sigma = 0.4$, $v_0 = 0.01$, $T = 10$ og $dt = 0.025$. Figuren er hentet fra Rasmussen (2009). .	14
3.1	QQ-plot av daglige log-avkastninger OBX Total Return Index sammenlignet med normalfordeling. Figuren viser tykke haler eksisterer i log-avkastningene. Avkastningsserien er fra 11.03.2013 til 08.03.2018. Skjevhet: 0,094 og ex. kurtose: 2,43.	21
3.2	Frekvensfordeling av log-avkastninger på OBX-indeksen sammenlignet med normalfordeling. Avkastningsdata fra 11.03.2013 til 08.03.2018.	22
3.3	OBX Total Return Index daglige log-avkastninger. Fra 11.03.2013 til 08.03.2018. Legg merke til klyngene.	23
3.4	Korrelasjonen mellom NOVIX og OBX-indeksen. Utvalgsperioden for figuren er 22.04.2106 til 08.03.2018. Korrelasjon er -0,2065.	23
3.5	Implisitt volatilitet på europeiske OBX call-opsjoner. Data for figuren er innhentet 08.03.2018.	24
3.6	Eksempel på et volatilitetssmil og -skew. Smilets parameterverdier er: $T = 0,5$, $r = 0$, $S_t = 100$. Skewets verdier er: $\rho = -0,25$, $\sigma = 0,08$, $\kappa = 4$ $v_t = 0,011$. Figuren er hentet fra Rasmussen (2009).	27
3.7	Volatilitetssmil, når ρ og σ varierer. Figuren er hentet fra Rasmussen (2009).	28
3.8	Volatilitetssmil når θ , v_t og κ varierer. Figuren er hentet fra Rasmussen (2009).	28
3.9	Effekten av tetthetsfunksjonen på innløsningskursen ved endring i korrelasjonen ρ mellom volatilitet og prisen på aktivaen. Figuren er hentet fra Rasmussen (2009).	29
3.10	Effekten av tetthetsfunksjonen for innløsningskursen ved en endring i σ . Figuren er hentet fra Rasmussen (2009).	30

3.11	Forskjellen mellom opsjonsprisen i Heston-modellen og Black-Scholes-modellen med forskjellige innløsningskurs, når man varierer korrelasjonen ρ mellom volatilitet og aksjekursen. Figuren er hentet fra Rasmussen (2009).	31
3.12	Forskjellen mellom opsjonsprisen i Heston-modellen og Black-Scholes-modellen ved forskjellige innløsningskurs, når man varierer σ . Figuren er hentet fra Rasmussen (2009).	31
5.1	Illustrasjon av lokal og global minimumspunkt.	42
5.2	Figuren viser prisdifferansen mellom estimerte sett og markedspris for opsjoner med 12 dager til forfall. Data er lagt ved i appendix del B.2.	47
5.3	Figuren viser prisdifferansen mellom estimerte sett og markedspris for opsjoner med 32 dager til forfall. Data er lagt ved i appendix del B.3.	48
5.4	Figuren viser prisdifferansen mellom estimerte sett og markedspris for opsjoner med 52 dager til forfall. Data er lagt ved i appendix del B.4.	48
6.1	Viser in-sample MAPE for kortsiktige opsjoner tvers av lønnsomhetsgrad.	54
6.2	Viser in-sample MAPE for mellom-lange- (a) og langsiktige (b) opsjoner tvers av lønnsomhetsgrad.	54
6.4	Viser in-sample MPE (a) og MAPE (b) for alle forfallsperioder på tvers av lønnsomhetsgrad.	55

KAPITTEL 1

Introduksjon

Black og Scholes (1973) la grunnlaget for moderne prissetting av derivater. Modellen bygger imidlertid på en rekke forutsetninger og begrensninger som er kjent for å være altfor restriktive. I første rekke har vi antagelsen om konstant volatilitet og at prisen på underliggende aktiva følger en geometrisk bruinsk bevegelse. Videre bygger modellen på forutsetningen om at avkastningene til underliggende er normalfordelt, mens empiriske studier har vist at avkastninger som oftest har en høyere kurtose og tykkere haler enn en normalfordeling (Mandelbrot, 1963; Merton, 1976). Modellen er dog fortsatt svært populær grunnet dens brukervennlighet og fleksibilitet.

Rikelig med studieforsøk er blitt introdusert for å avsette forutsetningen om konstant volatilitet. Studiene har forsøkt å tillegge modellen med en stokastisk komponent som er i stand til å registrere den stokastiske volatiliteten. Diverse stokastiske volatilitetsmodeller som J. Hull og White (1987), Johnson og Shanno (1987), Stein og Stein (1991), Wiggins (1987) har prøvd, men ikke helt klart å slå igjennom. Spesielt en modell skiller seg fra de andre og er utbredt sitert i opsjonstidsskrifter (Heston, 1993). Heston-modellen har flere egenskaper som gjør den svært attraktiv. For det første gir modellen en analytisk løsning, som flere av de andre modellene ikke er i stand til å produsere. Ytterligere tillater modellen leverage effect (Black, 1976) og at volatiliteten følger en mean-reverting prosess (Cox, Ingersoll Jr & Ross, 1985).

Diverse studier er blitt introdusert som ikke bare tar hensyn til stokastisk volatilitet, men også stokastisk rente og hopp i aksjekursene (Bakshi, Cao & Chen, 1997). Konklusjonen fra Bakshi mfl. (1997) var at introduksjonen av stokastisk rente og hopp kun ga marginale reduksjoner i prissingsfeilen til Heston-modellen. Derfor tar jeg kun utgangspunkt i modellen Heston presenterte i 1993.

Motivasjonen for tema og problemstilling skyldes den økte interessen for finansielle derivater etter gjennomført *Opsjoner, derivater og risikostyring* (BUS 324) på NMBU. Faget la stor vekt på Black-Scholes og dens begrensninger, men lite vekt på mer moderne modeller som i teorien er bedre rustet til å gi mer nøyaktige opsjonspriser. Dette ga en økt motivasjon til å måle og

evaluere ytelsen til en deterministisk og stokastisk volatilitetsmodell mot hverandre.

1.1 Tidligere studier

Opp gjennom årene har flere studier hvor man evaluerer prestasjonen til Heston- og Black-Scholes-modellen blitt presentert. Det alle har til felles er at de bruker store og veletablerte indekser (S&P 500, S&P 100, DAX, FTSE 100 og KOSPI 200). Svært lite er blitt presentert for indeks-opsjoner i det norske markedet. Studiene viser flere interessante resultater som forfatterne virker å være unisone i. Blant annet har det vist seg at Black-Scholes gir lavere prisingsfeil enn Heston-modellen for kortsiktige deep-in-the-money- og in-the-money-opsjoner, samt at Heston-modellens presisjon styrkes med økt tid til forfall (Bakshi mfl., 1997; Kim & Kim, 2004; Lin, 2002; Mikhailov & Nögel, 2003; Moon, Seon, Wee & Yoon, 2009; Mygland & Jørgensen, 2016; Shu & Zhang, 2004; Singh & Dixit, 2016; Yakoob & Durham, 2002). Videre har også empirien vist at Heston presterer bedre enn Black-Scholes én dag utenfor utvalgsperioden, men at modellen har størst økning i prisingsfeil mens Black-Scholes har en stabil prisingsfeil uavhengig av forfallsperiode. Videre har det også vist seg at begge modeller gir svært høye prisingsfeil for out-of-money-og deep-out-of-money-opsjoner, men Heston-modellen gir signifikant lavere prisingsfeil (Bakshi mfl., 1997; Kim & Kim, 2004; Mygland & Jørgensen, 2016). Ytterligere gjennomførte Bakshi mfl. (1997), Mygland og Jørgensen (2016), Shu og Zhang (2004) (S&P 500) OG Kim og Kim (2004), Moon mfl. (2009) (KOSPI 200) også en sammenligning for prestasjonen til Heston og Black-Scholes fem dager utenfor utvalgsperioden. Det viste seg at Heston presterte lavere prisingsfeil enn Black-Scholes her også, men at forskjellene var beskjedne sammenlignet med forskjellene i utvalgsperioden. Det vil bli interessant å se om de samme resultatene også er gjeldende i det norske markedet.

1.2 Problemstilling

Empirisk analyse av prestasjonen til Hestons stokastiske volatilitetmodell og Black-Scholes for indeks-opsjoner på det norske markedet.

Målsetningen for denne avhandlingen er å undersøke og sammenligne ytelsen til de to utvalgte opsjonsprisingsmodellene. Dette skal jeg ved å foreta en evaluering av prestasjonen til prisestimatene på OBX-opsjoner ved å se på prisingsfeilen in-sample, én- og fem dager out-of-sample.

1.3 Oppgavens struktur

Oppgaven er inndelt i 7 hovedkapitler. I delkapittel 2.1-2.1.2 presenteres grunnleggende opsjons-teori. Her presenteres opsjonens prisdrivere, konseptet med lønnsomhetsgrad og put-call-paritet. Videre fra delkapittel 2.2 til 2.2.6 gis det en generell innføring i stokastiske prosesser (Markov-, Wiener-, Generalisert wiener-, Geometrisk bruinsk bevegelse, Itô- og CIR-prosess) som er av betydning for prisbevegelsen av underliggende aktiva og opsjonspringsmodeller.

Kapittel 3 gir en presentasjon av opsjonspringsmodellene i oppgaven. Her vil jeg blant annet presentere hvilken forutsetninger modellene bygger på, svakhetene ved Black-Scholes-modellen med hensyn til det norske markedet og avslutningsvis foreta en sammenligning av modellene og se på implikasjonene, med hensyn til opsjonspris, ved endring av parametere mellom modellene.

Kapittel 4 er metodekapittelet. Her presenterer jeg oppgavens forskningsmetode og forutsetningene som tas i analysen i kapittel 5 og 6.

Oppgavens kalibrering presenteres i kapittel 5. Her diskuteres kalibreringsproblemet, utfordringer med lokale- og globale minimumspunkter og kalibreringens øvre- og nedre-grenseverdier. Avslutningsvis i kapittelet, vil presentere resultatene og prisingfeilen for prisestimatene gitt av kalibreringen. Dette gjøres for å finne oppgavens optimale parametersett for Heston-modellen.

I kapittel 6 vil de empiriske resultatene presenteres. Her foretas det en evaluering av prisingfeilene mellom Heston- og Black-Scholes-modellen in-sample, og én- og fem-dager out-of-sample.

Kapittel 7 er en oppsummeringskapittel. Her vil jeg gjengi funnene gjort i analysen og avslutningsvis gi forslag til utvidelser av oppgaven.

1.4 Avgrensninger

I denne oppgaven har jeg hele veien ønsket å være så konsekvent og grundig som mulig. Grunnet tids-, beregnings- og programmeringsbegrensninger har jeg vært nødt til å gjennomføre noen forenklinger i oppgaven. Forenklingene er gjort av beste intensjon og er oppsummert i påfølgende liste:

1. For å forsikre mot asynkronskjevhet i markedsprisen til opsjonene er ikke sluttnoteringen brukt som markedsprisen. Dette skyldes at innhentet datasett ikke er tidsstemplet og derfor er et gjennomsnitt av kjøper- og selgerkurs (bid-ask) brukt som markedspris.
2. Ved utregning av opsjonspriser har jeg antatt at markedet er perfekt og at transaksjonskostnader ikke har en effekt på opsjonsprisene. Videre er det antatt at alle investorer er rasjonelle og at markedet er arbitrasjefritt.
3. Grunnet tidsbegrensninger er det kun ytelsen på prisen gitt for kjøpsopsjoner som blir undersøkt. Potensielt kunne resultatene i analysen vært forskjellige dersom datasettet også inkluderte salgsopsjoner. Put-call-paritet vil til en viss grad sikre konsistens i resultatet.

-
4. Dersom jeg hadde valgt en annen tapsfunksjon i estimeringsprosessen ville det potensielt gitt andre sett med parameterverdier, som eventuelt kunne gitt mer eller mindre prisnøyaktige priser for Heston-modellen. Valget bak tapsfunksjon skyldtes funnene gjort i Escobar og Gschnaidtner (2016).¹
 5. Grunnet tids- og programmeringsbegrensninger ble det ikke brukt et globalt optimeringsverktøy for å finne det optimale settet av parameterverdier til Heston-modellen. For å produsere det best mulige settet er det blitt kalibrert fem ulike estimerte sett med fem forskjellige startverdier. En sammenligning ble gjort og det mest prisnøyaktige settet vil bli valgt ut som det optimale settet.

1.5 Begreper og notasjoner

En opsjon er et finansielt derivat som gir en rett, men ikke en plikt, til å kjøpe eller selge et underliggende aktiva til en forhåndsbestemt pris på et bestemt tidspunkt i fremtiden. For denne retten må man betale en opsjonspremie. Opsjonens underliggende instrument kan være valuta, renter, råvarer og diverse andre verdipapirer. Opsjoner deles hovedsakelig opp i to typer; kjøpsopsjoner (call) og salgsopsjoner (put). Call- og put-opsjoner benevnes som standardiserte opsjoner, men omtales også som *plain vanilla-opsjoner*.

Oppgaven vil kun analysere prisen på call-opsjoner, men under introduksjon til opsjoner vil put-opsjoner diskuteres når det faller naturlig.

Spotpris: S_t er prisen på det underliggende verdipapirets verdi, hvor t er et gitt tidspunkt i underliggendes løpetid.

Innløsningskurs: K er den forhåndsbestemte prisen opsjonen gir rettighetshaver en rett til å kjøpe eller selge underliggende til.

Bortfall/Tid til forfall: T er opsjonens levetid. Opsjoner starter ved $t = 0$, og utløper ved $t = T$. Tiden i mellom gitt ved t som er $T - t$.

Call-opsjon: C er notasjonen for en kjøpsopsjon. Kontanstrømmen til en call-opsjon er gitt ved $C = \max(S_t - K, 0)$.

Put-opsjon: P er notasjonen for en salgsopsjon. Kontantstrømmen til en put-opsjon er gitt ved $P = \max(K - S_t, 0)$.

Europeiske opsjoner: C_e er opsjoner som kun kan utøves ved forfall.

Amerikanske opsjoner: C_a er opsjoner som kan utøves på et hvilket som helst tidspunkt frem til tid T .

Long og short: En investor som kjøper en opsjon går i long posisjon i en opsjonshandel, men dersom man går short, da utsteder man og selger opsjonen.

¹Dette blir nærmere presisert i kapittel 5.

Arbitrasje: Arbitrasje betyr at en opptjener en risikofri gevinst. Slike muligheter er det ofte ekskludert for i finansiell matematikk som en forutsetning. Arbitrasjefri-argumentet er ofte opprettholdt fordi om det hadde eksistert slike muligheter, ville de allerede blitt realisert av aktører i markedet.

Opsjonspremie: Prisen man betaler for en opsjon. Dette blir ikke tilbakebetalt hvis opsjonen ikke blir utøvd.

Replikeringsstrategi: Tanken bak en slik strategi er at ved å investere penger i en portefølje bestående av risiko og risikofrie instrumenter, vil man konstruere en posisjon som burde ha den samme kontantstrømmen som en portefølje hvis arbitrasje-prinsippet holder (Bodie 2003).

Underliggende: Instrumentet som en derivatkontrakt er basert på. Typisk underliggende kan være indekser, råvarer eller aksjer.

Indeksopsjoner: Dette gir investor en mulighet til å kjøpe opsjoner som er basert på en aksjeindeks uten å måtte kjøpe hver individuelle aksje. Dette gir investor en fordel med tanke på transaksjonskostnader.

KAPITTEL 2

Grunnleggende opsjonsteori

I dette avsnittet vil jeg presentere grunnleggende opsjonsteori samt en generell presentasjon av stokastiske prosesser som er av betydning for modellene som vil bli presentert senere i oppgaven. Formålet med dette kapitlet er å gi en generell innføring i helt sentrale begreper og konsepter som er gjeldende i opsjonsteori. Oppgaven har en naturlig progresjon med gradvis økende vanskelighetsgrad. Dette er for å ta hensyn til at leseren ikke nødvendigvis er kjent med de nødvendige prosessene i opsjonsteorien. Kapitlet er hovedsakelig basert på verkene til Björk (2009), Cox mfl. (1985), Fouque, Papanicolaou og Sircar (2000), J. C. Hull og Basu (2016), Lawler (2006), Wilmott (2007).

Det er viktig å presisere at oppgaven ikke gir en fullstendig behandling av de stokastiske prosessene med detaljert bevis. Hensikten er å gi en kortfattet introduksjon for å gi leser en dypere innsikt i prosessene som er av betydning.

2.1 Opsjonens prisdrivere

Prisen på en opsjon vil typisk være avhengig av seks hovedfaktorer; prisen på underliggende (S_0), innløsningskurs (K), tid til forfall (T), volatilitet (σ), dividende(q) og risikofri rente (r). I dette avsnittet vil jeg gi en forklaring, ved bruk av ceteris paribus-prinsippet, hvilken konsekvens en endring i en av de nevnte variablene har på opsjonsprisen. Eksempelet som blir tatt i bruk er hentet fra J. C. Hull og Basu (2016) kapittel 10. Parameterne til opsjonen er i utgangspunktet $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 5\%$ årlig, $\sigma = 30\%$ årlig, $T = 1$ år og dividende = 0.

Prisen på underliggende: Dersom prisen på underliggende aktiva stiger, vil dette gi en positiv innvirkning på verdien til en call-opsjon. Dette kommer av at forskjellen mellom S_t og K blir større. Investor vil da ha retten til å kjøpe underliggende til K og selge den i spotmarkedet til en høyere S_0 .

Innløsningskurs: Lavere innløsningskurs vil gi en positiv virkning på verdien til en call-opsjon. Investor har retten til å kjøpe underliggende til en lavere pris og selge den for S_0 i spotmarkedet.

Tid til forfall: Lengre tid til forfall har en gunstig effekt på verdien til en call-opsjon. Dette kommer av at en investor som går til anskaffelse av en call-opsjon har en begrenset nedside. Dette gir større sannsynlighet for at underliggende stiger til fordel for investor.

Volatilitet: Økt volatilitet har en positiv effekt på call-opsjoner. Dette kommer av at økt volatilitet gir økt sannsynlighet for at underliggende vil bevege seg til fordel for investor grunnet investors begrensede nedside.

Dividende: Dividendeutbetaling har en negativ effekt på verdien til en call-opsjon. Dette kommer av at prisen på underliggende vil avta med tilsvarende dividendeutbetaling.

Risikofri rente: Endring i risikofri rente har generelt en liten virkning på prisen til en opsjon, men på et generelt grunnlag, dersom risikofri rente øker, tenderer prisen på en aksje å falle. En kombinert effekt av økt risikofri rente og en avtagende aksjepris fører til en negativ effekt på prisen til en call-opsjon.

2.2 Lønnsomhetsgrad

Lønnsomhetsgraden til en opsjon gir en indikasjon på om opsjonen er verdt å utøve eller ikke. Lønnsomhetsgrad blir referert som *moneyness* i litteraturen. Lønnsomheten til en opsjon, uansett tidspunkt, er avhengig av hvor prisen på underliggende aktiva ligger relativt til innløsningskursen. Følgende tre uttrykk er brukt for å definere lønnsomheten til en opsjon; **in-the-money**, **out-of-the-money** og **at-the-money**.

En opsjon er **ITM** (in-the-money) hvis opsjonen ved utøvelse produserer en positiv kontantstrøm for holder. En call-opsjon er ITM på tidspunkt t når prisen på underliggende er høyere enn innløsningskursen, $S_t > K$.

Opsjoner er **OTM** (out-of-the-money) hvis den er motsatt av ITM. Hvis en opsjon er OTM vil den ikke bli utøvd. En call-opsjon er OTM hvis innløsningskursen er høyere enn prisen på underliggende ($K > S_t$).

ATM (at-the-money) oppstår når prisen på underliggende er lik innløsningskursen. Uansett bevegelse på prisen på underliggende, vil den føre til at opsjonen enten blir ITM eller OTM.

Lønnsomhetsgraden til call-opsjoner blir gitt ved

$$L_t = \frac{S_t}{K}$$

hvor L_t er lønnsomhetsgraden, K er innløsningskursen og S_t er prisen på underliggende.

Tabell 2.1: Lønnsomhetsgraden til call-opsjoner. Intervallene for lønnsomhetsgrad som blir brukt i oppgaven er hentet fra Dumas mfl. (1998).

Lønnsomhetsgrad	Call
≤ 0.94	dypt OTM
0.94 - 0.97	OTM
0.97 - 1.00	ATM
1.00 - 1.03	ATM
1.03 - 1.06	ITM
≥ 1.06	dypt ITM

Verdien til en call-opsjon, uansett hendelse, vil aldri være mer verdt enn underliggende aktiva. Derfor er prisen på underliggende aktiva den øvre grensen for en opsjonspris $\rightarrow C \leq S_0$. Dersom dette forholdet ikke gjelder, vil man kunne utnytte det til å generere risikofri gevinst ved å kjøpe en aksje og selge en call-opsjon. Verdien til en call-opsjon kan aldri være negativ. Maksimal nedside for en call-opsjon er at den forfaller verdiløst, derav nedre grense på 0. $\rightarrow C \geq \max(S_0 - Ke^{-rT}, 0)$.

2.3 Put-call-paritet

Put-call-paritet er et viktig konsept innen opsjonprisingsteori som beskriver forholdet mellom prisen på en put- og call-opsjon. Put-call-paritet for en ikke-dividende-betalende europeisk opsjon er gitt ved:

$$P + S_0 = C + Ke^{-rT} \quad (2.1)$$

For at dette forholdet skal gjelde må innløsningskursen og tid til bortfall være lik for samme underliggende aktivum. Det er også grunnen til at put-call-paritet ikke er gjeldende for amerikanske opsjoner da de kan utøves før forfall. For å illustrere at dette forholdet er gjeldende kan vi se for oss to porteføljer. Portefølje A representerer venstre side av 2.1, mens høyre side er representert ved portefølje B. Put-call-paritet-formelen viser at verdien på en portefølje A og B må ha samme verdi i en arbitrasjefri situasjon. Hvis vi for eksempel antar at portefølje A er mindre verdt enn portefølje B (ligning 2.2), kan en investor låne til en rente r en mengde lik $P + S - C$. Dvs. at investor kan gå long et finansielt aktiva og en europeisk put-opsjon, samtidig som man shorter en europeisk call-opsjon. Ved forfall må investor betale tilbake renter og avdrag lik $(P + S - C)e^{rT}$. Hvis da $S > K$ på tidspunkt T , vil put-opsjonen være verdiløs og call-opsjonen vil bli utøvd av dens eier. Investor må selge verdipapiret for K . Nettofortjeneste av denne transaksjonen er ligning 2.3.

$$P + S_0 < c + Ke^{-rT} \quad (2.2)$$

$$K - (P + S - C)e^{rT} > 0 \quad (2.3)$$

Hvis nå verdipapirets verdi er mindre enn K på tidspunkt T , vil call-opsjonen ikke bli utøvd, mens put-opsjonen blir utøvd av investor. Igjen vil investor selge verdipapiret for K . Nettofortjeneste vil være den samme som 2.3. Dermed oppstår det en risikofri gevinst som vil bli realisert dersom portefølje A er mindre verdt enn B. Samme resonnement er gjeldende ved omvendt situasjon. Hvis portefølje B var mindre verdt enn A ville det oppstått motsatte posisjoner av det som er blitt beskrevet her.

2.4 Stokastiske prosesser

2.4.1 Markov-prosess

Markov-prosess er en stokastisk prosess som har den egenskapen at den ikke har et minne av fortiden. Dermed er det kun verdien i dag som er utelukkende relevant for å forutsi fremtiden. Dette innebærer at prisen på en bestemt fremtidig tid ikke er avhengig av stien, om det så var en økende eller avtagende trend, da dette ikke er relevant. All nødvendig informasjon er innarbeidet i nåværende verdi. Aksjekurser antas generelt å følge en Markov-prosess grunnet dens minneløse egenskap. Markov-prosess er en paraplybetegnelse for prosesser som har denne minneløse egenskapen.

Markov-prosess er i stor grad i samsvar med teorien om svak form markedseffisiens som sier at prisen på et finansielt aktivum er innlemmet all historisk informasjon (Fama, 1998). Uten en svak form for markedseffisiens kunne man ved bruk av teknisk analyse generert over-gjennomsnittet avkastning kun ved å tolke diagrammer og oversikt over historiske priser.

(J. C. Hull & Basu, 2016; Lawler, 2006; Wilmott, 2007).

2.4.2 Wiener-prosess

En Wiener-prosess er en stokastisk prosess i kontinuerlig tid med drift på 0 og varians på 1. Wiener-prosess er en Markov-prosess og innehar den samme minneløse egenskapen som en Markov-prosess. Wiener-prosess er også Martingale, men i det øyeblikket det introduseres en trend faller den egenskapen bort (Lawler, 2006). I litteraturen omtales Wiener-prosess-prosess og bruinsk-bevegelse om hverandre. Utviklingen i en Wiener-prosess er antatt å følge $\rightarrow z_{t+1} = z_t + \epsilon$, hvor ϵ er en tilfeldig trukket verdi som er standard normalfordelt med $\mu = 0$ og varians på en. Variabel z følger en Wiener-prosess dersom den tilfredsstiller følgende egenskaper:

Egenskap 1

Endringene i z i en kort tidsperiode tilfredsstiller:

$$z_{t+h} = z_t + \epsilon\sqrt{\Delta t} \quad (2.4)$$

Ved $t = 0$, er $E[z_T] = z_0$ og variansen $Var[z_T] = T$. Dette forholdet kan skrives som:

$$\Delta z(t + \Delta t) = \epsilon\sqrt{\Delta t} \quad (2.5)$$

hvor $\Delta z(t + \Delta t) = z_{t+\Delta t} - z_t$. Dette har en forventet verdi på null og standardavvik på $\sqrt{\Delta t}$.

Egenskap 2

Verdien Δz for to ulike korte tidsintervall Δt er uavhengige. Dette kommer av:

$$z_T - z_0 = \sum_i^N \epsilon_i \sqrt{\Delta t} \quad (2.6)$$

hvor ϵ_i er et tilfeldig tall trukket fra standard normalfordeling $\sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Variabelen z har uavhengige inkrement for $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ hvor $z_{t_2} - z_{t_1}$ og $z_{t_4} - z_{t_3}$ er uavhengige stokastiske variabler. Variabelen z forventes også å ha en kontinuerlig sti hvor $P(z_{t_0} = 0) = 1$.

(J. C. Hull & Basu, 2016; Lawler, 2006; Wilmott, 2007).

2.4.3 Generalisert Wiener-prosess

En generalisert Wiener-prosess for en variabel x er gitt ved:

$$dx = a dt + b dz \quad (2.7)$$

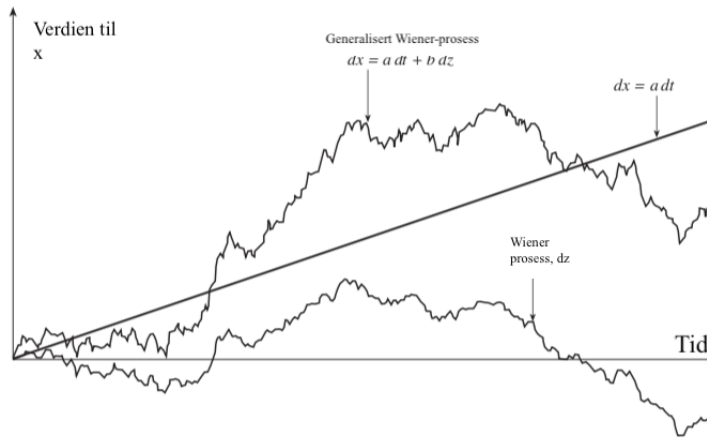
Hvor a og b er konstanter. Ligning 2.7 består av to komponenter, en deterministisk del $dx = a dt$ som viser ved

$$x = x_0 + at \quad (2.8)$$

at a simpelthen er trenden for x . Dermed er økningen i verdien på x over én tidsperiode gitt ved a , og en stokastisk del, også kalt for støyleddet, som tilfører variabilitet for stien til x . Mengden variabilitet gis ved b multiplisert med en standard Wiener-prosess. Standardavviket til en generalisert Wiener-prosess er gitt ved \sqrt{b} .

Størrelsen på b avgjør hvor volatil aksjekursen er fra dag til dag. Den generaliserte Wiener-prosessen forventes å svinge rundt driftsleddet, mens en standard Wiener-prosess forventes å svinge rundt startverdien til prosessen. Dette er illustrert i figur 2.1, med $a = 0.3$ og $b = 1.5$. Hvis prisutviklingen til en aksje fulgte en standard Wiener-prosess, ville ingen tatt til bry å investere i aksjemarkedet, da forventet avkastning ville vært lik null (J. C. Hull & Basu, 2016).

Figur 2.1 er en illustrasjon av en simulert generalisert Wiener-prosess sammenfattet med standard Wiener-prosess og en forventet verdi.



Figur 2.1: Generalisert Wiener-prosess med $a = 0.3$ og $b = 1.5$. Figuren er hentet fra J. C. Hull og Basu (2016) kap. 13.

2.4.4 Itô-prosesser

Itô-prosesser er en spesiell type generalisert Wiener-prosess som er gitt ved

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (2.9)$$

Parameterne a og b er en funksjon av verdien til underliggende variabel x og tid t . Dvs. at den forventede driften og variansen er avhengig av tid t . I en kort tidsintervall mellom t og $t + \Delta t$, og endringen fra x til $x + \Delta x$ gitt ved:

$$\Delta x = a(x, t)\Delta t + b(x, t)\epsilon\sqrt{\Delta t} \quad (2.10)$$

Hvor z er en Wiener-prosess og a er veksten og b er variansen, begge er funksjoner av x og t . Funksjonen $F(x, t)$ oppfyller da følgende ligning:

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x}a + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial F}{\partial x} b dz \quad (2.11)$$

z her er den samme Wiener-prosessen som i ligning 2.9. F er en Itô-prosess med driften

$$\frac{\partial F}{\partial x}a + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} b^2 \quad (2.12)$$

og variansen

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 b^2 \quad (2.13)$$

(J. C. Hull & Basu, 2016; Lawler, 2006; Wilmott, 2007).

2.4.5 Geometrisk bruinsk bevegelse

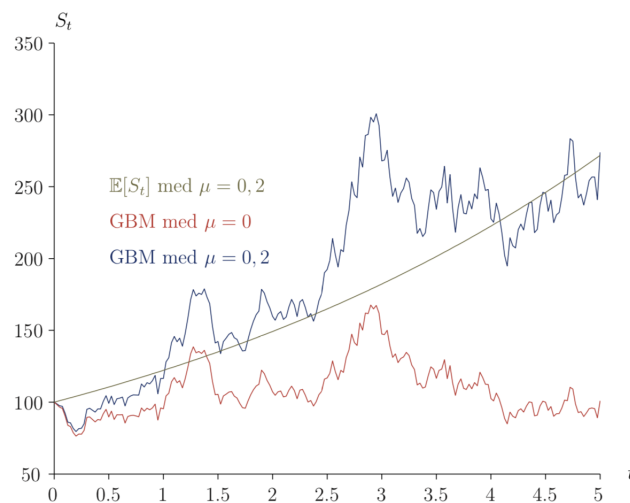
Forutsetningen for geometrisk bruinsk bevegelse (GBB) spiller en signifikant rolle i det finansielle kapitalmarkedet, spesielt i prisutviklingen i aksjemarkedet. En stokastisk prosess S_t sies å følge en GBB hvis dens egenskaper tilfredsstillende følgende stokastiske differensial ligning:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (2.14)$$

hvor dW_t er gitt ved:

$$dW_t = \epsilon \sqrt{dt} \quad (2.15)$$

μ er den kontinuerlig forventede avkastningen på underliggende aktivum, S_t er prisen på underliggende aktivum på tidspunkt t , W_t er en bruinsk bevegelse, også kalt i litteraturen for Wiener-prosess, og σ er volatiliteten til avkastningen på underliggende verdipapir. ϵ er en tilfeldig variable med μ lik 0 og varians lik 1 (J. C. Hull & Basu, 2016; Lawler, 2006; Wilmott, 2007).



Figur 2.2: Eksempel på en simulering av en geometrisk bruinsk bevegelse. Parameterne i figuren er: $S_0 = 100$, $\sigma = 0,3$, $T = 5$ og $dt = 0,025$. Figuren er hentet fra Rasmussen (2009).

2.4.6 CIR-prosess

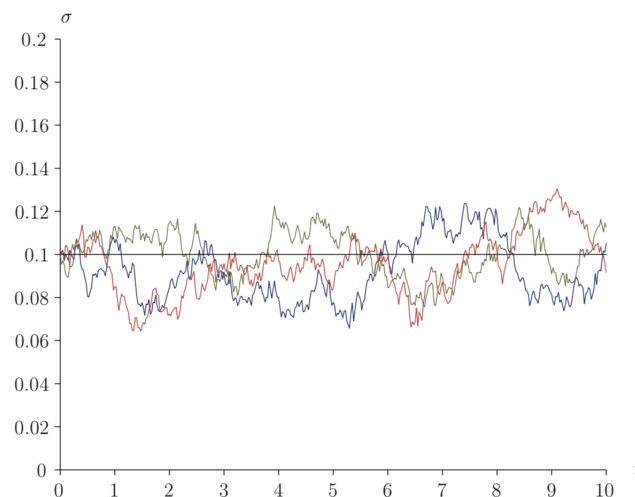
CIR-prosessen ble introdusert av Cox, Ingersoll og Ross i 1985 som en modell for å beskrive utviklingen i den korte spotrenten i kontinuerlig tid (Cox mfl., 1985). Prosessen er viktig i forbindelse med den stokastiske volatiliteten i modell til Heston og er en type Itô-prosess. CIR-prosessen blir også brukt til å beskrive variansen for et aktivum. Variansen er gitt ved:

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_t \quad (2.16)$$

κ , θ og σ er konstanter. dW_t er en Wiener-prosess.

Prosessen har to egenskaper som gjør den godt egnet til å beskrive utviklingen i variansen til et aktivum. Den første er egenskapen om mean-reversion, som betyr at prosessen har den egenskapen at den vil søke tilbake mot et nivå, om den har kommet for langt unna. Mean-reversion er gitt ved θ , som også kalles den langsiktige variansen. Om variansen blir for lav, vil driften vokse og prosessen vil få en positiv trend mot det langsiktige nivået. Omvendt vil en for høy varians gi en negativ drift mot det langsiktige nivået. Hastigheten for mean-reversion er gitt ved κ , som er et mål for hvor stor trekraft prosessen har mot det langsiktige nivået. En høyere κ gir en raskere tilbakevending mot θ .

Kvadratrotegenskapen er en annen viktig egenskap ved CIR-prosessen. Ved å multiplisere kvadratrotten av prosessens verdi med Wiener-prosessen, sikrer man at prosessens verdi aldri blir negativ. σ representerer volatiliteten for variansen, kalles typisk også for vol-of-vol. Denne parameteren multipliseres også med Wiener-prosessen. Ved å tilføre restriksjonen $2\kappa\theta \geq \sigma^2$, sikrer man at variansen til prosessen aldri blir 0. Denne betingelsen er også kjent som *Feller betingelsen* (Cox mfl., 1985).



Figur 2.3: Eksempel på simulering av CIR-prosess. Her er det volatiliteten og ikke variansen som er vist i figuren. Parameterne som inngår i figuren er satt til: $\kappa = 0.7$, $\theta = 0.01$, $\sigma = 0.4$, $v_0 = 0.01$, $T = 10$ og $dt = 0.025$. Figuren er hentet fra Rasmussen (2009).

3.1 Black-Scholes-modellen

Før jeg presenterer selve modellen er det viktig å ha en forståelse av hva modellen faktisk bygger på. Dette har jeg ramset opp i tabell 3.1. Modellens antagelser bygger på ideelle markedsforhold, slik det beskrives av Black og Scholes (1973). Prising av opsjoner er etter risikonøytral verdsettelse og at prinsippet om arbitrasjefri-prising holder (Cox, Ross & Rubinstein, 1979). Sammen med forutsetningene i tabell 3.1 definerer dette deres syn på ideelle markedsforhold. Diskusjon omkring svakheten ved antagelsene vil bli tatt opp senere i kapitlet (avsnitt 3.3). Under de forholdene som er nevnt i 3.1, vil verdien til en opsjon kun være avhengig av prisen på underliggende, tid til forhold og de variablene som er antatt å være kjent og konstant.

Neste avsnitt vil gi en presentasjon av Black-Scholes partiell differensial ligning. Hensikten med å presentere ligningen er for å gi leser en bedre forståelse av hvordan Black-Scholes-formelen, som vi kjenner den i dag, er kommet til.

Tabell 3.1: Forutsetningene for Black-Scholes ligningen.

(i)	Prisen på en aksje følger en geometrisk bruinsk bevegelse.
(ii)	Short salg av finansielle aktivum er tillat.
(iii)	Ingen transaksjonskostnader eller skatt ved handel i kapitalmarkedet.
(iv)	Ingen dividende utbetalinger gjennom opsjonensløpetid.
(v)	Ingen risikofri gevinst er tilgjengelig.
(vi)	Finansielle aktivum handles kontinuerlig.
(vii)	Risikofri rente er kjent og konstant.
(viii)	Konstant volatilitet.
(viii)	Lognormalfordelt aksjepriser.

3.1.1 Derivasjon av Black-Scholes partiell differensial ligning

Utledningen som blir presentert her er hentet i fra J. C. Hull og Basu (2016) kapittel 14.

Black-Scholes-modellen forutsetter at prisdynamikken til en aksje følger en geometrisk bruinsk bevegelse gitt ved

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_t, \quad (3.1)$$

hvor S_t er prisen på underliggende aktiva på tidspunkt t , driften μ antas å være positiv og konstant, σ er den konstante volatiliteten og W_t er en standard Wiener-prosess. Videre antok Black og Scholes under utledningen til formelen at verdien, V , til en opsjon kun var avhengig av S og t . Ved å ta bruk itô's lemma (2.4.4) og merke seg at prisdynamikken følger ligning 3.1 får vi

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW_t, \quad (3.2)$$

Ligning 3.2 viser nå at variabelen V følger nå en stokastisk prosess. Ut i fra ligningen ser vi at V krever minst én t derivat og to S derivater. Neste steg er å sette opp en portefølje bestående av long en opsjon og short Δ av underliggende aktiva. Hensikten med dette er å fjerne den stokastiske delen av ligning 3.2. Verdien til denne porteføljen er gitt ved

$$\Pi_t = V(S, t) - \Delta S, \quad (3.3)$$

Π er verdien til porteføljen, $V(S, t)$ er opsjonens verdi og ΔS er mengden av underliggende som shortes. For å finne andelen Δ for at porteføljen skal bli deterministisk må vi derivere ligning 3.3 og vi får

$$d\Pi = dV - \Delta dS, \quad (3.4)$$

Fra ligning 3.1 har vi dS , og fra itô's lemma har vi dV

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt, \quad (3.5)$$

Vi kan nå innsette dV og dS inn i ligning 3.4 og får

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - \Delta ds, \quad (3.6)$$

Ligningen er fortsatt stokastisk. For å omgjøre den til en deterministisk ligning må vi fjerne den stokastiske komponenten ds .

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dS, \quad (3.7)$$

Vi kan omgjøre uttrykket i 3.7 til $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$. På denne måten blir vi kvitt støyleddet, som er hovedhensikten ved å konstruere porteføljen. Dermed får vi

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt, \quad (3.8)$$

Porteføljen gitt ved ligning 3.8 er nå deterministisk. Avkastningen til en mengde Π investert i en risikofri aktiva vil ha en forventet vekst på $r\Pi dt$ i tid dt . Dersom $d\Pi > r\Pi dt$, kunne det gitt en risikofri avkastning ved å låne mengde Π for å investere i porteføljen. Avkastningen til denne risikofrie strategien ville vært større enn kostnaden til å låne. Hadde derimot $d\Pi < r\Pi dt$, ville man kunne shorte porteføljen og investert Π i banken. Uansett hva situasjon er, vil en tjene en øyeblikkelig risikofri gevinst. Derfor er

$$d\Pi = r\Pi dt, \quad (3.9)$$

Dette støtter forutsetningen om arbitrasjefri-prising. Ettersom det nå er to ligninger for Π , kan vi sette dem lik hverandre. Det gir oss

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt = r \left(V - S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt, \quad (3.10)$$

Fra tidligere av har vi at $\frac{\partial V}{\partial S} = \Delta$ er null, derfor kan vi flytte på ligningen og få Black-Scholes kjente partiell differensial ligning.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (3.11)$$

3.1.2 Black-Scholes-modellen

Tabell 3.2: Notasjoner Black-Scholes.

S_t	Prisen på underliggende aktiva på tidspunkt t .
S_0	Næverende pris i spotmarkedet.
K	Opsjonens innløsningskurs.
T	Dager til bortfall.
r	Risikofri rente.
σ	Volatiliteten til avkastningen.
q	Dividende.

Prisen på en europeisk call-opisjon gitt ved Black-Scholes-modellen med dividende utbetalende instrument, C_{BS} , i lukket form er gitt ved følgende formel¹:

$$C_{BS} = S_t e^{-qr} N(d_1) - K e^{-rt} N(d_2), \quad (3.12)$$

der

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad (3.13)$$

og

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \quad (3.14)$$

Videre er N en standard Gaussian kumulativ distribusjons funksjon gitt ved

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-y^2/2} dy. \quad (3.15)$$

Black-Scholes-modellen krever fem innsatsfaktorer hvorav alle er antatt observerbare, sett bortifra volatilitet. Standardavviket til log-avkastningene er den eneste uobserverte parameteren som må estimeres. Dette forklarer også grunnen til modellens popularitet i den finansielle verden.

¹Denne varianten av Black-Scholes blir ofte også omtalt som Black-Scholes-Merton modell på grunn av Robert Mertons bidrag. Hovedsakelige forskjellen mellom Black-Scholes og Black-Scholes-Merton er at formelen nå tillater dividende utbetaling. Videre i teksten vil jeg fortsette å referere modellen som Black-Scholes.

3.2 Volatilitet

For å bruke Black-Scholes-formelen er det nødvendig å ha numeriske estimater av alle innsatsfaktorer. Nødvendig inngangsdata er S_t, K, r, T og σ . Det er hovedsakelig to fremgangsmåter for estimering av volatilitet; *historisk volatilitet* eller *implisitt volatilitet*.

3.2.1 Historisk volatilitet

En standard ved bruk av historisk volatilitet (σ^H) er å bruke historisk data for den samme perioden som tid til forfall. Fremgangsmetoden er veldig enkel. Man regner frem til standardavviket til underliggendes log-avkastning multiplisert med tidslengden. Ved bruk av grunnleggende statistikk kommer vi frem til log-avkastningen til en underliggende aktiva ved

$$R_t = \log \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

σ er gitt ved

$$\sigma^H = \sqrt{\frac{v}{\Delta t}}$$

hvor variansen v til utvalget er gitt ved

$$v = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (R_t - \bar{R}_n)^2,$$

$\bar{R}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n R_t$ er utvalgets gjennomsnitt.

Et av hovedargumentene mot bruken av historisk volatilitet er at volatilitet ikke er konstant, men stokastisk, samt at et estimat for volatilitet for fremtiden skal være fremadskuende og ikke et estimat av fortiden.

3.2.2 Implisitt volatilitet

Implisitt volatilitet (σ^I) er således den volatiliteten som gir markedsprisen på opsjoner når den innsettes i Black-Scholes.

$$C_{BS}(S_t, K, T, \sigma^I) = C^{obs}$$

Implisitt volatilitet for en call- og put-opisjon er den samme dersom innløsningskurs og tid til forfall er den samme. Dette sørger put-call-pariteten (avsnitt 2.1) for. Bruken av implisitt volatilitet vil således gjenspeile forventningene for fremtidig bevegelse og er dermed fremtidsretta, mens historisk volatilitet kun ser bakover.

I motsetningen til en rett linje (konstant volatilitet), blir det ofte observert at opsjoner som er dypt ITM eller dypt OTM blir handlet til en implisitt volatilitet som er høyere enn ATM-opsjoner. Grafen til den observerte implisitte volatiliteten ligner ofte et smil, derav *volatilitets-smil*. Et eksempel på volatilitetssmil kan ses i figur 3.6. Dette kommer jeg tilbake til litt senere i dette kapittelet (avsnitt 3.3.3).

3.3 Svakheter ved Black-Scholes-modellen

Modellen har en rekke forutsetninger som ikke er i tråd med den virkelige verden. Dette skyldes at de ideelle markedsforholdene, som Black og Scholes forutsetter i deres modell, ikke klarer å fange opp de nødvendige egenskapene i kapitalmarkedet. For det første antar modellen normalfordelt log-avkastning. Dette er blitt kritisert fra flere hold (Mandelbrot, 1963). Ekstreme hendelser, fete haler, høye topper og volatilitetsklynger utfordrer ideen om Gaussisk fordeling (Bacmann & Gawron, 2004; Christoffersen, Diebold & Schuermann, 1998). Modellen antar også konstant volatilitet. Dette er også blitt bevist empirisk at det ikke er noe hold i. I tillegg beviser volatilitetssmilet et klart brudd på denne forutsetningen.

Svakhetene som innledningsvis ble nevnt vil jeg nå gå nærmere inn på, og legge frem implikasjonene de kan bringe. For å ikke kun støtte meg på empirisk forskning, som tar som regel for seg S&P 500-indeksen, har jeg valgt å gjøre mine egne estimeringer for å vise at svakhetene ved modellen også er gjeldende for OBX-indeksen.

3.3.1 Svakheter ved Gaussisk fordeling

Forutsetningen om normalfordelt log-avkastning er blitt kritisert empirisk utallig ganger, også så tidlig som i 1963 av Mandelbrot. Økonomer har lenge trodd at prisen i et spekulativt marked følger en *random walk* (Fama, 1965), som er basert på to grunnleggende antagelser:

(i) prisendringene er uavhengige tilfeldige variabler, og (ii) at endringene samsvarer med en viss sannsynlighetsfordeling.

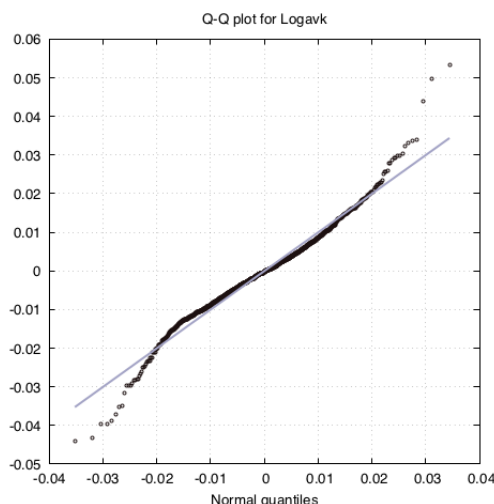
Gaussisk fordeling, også kalt normalfordeling, blir ofte tatt i bruk som et konsept til å beskrive fordelingen av avkastningene til et finansielt instrument. Grunnen er til dels at visse typer av observert data med god tilnærming er normalfordelt. Parametere som inngår i en normalfordeling er; μ , σ , e og π .

μ og σ angir henholdsvis teoretisk gjennomsnitt og standardavvik for x , e er grunntallet for den naturlige logaritmen og π er tilnærmet lik 3.14159.

Tetthetsfunksjonen til en normalfordeling er gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

En normalfordeling har egenskaper som tilsier at det er symmetri rundt dens teoretiske gjennomsnitt μ , derav en skjevhet = 0. Median og typetall er den samme som teoretisk gjennomsnitt og kurtose er lik 3. Egenskapene som er blitt nevnt er ikke godt nok egnet til å beskrive og fange sannsynligheten for ekstreme hendelser i markedet. Videre har man ved empiri bevist at faktiske avkastninger i kapitalmarkedet har tykkere haler og høyere topper enn en normalfordeling (Bacmann & Gawron, 2004; Christoffersen mfl., 1998).

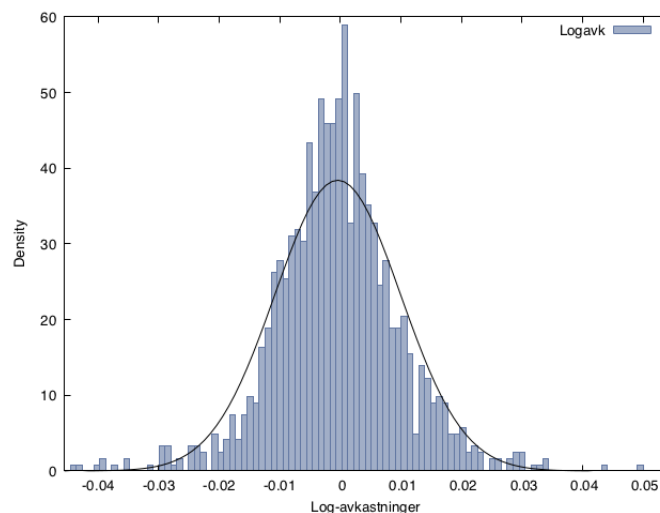


Figur 3.1: QQ-plot av daglige log-avkastninger OBX Total Return Index sammenlignet med normalfordeling. Figuren viser tykke haler eksisterer i log-avkastningene. Avkastningsserien er fra 11.03.2013 til 08.03.2018. Skjevhet: 0,094 og ex. kurtose: 2,43.

Tabell 3.3: Normalitetstest av log-avkastningene OBX Total Return Index.

Jarque-Bera	P-verdi
309,499	6,21001e-68

I figur 3.1 har jeg testet for normalitet ved bruk av en normalitetstest introdusert av Jarque og Bera (1980). Kort oppsummert er nullhypotesen at avkastningsserien er normalfordelt mens den alternative hypotesen er at den ikke er normalfordelt. Det vi ser, fra den daglige avkastningsserien, er at den ikke er normalfordelt fordi p-verdien ≈ 0 . Dersom avkastningsserien var normalfordelt skulle observasjonsverdiene ligge på en rett linje i QQ-plottet. Formen til figur 3.1 tilsier at man kan tolke det som at serien fra 11.03.2013 og frem til 08.03.2018 inneholder fetere haler enn normalfordeling. Jeg har også vist i figur 3.2 en frekvensfordeling av log-avkastningene sammenlignet med normalfordeling, som også illustrerer konseptet med skjevhet og kurtose, som også går i mot forutsetningen om normalfordelt log-avkastning i avkastningsdata.

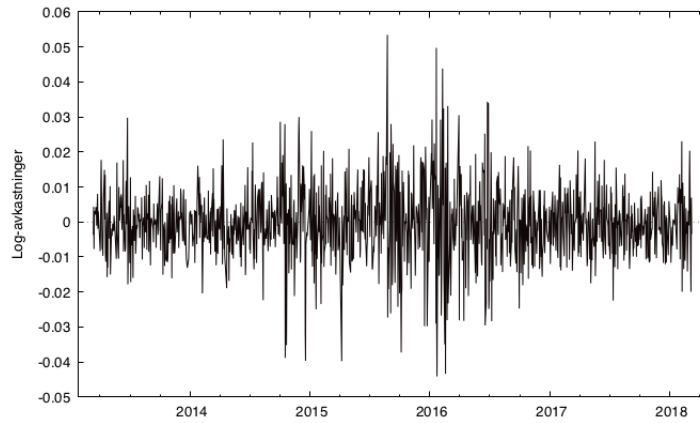


Figur 3.2: Frekvensfordeling av log-avkastninger på OBX-indeksen sammenlignet med normalfordeling. Avkastningsdata fra 11.03.2013 til 08.03.2018.

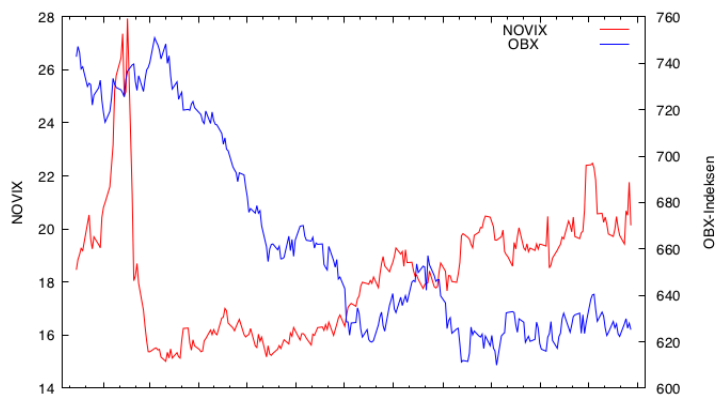
3.3.2 Volatilitetsklynger og Leverage effect

Empirisk undersøkelse har vist at finansiell avkastningsserier inneholder volatilitetsklynger (Bollerslev, 1986). Store avkastningstall forventes å følge store avkastningstall, og små avkastningstall forventes å følge små avkastningstall. Sagt på en mer teoretisk tilnærming: nåværende volatilitet har en tendens til å være positivt korrelert med sitt nivå i den umiddelbart påfølgende perioden. Et eksempel på dette fra det norske aksjemarkedet kan vi se i figur 3.3

Black viste i 1976 at avkastninger til underliggende aktiva er negativt korrelert med volatilitet, og dette er kjent som “leverage effect” på engelsk. Intuisjonen bak tankegangen er at når prisen på en aksje går opp, går volatiliteten til aksjen ned, og når prisen på aksjen går ned, da øker volatiliteten til aksjen. Dette har en sammenheng med at negative avkastninger fører til mindre forutsigbar reaksjon fra investorer, derav økt volatilitet. På den andre siden, når avkastninger er positive, vil investorer være mer selvsikre på deres investering og volatiliteten vil avta. Figur 3.4 viser det inverse forholdet mellom OBX-indeksen og NOVIX, og at det dermed eksisterer leverage effect også i det norske kapitalmarkedet. Det inverse forholdet er også blitt dokumentert av en rekke empiriske studier som bidrar til å forsterke feilkilden i prisingsmodellen til Black og Scholes.



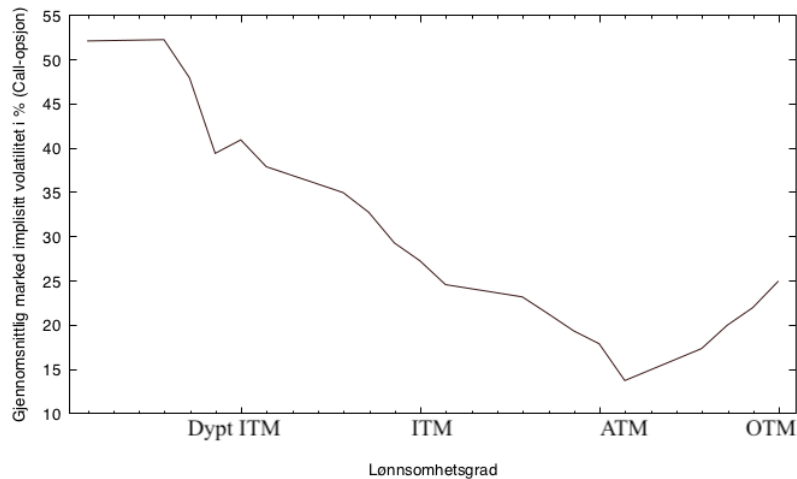
Figur 3.3: OBX Total Return Index daglige log-avkastninger. Fra 11.03.2013 til 08.03.2018. Legg merke til klyngene.



Figur 3.4: Korrelasjonen mellom NOVIX og OBX-indeksen. Utvalgsperioden for figuren er 22.04.2106 til 08.03.2018. Korrelasjon er $-0,2065$.

3.3.3 Volatilitetssmil

Begrepet ble kort nevnt i avsnitt 3.2.2 som volatiliteten til underliggende innsatt i Black-Scholes-modellen som produserer teoretisk pris lik markedspris. Siden Black-Scholes-modellen antar konstant volatilitet, innebærer det at for opsjoner med samme tid til forfall, uansett innløsningskurs, vil den implisitte volatiliteten være lik. Dette har vist seg å ikke stemme (Jackwerth & Rubinstein, 1996).



Figur 3.5: Implisitt volatilitet på europeiske OBX call-opsjoner. Data for figuren er innhentet 08.03.2018.

I figur 3.5 kan man observere en asymmetri, såkalt *volatilitets-smirk*, og det er en kontradiksjon av hva Black-Scholes antar om konstant volatilitet. Den implisitte volatiliteten til OBX-opsjoner med ulik innløsningskurs viser at OTM- og ITM-opsjoner typisk har en høyere implisitt volatilitet enn ATM-opsjoner.

Samlet sett er antagelsene om konstant volatilitet og normalfordelt log-avkastninger basert på forenklete forutsetninger som vil føre til betydelige avvik mellom faktisk markedspris og pris produsert av modellen.

3.4 Heston stokastiske volatilitetsmodell

Her vil jeg presentere Hestons stokastiske volatilitetsmodell. Hovedvekten av denne delen er basert på kilder fra Albrecher, Mayer, Schoutens og Tistaert (2006), Gatheral (2011), Heston (1993), Moodley (2005) og Wilmott (2007)

Tabell 3.4: Notasjoner Heston-modellen.

S_t	Pris på underliggende aktiva på tidspunkt t
r	Risikofri rente
v_t	Variansen på tidspunkt t
θ	Langsiktige variansen
κ	Mean-reversion hastigheten
dW_1, dW_2	To korrelerte Wiener-prosesser med korrelasjonskoeffisient ρ

Black-Scholes-modellen gir en praktisk løsning på lukket form for opsjonsprising. Modellen gir en viktig referanse for vurderingsevnen til andre modeller. Forutsetningene til Black-Scholes er imidlertid urealistisk. Modellens manglende evne til å generere volatilitetssmilet og evnen til å fange opp skjevheten til distribusjonen til avkastningen har ført til at en rekke modeller er blitt foreslått som et bedre alternativ som utvider den klassiske modellen (J. Hull & White, 1987; Scott, 1987; Stein & Stein, 1991; Wiggins, 1987). Et av disse alternativene er Hestons stokastiske volatilitetsmodell med en semi-analytisk løsning for prisen på europeiske kjøpsopsjoner. Hestons stokastiske volatilitetsmodell ble introdusert av Steven Heston i 1993. Hovedforskjellen mellom Black-Scholes-modellen og Heston-modellen er at volatiliteten v er antatt å være en stokastisk prosess, derav opsjonsprisen V er også avhengig av $v \rightarrow V = (S, t, v)$.

Heston antar at prisen på underliggende S følger en diffusjonsprosess

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1,t} \tag{3.16}$$

hvor μ er driften, og $\sqrt{v_t}$ er volatiliteten til underliggende. Volatiliteten følger en kvadratrotsprosess fra Cox mfl., 1985. Modellen er gitt ved

$$dv_t = \kappa (\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_{2,t} \tag{3.17}$$

CIR-prosessen er en såkalt mean-reverting prosess, hvor θ er variansens langsiktige nivå, og κ uttrykker variansens trekkraft mot langsiktige nivået. Med andre ord; jo høyere κ , desto raskere nærmer prosessen seg det langsiktige nivået for variansen. σ er variansens volatilitet, og $\sqrt{v_t}$ sikrer at volatiliteten ikke kan bli negativ, dermed blir det stokastiske leddet uendelig lite når variansen θ nærmer seg 0, og driften samtidig er positiv. $W_{1,t}$ og $W_{2,t}$ er begge Wiener-prosesser med en korrelasjonskoeffisient gitt ved $\rho > 0$:

$$dW_{1,t}dW_{2,t} = \rho dt, \tag{3.18}$$

3.4.1 Prisfastsettelse ved Hestons stokastiske volatilitetsmodell

Utleddning av modellen er hentet i fra Wilmott (2007). For å kunne prisfastsette opsjoner med antagelsen om stokastisk volatilitet må vi ta frem arbitrasjeargumentet fra Black-Scholes. Igjen må vi opprette en arbitrasjefri portefølje, men siden risiko nå er gitt ved to tilfeldige variabler er ikke markedet fullstendig som i Black-Scholes. Dette betyr at vi derfor ikke kan konstruere en opsjon utelukkende med prinsippet om arbitrasjefri-prising, uten å legge til ytterligere forutsetninger. Vi vet samtidig at markedet skulle vært fullstendig om vi hadde hatt ytterligere en opsjon på S , med to verdipapirer, et underliggende aktivum S og en benchmark opsjon J . Da kan vi skape vår risikofrie portefølje Π . Porteføljen består av en opsjon H som vi vil prissette, $-\Delta_1$ andeler av underliggende S og $-\Delta_2$ andeler av benchmark opsjonen J .

$$\Pi = H - \Delta_1 S - \Delta_2 J, \quad (3.19)$$

Endringen av porteføljen kan skrives som

$$d\Pi = dH - \Delta_1 dS - \Delta_2 dJ, \quad (3.20)$$

H og J er funksjoner av variablene t , S_t og v_t . Ut fra en todimensjonal versjon av Itô's-formelen får vi fram hva Δ_1 og Δ_2 må være for at porteføljen skal være risikofri. Ettersom dette er en langtekkelig prosess, så legges utregningen i appendixen (A.1).

Ut fra beregningen i appendix får vi at partiell deriverte ligningen for opsjonen har klare likheter med Black-Scholes-formelen

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2\frac{\partial^2 H}{\partial S^2} + \rho\sigma vS\frac{\partial^2 H}{\partial S\partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2v\frac{\partial^2 H}{\partial v^2} \\ & + rS\frac{\partial H}{\partial S} + \{\kappa[\theta - v_t] - \wedge(S, v, t)\sigma\sqrt{v}\}\frac{\partial H}{\partial v} - rH = 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

Hestons løsning på semi-analytisk form baserer seg på risikonøytral verdsettelse. Prisen på en europeisk kjøpsoppsjon på tidspunkt t med kontinuerlig dividenderate q , og tid til forfall T er gitt ved

$$C(S, v, t) = S_t e^{-qT} P_1 - e^{-rT} K P_2, \quad (3.22)$$

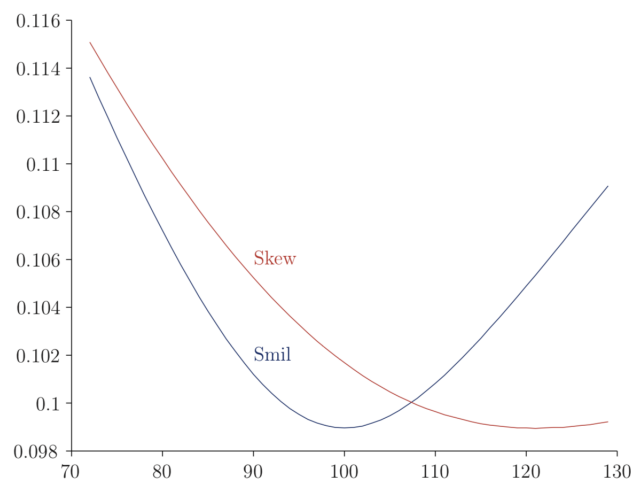
P_1 og P_2 er betingede sannsynligheter for at opsjonen har positiv lønnsomhetsgrad ved forfall. $S_t e^{-qT} P_1$ er nåverdien til underliggende og $e^{-rT} K P_2$ er verdien til innbetalingen fra innløsningskursen. For at Heston-modellen skal produsere risikonøytrale verdier må en rekke betingelser være oppfylt. Disse er listet opp i appendix del A.1.1. Teksten vil ikke utdype mer enn å liste opp betingelsene. Dersom leser er interessert og ønsker en bredere innsikt og utdypelse samt bevis, kan dette leses i utgivelsen til selveste Heston (1993), Wilmott (2007).

3.4.2 Fordeler og ulemper med Heston-modellen

Bruken og viktigheten av Heston-modellen har økt signifikant de siste 20 årene, likevel er det ikke en modell uten mangler. Heston-modellen tar mer hensyn til realistiske egenskaper ved det finansielle markedet sammenlignet med Black-Scholes og har derfor ikke de samme svakhetene knyttet til volatilitet og fordelingsdistribusjon. Modellen tillater skjevhet og kurtose i distribusjon av log-avkastninger, samt tar hensyn til negativ korrelasjon mellom avkastning og volatilitet. Modellen gir også tilgang til å endre korrelasjonen mellom underliggende aktiva og volatilitet dersom det er nødvendig. Formelen for europeiske opsjoner er semi-lukket, som gjør modellen rask å kalibrere, men prisen produsert av modellen er ekstremt parametersensitiv og gjør modellen veldig avhengig av god kalibrering. Dette er prisen man må betale for mer realistiske modeller, da økt kompleksitet i modellering gir flere feilkilder. Volatiliteten i modellen har en mean-reverting egenskap, men estimeringen av parameterverdier for volatilitet er utfordrende grunnet at volatilitet ikke er observerbar. En av de åpenbare svakhetene ved modellen i sin råform er at modellen ikke fanger prisen på opsjoner med kort tid til forfall på en god måte. For at modellen skal kunne takle dette må en jump-parameter tilegnes modellen (Mikhailov & Nögel, 2003), og selv da klarer den ikke helt å fange opp den kortsiktige volatiliteten på en tilfredsstillende måte (Bakshi mfl., 1997).

3.5 Sammenligning av modeller

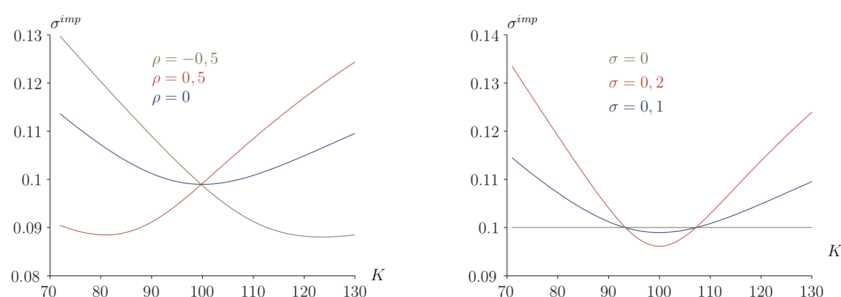
Som tidligere nevnt antar Black-Scholes-modellen normalfordelt log-avkastning og konstant volatilitet. Det er begge forutsetninger som bryter med den virkelige verden (avsnitt 3.3 og 3.3.1). Heston-modellen tar hensyn til stokastisk volatilitet og at fordelinger kan ha skjevhet og kurtose. For å forstå hvilke implikasjoner dette kan ha for prising av opsjoner senere i teksten, skal jeg i dette avsnittet analysere og illustrere hvilken effekt ulike parametere i Hestons stokastiske volatilitetsmodell har på prisen på en opsjon sammenlignet med Black-Scholes.



Figur 3.6: Eksempel på et volatilitetssmil og -skew. Smilets parameterverdier er: $T = 0,5$, $r = 0$, $S_t = 100$. Skewets verdier er: $\rho = -0,25$, $\sigma = 0,08$, $\kappa = 4$, $v_t = 0,011$. Figuren er hentet fra Rasmussen (2009).

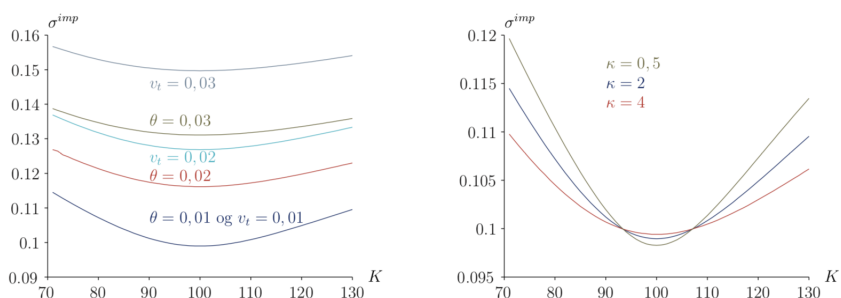
Volatilitetssmil

Figur 3.6 illustrerer hvordan et volatilitetssmil og -smirk ser ut. Black-Scholes-modellen antar at volatiliteten er konstant og antar at smilet er en horisontal linje. Derimot produserer Heston-modellen et alminnelig smil når $\rho = 0$ (figur 3.7). Figur 3.7 viser at volatiliteten for en ITM- og OTM-opsjon er vesentlig høyere enn ATM-opsjoner. ρ blir ofte også betegnet som skjevhetsparameteren, dette ser vi når $\rho \neq 0$ dannes det skjevhet i volatilitetssmilet. Positiv ρ gir høyere volatilitet for OTM-opsjoner sammenlignet med ITM, samt at volatiliteten øker ved økende innløsningskurs. Når ρ er negativ ser vi at ITM-opsjoner har høyere volatilitet sammenlignet med OTM-opsjoner, samt at volatiliteten faller når innløsningskursen øker.



Figur 3.7: Volatilitetssmil, når ρ og σ varierer. Figuren er hentet fra Rasmussen (2009).

Krumningen på smilet er gitt ved σ , og omtales ofte som smil-parameteret. Figur 3.7 viser hvilken effekt de ulike σ -verdiene har på hvor fremtredende smilet er. Volatiliteten er den samme for alle innløsningskurser når $\sigma = 0$. Ved minkende σ konvergerer volatiliteten mot Black-Scholes. Når σ øker fører det til en økt konvekksitet og gjør smilet mer prominent, og man får høyere volatilitet for ITM- og OTM-opsjoner, og en lavere verdi for ATM-opsjoner. Dette gir også mening intuitivt, da mer volatil volatilitet gir høyere sannsynlighet for større ekstreme bevegelser.



Figur 3.8: Volatilitetssmil når θ , v_t og κ varierer. Figuren er hentet fra Rasmussen (2009).

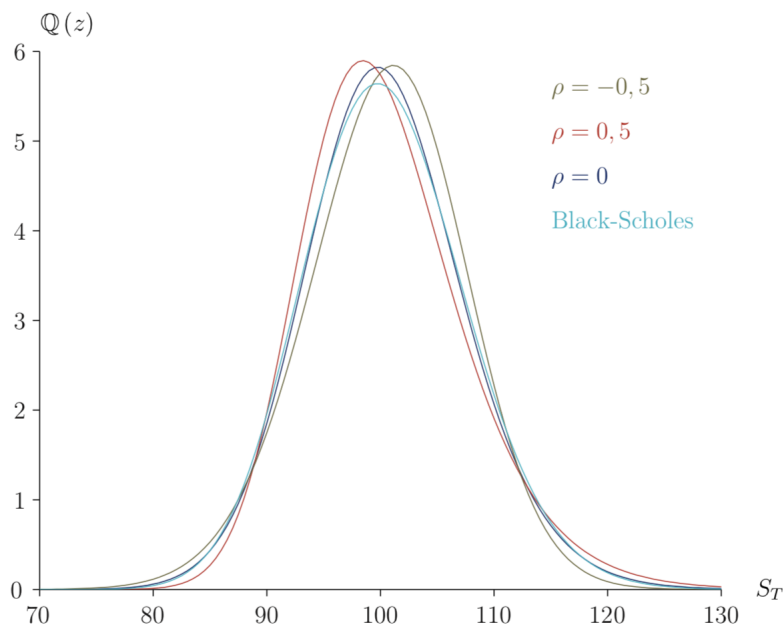
Effekten κ har på volatilitetssmilet minner veldig om effekten fra σ . Der σ genererer selve smilet, bestemmer κ hvor spiss smilet skal være. Dette er illustrert i figur 3.8. Figuren illustrerer også at en lavere κ -verdi gir et spissere smil, og det omvendte er gjeldende ved økende κ , da smilet flater ut. Mean-reverting-parameteren har en signifikant effekt på smilet, men er ikke i seg selv et smil-parameter, da den er konstruert av σ , men heller bidrar til å forsterke smilet.

θ og v_t representerer forholdsvis den langsiktige volatiliteten og den nåværende volatiliteten. Effekten på volatilitetssmilet ved å endre på parameterne er vist i figur 3.8, som viser at de

hver for seg minner veldig om hverandre, men det er også tydelig av figuren at effekten av $v_t > \theta$. Tilsynelatende vil en endring av initiell varians justere høyden på smilet i stedet for formen. Økning av det opprinnelige volatilitetsnivået flytter volatilitetssmilet høyere for begge parameterne.

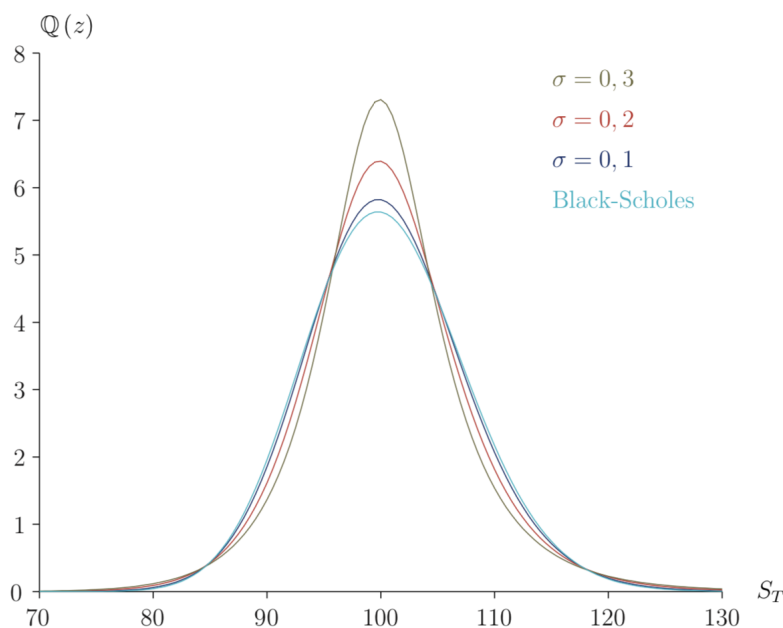
Normalfordeling

Figur 3.9 viser effekten av de ulike ρ -verdiene. ρ tolkes som korrelasjonen mellom log-avkastningene og volatiliteten til underliggende aktiva, og endrer graden av symmetri i fordelingen. En negativ ρ gir en venstreskjev fordeling, som vil gi en økt sannsynlighet for lavere kurser på underliggende aktiva. Karakteristikkene til en venstreskjev fordeling er tykkere haler på venstre side og tynnere haler på høyre side. Ved $\rho > 0$ får vi en motsatt effekt, hvor fordelingen er høyreskjev, som innebærer økt volatilitet på aktivaens pris og avkastninger øker. Figuren viser ved $\rho = 0$ at det er ingen skjevhet i fordelingen, men vi ser at Heston-modellen gir fordelingen kurtoseffekt, som gjør kurven høyere enn Black-Scholes.



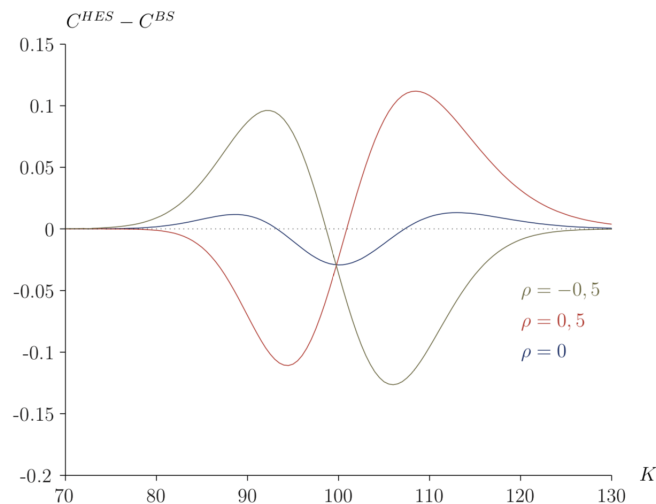
Figur 3.9: Effekten av tettshetsfunksjonen på innløsningskursen ved endring i korrelasjonen ρ mellom volatilitet og prisen på aktivaen. Figuren er hentet fra Rasmussen (2009).

σ påvirker kurtosen (spissen) til distribusjonen. Økning i σ gir en økt kurtose-effekt, hvilket innebærer tykkere haler på begge sider, slik som illustrert i figur 3.10. Når $\sigma = 0$ er volatiliteten deterministisk og derfor er log-avkastningene normalfordelt og modellen konvergerer mot Black-Scholes. Figuren viser at fordelingen til Black-Scholes har lavest kurtose (kurtose = 3), men ved en økning av kurtosen øker sannsynligheten for at sluttkursen for underliggende ender ved ATM, samt en høyere sannsynlighet for ekstreme utfall.



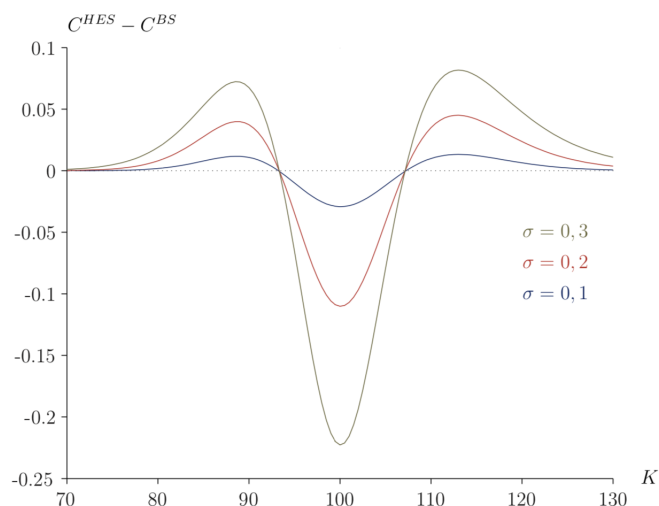
Figur 3.10: Effekten av tetthetsfunksjonen for innløsningskursen ved en endring i σ . Figuren er hentet fra Rasmussen (2009).

Hvilken effekt endring av korrelasjonsparameteren har på prisforskjellen mellom Heston- og Black-Scholes-modellen er illustrert i figur 3.11. Figuren viser at når $\rho < 0$, er prisen gitt av Heston-modellen lavere på OTM-opsjoner sammenlignet med Black-Scholes og at det omvendte gjelder for ITM-opsjoner. Sannsynligheten for lavere innløsningskurs er høyere i Heston-modellen sammenlignet med Black-Scholes når ρ er negativ (figur 3.7), dermed er OTM-opsjoner billigere. ITM-opsjoner gitt av Heston-modellen er relativt dyrere enn de gitt av Black-Scholes. Dette kommer av at fordelingen er venstreskjev, som gir større sannsynlighet for at opsjonen går dypere ITM. Heston-modellen gir høyere priser for OTM-opsjoner og lavere for ITM-opsjoner sammenlignet med Black-Scholes når korrelasjonsparameteren er positiv. Dette kommer av at en positiv ρ gir en høyreskjev fordeling som resulterer i økt sannsynlighet for høy sluttkurs for underliggende.



Figur 3.11: Forskjellen mellom opsjonsprisen i Heston-modellen og Black-Scholes-modellen med forskjellige innløsningskurs, når man varierer korrelasjonen ρ mellom volatilitet og aksjekursen. Figuren er hentet fra Rasmussen (2009).

Endringen av σ gir en symmetrisk effekt for både ITM- og OTM-opsjoner. Figur 3.12 viser at en økende σ gir høyere priser for ITM- og OTM-opsjoner, og lavere priser for ATM-opsjoner sammenlignet med Black-Scholes-modellen. Rasjonaliteten bak dette er at høyere kurtose gir tykkere haler og høyere sannsynlighet for ekstreme verdier som vi også så i figur 3.10. Desto høyere σ , desto større prisforskjell mellom modellene. Opsjoner som er ITM og OTM vektlegges mer i en fordeling med høy kurtose, og blir derfor verdsett høyere i Heston enn i Black-Scholes.



Figur 3.12: Forskjellen mellom opsjonsprisen i Heston-modellen og Black-Scholes-modellen ved forskjellige innløsningskurs, når man varierer σ . Figuren er hentet fra Rasmussen (2009).

Ut fra analysen kan vi i praksis si at Heston-modellen er bedre egnet til å prisse opsjoner enn Black-Scholes-modellen da den tar hensyn til flere antagelser som stemmer med den virkelige verden. Samtidig må vi huske at mer komplekse modeller har større sannsynlighet for feilkilder.

KAPITTEL 4

Metode

I dette avsnittet vil jeg gå nærmere inn på hvilke fremgangsmåter, forutsetninger og teknikker som er benyttet for å samle inn og analysere data. Oppgaven har bydd på visse utfordringer som har krevd ulike forutsetninger som vil bli nøye påpekt.

For å svare på oppgavens problemstilling har jeg benyttet en kvantitativ datainnsamlingsmetode. Informasjonen er hentet gjennom Thomson Reuters - Datastream og Oslo Børs informasjons-tjeneste. I kalibreringen og analysen benyttes det av numeriske data.

Forskningsdesignet til oppgaven er basert på en deduktiv tilnærming. Studien gjennomgår allerede eksisterende teorier og modeller samt drøfter hvem av dem som presterer best i det norske indeks-opsjonsmarkedet.

En rekke forutsetninger om markedspris, risikofri rente, dividende og valg av tidsvariabel for estimering er blitt nødvendig å foreta. Disse kommer jeg nærmere inn på i avsnitt 4.2-4.4.

Analysen av kalibreringsestimaterne og de empiriske resultatene er basert på fremgangsmåten beskrevet i Bakshi mfl. (1997), Kim og Kim (2004). Bruk av ulike tapsfunksjoner i estimering og evaluering er generelt akseptert og bygger kun på forfatters preferanser. Etter å ha gjennomgått flere lignende tekster, har jeg kommet frem til at disse tapsfunksjoner gir en best intuitiv tolkning for leseren.

I avsnitt 4.6 kommer jeg nærmere inn på hvilken fremgangsmåte jeg har benyttet i utregningen av volatilitetsparameteren i Black-Scholes. Det er i all hovedsak tre fremgangsmåter i kalkuleringen av volatilitet og jeg har tatt i bruk to av dem.

I lys av en manglende fastsatt konsensus i kalibreringen av Heston-modellen, er jeg blitt nødt til å gjennomgå flere kalibreringsstudier for å fastslå hva jeg mener er beste praksis. Dette vil jeg komme nærmere inn på i avsnitt 5.1 hvor jeg gjennomgår det som er kjent som kalibreringsproblemet. I avsnitt 5.3 vil jeg presentere tre svært populære optimeringsverktøy, og avslutningsvis i avsnittet oppsummerer jeg og fastslår hvilket verktøy jeg tar i bruk.

4.1 Datakilde

Gjennom Datastream og Oslo Børs informasjonstjeneste har jeg hentet informasjon vedrørende 1-ukes, 1- og 2-måneders NIBOR-rente, og indeks-opsjoner med OBX-indeksen som underliggende for tre påfølgende måneder. Opsjonene forfaller tredje fredagen i forfallsmåned (20. april, 18. mai og 15. juni). Opsjonsprisene og NIBOR-renten er lastet ned 04.04.2018, som er oppgavens utvalgsperiode.

Datasettet består av indekshnivå, sluttkurs, kjøper- og selgerkurs (bid-ask-spread). NIBOR-renten blir i oppgaven brukt som risikofri rente. Dette valget vil jeg komme nærmere inn på i avsnitt 4.3. Indekshnivået ved nedlastningstidspunkt er 730,60. Dette vil bli brukt som opsjonens spotpris ved analysen av opsjonene i utvalgsperioden.

Opsjonskontraktene er delt opp etter tre forfallskategorier: kortsiktige-, mellom-lange- og langsiktige-kontrakter.¹

Valg av underliggende skyldes at OBX-indeksopsjoner ikke kun reflekterer enkeltbedrifter eller sektorer, men det helhetlige bilde av det totale kapitalmarkedet i Norge. For øvrig er indeksopsjoner mer handlet enn opsjoner på enkeltaksjer og gir en mer pålitelig bid-ask-spread. I tillegg vil indeksopsjoner ha mindre støy i data i form av at de ikke er like sårbare på enkelthendelser, som kan gi store utslag på aksjeopsjoner.

Opgaven vil som nevnt i kapittel 1 kun ta for seg call-opsjoner i evalueringen. Totalt er det 64 call-opsjoner med OBX som underliggende tilgjengelig for handel med ulik innløsningskurs for de nevnte forfallsmånedene.

4.2 Markedspris

Sluttkurs henviser til dagens siste registrerte transaksjon. Dersom man antar at sluttkursen representerer markedsprisen, kan dette føre til asynkron-skjevhet da nedlastet data ikke er tidsspesifisert (Dumas mfl., 1998). For å unngå denne problematikken velger jeg å benytte et gjennomsnitt av kjøper- og selgerkurs som markedspris. Kjøper- og selgerkurs representerer henholdsvis høyeste prisen kjøper er villig til å betale og den laveste prisen selger er villig til å akseptere. Den virkelige markedsprisen ligger et sted mellom kjøper- og selgerkurs. Heretter vil gjennomsnittet av bid-ask for hver respektive opsjon antas å være markedsprisen og kategoriseres sådan i teksten videre.

4.3 Risikofri rente og dividende

Som risikofri rente er standarden å ta i bruk statsobligasjoner som proxy (J. C. Hull & Basu, 2016). Denne sedvanen er blitt kritisert og hovedargumentet for det er at renten på statsobligasjoner ofte blir ansett som for lave grunnet dens regulatoriske krav. Dermed er kritikernes løsning å bruke LIBOR (London Interbank Offered Rate), da dette er referanserenten for usikre kortsiktige lån mellom banker i pengemarkedet i London.

¹Kortsiktig: 12 dager til forfall, mellom-lang: 32 dager til forfall og langsiktig: 52 dager til forfall.

Derfor velger jeg å bruke NIBOR (Norwegian Interbank Offered Rate) som risikofri rente etter som det er nærliggende da opsjonene som blir omhandlet i teksten handles i norsk valuta og på Oslo Børs. Det er lastet ned 1-ukes, 1- og 2-måneders NIBOR-rente for opsjonene i oppgaven. Det er regnet ut en rullende gjennomsnitt for renten for å ta hensyn til de ulike forfallsperiodene.

OBX-indeksen er som kjent ikke justert for ordinært utbytte. Dette burde det ha blitt justert for, men jeg har valgt å se bort i fra dette i oppgaven.

Tabell 4.1: NIBOR-rente.

Tid til forfall	Rente %
1-ukes	0,81
1-måneders	0,92
2-måneders	1,02

4.4 Kalender- eller handelsdager

J. C. Hull og Basu (2016) diskuterer hvorvidt man skal ta i bruk kalender- eller handelsdager i behandlingen av tidsvariabelen ved estimering av volatilitetsparametere. Det er også blitt gjort en rekke empiriske undersøkelser rundt dette, og det har vist seg at volatilitet er signifikant høyere når børser er åpne for handel sammenlignet med når børser er lukket for handel (Fama, 1998; French, 1980; French & Roll, 1986). Som et resultat av dette, tenderer praktikanter å bruke antall handelsdager ved estimering av volatilitet.

Samme hensynet vil jeg ta ved estimering av volatilitet og opsjonspris med tanke på tidsvariabelen. Oppgaven går derfor ut i fra at et handelsår tilsvarer $T = 252$, som tilsvarer antall handelsdager i 2017.

4.5 Sortering av datasett

Totalt består datasettet av 64 call-opsjoner. Følgende restriksjoner/krav er satt for at observasjonene kan bli brukt i videre analyse.

1. Alle opsjoner må tilfredstille følgende betingelse

$$C_t \geq S_t e^{-qt} - K e^{-rT}$$

Dette er for å sikre at det ikke er arbitrasjemuligheter i markedet. Observasjoner som ikke bryter betingelsen vil bli fjernet. (Bakshi mfl., 1997)

2. Opsjoner som ikke er handlet ekskluderes.
3. Lønnsomhetsgrad er definert etter 2.2.
4. Opsjoner med lavere enn 0,9 eller høyere enn 1,1 i lønnsomhetsgrad vil bli ekskludert. (Bakshi mfl., 1997)

-
5. Opsjonene er tilegnet lik vektning uavhengig hvor dypt ITM- eller OTM- opsjonen er $w_{ij} = 1$.

Totalt består det endelige datasettet av 45 call-opsjoner etter sortering.

4.6 Black-Scholes volatilitet

Som nevnt i avsnitt 3.1.2 er det kun sigma som er ukjent for Black-Scholes-modellen. For at modellen skal kunne gi korrekte priser på opsjonene, må modellen ha den samme parameterverdien for volatilitet som markedet. Siden dette er markedsregulert ved blant annet tilbud og etterspørsel, er det umulig å vite sikkert den nøyaktige parameterverdien for volatiliteten. Dette er dessverre en størrelse som aldri helt korrekt vil kunne forutses, men flere løsninger er presentert for å takle denne utfordringen.

I litteraturen er det hovedsakelig tre fremgangsmåter som tas i bruk. Enten ved bruk av historiske data, et gjennomsnitt av den implisitte volatiliteten én dag utenfor utvalgsperioden, eller at man rett og slett kalibrerer ved bruk av minste kvadraters metode frem til den volatilitetsverdien som gjenspeiler markedet best. Ved anvendelse av Black-Scholes har valget av volatilitet en betydelig innvirkning på resultatet.

Da modellen ble introdusert i 1973, var ikke hensikten å kalibrere seg frem til riktig volatilitet. Dette er en fremgangsmåte som har kommet de siste 15-20 årene. Man kan argumentere for at man burde bruke denne metoden for å sidestille mulighetene til Black-Scholes i lik grad med Heston. Jeg har allikevel valgt å se bort i fra dette da jeg velger å bruke modellen slik den var tiltenkt å brukes opprinnelig (Nandi, 1996).

Ved anvendelse av Black-Scholes har jeg valgt å benytte to varianter, Black-Scholes-30 (BS-30), og Black-Scholes-imp (BS-imp).

BS-30 estimeres basert på historiske data ved å beregne standardavviket til den kontinuerlige avkastningen til underliggende aktiva 30 handelsdager tilbake i tid.

$$\sigma_{BS-30} = \sqrt{\frac{1}{30-1} \sum_{i=1}^{30} (\mu_i - \bar{\mu})^2},$$

hvor μ_i er den kontinuerlige avkastningen i handelsdager tilbake i tid og $\bar{\mu}$ er den gjennomsnittlige kontinuerlige avkastningen de 30 siste handelsdagene. Deretter annualiseres den historiske volatiliteten ved

$$\sigma_{BS-30}^{Annualisert} = \frac{\sigma_{BS-30}}{\sqrt{\frac{1}{252}}} = \sigma_{BS-30} \sqrt{252},$$

der 252 representerer antall handelsdager i 2018. Historiske data er lett tilgjengelig, men fortidens realiseringer reflekterer nødvendigvis ikke forventningen i markedet og kan føre til forventingskjevnt estimat for underliggende aktivas faktiske volatilitet.

BS-imp er gjennomsnittet av den implisitte volatiliteten til alle opsjonene i utvalget utregnet ved å invertere Black-Scholes-formelen.

$$\sigma_{IV} = BS^{-1}(\hat{C}_i, T, K, S, r, q),$$

der σ_{IV} er den implisitte volatiliteten til underliggende aktiva med utgangspunkt i opsjon i og \hat{C}_i er markedsprisen på opsjon i . Selve inverteringen gjøres ved bruk av Excel VBA. Deretter er et gjennomsnitt av samtlige volatiliteter gitt implisitt av markedet utregnet ved

$$\sigma_{BS-imp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_1 \dots x_m,$$

Siden BS-imp tar utgangspunkt i markedsdata på aktivt handlede opsjoner én handelsdag før utvalgsperioden (03.04.2018), er det forventet at dette estimatet reflekterer forventningene i markedet bedre enn historisk volatilitet. Både σ_{BS-imp} og σ_{BS-30} vil bli behandlet som konstante for opsjoner med samme underliggende.

Til å beregne Black-Scholes implisitte volatilitet og priser, har jeg benyttet koden til Rouah og Vainberg (2007), som er lagt ved i appendix del B.3.3 og B.3.1. Volatiliteten som blir brukt til evalueringen i utvalgsperioden for Black-Scholes er 16,10% (BS-30) og 18,09% (BS-imp).

Modellens resterende faktorer er informasjon som i større eller mindre grad er kjent, altså spotprisen, innløsningskurs, forfallsdato og risikofri rente. De samme faktorene vil også bli brukt i Heston-modellen.

4.7 Heston-parametere

Beskrivelsen av kalibreringen til Heston-modellen, utfordringer, hensyn og fremgangsmåte vil bli presentert i kapittel 5. Heston-modellen har fem ukjente parametere som må kalibreres. Parameternes valgte nedre og øvre grenseverdier med tilhørende diskusjon er introdusert i avsnitt 5.4. Kalibreringens målsetning er å minimere avviket mellom modell- og markedspris ved bruk av innsatt tapsfunksjon.

For kalibreringen er Matlabs `lsqnonlin` valgt som optimeringsverktøy.² Kalibreringen vil ta utgangspunkt i fem ulike startverdier for kalibreringen, og derifra vil det foretas en evaluering av prisestimatene hvert sett produserer for å fastslå kalibreringens beste sett. Evalueringen vil foretas ved å måle prisingsfeilen ved bruk av to tapsfunksjoner, henholdsvis MAE (Mean absolute errors) og MPE (Mean percentage errors) gitt ved

$$\begin{aligned}
 MAE &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |(O_n^* - O_n)| \\
 MPE &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{(O_n^* - O_n)}{O_n}
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

hvor O_n er markedsprisen for opsjon n og O_n^* er opsjonsprisen gitt av de respektive $\hat{\Omega}$ -settene. MAE måler gjennomsnittet av omfanget til det absolutte prisavviket mellom markeds- og modellpris. MPE, i motsetning til MAE, vil kunne resultere i negative resultater og vil derfor gi en god tolkning på direksjonen til avviket, om settet over- eller undervurderer opsjonsprisen i forhold til markedet. Settet med lavest score i begge tapsfunksjoner vil konkluderes som det beste parametersettet. Intuitivt, bør gode parametere forbli konstante over tid. Derfor er det ikke kalibrert parameterverdier etter forfallsperiode eller lønnsomhetsgrad, men for hele settet av opsjoner i utvalget.

Analysen i kapittel 6, vil evaluere ytelsen til Heston, BS-30 og BS-imp i utvalgsperioden. Videre vil det også bli gjennomført en sammenligning én- og fem-dager utenfor utvalgsperioden slik som i Bakshi mfl. (1997), Kim og Kim (2004), Mygland og Jørgensen (2016). I tillegg til MAE og MPE, vil jeg in-sample og out-of-sample bruke MAPE (Mean absolute percentage error) og MSE (Mean square error) for måling av prisfeil, gitt ved

$$\begin{aligned}
 MSE &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (O_n^* - O_n)^2 \\
 MAPE &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left| \frac{(O_n^* - O_n)}{O_n} \right|
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

Ved å kvadrere, fjerner MSE negative verdier, men i gjengjeld forsterker den store prisingsfeil og tydeliggjør prestasjonen til modellene mer. Modellen med lavest kvadratfeil er modellen med lavest prisingsfeil. MAPE måler absolutte prisingsfeilen i prosentuelle termer. MAPE ligner MPE, men den vesentlige forskjellen her er at den ikke forteller om avvikets direksjon, kun hvor stort avviket er fra markedsprisen.

Parameterne til Heston-modellen vil være de samme in-sample som out-of-sample. For Black-Scholes vil det bli utregnet nye parameterverdier for volatiliteten.

²Se avsnitt 5.3 for nærmere diskusjon.

En oversiktlig fremvisning av gjennomsnittlige opsjonspriser er satt opp i tabell 4.2. Tabellen er delt opp i seks kategorier av lønnsomhetsgrad som igjen er inndelt i tre forfallsperioder. Tabellen viser at den gjennomsnittlige opsjonsprisen er stigende med lønnsomhetsgrad og tid til forfall. Prisene varierer fra 0,12 kr for kortsiktige opsjoner med lav lønnsomhetsgrad til 69,04 kr for langsiktige opsjoner med høy lønnsomhetsgrad.

Tabell 4.2: Tabellen viser den gjennomsnittlige opsjonsprisen for ulike kategorier av lønnsomhetsgrad $\frac{S}{K}$ og dager til forfall. S Betegner nivået til OBX-indeksen og K er opsjonen innløsningskurs. Kortsiktige opsjonene har forfall 20.04.2018, mellom-lange har forfall 18.05 og langsiktige har forfallsdato 15.06.2018.

Lønnsomhetsgrad $\frac{S}{K}$	Dager til forfall			Gjennomsnitt
	12	32	52	
$\frac{S}{K} \leq 0,94$	0,12	1,13	3,28	1,51
$0,94 < \frac{S}{K} \leq 0,97$	1,97	4,88	8,99	5,28
$0,97 < \frac{S}{K} \leq 1$	7,70	14,38	19,50	13,86
$1 < \frac{S}{K} \leq 1,03$	18,92	25,75	30,88	25,18
$1,03 < \frac{S}{K} \leq 1,06$	34,38	40,08	44,58	36,68
$1,06 < \frac{S}{K}$	61,50	65,33	69,04	65,29
Gjennomsnitt	20,77	25,26	29,38	

Tabell 4.3 viser gjennomsnittlig Black-Scholes implisitt volatilitet for opsjonene i datasettet. Den implisitte volatiliteten er fordelt over seks lønnsomhetsgrad- og tre forfallskategorier. Fra tabellen kan vi umiddelbart se at antagelsen om konstant volatilitet ikke holder, og at det som en forutsetning vil føre til prisingsfeil. Heston-modellen som tar hensyn til kurtose og skjevhet, burde i teorien gi lavere prisingsfeil sammenlignet med Black-Scholes. Fra tabellen kan vi se at den gjennomsnittlige implisitte volatiliteten har en svak stigende trend med økt lønnsomhetsgrad for alle forfallskategorier, samt at det er ingen klar trend i hvordan tid til forfall påvirker implisert volatilitet i de ulike kategoriene av lønnsomhetsgrad. I tillegg viser det seg at i gjennomsnitt har opsjoner med tidligere forfall høyere implisitt volatilitet enn opsjoner med forfall senere.

Tabell 4.3: Tabellen viser gjennomsnittlig Black-Scholes implisitt volatilitet for kjøpsopsjoner med ulike kategorier av lønnsomhetsgrad $\frac{S}{K}$ og forfall. S betegner nivået til OBX-indeksen og K er opsjonens innløsningskurs. Implisitt volatilitet finner man ved å invertere Black-Scholes-formelen for hver enkelt kjøpsopsjon i utvalget. Koden for VBA er lagt ved i appendix del B.3.3.

Lønnsomhetsgrad $\frac{S}{K}$	Dager til forfall			Gjennomsnitt
	12	32	52	
$\frac{S}{K} \leq 0,94$	15,68%	13,84%	14,51%	14,68%
$0,94 < \frac{S}{K} \leq 0,97$	15,70%	15,36%	15,79%	15,62%
$0,97 < \frac{S}{K} \leq 1,00$	17,46%	17,21%	17,21%	17,29%
$1,00 < \frac{S}{K} \leq 1,03$	19,55%	18,63%	18,31%	18,83%
$1,03 < \frac{S}{K} \leq 1,06$	21,37%	20,07%	19,38%	20,27%
$1,06 < \frac{S}{K}$	21,87%	22,08%	21,61%	21,85%
Gjennomsnitt	18,61%	17,87%	17,80%	

En god kalibrering av Heston-modellen spiller en sentral rolle i å få gode og robuste resultater. Viktigheten av god kalibrering øker i takt med økt kompleksitet av modell og antall nødvendige parametere. Dersom kalibreringen er mangelfull vil det potensielt føre til feilaktige og misvisende resultater. I denne delen vil det bli presentert problemstillinger man må ta hensyn til før selve kalibreringen blir gjennomført. Ved å se på tidligere studier om kalibrering og valg av tapsfunksjoner, vil jeg komme frem til beste praksis og bruke den gjennomgående i kalibreringen av Heston-modellen.

5.1 Kalibreringsproblemet

Publikasjonen til Heston (1993) har ført til en økt popularitet i kalibreringen av optimale parameterverdier blant forskere og markedsdeltakere. Fortsatt er det ingen fastsatt konsensus knyttet til kalibreringsmetodikken til stokastiske volatilitetsmodeller. Dette skaper en utfordring for valg av kalibreringsmetode for denne avhandlingen.¹ Hver metode har sine fordeler og ulemper og derfor er den *perfekte* kalibreringsmetode ikke-eksisterende. Dette fører til at selve estimeringsmetodologien blir minst like viktig som modellen i seg selv.

Kalibreringen av Heston-modellen krever input av markedsdata. Det er hovedsakelig to fremgangsmåter som her har blitt presentert. Den første går ut på å bruke historiske data. Ved at man innsetter tilbaketilgjengelig informasjon som er i samsvar med antall dager til forfall for opsjonene.² Problemet med denne fremgangsmåten ligger i at det er signifikante forskjeller mellom forventet fremtidig verdi og historiske realiseringer, i tillegg til at data vektlegges likt. Dersom

¹Eksempler på kalibreringsmetoder; Dimitroff, Lorenz og Szimayer (2011), Guillaume og Schoutens (2012), Schoutens, Simons og Tistaert (2003)

²Dersom det er 30 dager til forfall brukes historisk data for 30 handelsdager tilbake i tid. Dersom det er snakk om 90 dager til forfall, brukes historisk data 90 handledager tilbake i tid.

denne fremgangsmetoden blir brukt vil kalibreringen overtilpasse parameterne til historiske data og ikke vektlegge nyere informasjon. Dette vil potensielt gi betydelig misvisende parameterverdier, spesielt dersom det har vært store markedsendringer i perioden. Flere studier, blant annet fra Moodley (2005), foreslår å kun bruke fremoverskuende informasjon i kalibreringen under forutsetningen om at historien ikke nødvendigvis forteller oss om fremtidig realisering. Anbefalingen går ut på å bruke nåværende markedspriser på opsjoner og fra dette utlede parameterverdier som reflekterer fremtidsinformasjon. På denne måten vil man kunne fjerne støy fra data og gi parameterverdier som bedre reflekterer nåværende markedsforhold.

Flere forsøk er blitt introdusert for å presentere beste praksis innenfor selve kalibreringen av Heston-modellen, men svært lite er blitt fremmet om valg av tapsfunksjon i estimeringen av opsjonspriser. Hovedvekten av kalibreringer som er fremmet har brukt ASPE (Absolutte Squared Price Error) (Kim & Kim, 2004; Moodley, 2005), RVE (Relative Volatility error) (Dumas mfl., 1998) og APE (Absolute Price error) (Lin, 2002). I utgangspunktet er valg av tapsfunksjon i kalibreringen, på et teoretisk grunnlag, irrelevant. Dersom et optimalt sett med parametere er funnet skal tapsfunksjonen produsere et resultat lik null og at det i all hovedsak er valg av optimaliseringsalgoritme som avgjør resultatet av kalibreringen. Valg av riktig algoritme spiller riktignok en sentral rolle, men en studie gjennomført av Escobar og Gschnaidtner (2016) viser at valg av riktig tapsfunksjon har en betydelig effekt for kvaliteten av kalibrerte parameterverdier.³ Studien ble gjennomført ved å kalibrere Heston-modellen med åtte ulike tapsfunksjoner og se hvilken kalibreringsfeil hver av tapsfunksjonene hadde målt opp mot det riktige settet ved bruk av simulert data. Resultatene tyder på at valg av feil tapsfunksjon i kalibreringen kan by på store kalibreringsfeil. På grunnlag av dette er valg av riktig tapsfunksjon en viktig problemstilling å ta hensyn til.

Avanserte og mer sofistikerte modeller gjenspeiler som regel virkeligheten bedre enn simple modeller. Prisen man må betale er en økt kompleksitet i kalibreringen. En av hovedinnsigelsene mot Heston-modellen er knyttet til kompleksiteten omkring kalibreringsprosessen. Som kjent har modellen fem ukjente parametere (ρ , θ , v_o og σ) som må estimeres. Utfordringene blir heller ikke mindre når informasjon innhentet fra markedsdata ikke er tilstrekkelig nok til å identifisere de nødvendige parametere. Videre har empirien bevist at det nødvendigvis ikke eksisterer ett sett med parametere som produserer gode prisestimer, men at det eksisterer flere sett med parametere som er konsistente med markedsprisen (Bakshi mfl., 1997).

Oppsummert er det ingen fastsatt tilslutning bak en spesifikk kalibreringsmetode eller tapsfunksjon i estimeringsmetoden til Heston-modellen. Bruk av ulike tapsfunksjoner i estimering og evaluering er generelt akseptert og allment brukt i litteraturen.⁴ I denne avhandlingen velger jeg å følge fremgangsmåten presentert av Moodley og bruker kun siste data tilgjengelig som utvalgsperiode for kalibreringen av Heston-parametere.⁵ Unntaket vil være ved utregningen av sigma til BS-30 og BS-imp, som vil bli utregnet ved bruk av historiske data. Moodley bruker ASPE som tapsfunksjon i sin tekst. Jeg velger å gå bort i fra det og følger anbefalingene gitt av Escobar og Gschnaidtner (2016), og bruker RSPE (Relative squared Price Error) som

³Resultatene fra Escobar og Gschnaidtner (2016) viser av de åtte tapsfunksjonene ga ASPE, RVE og APE i snitt henholdsvis 17,4%, 19% og 40,8% kalibreringsfeil fra de optimale parameterverdiene.

⁴Christoffersen og Jacobs (2004) lister opp tidligere arbeid hvor man bruker forskjellige tapsfunksjoner i estimering og evaluering av opsjonsprisinde modeller.

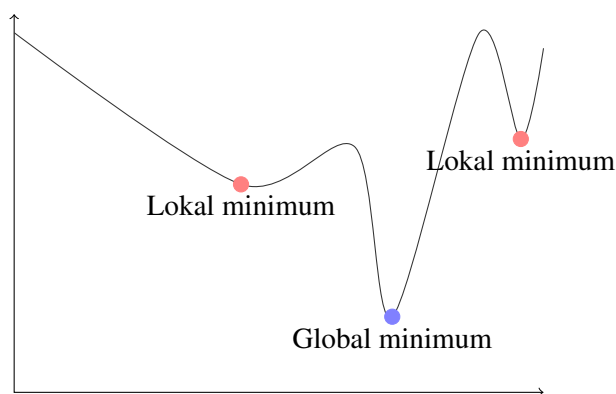
⁵Kalibreringsmetoden presentert av Moodley er blitt sitert 88 ganger på Google Scholar, og viser at denne fremgangsmåten er svært aktuell og produserer gode resultater.

tapsfunksjon i kalibreringen.⁶

5.2 Lokale og globale minimumspunkter

Målsetningen for kalibreringen er som nevnt å minimere prisavviket mellom markeds- og modellpris, og forhåpentligvis gir minimeringen beste løsning tilgjengelig. Før man iverksetter kalibreringsprosessen må man ha innover seg hva det er som betegnes som gode og dårlige parameterverdier. Dersom de estimerte parameterverdiene kun er matematisk gjennomførbare og ikke gir en økonomisk forståelse eller støtte, betegnes det som dårlige parameterverdier. Derfor er valget av gode nedre og øvre grenseverdier svært kritisk for å få gjennomført en god kalibrering. Valg av optimeringsverktøy vil også i verste fall føre til uheldige komplikasjoner knyttet til lokale og globale minimumspunkter i kalibreringsprosessen og er derfor svært avgjørende for robustheten til estimerte parameterverdier.

Optimeringsverktøy som tar i bruk lokale algoritmer er deterministiske og avgjør selv optimal retning og stegstørrelse. En av utfordringene med lokale algoritmer er at de kun utforsker en begrenset delmengde av hele søkeområdet. Uten å ta hensyn til dette ved innsetting av inngangsverdier, vil estimerte parameterverdier potensielt befinne seg *langt* unna et globalt minimum. Startverdiene for parameterne fungerer som en veileder gjennom funksjonens overflate og gjør derfor valget av initialverdier svært avgjørende for robustheten av estimerte parameterverdier. Hovedutfordringen med deterministiske algoritmer kommer til syne når funksjonen produserer flere lokale minimumspunkter. Dette skaper en betydelig utfordring og gjør det vanskelig å avgjøre om løsningen er et globalt eller lokalt minimumspunkt. En metode som ofte blir brukt for å takle denne utfordringen, og som undertegnede også tar i bruk, er ved å definere en rekke kriterier som må oppfylles for at løsningen skal være akseptabel. Dersom det viser seg at algoritmen ikke makter å produsere en løsning, skal den kjøres på nytt med andre inngangsverdier.



Figur 5.1: Illustrasjon av lokal og global minimumspunkt.

$${}^6ASPE = \sum_{n=1}^N (C_i^\Omega(K_i, T_i) - C_i^M(K_i, T_i))^2$$

$$RSPE = \min_{\Omega} \sum_{i=1}^N w_i \left(\frac{C_i^\Omega(K_i, T_i) - C_i^M(K_i, T_i)}{C_i^M(K_i, T_i)} \right)^2$$

hvor $C_{ij}^\Omega(K_i, T_j)$ og $C_{ij}^M(K_i, T_j)$ er henholdsvis opsjonsprisene fra modellen og markedet for ij 'te opsjon med innløsningskurs K_i og tid til forfall T_j .

Valg av gode parameterverdier er uvesentlig dersom man bruker optimeringsverktøy som produserer globale resultater. Globale optimeringsverktøy bruker stokastiske algoritmer som utforsker søkeområdet på en tilfeldig og usystematisk måte. Overlegenheten til stokastiske algoritmer skyldes at den ikke henger seg opp i lokale minimumspunkter, selv om en potensiell løsning er funnet. Dette sikrer at algoritmen utarbeider funksjonens beste løsning. Nedsiden ved globale optimeringsverktøy skyldes metodens kompleksitet og tidsbruk relativt til lokale optimeringsverktøy.

I neste delkapittel vil jeg presentere tre ulike optimeringsverktøy som er svært populære i kalibreringen av Heston-modellen. Her vil jeg gi en kortfattet og generell presentasjon av styrker og utfordringer ved verktøyene.

5.3 Optimeringsverktøy

Microsoft Excel Solver

Microsoft Excel er et av de mest kjente og tilgjengelige statistiske programpakke på markedet. Programvarens popularitet skyldes hovedsakelig dens brukergrensesnitt og pris sammenlignet med andre statistiske programvarer. Solver er et tilleggsprogram som er supplert i Excel, som kan brukes til kalibrering av parametere til Heston-modellen. Standard Solver bruker *Generalized Reduced Gradient* (GRG) metoden.⁷

Baksidene til Solver skyldes for det første at GRG kun produserer lokale resultater, men hovedsvakheten er Solvers manglende egenskap til å håndtere små verdier. En egenskap som er svært viktig i behandlingen av feller-betingelsen (avsnitt 2.4.6). En god håndtering av små verdier er kritisk for å produsere robuste estimater og sammen med metodens tidsbruk gjør at denne metoden ikke blir foretrukket.⁸ Det har vist seg at Excel Solver faktisk har produsert gode og robuste estimater (Mikhailov & Nögel, 2003).

Adaptive Simulated Annealing (ASA)

ASA er et globalt optimeringsverktøy som ble produsert og introdusert av Lester Inger, en teoretisk fysiker.⁹ Denne metoden har flere fordeler, blant annet at den produserer globale resultater og har en åpen kildekode.¹⁰ Modellens overlegenhet skyldes at den har en åpen kildekode som tillater kontinuerlig modifisering og perfektjonering til å produsere de mest robuste estimatene som er mulig. ASA er blitt utviklet slik at den statistisk finner den beste globale løsningen for en ikke-lineær ikke-konkav funksjon.

Metodens største ulempe er, som nevnt i avsnitt 5.2, dens kompleksitet og avhengighet av matematikk og programmeringsbakgrunn. For å produsere de mest pålitelige estimatene som mulig,

⁷Her kan man lese svakheterne med GRG metoden: <https://www.solver.com/standard-excel-solver-limitations-nonlinear-optimization>

⁸Moodley 2005, side 29 kan man se forskjellene i tidsbruk mellom Excel, ASA og Matlab

⁹Beviset for dette kan leses på www.ingber.com.

¹⁰Kort oppsummert betyr dette at kildekoden er åpen og tilgjengelig for alle.

burde denne metoden blitt tatt i bruk. Selv om den globale optimaliserer gir en økt sannsynlighet for å finne en global løsning, kommer dette på bekostning av beregningsfrekvensen, og tar opp til flere timer før en løsning er presentert. En rask kalibrering er svært avgjørende da en modell kanskje må omkalibreres flere ganger innen kort tid, ofte innen et minutt. Grunnet dette er det ikke overraskende at vanlig praksis blant fagfolk i industrien og akademia er å bruke lokale snarere enn globale optimerer. Jeg velger derfor å se bort i fra globale optimerer og velger å bruke en lokal optimaliserer i kalibreringen av Heston.

MATLAB `lsqnonlin`

`lsqnonlin` er en ikke-lineær optimaliseringsfunksjon gitt ved `lsqnonlin(fun, x0, lb, ub)`. Funksjonens oppgave er å minimere funksjonen, *fun*, ved å bruke initiale parameterverdier som er satt inn i, *x0*, for å produsere parameterverdier som er spesifisert etter vektorene i *lb* og *ub* som representerer henholdsvis nedre og øvre grenseverdier for parameterne.

Matlabs `lsqnonlin` er i likhet med Excels Solver også en lokal optimaliseringsfunksjon som er like avhengig av gode inngangsverdier. Fordelen `lsqnonlin` har over Excel er at den tillater å tilegne funksjonen en rekke begrensninger som Solver ikke makter å håndtere. Selv om man for sikkert aldri kan vite hvorvidt løsningen gitt av `lsqnonlin` er et globalt eller lokalt minimum, kan vi si oss fornøyd med resultatet dersom den etterkommer de begrensninger og kriterier som er satt og gir økonomisk støttede løsninger.

Oppsummering

Relativt sett produserer Solver og `lsqnonlin` svært gode parameterverdier sammenlignet med ASA, tatt i betraktning tidsbruk og det faktum at de begge gir lokale resultater.¹¹ Moodley (2005) presenterer en sammenligning av flere kalibreringsmetoder i sin avhandling. Teksten fremviser kvaliteten til de estimerte parameterverdiene til hver metode samt tidsbruken hver metode bruker. Det er viktig å påpeke, som også Moodley gjør, det faktum at Solver og `lsqnonlin` gir gode estimater kun er en isolert konklusjon på bakgrunn av de inngangsverdier han har tatt i bruk for sine parametere og at dette nødvendigvis ikke er en allmenn konklusjon. Resultatet kunne potensielt vært annerledes dersom han hadde tatt i bruk andre inngangsverdier.

Etter en samlet vurdering falt valget på Matlabs `lsqnonlin` som optimeringsverktøy for denne avhandlingen. Valget skyldes hovedsakelig at Matlabs `lsqnonlin` makter å håndtere små verdier, samt at modellen bruker vesentlig mindre tid på selve kalibreringsprosessen.

5.4 Nedre og øvre grenseverdier - Heston-modellen

Initiell varians og langsiktig varians (v_0 og θ): Øvre grense for v_0 er satt til 1 og nedre grense er satt til 0. Volatilitet kan aldri være negativ og volatilitet over 100% er svært urealistisk. VIX-indeksens høyeste notering, siden oppstart i 1990, er på 89,53. Dette var under høyden av finanskrisen i 2008 (Whaley, 2008). Økonomer har også regnet seg frem til volatilitet over

¹¹Beviset for dette kan man se i Moodley 2005 kapittel 3.4.

100% under børskraket i 1987, men dette gjaldt kun i småtidsrom. Sjeldent er volatiliteten til finansielle aktiva over 100% og derfor er 1 satt som øvre grense. De samme grensene er også satt for langsiktig varians (θ) med samme begrunnelse.

Korrelasjon (ρ): Samvariasjonen mellom volatilitet og pris på underliggende er i statistiske termer verdier mellom -1 og 1. Derfor er begrensningen for ρ satt til alle verdier mellom -1 og 1 under kalibreringen.

Mean-reversion (κ): Hastigheten til mean-reversion er gitt en begrensning som garanterer at variansen i CIR-prosessen alltid er strengt positivt.¹²

Vol-of-vol (σ): Volatilitet i seg selv er veldig volatil. Følgelig er det derfor satt en høy øvre grense. For å hindre potensielle restriksjoner er øvre grense satt til 5 og nedre grense satt til 0.

Tabell 5.1: Oppsummering av begrensningene satt i nedre og øvre grenseverdier i kalibreringen av nye parametere i Heston-modellen.

Parameter	Øvre grense	Nedre grense
Initiell varians (v_0)	1	0
Langsiktig varians (θ)	1	0
Korrelasjon (ρ)	1	-1
Vol-of-vol (σ)	0	5
Mean-reversion (κ)	-	$\kappa > 0$

Dersom Matlab gir løsninger som tilfredsstillende de kriteriene jeg har satt for akseptabel løsning, vil jeg godkjenne resultatet.

5.5 Kalibrering

Formålet med kalibreringen er å produsere optimale parameterverdier som minimerer prisfeilen mellom markeds- og modellprisen. Tapsfunksjonen som skal minimeres er gitt ved

$$\min_{\Omega} S(\Omega) = \min_{\Omega} \sum_{i=1}^N w_i \left(\frac{C_i^{\Omega}(K_i, T_i) - C_i^M(K_i, T_i)}{C_i^M(K_i, T_i)} \right)^2 \quad (5.1)$$

hvor Ω representerer settet av parameterverdier, $C_{ij}^{\Omega}(K_i, T_j)$ og $C_{ij}^M(K_i, T_j)$ er henholdsvis opsjonsprisene fra modellen og markedet for ij 'te opsjon med innløsningskurs K_i og tid til forfall T_j . N er antallet innløsningskurs, M er antall bortfallstidspunkter og w_i er en vektingsvariabel. Formålet med vektingen kan være å tilegne forskjellige opsjoner med ulik betydning, litt avhengig av det er man ønsker å undersøke.

Matlabs least-squares non-linear optimaliserer `lsqnonlin(fun, x0, lb, ub)` settes i gang for å minimere funksjon 5.1. Funksjonen minimerer vektor-funksjonen, `fun`, gitt vektorene av innledende parameterverdier, `x0`, og vektorene for nedre og øvre grenseverdier gitt henholdsvis av `lb` og `ub`. Begrensningene innsatt i `lb` og `ub` sikrer at løsningen `lsqnonlin` produserer

¹²Feller betingelsen. Se avsnitt 2.16.

alltid er i intervallet $lb \leq x \leq ub$. `lsqnonlin` bruker interior-reflective Newthton metoden for storskala problemer. I grove trekk er dette en metode for å finne nullpunkter for funksjoner. Metoden gir ikke eksakte løsninger, men en tilnærmedesverdi med høy nøyaktighet. Resultatets nøyaktighet avhenger av gode inngangverdier.¹³ Ettersom `lsqnonlin` er avhengig av initial parameterverdier, x_0 , og at optimalisereren er en lokal og ikke global optimaliserer, er det ingen måte å vite om løsningen er global eller lokal. Derimot vil løsningen `lsqnonlin` gir være akseptabel da den opprettholder restriksjonene i avsnitt 5.4. Innsatt data og programmeringskode for Matlab er lagt ved i appendix del B.1 og B.2. Datamaterialet i `OptionData.m` inneholder risikofri rente, tid til forfall, indekssnivå, innløsningskurs, bid-ask og markedsprisen for opsjonene.

Som empirien har vist, er det nødvendigvis ikke ett sett med Ω som resulterer i gode prisestimer. For å eliminere denne usikkerheten har jeg valgt å kalibrere med fem ulike startparametere. Forhåpentligvis vil det resultere i ett og samme parametersett, men sannsynligheten for dette er svært liten. Derfor forventes det at kalibreringen vil fremkalle fem alternative parametersett. Derifra vil jeg foreta en evaluering og sammenligne prisestimatene hvert estimerte sett bringer, før det vil fattes en beslutning om hvilket av settene som er mest optimal for videre analyse av prisingsfeilen til Heston-modellen.

Kalibreringen er som nevnt ekstremt sensitiv til verdiene i x_0 . Valget av inngangsverdier har derfor en stor påvirkning på hvor godt resultat Matlab gir. For å gjøre valget av startverdier så vennlig som mulig, har jeg valgt inngangsverdier fra andre lignende tekster som har resultert i gode resultater tidligere. Det er viktig å presisere at dette nødvendigvis ikke gir kalibreringen optimale resultater, men å overkomplisere en allerede kompleks kalibrering ser jeg på som svært unødvendig og uhensiktsmessig.

Tabell 5.2: Inngangsparametere A, B, C og D er hentet fra respektive tekster av Bauer (2012), Forde mfl. (2012), Moodley (2005), Samuelson (1973). Startverdiene i parameterne til E har undertegnede lagt ved selv. κ , θ og σ er valgt ut i fra gjennomsnittet til de respektive parameterverdiene i A, B, C og D. ρ er korrelasjonen mellom NOVIX og OBX-indeksen siden oppstart av NOVIX og v_0 er gjennomsnittlig implisitt volatilitet fra 15. januar 2018 og frem til 04. april 2018. Dette er tegningsdatoen på opsjonene med kortest tid til forfall og frem til data ble lastet ned.

Inngangsparametere	κ	θ	σ	ρ	v_0
A	6,5482	0,0731	2,3012	-0,4176	0,1838
B	1,1500	0,0400	0,2000	-0,4000	0,0400
C	3,0000	0,0500	0,5000	-0,5000	0,1500
D	0,6067	0,0707	0,2928	-0,7571	0,0654
E	2,5366	0,0931	0,8659	-0,2065	0,2104

Kalibreringen produserte følgende resultatet listet opp i tabell 5.3.¹⁴

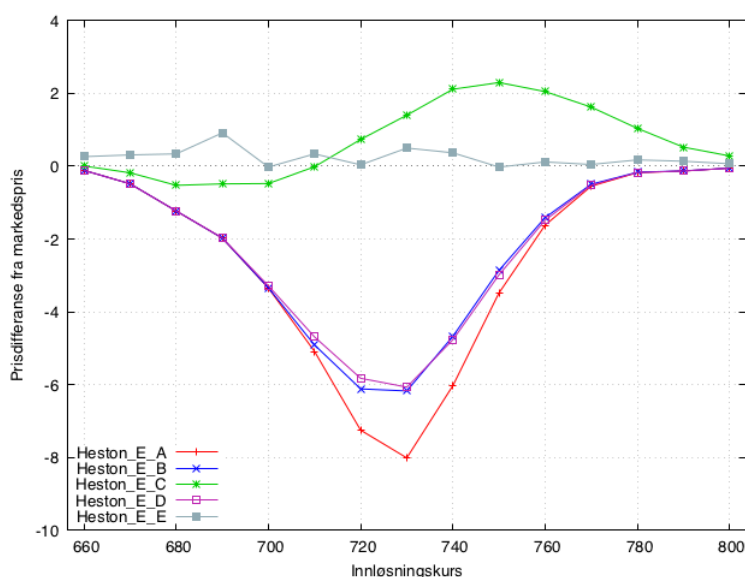
¹³Dersom leser ønsker en dypere innsikt i denne metoden er en god kilde til dette Coleman og Li (1996).

¹⁴Når man kalibrerer en modell til markedsdata, kan man aldri si for sikkert om forskjellene mellom verdier gitt av kalibrereparametere og faktiske observerte verdier skyldes feil valg av modell (modell risiko), eller av feilaktige kalibrerte parametere (kalibreringsrisiko), eller begge.

Tabell 5.3: Kalibrerte parametere til Heston-modellen under ikke-lineær least square optimering.

Estimerte parametere	κ	θ	σ	ρ	v_0
A	14,7454	0,0028	0,0016	0,7906	0,0040
B	18,7086	0,0041	0,0531	0,8856	0,0099
C	12,3312	0,0024	0,3555	0,1996	0,0563
D	14,6936	0,0043	0,0246	0,2028	0,0097
E	8,1768	0,0197	0,9691	-0,1529	0,0835

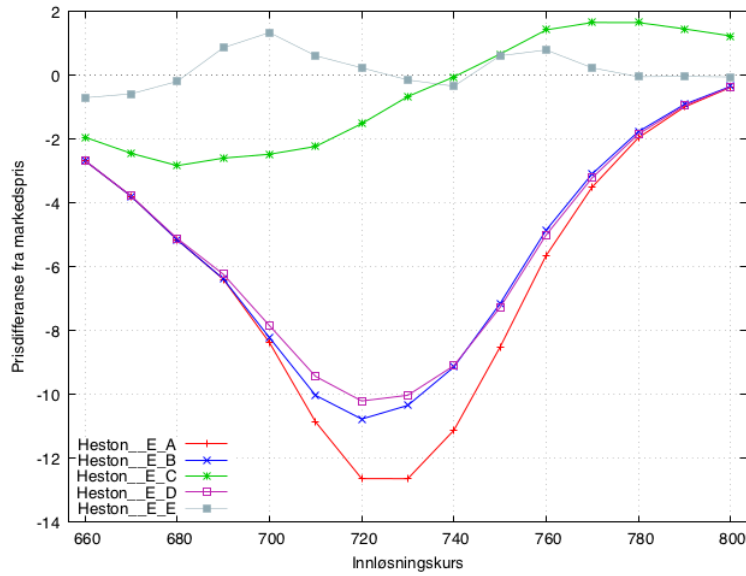
Alle $\hat{\Omega}$ -settene generert av `lsqnonlin` oppfyller grenseverdiene som er satt etter tabell 5.1. Neste steg blir å avgjøre hvilken av de fem estimerte settene som kan brukes som det optimale parametersettet i Heston-modellen.¹⁵



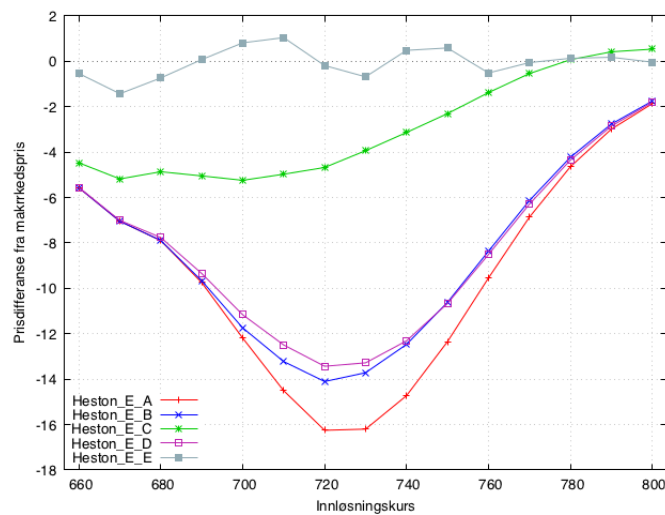
Figur 5.2: Figuren viser prisdifferansen mellom estimerte sett og markedspris for opsjoner med 12 dager til forfall. Data er lagt ved i appendix del B.2.

Figurene 5.2-5.4 illustrerer prisdifferansen mellom de estimerte settene og markedsprisen. Ved første øyekast avslører figurene at det er signifikante forskjeller mellom de beste og dårligste $\hat{\Omega}$ -settene, og at denne trenden er vedvarende for samtlige figurer uavhengig av tid til forfall. $\hat{\Omega}$ -C og -E er settene som produserer priser med lavest differanse fra markedsprisen, uavhengig av tid til forfall. Mens $\hat{\Omega}$ -A, -B og -D er de settene med størst prisavvik. Prisavviket er mest bemerkelsesverdig når opsjonen er ATM og minsker når opsjonen beveger seg mot ITM og OTM.

¹⁵**MERK:** Parametervardiene i $\hat{\Omega}$ som blir valgt som det beste settet blir i videre oppgave definert som optimale. Jeg er klar over at det antageligvis finnes sett som er mer optimale og dersom man hadde kalibrert og produsert parametervardier med et globalt optimeringsverktøy ville man kunne produsert parametersett som gir lavere prisavvik.



Figur 5.3: Figuren viser prisdifferansen mellom estimerte sett og markedspris for opsjoner med 32 dager til forfall. Data er lagt ved i appendix del B.3.



Figur 5.4: Figuren viser prisdifferansen mellom estimerte sett og markedspris for opsjoner med 52 dager til forfall. Data er lagt ved i appendix del B.4.

Tabell 5.4: Viser prisingsavvik for kalibrerte parametersett fordelt etter lønnsomhetsgrad og forfallperiode (kortsiktig, mellom-lang og langsiktig).

	DITM	ITM	ATM	ATM	OTM	DOTM	
Parameter	<0,94	0,94 - 0,97	0,97 - 1,00	1,00 - 1,03	1,03 - 1,06	>1,06	Totalt
Kortsiktig							
MAE							
A	0,1182	1,0816	4,7521	6,7806	2,6581	0,6065	2,6662
B	0,1131	0,9511	3,7646	5,7299	2,6559	0,6065	2,3035
C	0,6173	1,8386	2,2082	0,7178	0,4780	0,2361	1,0160
D	0,1165	0,9999	3,8717	5,5252	2,6244	0,6064	2,2907
E	0,1283	0,0850	0,1950	0,2933	0,4690	0,3060	0,2461
MPE							

Tabellen 5.4 fortsetter fra forrige side							
A	0,9991	0,9866	0,8915	0,4137	0,0718	0,0110	0,5623
B	0,9654	0,8750	0,7129	0,3409	0,0718	0,0110	0,4962
C	-5,2324	-2,0988	-0,4588	-0,0514	0,0125	0,0043	-1,3041
D	0,9893	0,9205	0,7359	0,3301	0,0708	0,0110	0,5096
E	-1,1590	-0,0818	-0,0232	-0,0187	-0,0104	-0,0051	-0,2164
Mellom-lang							
MAE							
A	1,1029	4,5689	9,8160	12,0376	7,3741	3,8661	6,4609
B	1,0014	3,9636	8,1422	10,3734	7,2928	3,8661	5,7732
C	1,4530	1,5444	0,3564	1,4622	2,5271	2,3992	1,6237
D	1,0465	4,1012	8,1810	9,8806	7,0315	3,8500	5,6818
E	0,0383	0,5200	0,4775	0,3333	1,1083	0,4846	0,4937
MPE							
A	0,9841	0,9413	0,8302	0,4951	0,1716	0,0616	0,5806
B	0,8973	0,8194	0,6900	0,4224	0,1695	0,0616	0,5101
C	-1,8649	-0,3446	-0,0328	0,0539	0,0580	0,0378	-0,3488
D	0,9396	0,8487	0,6947	0,4034	0,1633	0,0613	0,5185
E	0,0567	-0,0985	-0,0199	-0,0071	-0,0260	0,0071	-0,0146
Langsiktig							
MAE							
A	3,1685	8,2086	13,5389	15,6544	10,9699	6,8399	9,7300
B	2,9160	7,2533	11,5448	13,6813	10,7057	6,8379	8,8231
C	0,3393	0,9618	2,7209	4,5294	5,1464	4,8400	3,0896
D	3,0068	7,4040	11,4898	13,0702	10,2565	6,7772	8,6674
E	0,1150	0,2875	0,5325	0,6383	0,4430	0,9020	0,4864
MPE							
A	0,9713	0,9166	0,8048	0,5253	0,2307	0,1016	0,5917
B	0,8981	0,8114	0,6869	0,4569	0,2249	0,1016	0,5300
C	-0,1433	0,1019	0,1603	0,1485	0,1075	0,0711	0,0743
D	0,9262	0,8288	0,6845	0,4372	0,2153	0,1006	0,5321
E	-0,0209	0,0283	-0,0325	0,0020	-0,0098	0,0133	-0,0033

Tabell 5.5: Tabellen viser gjennomsnittlig MAE og MPE for de kalibrerte settene.

	A	B	C	D	E
Gjennomsnittlig MAE	6,2857	5,6333	1,9098	5,5466	0,4087
Gjennomsnittlig MPE	0,5782	0,5121	-0,5262	0,5201	-0,0781

Tabellene 5.4 og 5.5 rapporterer MAE, MPE og gjennomsnittlig MAE og MPE for hele settet. Av begge prisingsfeilmålene kan vi se at trendene fra figurene 5.2-5.4 kommer tydeligere frem. I forhold til figurene kan man enklere se omfanget av prisforskjellene mellom settene, og dermed gir bedre forutsetninger til å befeste kalibreringens beste sett. Ikke overraskende, ut i fra figurene, viser tabell 5.5 at i snitt gir de estimerte settene E og C de laveste prisingsfeilene i følge MAE med 0,4087 og 1,9098, og underbygger det vi visuelt kunne se av figurene. Samtidig viser tabell 5.4 at det kun er parametersett E som bedrer prisenøyaktigheten med økt tid til forfall. Dette er en egenskap som er høyst ønskelig og forenlig med andre lignende empiriske tekster.

Vedrørende MPE, er det kun parametersett E som skiller seg ut i positiv forstand. Settet gir betydelig lavere prisingsfeil for både MAE og MPE. Samtlige sett, bortsett fra E, gir svært høy MPE i snitt for alle lønnsomhetsgrad og forfalls kategorier.

Etter en sammensatt vurdering anser jeg parametersett E som det beste settet fra kalibreringen. Settet produserer prisingestimater av høy kvalitet, spesielt for ITM-, OTM- og DOTM-opsjoner som ofte har vært Heston-modellens flaskehals sammenlignet med Black-Scholes. De estimerte settene A, B, C og D gir totalt resultater av lav kvalitet og blir derfor ikke vurdert som det optimale sett.

Parameterverdiene som nå blir brukt til å kalkulere prisene gitt ved Heston-modellen er:

Tabell 5.6: Tabellen viser parameterverdiene som blir brukt til å regne ut prisen til Heston-modellen.

Optimale parametere	κ	θ	σ	ρ	v_0
E	8,1768	0,0197	0,9691	-0,1529	0,0835

Kommentar til det valgte settet

Perfekt kalibrering er som nevnt svært utfordrende for Heston-modellen, og den blir ikke enklere av å bruke et optimeringsverktøy som ikke makter å resultere globale minimumspunkter. Uansett hvor gode startverdier jeg hadde tilført kalibreringen, ville jeg aldri kunne vite om resultatet var et globalt minimum eller ikke. Korrelasjonskoeffisienten ρ viser at kalibreringen resulterte i en negativ korrelasjon mellom avkastning og volatilitet. Dette støtter opp mot mine forventinger før kalibreringen, samtidig som det er konsistent med leverage effekten. Imidlertid hadde jeg forventinger om høyere θ og v_0 .

Totalt vil jeg si meg fornøyd med resultatene fra kalibreringen. Ut i fra de startverdiene og restriksjonene jeg matet Matlab med, ga det meg det optimatoren mener er det optimale resultatet mulig. Jeg må likevel erkjenne at det høyst sannsynlig eksisterer bedre parameterverdier som potensielt ville gitt lavere prisingsfeil. Som et siste notat, vil jeg påpeke at man ikke bør bruke uendelig med tid på å perfektionere kombinasjonen av parametere når modellen i seg selv er ufullkommen.

KAPITTEL 6

Analyse

I følgende kapittel vil jeg analysere og presentere de empiriske resultatene som blir gitt. Fremgangsmåten for evaluering av empiriske resultatet er hentet fra Bakshi mfl. (1997). Evalueringen vil ta for seg ytelsen til prisestimatene både in-sample og out-of-sample. Ytelsen til prisene in-sample blir evaluert ved å sammenligne Heston, BS-30 og BS-imp med markedsprisen fra utvalgsdagen. Resultatene fra in-sample vil vise hvor konsekvente parameterne er med å produsere opsjonspriser med lav prisingsfeil. Generelt gir modeller med flere parametere en bedre fit in-sample, men gir ikke nødvendigvis bedre fit out-of-sample. Analysen vil bestå i å sammenligne resultatene fra modellen med én- og fem-dager utenfor utvalget. Dersom det fra analysen viser seg at Heston ikke er i stand til å gi lavere prisingsfeil sammenlignet med Black-Scholes, vil det bli konkludert at Heston ikke er hensiktsmessig for forecast av opsjonspriser i fremtiden.

6.1 Empiriske resultater

6.1.1 In-sample prisingsfeil

Tabell 6.1 viser prisingsfeilen for alle opsjonene målt etter tapsfunksjonene i kapittel 4. Tabellen viser at Heston-modellen i snitt gir lavest prisingsfeil med hensyn til MPE, MAPE, MAE og MSE for alle opsjoner i utvalget.¹ Resultatet er som forventet og kan tyde på at modeller med flere parametere er best fit in-sample. Tabellen illustrerer også svakheten ved å benytte historiske data til estimering av volatilitet dersom man ser på resultatene fra BS-30 og BS-imp. Totalt viser resultatene at BS-30 ikke er godt nok spesifisert da den gir nesten 3 og 8 ganger så høyere MAPE-verdier enn Heston og BS-imp. BS-imp gir overraskende gode resultater, tatt i betraktning at den kun har en ukjent parameter.

Tabell 6.1: Tabellen viser gjennomsnittlig prisingsfeilen in-sample for alle opsjonene i utvalgsperioden, uavhengig av lønnsomhetsgrad og forfallsperiode.

In-sample evaluering			
	Heston	BS-30	BS-imp
MPE	0,0089	0,1418	0,0004
MAPE	0,0178	0,1428	0,0477
MAE	0,5107	2,2780	1,2775
MSE	0,3896	9,4689	2,2759

Tabellene 6.2 til 6.4 sorterer prisingsfeilen til modellene i henhold til forfallsperioder (kortsiktig, mellom-lang og langsiktig). Heston-modellen viser også her sin overlegenhet uavhengig av forfallsperiode. BS-30 har høyere prisingsfeil for kortsiktige opsjoner sammenlignet med mellom-lange og langsiktige opsjoner med hensyn til MAPE og MPE. Dette er i overensstemmelse med dokumentert empiri som har belyst at volatilitetssmilet er mindre prominent for opsjoner med lengre tid til forfall. Videre viser tabellene 6.3 og 6.4 at BS-imp i snitt underpriser mellom-lange- og langsiktige-opsjoner, mens Heston og BS-30 i snitt overpriser opsjonene uavhengig av forfallsperiode.

Tabell 6.2: Tabellen viser prisingsfeilen til utvalget for opsjoner med 12 dager til forfall.

Kortsiktig			
	Heston	BS-30	BS-imp
MPE	0,0138	0,1482	0,0261
MAPE	0,0150	0,1495	0,0551
MAE	0,3120	1,0760	0,6767
MSE	0,1618	2,4581	0,6192

¹Dersom leser ikke er kjent med eller husker beskrivelsene for akronymene MPE, MAPE, MAE og MSE, kan man se tilbake til kapittel 4, ligning 4.1 og 4.2 for nærmere beskrivelse og tolkning tapsfunksjonene gir.

Tabell 6.3: Tabellen viser prisingsfeilen til utvalget for opsjoner med 32 dager til forfall.

Mellom-lang			
	Heston	BS-30	BS-imp
MPE	0,0091	0,1384	-0,0135
MAPE	0,0197	0,1397	0,0477
MAE	0,5630	2,3540	1,4925
MSE	0,4365	9,2546	2,5433

Tabell 6.4: Tabellen viser prisingsfeilen til utvalget for opsjoner med 52 dager til forfall.

Langsiktig			
	Heston	BS-30	BS-imp
MPE	0,0038	0,1388	-0,0116
MAPE	0,0186	0,1394	0,0403
MAE	0,6570	3,4040	1,6634
MSE	0,5706	16,6939	3,6651

Tabell 6.5: Viser in-sample prisingsfeil sortert etter forfallskategori og lønnsomhetsgrad.

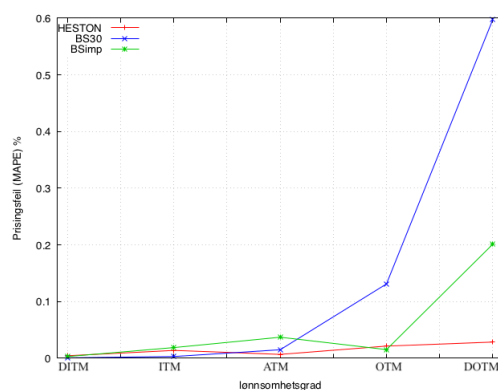
Lønnsomhetsgrad	MAPE			MPE			MAE			MSE		
	Heston	BS-30	BS-imp	Heston	BS-30	BS-imp	Heston	BS-30	BS-imp	Heston	BS-30	BS-imp
	Kortsiktig											
DITM	0,0044	0,0008	0,0030	0,0044	0,0005	-0,0030	0,2900	0,0550	0,1900	0,0845	0,0043	0,0539
ITM	0,0139	0,0031	0,0189	0,0139	-0,0031	-0,0189	0,6250	0,1550	0,8818	0,4718	0,0331	0,7842
ATM	0,0068	0,0151	0,0371	0,0062	0,0151	-0,0371	0,1800	0,4050	1,1111	0,0580	0,2510	1,2435
OTM	0,0215	0,1311	0,0152	0,0215	0,1311	-0,0116	0,2700	1,8650	0,2706	0,1258	3,5905	0,1240
DOTM	0,0286	0,5973	0,2012	0,0232	0,5973	0,2012	0,1950	2,9000	0,9299	0,0686	8,4116	0,8907
	Mellom-lang											
DITM	0,0091	0,0031	0,0273	-0,0091	-0,0031	-0,0273	0,6350	0,2150	1,8828	0,4074	0,0482	3,5828
ITM	0,0108	0,0108	0,0416	0,0074	0,0108	-0,0416	0,5300	0,5250	2,1752	0,3965	0,4736	4,7623
ATM	0,0263	0,0578	0,0452	0,0263	0,0578	-0,0452	0,9800	2,0350	1,6329	1,0900	4,2673	2,6904
OTM	0,0083	0,1801	0,0389	0,0011	0,1801	-0,0389	0,1900	3,8850	0,8406	0,0386	15,3189	0,7146
DOTM	0,0438	0,4465	0,0857	0,0198	0,4465	0,0857	0,4800	5,1100	0,9312	0,2500	26,1650	0,9663
	Langsiktig											
DITM	0,0138	0,0021	0,0419	-0,0138	-0,0008	-0,0419	0,9850	0,1600	3,0613	1,1683	0,0305	9,3847
ITM	0,0068	0,0336	0,0395	-0,0055	0,0336	-0,0395	0,4050	1,8450	2,2135	0,2763	3,5601	4,9237
ATM	0,0231	0,0865	0,0368	0,0231	0,0865	-0,0368	0,9250	3,4650	1,5181	0,8689	12,2415	2,3955
OTM	0,0171	0,1911	0,0133	-0,0171	0,1911	-0,0099	0,4400	5,1750	0,3984	0,2561	26,9969	0,2573
DOTM	0,0323	0,3835	0,0703	0,0323	0,3835	0,0703	0,5300	6,3750	1,1256	0,2834	40,6407	1,3643

Tabell 6.5 fremviser flere likhets trekk med funn gjort i lignende tekster tidligere med hensyn til MAPE. Blant annet gir Heston-modellen høyere prisingsfeil enn BS-30 og BS-imp for kortsiktige DITM-oppsjoner, og ITM-oppsjoner sammenlignet med BS-30.² Heston-modellen presterer dårligst for DOTM-oppsjoner, uavhengig av forfallsperiode. Flaskehalsen for begge variantene av Black-Scholes viser seg å være DOTM-oppsjoner. Dette er spesielt tydelig for BS-30, men også for BS-imp med hensyn til kortsiktige opsjoner.

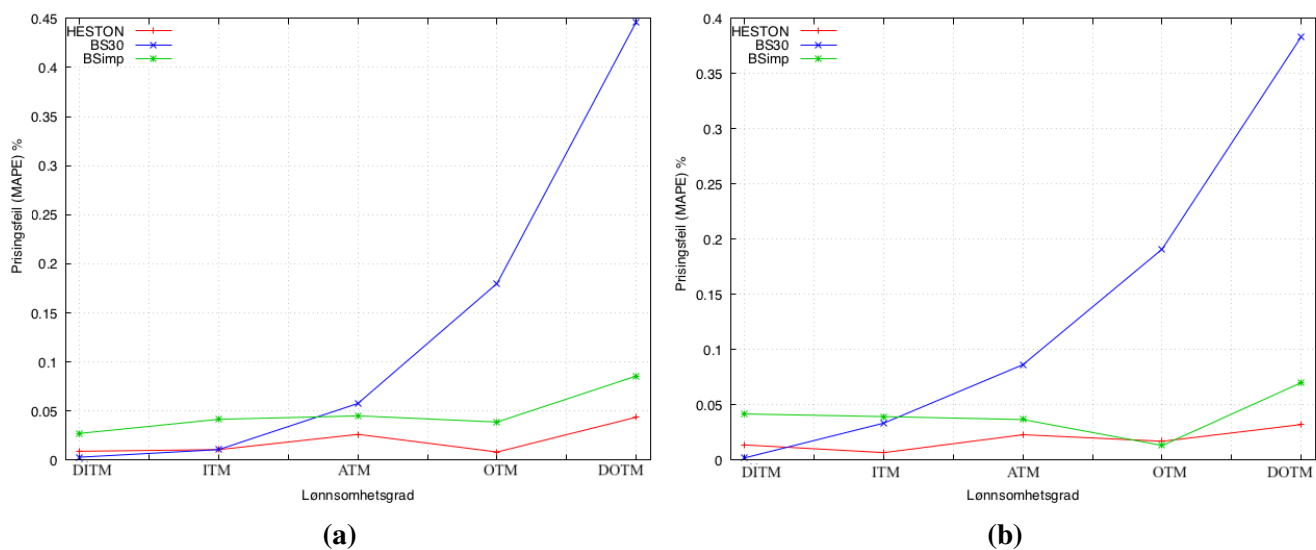
Med hensyn til MPE viser tabellen at BS-imp underpriser i snitt alle opsjoner uavhengig av lønnsomhetsgrad og forfallsperiode, sett bort i fra DOTM-oppsjoner. Mens BS-30 og Heston underpriser DITM-oppsjoner for mellom-lang og langsiktige perioder. Attpåtil underpriser Heston også samtlige langsiktige opsjoner, sett bort fra ATM-oppsjoner.

²Akronymene DITM-, ITM-, ATM-, OTM- og DOTM beskrives i avsnitt 2.2.

Figurene 6.1 til 6.3b viser MAPE for kortsiktige, mellom-lange- og langsiktige-opsjoner. Figuren gjenspeiler allerede det vi fikk se fra tabell 6.5. Figuren viser at prisingsfeilen for BS-30 øker drastisk jo mer opsjonen beveger seg bort fra ATM og mot DOTM. Man ser at det er en signifikant forskjell mellom prisingsfeilen BS-30 og BS-imp bare ved å endre måten man estimerer volatiliteten. BS-30 presterer overraskende godt sammenlignet med Heston og BS-imp for opsjoner som er DITM og ITM. Samtidig viser figuren at Heston-modellen presterer godt jevnt over lønnsomhetsgrad og forfallsperiode med hensyn til MAPE.



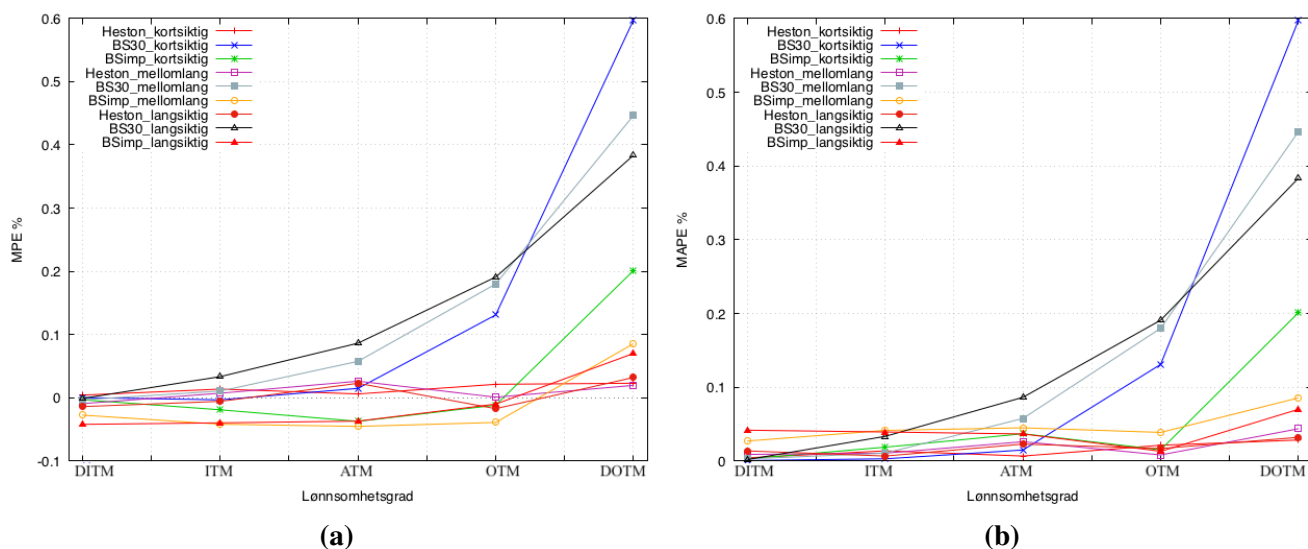
Figur 6.1: Viser in-sample MAPE for kortsiktige opsjoner tvers av lønnsomhetsgrad.



Figur 6.2: Viser in-sample MAPE for mellom-lange- (a) og langsiktige (b) opsjoner tvers av lønnsomhetsgrad.

Oppsummert viser tabell 6.5 både styrkene og svakhetene til Heston-modellen. Svakheten med hensyn til kortsiktig volatilitet og styrken ved å ta hensyn til volatilitetssmilet. Det kan tyde på at siden modellen har parametere som beskriver volatilitetssmilet, leverage-effekten, skjevhet og kurtose, gir modellen en større fordel til å resultere bedre priser enn Black-Scholes. Modellen viser sin suverenitet, uavhengig av lønnsomhetsgrad og forfallsperiode, ved at den gir lavest prisingsfeil for samtlige opsjoner i utvalgsperioden, sett bort fra DITM- ITM-opsjoner med kortsiktig- og DITM-opsjoner med mellom-lang- og langsiktig- perspektiv. BS-30 er varianten av Black-Scholes som gjør det desidert dårligst. Modellen gir overraskende lav prisingsfeil for DITM-opsjoner og det er det. BS-30 totale gjennomsnittlig prisingsfeil er betydelig høyere enn BS-imp og Heston. Dette skyldes at modellen presterer betydelig dårligere enn de andre modellene for OTM- og DOTM-opsjoner. Dette kan ha å gjøre med at DOTM-opsjoner er underrepresentert i utvalget grunnet den lave likviditeten, samt at prisene for DOTM-opsjoner er så lave at de gir store utslag ved prosentuelle feilmålinger som MAPE og MPE, og det totalt gir store utslag når man regner det totale gjennomsnittlige prisfeilen. Dersom vi også ser på MAE og MSE, viser det også klart her stor skilnad mellom modellene. BS-30 gjør det betydelig dårligere enn BS-imp og Heston-modellen. Grunnet dette har jeg valgt å ekskludere BS-30 for videre sammenligning én- og fem-dager out-of-sample. Totalt er det ingen av modellene som er i stand til å gi perfekte priser, men analysen tyder på at dersom man gjennomfører en god kalibrering kan Heston-modellen gi bedre prisestimer enn hva Black-Scholes er i stand til in-sample.

Konklusjonen fra utvalgsperioden er at Heston-modellen yter prisestimer av høyest kvalitet sammenlignet med BS-30 og BS-imp, og er derfor bedre egnet for prising av opsjoner in-sample.



Figur 6.4: Viser in-sample MPE (a) og MAPE (b) for alle forfallsperioder på tvers av lønnsomhetsgrad.

6.1.2 Out-of-sample prisingsfeil

Heston-modellen fremviste lavest prisingsfeil i utvalgsperioden som forventet, men det vil dermed ikke si at det vil kunne egne seg like godt for prising av opsjoner utenfor utvalget. Modellparameterne er kalibrert til å tilpasse seg utvalgsperioden best mulig, og vil derav nødvendigvis ikke gi like lave prisingsfeil som in-sample. En god in-sample fit kan være en konsekvens av at man har mange strukturelle parametere som er overtilpasset. Heston-modellen har mange parametere og tar stor hensyn til observasjonene i estimeringsutvalget, som kan gi utfordringer knyttet til misspesifisering. For å marginalisere denne effekten vil jeg også undersøke prisingsfeilen out-of-sample. Svakheterne ved modeller med flere parametere kan komme til syne ved at flere parametere ikke nødvendigvis forbedrer den strukturelle tilpasningen. For å kontrollere parameterens stabilitet, undersøker jeg prisingsfeilen for modellprisene sammenlignet med markedsprisen for opsjonenene én- og fem-dager out-of-sample.

Som nevnt i kapittel 4, vil det ikke kalibreres nye parameterverdier for Heston-modellen. De eneste endringene som vil foretas er for de samme parametere som er i Black-Scholes (spotprisen, innløsningskurs, tid til forfall og risikofri rente). I tillegg vil det regnes ut en ny sigma ved bruk av samme fremgangsmåte som tidligere presentert for BS-imp. Denne gangen er gjennomsnittlig implisitt volatilitet utregnet fra perioden 04.04.2018 for én og 10.04.2018 for fem-dager out-of-sample. Evalueringen vil fortsatt bruke de samme tapsfunksjonene som tidligere.

Én dag out-of-sample

Tabell 6.6 rapporterer én dag out-of-sample gjennomsnittlige prisingsfeil for hele utvalget av opsjoner gitt av Heston-modellen og BS-imp. Av tabellen kan vi se at Heston-modellen totalt gir i snitt lavest prisingsfeil av samtlige feilmål. Det viser seg at i snitt underpriser BS-imp opsjonene mens Heston overpriser relativt til markedsprisen. Tabellen viser også at forskjellene mellom feilprisingen er størst for Heston, sammenlignet med resultatene fra utvalgsperioden med hensyn til MAPE, som viser seg å være i overensstemmelse med andre lignende studier.³ Dette viser hvilken effekt en overtilpasning av parametere har på prisenøyaktighet for fremtidige prognoser. Forholdet for MAPE mellom Heston og BS-imp har gått fra 2,68 til 1,48 i multiplikator verdi.

³Forskjellene mellom MAPE i utvalgsperioden og én dag out-of-sample har en multiplikator verdi på 12,12 for Heston. BS-imp har en multiplikator verdi på 6,62 mellom forskjellene in- og out-of-sample.

Tabell 6.6: Tabellen viser prisingsfeilen én dag out-of-sample for alle opsjonene i utvalgsperioden.

Out-of-sample-sample evaluering		
	Heston	BS-imp
MPE	0,2158	-0,3158
MAPE	0,2158	0,3158
MAE	2,0695	4,9111
MSE	4,9675	26,7250

Tabell 6.7 viser prisingsfeilen for prisingsmodellene fordelt etter lønnsomhetsgrad og forfallsperiode. Det viser seg at Heston overpriser samtlige opsjoner, uavhengig av lønnsomhetsgrad og forfallsperiode, mens BS-imp underpriser for de samme opsjonene. Sammenlignet med in-sample prisingsfeilen, kan vi se at out-of-sample gir høyere prisingsfeil for begge modellene. I motsetning til evalueringen fra in-sample viser Heston til å gi lavere prisingsfeil for kortsiktige DITM-oppsjoner og høyere for DOTM-oppsjoner sammenlignet med BS-imp. Fortsatt gir Heston-modellen lavere prisingsfeil for opsjoner med lengre tid til forfall, selv utenfor utvalgsperioden. Det samme gjelder for BS-imp.

Tabell 6.7: Viser én dags out-of-sample prisingsfeil sortert etter forfallskategori og lønnsomhetsgrad.

Lønnsomhetsgrad	MAPE		MPE		MAE		MSE	
	Heston	BS-imp	Heston	BS-imp	Heston	BS-imp	Heston	BS-imp
	Kortsiktig							
DITM	0,0191	0,0301	0,0191	-0,0301	0,9935	1,5948	0,9870	2,5434
ITM	0,0716	0,1015	0,0716	-0,1015	2,7242	4,1015	7,4309	16,8655
ATM	0,2708	0,4064	0,2708	-0,4064	2,9597	5,7342	8,9015	33,1225
OTM	0,6655	0,7540	0,6655	-0,7540	1,9777	3,6463	4,3840	14,2737
DOTM	1,1338	0,8758	1,1338	-0,8758	1,3292	2,1907	1,7668	4,7992
	Mellom-lang							
DITM	0,1905	0,2840	0,1905	-0,2840	3,7033	6,5731	13,7144	43,2054
ITM	0,2450	0,4142	0,2450	-0,4142	2,7391	5,7884	7,5083	33,5240
ATM	0,1206	0,3133	0,1206	-0,3133	1,8181	3,6857	3,8597	14,9706
OTM	0,0536	0,1268	0,0536	-0,1268	2,3475	5,8750	5,6020	34,8865
DOTM	0,0507	0,1697	0,0507	-0,1697	1,7279	6,0794	2,9856	36,9596
	Langsiktig							
DITM	0,0424	0,1046	0,0424	-0,1046	2,0454	5,2663	4,1837	27,7344
ITM	0,0578	0,1594	0,0578	-0,1594	2,1888	6,2816	5,0030	39,4991
ATM	0,1388	0,3595	0,1388	-0,3595	2,4235	7,0830	5,9759	50,4428
OTM	0,1628	0,5546	0,1628	-0,5546	1,1770	4,6218	1,4215	21,5819
DOTM	0,0146	0,0832	0,0146	-0,0832	0,8876	5,1446	0,7878	26,4667

Konklusjonen for én-dag out-of-sample er den samme som for in-sample. Heston-modellen gir i snitt totalt lavest prisingsfeil og er bedre egnet til å prise opsjoner én-dag out-of-sample.

Det er blitt funnet i tidligere forskning at Black-Scholes kan ha en fordel over komplekse modeller for langsiktige prisprognoser (Nandi, 1996). Det vil bli interessant å se hvordan ytelsen til modellene også vil være fem-dager out-of-sample, om styrkeforholdet forblir den samme eller om den endres.

Out-of-sample fem dager

Det interessante her er at Heston-modellen faktisk presterer betydelig dårligere enn Black-Scholes fem dager out-of-sample. Resultatet er i samsvar med forventningene før analysen. Lignende forskning har vist en økning i prisingsfeilen sammenlignet med én-dags out-of-sample (Bakshi mfl., 1997; Kim & Kim, 2004; Moon mfl., 2009; Mygland & Jørgensen, 2016), men til forskjell fra resultatene, som bruker S&P 500, S&P 100 og KOSPI 200 som underliggende, viser resultatene for det norske markedet at Heston-modellen gjør det dårligere enn Black-Scholes fem dager ut.

Tabell 6.8: Tabellen viser prisingsfeilen fem dager out-of-sample for alle opsjonene i utvalgsperioden.

Out-of-sample-evaluering		
	Heston	BS-imp
MPE	1,0812	-0,2258
MAPE	1,0812	0,2258
MAE	3,0987	2,1182
MSE	11,6139	5,3598

Av tabell 6.9 kan vi fortsatt se at Heston-modellen i snitt presterer dårligst for kortsiktige opsjoner, men at prisingsfeilen avtar med økt tid til forfall. BS-imp presterer jevnt over stabile prisingsfeil out-of-sample med hensyn til MAPE i tabell 6.6 og 6.8. Fra tabellen kan vi også se at BS-imp underpriser mens Heston-modellen overpriser samtlige opsjoner. Det er verdt å merke seg hvor mye prisingsfeilen til Heston har økt fra én dag og til fem-dagers out-of-sample. Multiplikatorverdien er på 5, sammenlignet med resultatene fra tabell 6.6 og til 6.8. Dette tyder på at Heston-modellen er misspesifisert og mer sensitiv for markedsendringer fra dag til dag.

Tabell 6.9: Viser fem dagers out-of-sample prisingsfeil sortert etter forfallskategori og lønnsomhetsgrad.

Lønnsomhetsgrad	MAPE		MPE		MAE		MSE	
	Heston	BS-imp	Heston	BS-imp	Heston	BS-imp	Heston	BS-imp
	Kortsiktig							
DITM	0,0266	0,0200	0,0266	-0,0200	1,2332	0,9541	1,5208	0,9103
ITM	0,0717	0,0458	0,0717	-0,0458	2,1197	1,4663	5,2544	2,6463
ATM	0,2708	0,4064	0,2708	-0,4064	3,7293	2,4404	14,4133	6,2044
OTM	4,1020	0,5996	4,1020	-0,5996	1,5342	1,1525	2,3879	1,3312
DOTM	8,9667	0,7723	8,9667	-0,7723	0,7532	0,6466	0,5673	0,4181
	Mellom-lang							
DITM	0,3942	0,1924	0,3942	-0,1924	4,7369	3,2226	22,4382	10,3850
ITM	0,7878	0,2718	0,7878	-0,2718	3,7829	2,3705	14,5290	5,7346
ATM	0,1206	0,3133	0,1206	-0,3133	1,9097	1,4345	4,3594	2,4329
OTM	0,0842	0,0504	0,0842	-0,0504	3,2478	2,1198	10,6182	4,5023
DOTM	0,1780	0,1038	0,1780	-0,1038	5,1024	3,5063	26,0345	12,2942
	Langsiktig							
DITM	0,0693	0,0441	0,0693	-0,0441	2,9833	2,0274	8,9001	4,1104
ITM	0,1385	0,0803	0,1385	-0,0803	4,3074	2,8593	19,1854	8,5942
ATM	0,3609	0,1724	0,3609	-0,1724	4,7748	3,1726	24,0153	11,0412
OTM	0,5855	0,2767	0,5855	-0,2767	2,8701	2,1455	8,4547	4,7051
DOTM	0,0606	0,0380	0,0606	-0,0380	3,3956	2,2553	11,5301	5,0864

Konklusjonen for fem dagers out-of-sample er at Black-Scholes gir betydelig bedre prisestimer sammenlignet med Heston-modellen. Heston-modellen gir kun lavere prisingsfeil for kortsiktige og mellom-lange ATM-opsjoner.

KAPITTEL 7

Oppsummering

I denne avsluttende avhandlingen har jeg presentert Black-Scholes-modellen og dens begrensninger med hensyn til det norske kapitalmarkedet. Kapittel 3 viste blant annet at forutsetninger som konstant volatilitet og normalfordeling ikke er et passende modelleringsvalg for opsjonsprising. Som et naturlig motsvar på svakhetene ved modellen ble Hestons stokastiske volatilitetsmodell presentert, da modellen direkte angriper og løser de største svakhetene ved Black-Scholes.

Jeg finner imidlertid at Heston-modellen ikke er uten problemer, spesielt med hensyn til kalibreringen. En god kalibrering er svært viktig, men en for overtilpasset modell kan føre til spuriøse sammenheng som kan forlede til å anta at det finnes en årsakssammenheng uten at dette er tilfellet. Etter alt, forsøker man å tilpasse en modell som ikke perfekt klarer å forklare den virkelige verden. Dette betyr ikke at undertegnede mener at stokastiske volatilitetsmodeller er upraktiske, men vi må se og bruke stokastiske modeller som det de egentlig er ment for. Dersom man forstår de underliggende forutsetningene er stokastiske modeller svært kraftige verktøy som vil hjelpe oss til å forstå det uforutsigbare kapitalmarkedet. Stokastiske volatilitetsmodeller gir oss en betydelig bedre forståelse av derivatmarkedet.

Gjennom analysen har vi observert at Heston-modellen gir totalt lavere prisingsfeil sammenlignet med Black-Scholes-modellen i flere kombinasjoner av lønnsomhetsgrad og forfallsperioder for opsjoner i og utenfor utvalgsperioden. Hestons stokastiske volatilitetsmodell tar hensyn til korrelasjonen mellom prisen på underliggende aktiva og volatiliteten, noe som er svært avgjørende for å fange skjevheten i fordelingen. I tillegg tar modellen hensyn til volatiliteten til variansen som tillater modellen å fange opp kurtosen. Disse egenskapene gjør det mulig for modellen å tilpasse volatilitetssmilet observert i opsjonsmarkedet bedre.

Analysen for utvalgsperioden i kapittel 6 viste flere funn som er i overensstemmelse med flere tidligere studier. For kortsiktige DITM- og ITM-opsjoner klarer ikke Heston-modellen å fange den høye implisitte volatiliteten, men til gjengjeld gir Heston-modellen bedre prisestimer for ATM-, OTM- og DOTM-opsjoner sammenlignet med BS-30 og ATM- og DOTM-opsjoner

sammenlignet med BS-imp. Spesielt for DOTM-opsjoner gir Heston-modellen betydelig bedre estimater enn begge variantene av Black-Scholes. Videre viste analysen at Heston-modellens prisnøyaktig bedres for opsjoner med lengre tid til forfall. Konklusjonen fra utvalgsperioden ble at Heston-modellen er totalt bedre egnet for prising av OBX-opsjoner in-sample.

Flere av funnene gjort i analysen én dag utenfor utvalgsperioden var i overensstemmelse med de forventningene jeg hadde i utgangspunktet. Analysen viser at Heston-modellen fortsatt gir totalt lavest prisingsfeil, men at prisingsfeilen er økt betydelig sammenlignet med analysen i utvalgsperioden. På grunnlag av funn i utvalgsperioden og tidligere studier var det forventet at Heston-modellen skulle prestere dårligere enn BS-imp for kortsiktige DITM-opsjoner og bedre for DOTM-opsjoner. Resultatene viste det motsatte av forventningene. Derimot viste modellen igjen å gi lavere prisingsfeil med økt tid til forfall. Konklusjonen fra én dag out-of-sample ble at Heston-modellen er bedre egnet til prising av OBX-opsjoner én dag out-of-sample.

Resultatene fra analysen fem dager out-of-sample viste at den relative prisingsfeilen for Heston-modellen økte sammenlignet med utvalgsperioden og én dag utenfor - som forventet. Det interessante her var størrelsen på omfanget av prisingsfeilen til Heston sammenlignet med BS-imp. Lignende studier (Bakshi mfl., 1997; Kim & Kim, 2004; Mygland & Jørgensen, 2016) har vist at Heston-modellen faktisk gir totalt lavere prisingsfeil enn Black-Scholes også her, så dette funnet avviker fra dette. Dette avviket kan skyldes valg av parameterverdier og optimeringsalgoritme. Analysen viste at Heston-modellen er antageligvis misspesifisert og er betydelig mer sensitiv for markedsendringer enn Black-Scholes. Konklusjonen fra fem dager out-of-sample er at Black-Scholes er bedre egnet enn Heston-modellen til prising av OBX-opsjoner fem dager out-of-sample.

Som det fremgår av denne og andre empiriske studier er det store gap mellom modell og markedspris. Den største utfordringen ligger spesielt i prissettingen av kortsiktige opsjoner. Dette kan skyldes blant annet at ingen av modellene klarer å håndtere de store kortsiktige svingningene på en tilfredsstillende måte. Problemet kan også ligge i valg av markedspris siden det er store gap mellom kjøper- og selgerkurs. En interessant utvidelse av oppgaven ville vært å tilegne den stokastiske volatilitetsmodell med et hopp-parameter. Dette ville selvfølgelig økt graden av kompleksitet i estimeringsprosessen, men sannsynligvis gitt modellen bedre forutsetninger til å fange opp de kortsiktige svingene i markedet. Det ville også vært interessant å se hvilken effekt valg av tapsfunksjon har i kalibreringen av parameterverdier. Oppgaven bygde valget av tapsfunksjon på resultater fra nyere forskning, men det ville vært interessant å sett om det er eventuelle diskrepans mellom reell markedsdata og fiktivt tallmaterieil.

Referanse

- Albrecher, H., Mayer, P., Schoutens, W. & Tistaert, J. (2006). The little Heston trap.
- Bacmann, J.-F. & Gawron, G. (2004). Fat tail risk in portfolios of hedge funds and traditional investments.
- Bakshi, G., Cao, C. & Chen, Z. (1997). Empirical performance of alternative option pricing models. *The Journal of finance*, 52(5), 2003–2049.
- Bauer, R. (2012). *Fast calibration in the Heston model*. na.
- Björk, T. (2009). *Arbitrage theory in continuous time*. Oxford university press.
- Black, F. (1976). Studies of stock price volatility changes.
- Black, F. & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3), 637–654.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, 31(3), 307–327.
- Christoffersen, P., Diebold, F. & Schuermann, T. (1998). Horizon problems and extreme events in financial risk management.
- Christoffersen, P. & Jacobs, K. (2004). The importance of the loss function in option valuation. *Journal of Financial Economics*, 72(2), 291–318.
- Coleman, T. F. & Li, Y. (1996). An interior trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds. *SIAM Journal on optimization*, 6(2), 418–445.
- Cox, J. C., Ingersoll Jr, J. E. & Ross, S. A. (1985). An intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 363–384.
- Cox, J. C., Ross, S. A. & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of financial Economics*, 7(3), 229–263.
- Dimitroff, G., Lorenz, S. & Szimayer, A. (2011). A parsimonious multi-asset Heston model: Calibration and derivative pricing. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 14(08), 1299–1333.
- Dumas, B., Fleming, J. & Whaley, R. E. (1998). Implied volatility functions: Empirical tests. *The Journal of Finance*, 53(6), 2059–2106.
- Escobar, M. & Gschnaidtner, C. (2016). Parameters recovery via calibration in the Heston model: A comprehensive review. *Wilmott*, 2016(86), 60–81.

-
- Fama, E. F. (1965). The behavior of stock-market prices. *The journal of Business*, 38(1), 34–105.
- Fama, E. F. (1998). Market efficiency, long-term returns, and behavioral finance. *Journal of financial economics*, 49(3), 283–306.
- Forde, M., Jacquier, A. & Lee, R. (2012). The small-time smile and term structure of implied volatility under the Heston model. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 3(1), 690–708.
- Fouque, J.-P., Papanicolaou, G. & Sircar, K. R. (2000). *Derivatives in financial markets with stochastic volatility*. Cambridge University Press.
- French, K. R. (1980). Stock returns and the weekend effect. *Journal of financial economics*, 8(1), 55–69.
- French, K. R. & Roll, R. (1986). Stock return variances: The arrival of information and the reaction of traders. *Journal of financial economics*, 17(1), 5–26.
- Gatheral, J. (2011). *The volatility surface: a practitioner's guide*. John Wiley & Sons.
- Guillaume, F. & Schoutens, W. (2012). Calibration risk: Illustrating the impact of calibration risk under the Heston model. *Review of Derivatives Research*, 15(1), 57–79.
- Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The review of financial studies*, 6(2), 327–343.
- Hull, J. C. & Basu, S. (2016). *Options, futures, and other derivatives*. Pearson Education India.
- Hull, J. & White, A. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *The journal of finance*, 42(2), 281–300.
- Jackwerth, J. C. & Rubinstein, M. (1996). Recovering probability distributions from option prices. *The Journal of Finance*, 51(5), 1611–1631.
- Jarque, C. M. & Bera, A. K. (1980). Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. *Economics letters*, 6(3), 255–259.
- Johnson, H. & Shanno, D. (1987). Option pricing when the variance is changing. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 143–151.
- Kim, I. J. & Kim, S. (2004). Empirical comparison of alternative stochastic volatility option pricing models: Evidence from Korean KOSPI 200 index options market. *Pacific-Basin Finance Journal*, 12(2), 117–142.
- Lawler, G. F. (2006). *Introduction to stochastic processes*. CRC Press.
- Lin, S.-H. (2002). *Option pricing with non-constant volatility* (Doktoravhandling, University of Cape Town).
- Mandelbrot, B. B. (1963). The variation of certain speculative prices. I *Fractals and scaling in finance* (s. 371–418). Springer.
- Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of financial economics*, 3(1-2), 125–144.
- Mikhailov, S. & Nögel, U. (2003). Heston's Stochastic Volatility Model Implementation. *Calibration and*.
- Moodley, N. (2005). The Heston model: A practical approach with Matlab code. *University of the Witwatersrand, Johannesburg*.
- Moon, K.-S., Seon, J.-Y., Wee, I.-S. & Yoon, C. (2009). Comparison of stochastic volatility models: Empirical study on KOSPI 200 index options. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 46(2), 209–227.
- Mykland, H. H. & Jørgensen, S. S. (2016). *To alternativer til Black-Scholes-modellen: prising av S&P 500 indeksopsjoner* (Masteroppgave, NTNU).

-
- Nandi, S. (1996). *Pricing and hedging index options under stochastic volatility: an empirical examination*. Working Paper, Federal Reserve Bank of Atlanta.
- Rasmussen, M. (2009). Heston modellen. Kandidatafhandling, CBS.
- Rouah, F. D. & Vainberg, G. (2007). *Option pricing models and volatility using Excel-VBA*. John Wiley & Sons.
- Samuelson, P. A. (1973). Mathematics of speculative price. *Siam Review*, 15(1), 1–42.
- Schoutens, W., Simons, E. & Tistaert, J. (2003). A perfect calibration! Now what? *The best of Wilmott*, 281.
- Scott, L. O. (1987). Option pricing when the variance changes randomly: Theory, estimation, and an application. *Journal of Financial and Quantitative analysis*, 22(4), 419–438.
- Shu, J. & Zhang, J. E. (2004). Pricing S&P 500 index options under stochastic volatility with the indirect inference method. *Journal of Derivatives Accounting*, 1(02), 171–186.
- Singh, S. & Dixit, A. (2016). Performance of the Heston's Stochastic Volatility Model: A Study in Indian Index Options Market. *Theoretical Economics Letters*, 6(02), 151.
- Stein, E. M. & Stein, J. C. (1991). Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach. *The review of financial studies*, 4(4), 727–752.
- Whaley, R. E. (2008). Understanding vix.
- Wiggins, J. B. (1987). Option values under stochastic volatility: Theory and empirical estimates. *Journal of financial economics*, 19(2), 351–372.
- Wilmott, P. (2007). *Paul Wilmott introduces quantitative finance*. John Wiley & Sons.
- Yakoob, M. Y. & Durham, N. (2002). An empirical analysis of option valuation techniques using stock index options. *Duke Journal of Economics*, 14.

Matematiske formler

A.1 Heston PDL

$$\Pi = H - \Delta_1 S - \Delta_2 J \quad (\text{A.1})$$

Endringen i porteføljen kan skrives som

$$d\Pi = dH - \Delta_1 dS - \Delta_2 dJ \quad (\text{A.2})$$

Todimensjonell ito formelen gir

$$d\Pi = \left[\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 H}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} + \rho \sigma v S \frac{\partial^2 H}{\partial S \partial v} \right] dt + \frac{\partial H}{\partial S} dS + \frac{\partial H}{\partial v} dv - \Delta_1 dS - \Delta_2 \left\{ \left[\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 J}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 J}{\partial v^2} + \rho \sigma v S \frac{\partial^2 J}{\partial S \partial v} \right] dt + \frac{\partial J}{\partial S} dS + \frac{\partial J}{\partial v} dv \right\} \quad (\text{A.3})$$

Som kan skrives som

$$d\Pi = \left[\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 H}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} + \rho \sigma v S \frac{\partial^2 H}{\partial S \partial v} \right] dt - \Delta_2 \left[\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 J}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 J}{\partial v^2} + \rho \sigma v S \frac{\partial^2 J}{\partial S \partial v} \right] dt + \left[\frac{\partial H}{\partial S} - \Delta_2 \frac{\partial J}{\partial S} - \Delta_1 \right] dS + \left[\frac{\partial H}{\partial v} - \Delta_2 \frac{\partial J}{\partial v} \right] dv \quad (\text{A.4})$$

For å gjøre porteføljen risikofri velger vi

$$\frac{\partial H}{\partial S} - \Delta_2 \frac{\partial J}{\partial S} - \Delta_1 = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial H}{\partial v} - \Delta_2 \frac{\partial J}{\partial v} = 0 \quad (\text{A.6})$$

For å få bort dS og ...

$$\Delta_2 = \frac{\partial H}{\partial v} / \frac{\partial J}{\partial v} \quad (\text{A.7})$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial H}{\partial v} - \frac{\partial J}{\partial v} \frac{\partial H}{\partial v} / \frac{\partial J}{\partial v} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 H}{\partial S^2} + \rho \sigma v S \frac{\partial^2 H}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} \\ & + r S \frac{\partial H}{\partial S} + \{ \kappa [\theta - v_t] - \wedge(S, v, t) \sigma \sqrt{v} \} \frac{\partial H}{\partial v} - r H = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Den uspesifiserte termen $\wedge(S, v, t)$ står for markedsprisen for risikoen for volatilitet. Heston (1993) velger dette for å være proporsjonal med volatiliteten.

A.1.1 Betingelser Heston

$$U(S, v, t) = \text{maks}(0, S - K), \quad (\text{A.10})$$

$$U(0, v, t) = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial U}{\partial S}(\infty, v, t) = 1 \quad (\text{A.12})$$

$$r S \frac{\partial U}{\partial S}(S, 0, t) + \kappa \theta \frac{\partial U}{\partial v}(S, 0, t) - r U(S, 0, t) + U_t(S, 0, t) = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$U(S, \infty, t) = S \quad (\text{A.14})$$

TILLEGG B

Data

B.1 OptionData.m

r	tid til forfall	spotpris	innløsningkurs	midpris	bid	ask
0,92	0,047619048	730,6	660	71	69,5	72,5
0,92	0,047619048	730,6	670	61,375	60	62,75
0,92	0,047619048	730,6	680	52,125	51	53,25
0,92	0,047619048	730,6	690	42,875	41,5	44,25
0,92	0,047619048	730,6	700	34,25	33,25	35,25
0,92	0,047619048	730,6	710	26	25	27
0,92	0,047619048	730,6	720	18,5	17,75	19,25
0,92	0,047619048	730,6	730	12,25	11,50	13,00
0,92	0,047619048	730,6	740	7,15	6,70	7,60
0,92	0,047619048	730,6	750	3,7	3,40	4,00
0,92	0,047619048	730,6	760	1,65	1,50	1,80
0,92	0,047619048	730,6	770	0,55	0,45	0,65
0,92	0,047619048	730,6	780	0,175	0,05	0,30
0,92	0,047619048	730,6	790	0,13	0,11	0,15
0,92	0,047619048	730,6	800	0,05	0,01	0,09
1,02	0,126984127	730,6	660	74,125	73,00	75,25
1,02	0,126984127	730,6	670	65,25	64,25	66,25
1,02	0,126984127	730,6	680	56,625	55,75	57,50
1,02	0,126984127	730,6	690	47,875	46,75	49,00
1,02	0,126984127	730,6	700	39,875	38,75	41,00
1,02	0,126984127	730,6	710	32,5	31,75	33,25
1,02	0,126984127	730,6	720	25,5	24,50	26,50
1,02	0,126984127	730,6	730	19,25	18,50	20,00

Table B.1 forsetter fra forrige side

1,02	0,126984127	730,6	740	14,125	13,50	14,75
1,02	0,126984127	730,6	750	9,75	9,25	10,25
1,02	0,126984127	730,6	760	6,1	5,60	6,60
1,02	0,126984127	730,6	770	3,65	3,35	3,95
1,02	0,126984127	730,6	780	2	1,85	2,15
1,02	0,126984127	730,6	790	1	0,80	1,20
1,02	0,126984127	730,6	800	0,375	0,25	0,50
1,16	0,206349206	730,6	660	77,75	76,25	79,25
1,16	0,206349206	730,6	670	69,25	67,75	70,75
1,16	0,206349206	730,6	680	60,125	59,00	61,25
1,16	0,206349206	730,6	690	52	51,00	53,00
1,16	0,206349206	730,6	700	44,5	43,50	45,50
1,16	0,206349206	730,6	710	37,25	36,25	38,25
1,16	0,206349206	730,6	720	30,75	30,00	31,50
1,16	0,206349206	730,6	730	24,625	23,75	25,50
1,16	0,206349206	730,6	740	19,25	18,50	20,00
1,16	0,206349206	730,6	750	14,625	14,00	15,25
1,16	0,206349206	730,6	760	10,625	10,25	11,00
1,16	0,206349206	730,6	770	7,35	7,00	7,70
1,16	0,206349206	730,6	780	4,85	4,50	5,20
1,16	0,206349206	730,6	790	3,075	2,75	3,40
1,16	0,206349206	730,6	800	1,9	1,70	2,10

Tabell B.1: Data innlagt i Matlabs lsqnonlin.

B.2 Matlab Kalibreringskode

```
1 clear ;
2 global OptionData ;
3 global NoOfOptions ;
4 global NoOfIterations ;
5 global PriceDifference ;
6 NoOfIterations = 0 ;
7 load OptionData.m ;
8 %OptionData = [r,T,S0,K,midtpris,bid,ask]
9 Size = size(OptionData);
10 NoOfOptions = Size(1);
11 %Input – inngangsverdier for vektorene
12 % [2*kappa*theta – sigma^2,theta,sigma,rho,v0]
13 x0 = [x1 x2 x3 x4 x5];
14 lb = [0 0 0 -1 0];
15 ub = [20 1 1 1 1];
16 options = optimset('MaxFunEvals',20000);
17 %maksimum antall iterasjoner er satt til 20000. Dette sikrer at den ikke
    stopper for tidlig .
18 tic ;
19 Calibration = lsqnonlin(@HestonDifferences,x0,lb,ub);
20 toc ;
21 Solution = [((Calibration(1)+Calibration(3))/Calibration(3))^2/ ...
22 (2*Calibration(2)), Calibration(2:5)];
23 function ret = HestonDifferences(input)
24 global NoOfOptions ;
25 global OptionData ;
26 global NoOfIterations ;
27 global PriceDifference ;
28 NoOfIterations = NoOfIterations + 1 ;
29 %Teller antall interasjoner fors kt i kalibreringen .
30 for i = 1:NoOfOptions
31 PriceDifference(i) = (OptionData(i,5)-HestonCallQuad( ...
32 (input(1)+input(3)^2)/(2*input(2)),input(2), ...
33 input(3),input(4),input(5), ...
34 OptionData(i,1),OptionData(i,2),OptionData(i,3), ...
35 OptionData(i,4)))/sqrt((abs(OptionData(i,6)- ...
36 OptionData(i,7)))));
37 %input matrise = [kappa theta sigma rho v0]
38 end
39 ret = PriceDifference';
40 end
41
42 Calibration
```

Listing B.1: Kalibreringskoden i Matlab

B.3 Excel VBA koder

B.3.1 Black-Scholes

Koden er hentet fra boken til Rouah og Vainberg (2007).

```
1 Option Explicit
2
3 Function Black_Scholes_Call(S, K, r, sigma, q, T)
4 ,
5 ' Inputs are S = initial stock price
6 '           K = strike price
7 '           r = risk-free rate
8 '           sigma = volatility
9 '           q = dividend yield
10 '          T = time to maturity
11 ,
12 Dim d1, d2, N1, N2
13 If sigma = 0 Then
14     Black_Scholes_Call = Application.Max(0, Exp(-q * T) * S - Exp(-r * T) *
15     K)
16 Else
17     d1 = (Log(S / K) + (r - q + 0.5 * sigma * sigma) * T) / (sigma * Sqr(T)
18     )
19     d2 = d1 - sigma * Sqr(T)
20     N1 = Application.NormSDist(d1)
21     N2 = Application.NormSDist(d2)
22     Black_Scholes_Call = Exp(-q * T) * S * N1 - Exp(-r * T) * K * N2
23 End If
24 End Function
25
26 Function Black_Scholes_Put(S, K, r, sigma, q, T)
27 ,
28 ' Inputs are S = initial stock price
29 '           K = strike price
30 '           r = risk-free rate
31 '           sigma = volatility
32 '           q = dividend yield
33 '          T = time to maturity
34 ,
35 Dim d1, d2, N1, N2
36 If sigma = 0 Then
37     Black_Scholes_Put = Application.Max(0, Exp(-r * T) * K - Exp(-q * T) *
38     S)
39 Else
40     d1 = (Log(S / K) + (r - q + 0.5 * sigma * sigma) * T) / (sigma * Sqr(T)
41     )
42     d2 = d1 - sigma * Sqr(T)
43     N1 = Application.NormSDist(-d1)
44     N2 = Application.NormSDist(-d2)
45     Black_Scholes_Put = Exp(-r * T) * K * N2 - Exp(-q * T) * S * N1
46 End If
47 End Function
```

Listing B.2: Prisingskoden til Black-Scholes i Excels VBA

Koden er hentet fra boken til Rouah og Vainberg (2007).

B.3.2 Heston-modellen

```
1 simulpath = 0
2 ReDim allS(dnum) As Double, Stock(ITER) As Double
3 deltat = 1 / 252
4
5 For itcount = 1 To ITER
6     lnSt = Log(startingS)
7     lnvt = Log(startingV)
8     currentV = startingV
9     currentS = startingS
10
11     For daycount = 1 To dnum
12         e = Application.NormSInv(Rnd)
13         eS = Application.NormSInv(Rnd)
14         ev = rho * eS + Sqr(1 - rho ^ 2) * e
15         lnvt = lnvt + (kappa * (theta - currentV) - lambda * currentV - 0.5
16 * sigv) * deltat + sigv * (1 / Sqr(currentV)) * Sqr(deltat) * ev
17         currentV = Exp(lnvt)
18         lnSt = lnSt + (r - 0.5 * currentV) * deltat + Sqr(currentV) * Sqr(
19 deltat) * eS
20         currentS = Exp(lnSt)
21         allS(daycount) = currentS
22     Next daycount
23
24 simulpath = simulpath + Exp((-dnum / 252) * r) * Application.Max(allS(dnum)
25 - K, 0)
26
27 Next itcount
28
29 heston = simulpath / ITER
30
31 End Function
```

Listing B.3: Prisingskoden til Heston-modellen i Excels VBA

B.3.3 Implisitt volatilitet

```
1 Function ImpliedVolatility(CallOrPut, S, K, r, T, q, OptionValue, guess)
2   Dim epsilon As Double, dVol As Double, vol_1 As Double
3   Dim i As Integer, maxIter As Integer, Value_1 As Double, vol_2 As
4   Double
5   Dim Value_2 As Double, dx As Double
6
7   dVol = 1E-05
8   epsilon = 1E-05
9   maxIter = 100
10  vol_1 = guess
11  i = 1
12  Do
13    Value_1 = EuropeanOption(CallOrPut, S, K, vol_1, r, T, q)
14    vol_2 = vol_1 - dVol
15    Value_2 = EuropeanOption(CallOrPut, S, K, vol_2, r, T, q)
16    dx = (Value_2 - Value_1) / dVol
17    If Abs(dx) < epsilon Or i = maxIter Then Exit Do
18    vol_1 = vol_1 - (OptionValue - Value_1) / dx
19    i = i + 1
20  Loop
21  ImpliedVolatility = vol_1
End Function
```

Listing B.4: Prisingskoden til Black-Scholes i Excels VBA

B.4 Pris-output fra de forskjellige parametersettene

Tabell B.2: Prisestimater gitt for opsjoner med 12 dager til forfall.

Markedspris	Heston A	Heston B	Heston C	Heston D	Heston E
71,00	70,89	70,89	71,01	70,89	71,27
61,38	60,89	60,89	61,20	60,89	61,69
52,13	50,90	50,90	51,60	50,90	52,47
42,88	40,90	40,90	42,39	40,91	43,79
34,25	30,91	30,91	33,78	30,97	34,23
26,00	20,91	21,09	25,99	21,31	26,34
18,50	11,25	12,39	19,24	12,68	18,54
12,25	4,24	6,08	13,65	6,18	12,75
7,15	1,13	2,48	9,27	2,39	7,52
3,70	0,22	0,84	6,00	0,72	3,68
1,65	0,03	0,24	3,70	0,17	1,77
0,55	0,00	0,06	2,17	0,03	0,60
0,18	0,00	0,01	1,22	0,00	0,35
0,13	0,00	0,00	0,65	0,00	0,27
0,05	0,00	0,00	0,34	0,00	0,12

Tabell B.3: Prisestimater gitt for opsjoner med 32 dager til forfall.

Markedspris	Heston A	Heston B	Heston C	Heston D	Heston E
74,13	71,45	71,45	72,19	71,46	73,43
65,25	61,47	61,47	62,81	61,48	64,68
56,63	51,48	51,48	53,80	51,52	56,44
47,88	41,49	41,50	45,29	41,65	48,75
39,88	31,51	31,66	37,41	32,04	41,22
32,50	21,65	22,48	30,28	23,07	33,12
25,50	12,87	14,74	23,99	15,30	25,74
19,25	6,62	8,92	18,59	9,23	19,11
14,13	3,01	4,99	14,08	5,03	13,79
9,75	1,23	2,60	10,42	2,48	10,37
6,10	0,46	1,25	7,53	1,10	6,90
3,65	0,16	0,57	5,31	0,45	3,89
2,00	0,05	0,24	3,66	0,16	1,96
1,00	0,01	0,10	2,46	0,06	0,97
0,38	0,00	0,03	1,61	0,02	0,33

Tabell B.4: Prisestimater gitt for opsjoner med 52 dager til forfall.

Markedspris	Heston A	Heston B	Heston C	Heston D	Heston E
77,75	72,18	72,18	73,28	72,19	77,21
69,25	62,20	62,20	64,07	62,24	67,82
60,13	52,23	52,23	55,26	52,36	59,39
52,00	42,25	42,33	46,95	42,65	52,07
44,50	32,31	32,76	39,26	33,34	45,31
37,25	22,74	24,03	32,28	24,76	38,29
30,75	14,50	16,65	26,07	17,32	30,56
24,63	8,42	10,91	20,69	11,34	23,94
19,25	4,52	6,78	16,11	6,94	19,73
14,63	2,27	4,01	12,32	3,96	15,21
10,63	1,08	2,26	9,24	2,11	10,11
7,35	0,48	1,21	6,81	1,05	7,29
4,85	0,20	0,62	4,92	0,49	4,98
3,08	0,08	0,31	3,49	0,22	3,25
1,90	0,03	0,15	2,43	0,09	1,86



Norges miljø- og biovitenskapelige universitet
Noregs miljø- og biovitenskapelige universitet
Norwegian University of Life Sciences

Postboks 5003
NO-1432 Ås
Norway