

Norges miljø- og
biovitenskapelige
universitet

Masteroppgave 2018 30 stp
Fakultet for realfag og teknologi

Tyngdereferert posisjonering i marine områder

Gravity aided positioning in marine areas

Annie Solveig Samuelsen
Geomatikk

Sammendrag

Ubåter og andre undervannsfarkoster har behov for å finne posisjonen sin med høy nøyaktighet uten å være avhengig av eksterne kilder. Ved hjelp av terrengreferert posisjonering er det mulig å oppnå nøyaktig posisjon uten å måtte gå opp til overflaten. For marine fartøy er det vanlig å bruke informasjon om batymetri til terrengreferert posisjonering. Man er da avhengig av aktive akustiske sensorer, men for en ubåt er det ønskelig å kunne bruke passive sensorer. En passiv metode er å måle jordas tyngdefelt.

I denne oppgaven blir det undersøkt om det er mulig å bruke tyngdemålinger som støtte til treghetsnavigasjon for å begrense drift i systemet. Metoden bruker forskjellen mellom målt tyngde og tyngde for antatt posisjon i en fasitdatabase til å finne et bedre posisjonsestimat. Det er brukt full treghetsnavigasjon sammen med virkelige tyngdemålinger. Området dataene er samlet inn i inneholder mye variasjon i tyngdefeltet, og viser seg å være godt egnet for en slik metode. Resultatene viser at tyngdereferert posisjonering kan fungere, men noen forbehold må tas. Gjennom arbeidet med denne oppgaven er det skaffet en bedre oversikt over aspekter ved tyngdereferert posisjonering som bør undersøkes nærmere.

Abstract

Submarines and other submerged vehicles need to find their position with high accuracy, without being dependent on external sources. Terrain referenced positioning makes it possible to achieve high accuracy without going to the surface. For marine vehicles it is common to use information about the bathymetry in terrain referenced positioning. To obtain information about the bathymetry active acoustic sensors are needed. For a submarine it is desirable to use passive sensors. A passive method is to measure the Earth's gravity field.

This thesis investigates the possibility of using gravity measurements to limit drift in an inertial navigation system. The method uses the difference between measured gravity and gravity from assumed position in a database to make a better position estimate. Full inertial navigation is used together with gravity measurements. The area where the data is collected seems to be suitable for this method, because the gravity field varies a lot in this area. The results shows that gravity aided positioning can work, but some considerations must be taken. Working with this thesis has provided a better overview of aspects considering gravity aided positioning that should be further investigated.

Forord

Denne oppgaven markerer slutten på mine fem år som student ved Norges miljø- og biovitenskapelige universitet (NMBU). Oppgaven ble gjennomført i løpet av våren 2018 og utgjør 30 studiepoeng. Oppgaven er gitt av Forsvarets forskningsinstitutt (FFI).

Jeg vil takke min veileder ved FFI, Magne Mandt. Først og fremst er jeg takknemlig for all hjelp og støtte jeg har fått i prosessen med å gjennomføre denne oppgaven. Jeg setter stor pris på alle samtalene vi har hatt. Døren din har alltid stått åpen, og ingen spørsmål har vært for dumme.

Jeg vil også takke min veileder ved NMBU, Jon Glenn Gjevestad. Takk for at du har stiller opp når jeg trenger det, og gir mange gode råd.

Videre vil jeg takke Einar Berglund ved FFI. Takk for all hjelp du har bidratt med underveis i prosessen, og takk for at du har holdt ut alle spørsmålene mine. Jeg vil også rette en takk til Norges geografiske undersøkelse (NGU) for lån av gravimeteret deres, hjelp til prosessering av tyngdedataene og tilgang til tyngdedatabasen.

Videre ønsker jeg å takke min kjære samboer Håkon Berg Lofthus. Takk for støtte og motiverende ord gjennom hele studieløpet.

Helt til slutt ønsker jeg å takke FFI for muligheten til å jobbe med denne oppgaven. Det har vært veldig spennende, og jeg setter stor pris på at jeg fikk muligheten til det.

Innhold

Sammendrag	iii
Abstract	v
Forord	vii
1 Introduksjon og problemdefinisjon	1
1.1 Bakgrunn	1
1.2 Tidligere studier	1
1.3 Problemdefinisjon	3
2 Tyngdefelt og gravimetri	4
2.1 Jordas tyngdefelt	4
2.1.1 Geoiden	4
2.1.2 Normaltyngdefelt	5
2.1.3 Tyngdeanomali	5
2.1.4 Tyngdereduksjon	6
2.2 Gravimetri	7
2.2.1 Absolutt gravimetri	7
2.2.2 Relativ gravimetri	8
2.2.3 Korreksjoner	9
3 Treghetsnavigasjon (INS)	11
3.1 Referanserammer	12
3.2 Monteringsteknikker	14
3.2.1 Gimbalmontering	14
3.2.2 Skrogfast montering (strapdown system)	14
3.3 Feilforplantning	15
3.4 Oversikt over treghetsnavigasjon	15
3.5 Navigasjonslikninger	16
3.5.1 Navigasjonslikninger i L	18
4 Stokastiske prosesser og Kalmanfilter	22
4.1 Lineære dynamiske system	22
4.2 Stokastisk modellering og tilfeldige variabler	24
4.3 Kalmanfilteret	26
4.4 Utvidet Kalmanfilter	27

4.5	Lineariserte feillikninger for treghetsnavigasjon	28
4.6	Kalmanfilter for treghetsnavigasjon	30
5	Utstyr og programvare	32
5.1	TAGS-6 gravimeter	32
5.2	HG9900 IMU	33
5.3	Trimble BD982 GNSS-mottaker	34
5.4	Sensorenes plassering i forhold til hverandre	35
5.5	NavLab	36
5.5.1	n-vektor i NavLab	37
5.6	Tyngdedatabase	38
5.7	Tyngdemålinger	40
5.7.1	Tyngdemålinger fra et neddykket fartøy	42
6	Metode	44
6.1	Gradientbasert metode	44
6.2	Målelikning for tyngde	46
6.2.1	Implementering av målelikningen i NavLab	48
6.3	Oppslag i tyngdedatabasen	49
6.4	Beregning av gradienter til input i Kalmanfilteret	50
6.5	Gjennomføring av kjøringene i NavLab	51
7	Resultater	53
7.1	Område 1	54
7.2	Område 2	58
7.3	Område 3	62
7.4	Område 4	66
7.5	Vurdering av resultater	72
8	Vurdering av metoden	76
8.1	Videre arbeid	79
8.2	Konklusjon	79
	Referanser	81
A	Noen matematiske sammenhenger	83
A.1	Enkel tidsderivasjon av ulike koordinatsystemer	83
A.2	Similaritetstransformasjon	84

B	Implementering av målelikningen i NavLab - Utleddning	85
C	Systeminformasjon	90
D	Resultatplott - justerte målinger	93
D.1	Område 1 - justerte målinger	93
D.2	Område 2 - justerte målinger	97

Figurer

1.1	Variasjon i tyngdefeltet (geoidmodell DTU10). De røde linjene markerer kystlinjen.	2
2.1	Geoide og referanseellipsoide. [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006, s. 91]	6
2.2	Tyngdereduksjon. [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006, s. 129]	7
2.3	Tid-avstand diagram for et fritt fall. [Timmen, 2010]	8
2.4	Prinsippskisse for fjærsystemer. Til venstre: vertikal fjær. Til høyre: Fjær-arm system. [Timmen, 2010]	9
3.1	Referanserammene E, I og L. Her er aksene i L gitt som x, y, z. Dette tilsvarer henholdsvis N, E, D. Vinkelen α er definert som vinkelen NED (i L-systemet) må dreies om sin D-akse for å sammenfalle med fougalt L-system. [Gade, 1997]	13
4.1	Autokorrelasjon til en Gauss-Markov prosess.	25
4.2	Gangen i et Kalmanfilter med eksterne sensorer. Hentet fra [Gade, 2009].	31
5.1	Bilde av gravimeterets montering i H.U.Sverdrup. IMUen står plassert rett utenfor høyre bildekant. (Foto: NGU)	33
5.2	Illustrasjon av HG9900 [Honeywell, 2016]	34
5.3	Illustrasjon av BD982 GNSS-mottaker [Trimble, 2016]	35
5.4	Navlabs hovedstruktur. Fargene som brukes korresponderer til grafene som genereres av de ulike delene i NavLab [Gade, 2004].	36
5.5	Referanseellipsoide med n-vektor, geodetisk og geosentrisk breddegrad. Origo til kjøretøyets referanseramme er vist med grønt. Origo og to av aksene til E-systemet er vist med blått [Gade, 2010]	37
5.6	Tyngdedatabase gitt i UTM koordinater.	39
5.7	Tyngdemålinger med ulike filtreringer. 1: er ufiltrert friluft-anomali. 2: er friluftsanomali filtrert med et ikke-lineært 60s lavpassfilter for å fjerne støy. 3: er friluftsanomali med et ikke-lineært 60s lavpassfilter for å fjerne støy og et Butterworth filter med 1000m cut-off frekvens. 4: er friluftsanomali med et ikke-lineært 60s lavpassfilter for å fjerne støy og et Butterworth filter med 4000m cut-off frekvens.	41
5.8	Oversiktsbilde. Den røde linja markerer hvor båten har kjørt og hvor det er samlet inn data.	42

6.1	En-dimensjonal skisse som viser posisjonsforbedring fra INS posisjonen til tyngdereferert posisjon.	45
6.2	Flyttdiagram som viser hvordan likningene inngår i Kalmanfilteret.	48
6.3	Interpolasjon av tyngdeverdi ved oppslag i tyngdedatabasen. .	50
6.4	Interpolasjon av tyngdeverdi ved oppslag i tyngdedatabasen. .	51
7.1	Testområder.	53
7.2	Tyngdeverdi fra database og målt tyngdeverdi.	54
7.3	Oversikt over posisjon. Svart er sann posisjon, rød er IMU-løsning og gul viser tyngde-løsning.	55
7.4	Posisjonsfeil IMU.	56
7.5	Posisjonsfeil tyngde.	57
7.6	Tyngdeverdi fra database og målt tyngdeverdi.	58
7.7	Oversikt over posisjon. Svart er sann posisjon, rød er IMU-løsning og gul viser tyngde-løsning.	59
7.8	Posisjonsfeil IMU.	60
7.9	Posisjonsfeil Tyngde.	61
7.10	Tyngdeverdi fra database og målt tyngdeverdi.	62
7.11	Oversikt over posisjon. Svart er sann posisjon, rød er IMU-løsning og gul viser tyngde-løsning.	63
7.12	Posisjonsfeil IMU.	64
7.13	Posisjonsfeil tyngde.	65
7.14	Tyngdeverdi fra database og målt tyngdeverdi.	66
7.15	Oversikt over posisjon. Svart er sann posisjon, rød er IMU-løsning og gul viser tyngde-løsning.	67
7.16	Posisjonsfeil IMU.	68
7.17	Posisjonsfeil tyngde.	69
7.18	Utsnitt av figur 7.14	73
7.19	Utsnitt av figur 7.15	73
7.20	Utsnitt fra tyngdedatabase. Tyngdeverdiene er gitt i mGal. .	74
8.1	Tyngdeverdi fra database, målt tyngdeverdi og geoidmodell. .	77
D.1	Tyngdeverdi fra database og målt tyngdeverdi.	93
D.2	Oversikt over posisjon. Svart stripe er sann posisjon, rød er IMU-løsning og gul viser tyngdeløsning.	94
D.3	Posisjonsfeil IMU.	95
D.4	Posisjonsfeil Tyngde.	96
D.5	Tyngdeverdi fra database og målt tyngdeverdi.	97

D.6	Oversikt over posisjon. Svart er sann posisjon, rød er IMU-løsning og gul viser tyngde-løsning.	98
D.7	Posisjonsfeil IMU.	99
D.8	Posisjonsfeil tyngde.	100

Tabeller

5.1	Spesifikasjoner for TAGS-6	32
5.2	Spesifikasjoner for akselerometer til HG9900	33
5.3	Spesifikasjoner for gyro til HG9900	34
5.4	Sensorenes plassering i H.U.Sverdrup. Koordinatene er gitt i B, dvs. at x peker fremover i båtens kjøreretning, y er styrbord og z peker ned.	35
5.5	IMUens orientering i farkosten.	36
5.6	Kvalitet og nøyaktighet til gridet.	40
7.1	Største avvik fra sann posisjon, og største standardavvik. . . .	70
7.2	Avvik fra sann posisjon, og standardavvik ved slutten av hver kjøring.	71
D.1	Største avvik fra sann posisjon, og største standardavvik. . . .	101
D.2	Avvik fra sann posisjon, og standardavvik ved slutten av hver kjøring.	101

1 Introduksjon og problemdefinisjon

1.1 Bakgrunn

Ubåter og andre undervannsfarkoster har behov for å finne sin posisjon med høy nøyaktighet. For neddykkede ubåter er den klassiske navigasjonsmetoden treghetsnavigasjon (INS), støttet av Em-logg (fart mot vann). Disse systemene lider av at de drifter, og feilen som oppstår akkumuleres over tid. Det er mulig å oppnå nøyaktig posisjon fra GNSS (Global Navigation Satellite System), men GNSS-signalene penetrerer ikke vann. GNSS-antennen må derfor være over vannflaten. For en ubåt er det å bryte vannflaten røpende, og derfor ofte ikke et alternativ [Mandt, 2001]. Derfor er det ønskelig å oppnå nøyaktig posisjon uten å være avhengig av GNSS eller andre eksterne kilder.

Ved hjelp av terrengreferert posisjonering er det mulig å oppnå høy posisjonsnøyaktighet uten å måtte gå til overflaten. Terrengreferert posisjonering går ut på å måle egenskaper i terrenget og sammelikne målingene med en database for å finne posisjonen. For marine fartøy er det vanlig å bruke informasjon om batymetri til terrengreferert posisjonering. Ulempen med dette er at det trengs aktive akustiske sensorer for å oppnå høyoppløselig informasjon om batymetrien. For ubåter er det ønskelig å bruke passive sensorer.

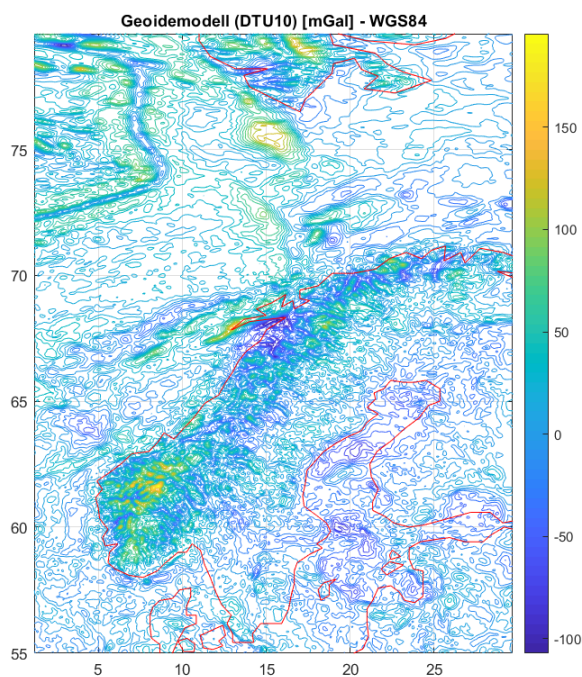
En passiv metode er å måle jordas tyngdefelt. I teorien skal det være mulig å benytte tyngdemålinger til terrengreferert posisjonering. Man er da avhengig av å ha en tyngdedatabase som tyngdemålingene kan sammenliknes med.

1.2 Tidligere studier

Det er tidligere gjennomført studier på bruk av tyngdereferert navigasjon. Sent på 90-tallet og tidlig på 2000-tallet ble det gjort ulike forsøk på å bruke tyngdekraft i navigasjonssystem. Det ble testet med tyngdekart [Bishop, 2001], og/eller en kombinasjon av tyngdemålinger fra gravimeter og målinger fra gradiometer [Moryl et al., 1998] og [Rice et al., 2000]. Et gravimeter er et instrument som brukes til å måle tyngdens akselerasjon. Et gradiometer derimot brukes til å måle variasjoner i en størrelse. Med andre ord kan gradiometeret brukes til å måle variasjoner i tyngdeakselerasjonen. Gradio-

metermålinger ble ansett som interessante fordi signalene har mer variasjon enn det rene tyngdesignalet. Dette er spesielt viktig for de amerikanske strategiske ubåtene som opererer på dyphavet der variasjonen i tyngde for det meste er liten (se figur 1.1). Svakheten er at gradiometeret er svært følsomt for endringer i massefordelingen i nærfeltet, dvs i ubåten. De er også mekanisk kompliserte og lite robuste. Amerikanske myndigheter har beskrevet resultatene fra forsøk med gradiometer på ubåt som inkonsistente, og har gått bort fra det.

Selv om resultatene fra undersøkelsene over viser at tyngdemålinger er dårlig egnet til navigasjonsformål har FFI tro på at slike metoder likevel kan brukes i kystnære strøk rundt Norge. Nærmere kysten varierer tyngdesignalet mer (se figur 1.1), og det er tro på at det her er nok variasjon til å kunne bruke tyngdesignalet som en terrengmodell.



Figur 1.1: Variasjon i tyngdefeltet (geoidmodell DTU10). De røde linjene markerer kystlinjen.

I 2016 gjennomførte Norges Geografiske Undersøkelse (NGU) en studie på oppdrag fra FFI på bruk av tyngdedata som støtte til undervannsnavigasjon [Haase et al., 2016]. Det ble tatt utgangspunkt i en marin tyngdedatabase over den norske kontinentalsokkelen, hvor fem områder av interesse ble undersøkt. Tyngdemålinger langs profiler ble sammenliknet med et referansekart, på samme måte som ved terrengreferert navigasjon. Dersom tyngdemålingene ikke stemmer med referansekartet, blir det estimert posisjonskorreksjoner. Dette ble simulert og testet langs flere ulike profiler. Resultatene viser at tyngderefererte posisjonskorreksjoner er veldig avhengig av datakvalitet, og orienteringen til profilene relativt til tyngdekartetets struktur. Studien konkluderer med at tyngdedata kan brukes til støtte for forbedre INS posisjon under vann, men at det er avhengig av hvordan dataene blir prosessert, hvilke filtre som brukes og kvalitet på tyngdedatabasen.

1.3 Problemdefinisjon

Denne oppgaven er en videreføring av NGU sin studie fra 2016. Hovedforskjellen mellom NGUs studie og denne oppgaven er at NGU i hovedsak brukte simulerte data, mens det her brukes full treghetsnavigasjon sammen med virkelige tyngdemålinger. Problemstillingen i oppgaven er å teste om tyngdemålinger som støtte til et treghetsnavigasjonssystem er egnet til å begrense drift i systemet. Det skal lages en målelikning som implementeres i FFIs prosesseringsverktøy NavLab. Målelikningen skal bruke forskjellen mellom målte tyngdedata og tyngdedata fra antatt posisjon fra en fasitdatabase til å estimere et bedre posisjonsestimat. Metoden testes for et overflatefartøy, men det skal i teorien være mulig å videreføre til et undervannsfartøy.

2 Tyngdefelt og gravimetri

Dette kapitlet tar for seg tyngdebegrepet, metoder for å måle tyngde og ulike korreksjoner som må påføres tyngdemålinger.

2.1 Jordas tyngdefelt

I følge Newtons gravitasjonslov vil to punktmasser m_1 og m_2 med avstand l tiltrekke hverandre med en kraft F gitt som:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{l^2} \quad (2.1)$$

Hvor G er Newtons gravitasjonskonstant med verdi:

$$G = 6.6742 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2} \quad (2.2)$$

Tyngde defineres som den totale kraften som virker på et legeme i ro på jordas overflate. Altså er det summen av jordas gravitasjonskraft og jordas sentrifugalkraft. Den målte tyngden g er en akselerasjon målt i Gal eller mGal¹ [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006, s. 43].

2.1.1 Geoiden

Geoiden er en ekvipotensialflate som representerer jordas sanne tyngdefelt ved havoverflaten, tyngdepotensialet betegnes W . Geoidens form er ujevn, og avhengig av jordas massefordeling. Tyngdevektoren g er en gradientvektor til potensialet W . Retningen til tyngdevektoren er samme retning som loddlinja og størrelsen defineres som tyngde. Når tyngden relateres til høyde, får man negativ vertikal gradient gitt som:

$$dW = -gdH \leftrightarrow g = -\frac{\partial W}{\partial H} \quad (2.3)$$

¹1mGal = $10^{-5} m/s^2 \approx 1\mu g$

2.1.2 Normaltyngdefelt

Ellipsoiden representerer en ekvipotensialflate til jordas normal tyngdefelt, hvor alle jordas masser er på innsiden av ellipsoideoverflaten. U er potensialet til normaltyngdefeltet. Potensialet til normaltyngdefeltet bestemmes kun av ellipsoidens form, masse og vinkelhastighet. Avstanden mellom geoiden og ellipsoiden kalles for geoid høyde. Forskjellen i høyde mellom geoiden og ellipsoideflata er stort sett under 50m, men kan i noen tilfeller overstige 100m.

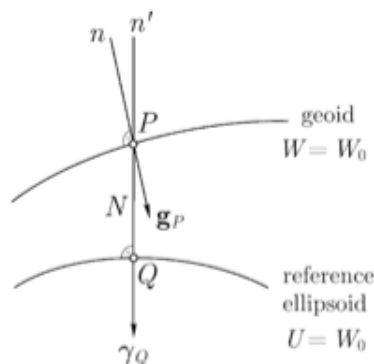
Normaltyngde er definert som tyngde på referanseellipsoiden, og er en teoretisk verdi. Den er kun avhengig av breddegrad. For referanseellipsoiden WGS84 kan normaltyngden (g_0) i et punkt beregnes ved hjelp følgende formel [Blakely, 1995, s.136].

$$g_0 = 9.7803267714 \frac{1 + 0.00193185138639 \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - 0.00669437999013 \sin^2 \phi}} \quad (2.4)$$

hvor ϕ er breddegrad. g_0 er gitt i m/s^2 .

2.1.3 Tyngdeanomali

Det er en liten forskjell mellom det faktiske tyngdepotensialet W og normaltyngdepotensialet U . Dersom man sammenlikner geoiden $W(x, y, z) = W_0$ med referanseellipsoiden $U(x, y, z) = U_0$ ved samme potensial $U_0 = W_0$, kan et punkt P på geoiden projiseres til punkt Q på ellipsoiden langs ellipsoide-normalen (Figur 2.1).



Figur 2.1: Geoide og referanseellipsoide. [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006, s. 91]

Geoidehøyden er avstanden PQ mellom geoiden og ellipsoiden og betegnes N . Differansen mellom tyngdevektoren \mathbf{g} ved punkt P og normaltyngdevektor γ ved punkt Q betegnes som tyngdeanomalivektoren $\Delta\mathbf{g}$. En vektor karakteriseres av størrelse og retning. Tyngdeanomali er forskjellen i størrelse.

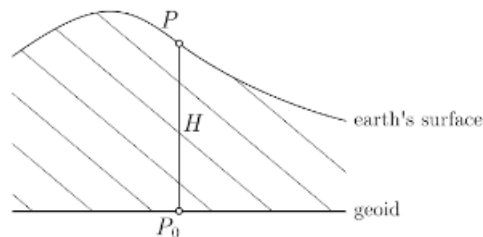
$$\Delta g = g_P - \gamma_Q \quad (2.5)$$

Forskjell i retning kalles for loddavvik. Det er viktig å merke seg at tyngden i P er basert på lokale målinger, mens normaltyngden for Q er beregnet fra en formel for normaltyngde [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006, s. 90-92]. Dersom referanseellipsoiden er WGS84 kan formel 2.4 benyttes.

2.1.4 Tyngdereduksjon

Tyngde g målt på jordoverflaten må reduseres ned til geoiden før den kan skiller fra normaltyngden γ . Det er ulike metoder for å redusere tyngdeverdien. Det som skiller dem er hvordan de topografiske massene over geoiden håndteres. Tyngdereduksjon består i hovedsak av to steg:

1. Topografiske masser utenfor geoiden fjernes eller flyttes under geoiden.
2. Tyngdestasjonen senkes fra jordoverflaten (punkt P) til geoiden (punkt P_0). Se figur 2.2.



Figur 2.2: Tyngdereduksjon. [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006, s. 129]

Reduksjoner som er vanlige å bruke er blant annet Friluft-reduksjon, Bouguer-reduksjon, terreng-reduksjon og isostatisk-reduksjon. For mer om reduksjoner se [Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2006, Kap.3] I denne oppgaven er alle tyngdemålinger gjort på havoverflaten, og man kan derfor anta at målingene er gjort direkte på geoiden.

2.2 Gravimetri

Gravimetri brukes for å bestemme tyngdens akselerasjon (vanligvis betegnet som tyngde g) i et spesifikt punkt, i tillegg til å detektere tyngdeendringer over tid for et område. Siden jorda ikke har form som en kule hvor massene er jevnt fordelt vil tyngdefeltet variere etter hvor på jordkloden man befinner seg. Absolutte tyngdemålinger gir absolutte tyngdeverdier, mens relative tyngdemålinger gir tyngdeforskjeller [Torge and Müller, 2012, s.175]. For å bestemme tyngdeforskjeller og variasjoner i tyngdefeltet trengs en kombinasjon av absolutte og relative måleteknikker.

2.2.1 Absolutt gravimetri

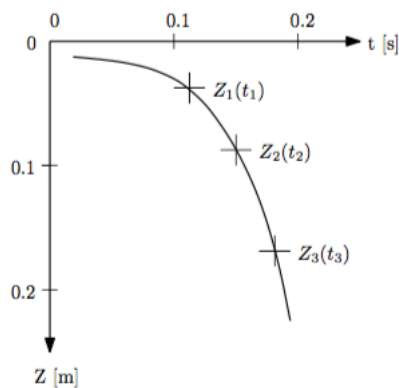
Moderne absolutte gravimetre baserer seg på tid-avstand målinger langs en vertikal for å bestemme tyngdeakselerasjon på et bestemt punkt på jorda. Tyngdemålingene blir absolutte ved at de samme standardene som definerer tid og lengde brukes som komponenter i gravimeter-systemet [Timmen, 2010].

Tyngdekraftens absoluttverdi måles i dag ved hjelp av fritt-fall instrumenter. Fritt-fall instrumenter måler akselerasjonen av en testmasse i vakuum. I et

uniformt tyngdefelt kan bevegelsen til en masse i fritt fall uttrykkes ved hjelp av følgende bevegelseslikning:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = m\ddot{z} = mg(z) \quad (2.6)$$

z er den vertikale aksen, m er testmassens masse og t er tiden. For å bestemme tyngdekomponenten trengs minst tre målinger. En kurve tilpasses tid-avstand settene (se figur 2.3) og gir tyngdeakselerasjonen i referansehøyden, $g_0 = g$. Siden jordas tyngdefelt ikke er homogent, vil tyngdeverdien variere i vertikal retning. For en mer nøyaktig tyngdeverdi kan tyngdegradienten implementeres i likning 2.6. For mer om absolutt gravimetri se [Timmen, 2010] og [Torge and Müller, 2012, s. 175-183]



Figur 2.3: Tid-avstand diagram for et fritt fall. [Timmen, 2010]

2.2.2 Relativ gravimetri

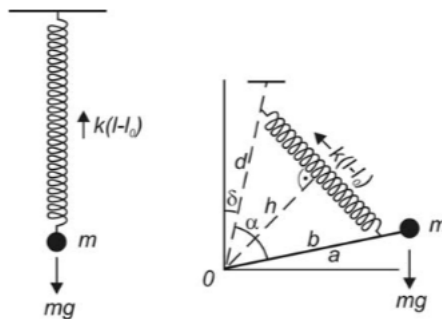
Med relativ gravimetri kan tyngdevariasjoner i tid/rom observeres. Dersom man har en absolutt tyngdeverdi i et punkt kan man med relativ gravimetri knytte tyngdeverdier til andre stasjoner. I tillegg kan relative tyngdemålinger brukes til å oppdage forskjeller i samme posisjon over lange tidsserier, og til å bestemme tyngdegradienter.

Relative gravimetre er stort sett fjær-gravimetre hvor en testmasse festet til en fjær eksponeres for jordas tyngdefelt. En endring i tyngden fører til en endring i testmassens posisjon, slik at lengden på fjæra endres (se figur 2.4).

Testmassen holdes i ro i et elektrisk felt mellom to kondensatorplater. Kraften som må til for å holde testmassen i ro er dermed lik tyngden i punktet som måles. Slike fjærsystemer baserer seg på Hookes lov,

$$mg = k(l - l_0) \quad (2.7)$$

hvor m er massen, g er tyngden, k er fjærkonstanten, og $l - l_0$ er endring i fjæras lengde. For mer om relativ gravimetri se [Timmen, 2010] og [Torge and Müller, 2012, s.183-189].



Figur 2.4: Prinsippskisse for fjærsystemer. Til venstre: vertikal fjær. Til høyre: Fjær-arm system. [Timmen, 2010]

2.2.3 Korreksjoner

Et gravimeter måler summen av alle akselerasjoner som virker på instrumentet. Rå tyngdeobservasjoner inneholder ulike tidsvarierende komponenter. Dette er blant annet variasjoner som følge av tidejord, tidevannets last (ocean tide loading), polvandring og varierende lufttrykk. For at observert tyngde skal få gyldighet utover observasjonsøyeblikket må disse tidsvarierende komponentene korrigeres for [Timmen, 2010].

Eötvös-korreksjon

Et objekt som beveger seg på jordoverflaten opplever akselerasjoner som følge av at jorda roterer. Eötvös-korreksjonen tar høyde for denne effekten som introduseres på tyngdemålingene gjort fra et fartøy i bevegelse (skip eller fly). Korreksjonen (g_E) er avhengig av breddegrad, hastighet, og orientering til

fartøyet. Eötvös-effekten er størst når orienteringen er mot øst, og synker ved bevegelse i nord-sør retning. Effekten er symmetrisk langs øst-vest aksene og negativ i vest-retning. Jo høyere hastighet fartøyet har, jo større blir Eötvös-effekten. Eötvös-korreksjonen kan beregnes med følgende formel [Blakely, 1995, s. 143]:

$$g_E = 7.503v \cos \Phi \sin \alpha + 0.004154v^2 \quad (2.8)$$

hvor v er fartøyets hastighet, Φ er breddegrad og α er fartøyets retning (asimut).

Eötvös-korreksjonen kan nå signifikant størrelsesorden. For eksempel vil korreksjonen være på 5.4 mGal for målinger på et skip som beveger seg øst på breddegrad 45°N med en hastighet på 1knop. Feil i orientering og hastighet kan gi feil i reduserte tyngdemålinger som er i samme størrelsesorden som tyngdeanomalieene. Eötvös-korreksjonen er derfor en begrensende faktor for presisjonen til målinger gjort fra båt eller fly [Blakely, 1995, s. 142-143].

3 Treghetsnavigasjon (INS)

Treghetsnavigasjon er en navigasjonsteknikk som bruker målinger fra akselerometer og gyroskop til å beregne endringer i de kinematiske tilstandene fart, posisjon og orientering. Dette gjøres relativt en starttilstand (posisjon, orientering og hastighet). Et INS (Inertial Navigation System) består typisk av en IMU (Inertial Measurement Unit), plattformen den er montert på (inkludert monteringssteknikk) og en datamaskin som regner om målingene til posisjons-, orienterings- og hastighetsestimater [Jekeli, 2001].

En IMU er en treghetssensorenhet. Den inneholder tre ortogonale gyroskop, og tre ortogonale akselerometer som måler henholdsvis vinkelhastighet og lineær akselerasjon. Følgende notasjoner og definisjoner er konsistente med [Kjørsvik, 2010].

Et akselerometer måler spesifikk kraft \tilde{f}^S , mens data man får ut fra akselerometeret er fartsinkremitter $\Delta\tilde{v}^S$ i sensorens referanseramme (S). Fartsinkrementene tilsvarer den målte spesifikke kraften integrert over IMUens samplingsintervall δt . En måling kan skrives slik:

$$\Delta\tilde{v}^S = \int_{\delta t} \tilde{f}^S dt = \int_{\delta t} f^S + \delta f^S dt \quad (3.1)$$

Hvor betegnelsen tilde vil si at størrelsen er observert (inneholder feil), f^S er sann spesifikk kraft, δf^S er instrumentfeil og δt er IMUens samplingsintervall. Alle størrelsene er tidsavhengige. Samplingsraten til en IMU er typisk 100-400 Hz.

Et gyroskop måler vinkelhastighet $\tilde{\omega}_{IS}^S$ i sensorens system (S) relativt det inertielle systemet (I). Når målingene integreres over IMUens samplingsintervall δt får man vinkelinkremitter:

$$\Delta\tilde{\Theta}^S = \int_{\delta t} \tilde{\omega}_{IS}^S dt = \int_{\delta t} \omega_{IS}^S + \delta\omega_{IS}^S dt \quad (3.2)$$

hvor $\delta\omega_{IS}^S$ er instrumentfeil gitt i sensorens referanseramme relativt inertiell referanseramme. De ulike referanserammene vil bli definert i delkapittel 3.1.

3.1 Referanserammer

Dette delkapitlet tar for seg ulike referanserammer som brukes i navigasjonssystemer. Siden ulike sensorer gjør målinger i ulike referanserammer må man transformere mellom de ulike referanserammene. For å gjøre transformasjonene brukes rotasjonsmatriser, utledning for rotasjonsmatrisene finnes i [Farell, 2008, kap 2.4, s. 35-39]. I denne oppgaven betegnes rotasjonsmatrisene med R . R_a^b definerer en rotasjonsmatrise som transformerer fra referanseramme a til referanseramme b. Den inverse av R_a^b transformerer fra referanseramme b til referanseramme a. Definisjon for de ulike referanserammene er hentet fra [Farell, 2008, kap. 2.2, side 23-27] og [Gade, 2003, s. 31]. Betegnelsene som er brukt tilsvarer notasjonen som brukes i NavLab (delkapittel 5.5).

I - Inertiell referanseramme

En inertiell referanseramme er en referanseramme hvor Newtons lover gjelder. Det vil si at referanserammen ikke akselererer, og origo til systemet er ikke relevant. Treghetssensorer slik som gyroskop og akselerometere måler bevegelser relativt til den inertielle referanserammen.

E - Jordas referanseramme

Dette referansesystemet har origo som sammenfaller med jordsentrum (geometrisk senter til en ellipsoidmodell), yz-planet sammenfaller med ekvatorplanet, hvor y-aksen peker mot lengdegrad $+90^\circ$, og x-aksen peker mot nord. Aksene følger jordrotasjonen, dermed kan ikke Newtons lover anvendes direkte i denne referanserammen. Observasjonslikningene i Navlab er utledet i dette systemet.

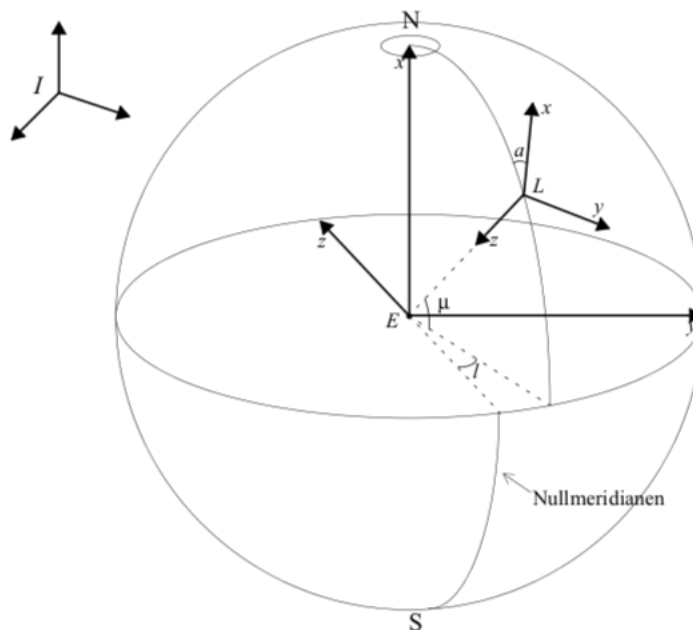
L - Lokal referanseramme

Lokal referanseramme har origo direkte under eller over kjøretøyet, ved jordas overflate, og z-aksen peker nedover.

- NED-system (north, east, down): Dette systemet er definert slik at en akse peker mot nord (N), en mot øst (E) og en ned mot jordsentrum (D).

- Foucalt-system (vandrende asimut): N- og E-aksen roterer om D-aksen, slik at vinkelhastigheten relativt til jorden har en 0-komponent langs D-aksen.

Navlab bruker Foucalt versjon. Denne sammenfaller i utgangspunktet med NED-systemet.



Figur 3.1: Referanseramme E, I og L. Her er aksene i L gitt som x, y, z. Dette tilsvarer henholdsvis N, E, D. Vinkelen a er definert som vinkelen NED (i L-systemet) må dreies om sin D-akse for å sammenfalle med foucalt L-system. [Gade, 1997]

B - Kjøretøyets referanseramme

Dette er kjøretøyets referanseramme. X-aksen peker fremover (i kjøretøyets kjøreretning), y-aksen peker mot høyre (styrbord), og z-aksen peker ned. Denne referanserammen brukes blant annet til å beskrive fartøyets orientering (B i forhold til L), og hvordan de ulike sensorene er plassert i forhold til hverandre og til L-systemet.

S - Sensorens referanseramme

Dette er referanserammen til sensorene. Aksene spenner ut et kartesisk høyrehåndssystem.

M - Kartreferanseramme i NavLab

Denne referanserammen brukes kun til plotting i NavLab. Vertikal posisjon er på jordas overflate. Origo er jordfast i kjøretøyets startposisjon. X-aksen peker mot nord og y-aksen mot øst. M er lik en jordfast NED-versjon av L med origo i initialposisjonen.

3.2 Monteringsteknikker

Det finnes hovedsaklig to monteringsteknikker som brukes i treghetsnavigasjon: Gimbalmontering og skrofast montering. Forskjellen på disse er hvilken referanseramme målingene blir gitt i [Woodman, 2007].

3.2.1 Gimbalmontering

I en gimbalmontering er sensoren plassert på en plattform som holdes isolert fra eksterne rotasjoner. Dette gjør at sensoren kan bevege seg fritt i alle tre akser, og ikke påvirkes av kjøretøyets bevegelse. I praksis vil det si at plattformen holdes i et nord-orientert horisontalplan. Merk at “fritt” er i forhold til skroget/body.

3.2.2 Skrofast montering (strapdown system)

I skrofast montering er IMUen montert direkte mot kjøretøyets skrog, i kjøretøyets referanseramme eller i et system med en fast stilling i forhold til det. Dette gjør at målingene er gitt relativt kjøretøyets referanseramme (B). Hvis sensoren er montert direkte på farkosten (og likt orientert som B) settes $B=S$. Farkostens orientering estimeres ved at de målte vinkelhastighetene fra gyroskopene integreres opp. De målte akselerasjonene transformeres til en global referanseramme, ved hjelp av estimert orientering. For å estimere posisjon integreres de transformerte akselerasjonene to ganger. Skrogmonterte systemer har en enklere konstruksjon enn gimbalmonterte systemer, men

krever mer regnekraft. Skrogmonterte systemer er den mest brukte formen for INS.

3.3 Feilforplantning

I treghetsnavigasjon er vi primært interessert i størrelser (fart, posisjon og orientering) som ikke måles direkte. Disse størrelsene beregnes ut fra den matematiske sammenhengen med de målte størrelsene (gyro- og akselerometermålinger). Feilforplantning defineres som hvordan feil i originale observasjoner forplanter seg i disse størrelsene [Ghilani, 2010, s. 2].

Feilforplantning er en svakhet til treghetsnavigasjon. Feil i IMUen karakteriseres av hvit støy (hvit støy på hvert sample), bias (nullpunktsfeil) og skalafaktorfeil. Siden de målte størrelsene integreres opp, vil feil akkumuleres i systemet. Dette vil igjen gi feil i for eksempel posisjon [Torge and Müller, 2012, s. 213].

3.4 Oversikt over treghetsnavigasjon

Et system som kun benytter en IMU vil ikke kunne beregne absolutte posisjoner. For å beregne posisjon fra en IMU trenger man starbetingelser. Disse hentes ofte fra GNSS. Man trenger informasjon om initiell posisjon, initiell hastighet og initiell orientering til sensoren.

Anta startbetingelser ved tidspunkt t_o , apriori posisjon $\tilde{x}^E(t_o)$, apriori hastighet $\tilde{\dot{x}}^E(t_o)$ og apriori orientering gitt som retningsmatrise $\tilde{R}_S^E(t_o)$. Vinkelementene fra gyroen brukes til å oppdatere sensorens orientering (R_S^E). Den oppdaterte retningsmatrisen brukes så til å transformere hastighetsinkrementene fra sensorens referansesystem (S) til jordsystemet (E). Ved hjelp av numerisk integrasjon av gyro- og akselerasjonsmålingene får man oppdatert posisjons- og hastighetsestimat ved tidspunkt $t_o + \delta t$. Hvor δt er IMUens samplingsintervall.

Dersom initialverdiene er riktige og systemet ikke har noen instrumentfeil vil INS-et gi kontinuerlig oppdatert posisjon, hastighet og orientering uten noen form for eksterne sensorer. Dessverre vil det alltid være instrumentfeil til stede og et treghetssystem bestående kun av en IMU uten eksterne sensorer er derfor ustabil. Ved å legge til eksterne sensorer som for eksempel

GNSS, vil man få et mer stabilt system som gir bedre nøyaktighet [Kjørsvik, 2010].

3.5 Navigasjonslikninger

Et INS baserer seg på Newtons andre lov² og effekter forårsaket av gravitasjonskraften [Torge and Müller, 2012, s. 212].

Ved navigasjon i nærheten av jordas overflate er det ofte hensiktsmessig å oppgi posisjonen i forhold til jorda, altså E. Man ønsker dermed å finne posisjonsvektoren x_{ES} ved hjelp av akselerometermålinger og gyromålinger. Man antar at disse målingene er perfekte og dermed ikke inneholder feil. Nedenfor kommer en oversikt over hensyn som må tas. Teorien i dette kapitlet er hentet fra [Gade, 1997] med mindre noe annet er nevnt.

Målinger gjort på eller nær jordoverflaten er påvirket av jordas gravitasjonsfelt. Akselerasjon forårsaket av en eller flere påførte krefter, som gjør at et objekt beveger seg eller endrer hastighet er definert som **spesifikk kraft**. Spesifikk kraft er altså kraft per mengde masse, og betegnes ofte slik: f^I .

I følge Newtons lov for bevegelse kan den kinematiske akselerasjonen \ddot{x}^I til et legeme i inertial systemet defineres slik:

$$\ddot{x}^I = f^I + g_{att}^I \quad (3.3)$$

Omskrevet med hensyn på spesifikk kraft blir det:

$$f^I = \ddot{x}^I - g_{att}^I \quad (3.4)$$

g er gravitasjonsvektoren som følge av massetiltrekning. Ut fra likning 3.4 ser man at et akselerometer i ro kun måler gravitasjonsakselerasjonen. På bakgrunn av dette vet man at hvis akselerasjonen \ddot{x}^I er null vil spesifikk kraft f^I være lik g_{att}^I i motsatt retning [Torge and Müller, 2012, s.191].

$$f^I = -g_{att}^I \quad (3.5)$$

²Summen av kreftene som virker på en gjenstand, tilsvarer gjenstandens masse multiplisert med akselerasjonen ($F=ma$).

En akselerometermåling er differansen mellom virkelig akselerasjon \ddot{x}_{IS} og gravitasjonsvektoren ved origo i S g_S :

$$f_{IS} = \ddot{x}_{IS} - g_S \quad (3.6)$$

Siden jorda roterer er hvert punkt på jordoverflaten (utenom nord- og sydpolen) akselerert i forhold til I. Det vil si at $\ddot{x}_{IS} \neq \ddot{x}_{ES}$.

For et inertielt system kan Newtons 2.lov settes opp slik:

$$F = m\ddot{x}_{IS} \quad (3.7)$$

Siden E ikke er et inertielt system må man innføre tilleggskrefter som ser ut til å virke i E, såkalte fiktive krefter. Man får da:

$$F + \sum F_{fiktiv} = m\ddot{x}_{ES} \quad (3.8)$$

De fiktive kreftene består av sentrifugalkraft og corioliskraft. Sentrifugalkraften innføres som følge av at jorda roterer. Den er gitt som:

$$F_{sentrifugal} = -\omega_{IE} \times (\omega_{IE} \times x_{ES})m \quad (3.9)$$

Hvor ω_{IE} er jordas vinkelhastighet, m er akselerometermassen og x_{ES} er posisjonsvektor fra jordas sentrum til origo i sensoren. Corioliskraften innføres som følge av at vi beveger oss i et roterende system, og er gitt som:

$$F_{coriolis} = -(2\omega_{IE} \times \dot{x}_{ES})m \quad (3.10)$$

hvor \dot{x}_{ES} er fartøyets hastighet i forhold til E.

Dersom likning 3.7, 3.9 og 3.10 settes inn i 3.8 og man dividerer på m , fås følgende sammenheng mellom \ddot{x}_{ES} og \ddot{x}_{IS} :

$$\ddot{x}_{ES} = \ddot{x}_{IS} - \omega_{IE} \times (\omega_{IE} \times x_{ES}) - 2\omega_{IE} \times \dot{x}_{ES} \quad (3.11)$$

Videre settes likning 3.6 inn i 3.11 og man får følgende uttrykk for \ddot{x}_{ES} :

$$\ddot{x}_{ES} = f_{IS} + g_S - \omega_{IE} \times (\omega_{IE} \times x_{ES}) - 2\omega_{IE} \times \dot{x}_{ES} \quad (3.12)$$

Ved å integrere opp 3.12, kan man finne posisjon i E, x_{ES} .

Det som er beskrevet til nå er hensyn som må tas på jorda i forhold til akselerometermålingene. Når det gjelder gyroene vil de alltid måle ω_{IS} . Siden jorda roterer vil E hele tiden endre sin orientering i forhold til I. Dette vil gyroen måle. Siden man er interessert i sensorens orientering relativt E, må jordrotasjonen trekkes fra: $\omega_{ES} = \omega_{IS} - \omega_{IE}$.

3.5.1 Navigasjonslikninger i L

Det er nå vist hvordan akselerometer- og gyromålinger kan knyttes til E. Navlab bruker L, navigasjonslikningene vil derfor bli utledet i L. Likningene vil her bli vist for jorda tilnærmet som en kule. Dersom jorda tilnærmes som en ellipsoide vil likningene bli mer nøyaktige, men også mye mer komplekse. For dette formålet antas det at en kuletilnærming gir god nok nøyaktighet. I NavLab er det mulig å velge om man ønsker å bruke en kuletilnærming eller ellipsoidtilnærming. Man antar at akselerometerene og gyroene er montert skrogfast, dermed blir S=B. Utgangspunktet er målingene: f_{IB}^B og ω_{IB}^B (og initiale verdier). Det vi ønsker å finne er fartøyets posisjon, orientering og hastighet.

Fartøyets posisjon skal gis som R_L^E . Grunnen til det er at Navlab bruker n-vektor til å representere posisjon (se kapittel 5.5.1). Sammenhengen mellom n_{EB}^E og R_L^E er gitt som:

$$n_{EB}^E = R_L^E n_{EB}^L \quad (3.13)$$

hvor:

$$n_{EB}^L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Orienteringen til L i forhold til E vil dermed definere en entydig todimensjonal posisjon (i tillegg til asimut-vinkelen). Fartøyets orientering skal gis som R_B^L , og hastigheten som \dot{x}_{EB}^L .

I likning 3.12 er akselerasjonen relatert til E. Vi har sammenhengen: $\ddot{x}_{ES} = \ddot{x}_{EB} = {}^E \frac{d}{dt}(\dot{x}_{EB})$. For å finne \dot{x}_{EB}^L kan man bruke sammenhengen mellom enkeltderivert i ulike systemer (likning A.7). For dette tilfellet får man da:

$${}^L \frac{d}{dt}(\dot{x}_{EB}) = {}^E \frac{d}{dt}(\dot{x}_{EB}) - \omega_{EL} \times \dot{x}_{EB} \quad (3.15)$$

Man ser dermed at i L får likning 3.12 tillegget $-\omega_{EL} \times \dot{x}_{EB}$ i forhold til derivasjon i E:

$$\begin{aligned} {}^L \frac{d}{dt}(\dot{x}_{EB}) &= f_{IB} + g_B - \omega_{IE} \times (\omega_{IE} \times x_{EB}) - 2\omega_{IE} \times \dot{x}_{EB} - \omega_{EL} \times \dot{x}_{EB} \\ &= f_{IB} + g_B - \omega_{IE} \times (\omega_{IE} \times x_{EB}) - (2\omega_{IE} + \omega_{EL}) \times \dot{x}_{EB} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Dekomponert i L blir det:

$$\frac{d}{dt}\dot{x}_{EB}^L = R_B^L f_{IB} + \bar{g}_B^L - (2\omega_{IE}^L + \omega_{EL}^L) \times \dot{x}_{EB}^L \quad (3.17)$$

Hvor $\bar{g}_B^L = g_B^L - \omega_{IE}^L \times (\omega_{IE}^L \times \bar{x}_{EB}^L)$. Ved å integrere opp 3.17 får man hastigheten \dot{x}_{EB}^L . For å gjøre det trenger man R_B^L , ω_{IE}^L og ω_{EL}^L .

ω_{IE}^L finner man ved å dekomponere den kjente jordrotasjonen ω_{IE}^E i L:

$$\omega_{IE}^L = R_E^L \omega_{IE}^E \quad (3.18)$$

ω_{EL}^L er rotasjon for L relativt E. Siden man har vandrende asimut er den vertikale delen av ω_{EL}^L alltid lik null (L roterer kun rundt sine N- og E-akser i forhold til jorda). For en kuleformet jord kan ω_{EL}^L skrives slik:

$$\omega_{EL}^L = \frac{1}{r_{EB}}(u_{EB}^L \times \dot{x}_{EB}^L) \quad (3.19)$$

Hvor r_{EB} er avstanden fra jordsentrum til farkosten ($r_{EB} = |x_{EB}|$). u_{EB}^L er enhetsvektoren $\frac{x_{EB}}{|x_{EB}|}$ dekomponert i L:

$$u_{EB}^L = \frac{x_{EB}}{|x_{EB}|} = [0, 0, -1]^T \quad (3.20)$$

For å finne fartøyets orientering R_B^L trenger man gyromålingen. Ved hjelp av likning A.3 kan man sette opp:

$$\dot{R}_B^L = R_B^L S(\omega_{LB}^B) \quad (3.21)$$

S er skjevsymmetrisk matriserepresentasjon. For en tredimensjonal vektor a er den gitt som:

$$S(a) = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

For alle par av tredimensjonale vektorer a og b har man:

$$a \times b = S(a)b \quad (3.23)$$

ω_{LB}^B er gitt av sammenhengen:

$$\omega_{IB} = \omega_{IE} + \omega_{EL} + \omega_{LB} \quad (3.24)$$

Man får dermed:

$$\dot{R}_B^L = R_B^L S(\omega_{IB}^B - \omega_{IE}^B - \omega_{EL}^B) \quad (3.25)$$

Siden man allerede har ω_{IE}^L og ω_{EL}^L kan 3.25 omformes til å bruke ω_{IE}^L og ω_{EL}^L direkte:

$$\dot{R}_B^L = R_B^L S(\omega_{IB}^B) - R_B^L S(\omega_{IE}^B + \omega_{EL}^B) \quad (3.26)$$

Similaritetstransformasjon (se appendix A.2) gir:

$$S(\omega_{IE}^B + \omega_{EL}^B) = R_L^B S(\omega_{IE}^L + \omega_{EL}^L) R_B^L \quad (3.27)$$

Dermed kan likning 3.26 skrives som:

$$\dot{R}_B^L = R_B^L S(\omega_{IB}^B) - S(\omega_{IE}^L - \omega_{EL}^L) R_B^L \quad (3.28)$$

Ved å integrere opp 3.28 får man R_B^L .

Fra ω_{EL}^L finner man R_L^E ved hjelp av sammenhengen gitt av A.3:

$$\dot{R}_L^E = R_L^E S(\omega_{EL}^L) \quad (3.29)$$

som integreres til R_L^E .

Man sitter da igjen med følgende navigasjonslikninger for posisjon, orientering og hastighet:

$$\frac{d}{dt} R_L^E = R_L^E S(\omega_{EL}^L) \quad (3.30a)$$

$$\frac{d}{dt} R_B^L = R_B^L S(\omega_{IB}^B) - S(\omega_{IE}^L - \omega_{EL}^L) R_B^L \quad (3.30b)$$

$$\frac{d}{dt} \dot{x}_{EB}^L = R_B^L f_{IB}^B + \bar{g}_B^L - (2\omega_{IE}^L + \omega_{EL}^L) \times \dot{x}_{EB}^L \quad (3.30c)$$

4 Stokastiske prosesser og Kalmanfilter

Feilutvikling kan beskrives som en stokastisk prosess. En populær algoritme som blir mye brukt til å modellere og estimere denne feilutviklingen er Kalmanfilteret. Dette kapitlet beskriver stokastisk modellering og Kalmanfilteralgoritmen anvendt på treghetsnavigasjon.

4.1 Lineære dynamiske system

Utleddninger i det følgende delkapitlet er hentet fra [Kjørsvik, 2010] dersom ikke annet er nevnt. Farkostens dynamikk kan beskrives som et kontinuerlig dynamisk system, som beregnes ut fra de diskrete IMU-samplene. IMU-feilene går gjennom de samme beregningene, men for estimeringsformål ønsker vi å tilnærme feilutviklingen med en enklere lineær og diskret modell.

For et kontinuerlig lineært dynamisk system kan løsningen skrives som en første ordens differensiallikning.

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t), \quad (4.1)$$

hvor $x(t)$ er en vektor med tilfeldige systemvariabler, $F(t)$ og $G(t)$ er kjente matriser som inneholder det lineariserte forholdet mellom tidligere og nåværende tilstand til x per tid t , $u(t)$ er en støyvektor. Løsningen til likning 4.1 er gitt som

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, t')G(t')u(t')dt', \quad (4.2)$$

hvor $\Phi(t, t_0)$ er transisjonsmatrisen som knytter tilstand $x(t)$ fra t_0 til nåværende tidspunkt t .

For integrasjon over et veldig kort tidsintervall $\delta t = t - t'$ kan systemmatrisen F fra likning 4.1 antas å være konstant over intervallet δt . Transisjonsmatrisen for dette tidsintervallet er da gitt som

$$\Phi(t, t') = e^{F(t-t')} \quad (4.3)$$

Likning 4.3 kan rekkeutvikles som en Taylor-rekke

$$\Phi(t, t') = I + F(t-t') + \frac{1}{2!}(F(t-t'))^2 + \frac{1}{3!}(F(t-t'))^3 + \dots \quad (4.4)$$

Løsningen over er på kontinuerlig form. Man har diskret observasjoner og trenger å overføre likning 4.2 til diskret form hvor $x_k = x(t_k)$:

$$x_k = \Phi(t_k, t_{k-1})x_{k-1} + w_k \quad (4.5)$$

hvor

$$w_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t, t')G(t')u(t')dt' \quad (4.6)$$

w_k forteller hvordan prosesstøy akkumuleres over et tidsintervall. Kovariansmatrisen til w_k er

$$Q_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t, \eta)G(\eta)WG^T(\eta)\Phi^T(t, \eta)d\eta. \quad (4.7)$$

For praktisk bruk bør likning 4.7 integreres numerisk. For små tidsintervall $\delta t = (t_k - t_{k-1})$, kan Q_k tilnærmes ved en avkortet Taylor-rekke

$$\begin{aligned} Q_k \approx & GWG^T \delta t + (FGWG^T + GWG^T F^T) \frac{(\delta t)^2}{2} + \\ & (F^2GWG^T + 2FGWG^T F^T + GWG^T (F^T)^2) \frac{(\delta t)^3}{6} + \dots \end{aligned} \quad (4.8)$$

Kovariansen til den fremskrevne tilstanden x_k blir:

$$P_k = E[x_k x_k^T] = \Phi(t_k, t_{k-1})P_{k-1}\Phi^T(t_k, t_{k-1}) + Q_k \quad (4.9)$$

Et tidsintervall $(t_k - t_0)$ kan igjen deles inn i mindre intervaller for å oppfylle kravet om at F skal være konstant. Φ skrives da:

$$\Phi(t_k, t_0) = \Phi(t_k, t_{k-1})\Phi(t_{k-1}, t_{k-2})\dots\Phi(t_1, t_0) \quad (4.10)$$

Å dele tidsintervaller inn i mindre intervaller kan også brukes for numerisk tilnærming til prosesstøy kovariansmatrisen Q , som blir en sum med integraler. Både matrise F og G antas å være konstante for integraler over et lite intervall $\delta t = t_k - t_{k-1}$. Resultatet av tilnærmingen er lik summen av utregningene av Q_k i likning 4.7. For mer om informasjon om Φ og Q_k se [Farell, 2008, s.140-144]

4.2 Stokastisk modellering og tilfeldige variabler

Usikkerhet kommer fra støy og feilkilder i sensorene, og feil i initial tilstand. Et navigasjonssystem bruker informasjon om usikkerhet når posisjon og tilstander skal estimeres. Ved hjelp av sannsynlighetsteori og stokastiske prosesser er det mulig å lage kvantitative analyser av et system.

Spektraltetthet og autokorrelasjon

En stasjonær tilfeldig prosess kan defineres som en tidsuavhengig sannsynlighetsfordeling eller som middelverdi og varians til prosessen alene. Den siste definisjonen korresponderer til wide sense stationary (WSS) tilfeldig prosess. For WSS antar man at middelverdien er konstant, og at korrelasjon og korresponderende kovarians $\mathbf{R}_{ww}(\tau)$ kun er avhengig av tidsforskjellen mellom de to tilfeldige variablene [Farell, 2008, s.122]

$$\text{cor}(\mathbf{w}(t_1), \mathbf{w}(t_2)) = \mathbf{R}_{ww}(\tau). \quad (4.11)$$

Når $\tau = t_1 - t_2$ og $\mathbf{R}_{ww}(\tau)$ er autokorrelasjonsfunksjonen, er en Fouriertransformasjon av WSS prosessen lik spektraltettheten (PSD)

$$S_w(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_{ww}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (4.12)$$

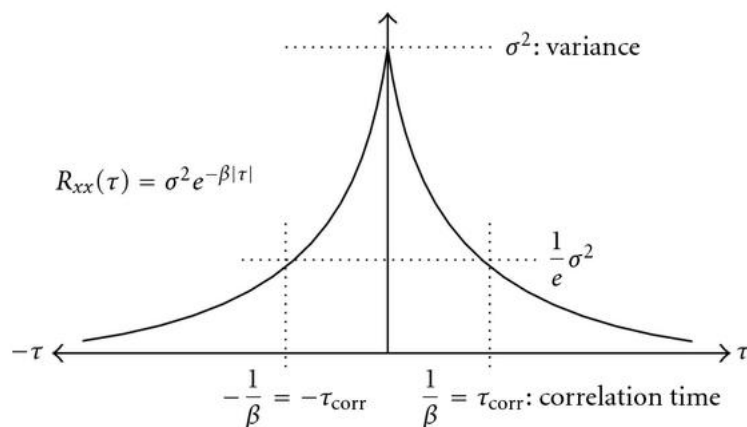
Dersom spektraltettheten til signalet er kjent kan korrelasjonsfunksjonen beregnes ut fra den inverse Fouriertransformasjonen av spektraltettheten [Farell, 2008, s.123].

Gauss-Markov Prosess

Gauss-Markov prosesser kan defineres som en spesiell type tilfeldige prosesser. Dersom den kontinuerlige prosessen $x(t)$ er en første-ordens Markov prosess, kan den relateres til følgende differensiallikning:

$$\frac{dx}{dt} + \beta_1(t)x = w \quad (4.13)$$

hvor w er hvit støy. Dersom sannsynlighetsfordelingen til både w og x er Gaussiske er $x(t)$ er Gauss-Markov prosess. Første-ordens Gauss-Markov prosesser karakteriseres av korrelasjonstiden og standardavviket til støyen. Sannsynlighetsfordelingen til $x(t_k)$ er bare avhengig av det forrige tidspunktet $x(t_{k-1})$. En stasjonær Gauss-Markov prosess kan derfor beskrives av autokorrelasjonen [Gelb, 1974, s.42-43].



Figur 4.1: Autokorrelasjon til en Gauss-Markov prosess.

Autokorrelasjonen er vist i figur 4.1³. Korrelasjonstiden er gitt som $\frac{1}{\beta}$.

Hvit og farget støy

Hvit støy er en stokastisk prosess hvor effekttettheten i signalet er konstant, uavhengig av frekvens. Hvit støy er ukorrelert, og har null som middelvei og er en diagonal feilkovariansmatrise. Enhver prosess hvor effekttettheten i signalet ikke er konstant omtales som farget støy [Farell, 2008, s.123].

Integrert hvit støy

Hvit støy er som nevnt tidligere ukorrelert i tid. For integrert hvit støy (random walk) antar man en viss avhengighet av foregående estimat. Det vil si at verdien ved inneværende tidspunkt er lik verdien ved foregående tidspunkt pluss en tilleggs-støy. Slike prosesser karakteriseres av et standardavvik som vokser med roten av tida. En integrert hvit støy prosess kan skrives slik

$$x(t) = \int_0^t w(q) dq \quad (4.14)$$

Likning 4.14 beskriver en Gauss-Markov prosess med kovarians $P_x(0) = 0$ og autokorrelasjon $R_w(t) = \sigma_w^2 \delta(t)$ [Farell, 2008, s.134-135].

³<https://www.hindawi.com/journals/ijno/2009/765010/fig4/> [Lastet ned 29.03.2018]

4.3 Kalmanfilteret

Målet er å finne et best mulig løpende estimat av fartøyets posisjon, hastighet og orientering. Utgangspunktet for dette er sensormålinger og systeminformasjon. Disse bør kombineres på en optimal måte. Kalmanfilter er en optimal estimeringsprosess som brukes på dynamiske systemer. Det er en lineær rekursiv algoritme som estimerer de ukjente tilstandene til et stokastisk dynamisk system [Kristiansen, 2017, s.35].

Det er mulig å konkretisere systeminformasjonen i form av en diskret tilstandsmodell. Tilstandsmodellen for kalmanfilteret kan skrives slik:

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + w_k \quad (4.15)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (4.16)$$

x_k er tilstandsvektor ved nåværende tidspunkt, Φ_k er transisjonsmatrisen, x_{k-1} er tilstandsvektor ved foregående tidspunkt og w_k er prosesstøy. y_k inneholder målinger relatert til x_k gjennom desigmatrisa H_k sammen med målestøy v_k . w_k og v_k er begge hvite og gjensidig ukorrelerte [Farell, 2008, s.170],[Kjørsvik, 2010].

For målestøy (v_k) og prosesstøy (w_k) ved tidspunkt k er middelerdi og kovarians definert som [Farell, 2008, s.171]:

$$\begin{aligned} E(v_k) &= 0 \\ \text{var}(v_k, v_l) &= R_k \delta_{kl} \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} E(w_k) &= 0 \\ \text{var}(w_k, w_l) &= Q d_k \delta_{kl} \end{aligned} \quad (4.18)$$

δ_{kl} er Kronecker delta funksjonen.

Kalmanfilterlikningene

Kalmanfilteralgoritmen består i hovedsak av to steg: Tidsoppdatering og måleoppdatering. Kalmanfilteret er gitt ved:

Initialisering (k=0):

$$\tilde{x}_0 = E(x_0) \quad (4.19a)$$

$$\tilde{P}_0 = E[(x_0 - \tilde{x}_0)(x_0 - \tilde{x}_0)^T] \quad (4.19b)$$

Kalmanforsterkningsmatrise (denne gir et minimum varians estimat):

$$K_k = \tilde{P}_k H_k^T [H_k \tilde{P}_k H_k^T + R_k]^{-1} \quad (4.20)$$

Oppdatering av tilstandsestimat og kovariansmatrise (måleoppdatering):

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + K_k(y_k - H_k \tilde{x}_k) \quad (4.21)$$

$$\hat{P}_k = (I - K_k H_k) \tilde{P}_k \quad (4.22)$$

Prediksjon av tilstandsestimat og kovariansmatrise (tidsoppdatering):

$$\tilde{x}_{k+1} = \Phi_k \hat{x}_k + w_k \quad (4.23)$$

$$\tilde{P}_{k+1} = \Phi_k \hat{P}_k \Phi_k^T + Q_k \quad (4.24)$$

4.4 Utvidet Kalmanfilter

I et utvidet Kalmanfilter brukes apriori tilstandsvektor (dynamisk korrigeret med nye estimater) til å linearisere mulige ikke-linearisererte relasjoner mellom målinger og tilstandsvariabler i den dynamiske modellen [Kjørsvik, 2010, s.4-5] og [Farell, 2008, s.144-146].

En vektor y_k med målinger relateres til tilstandsvektoren x_k gjennom den ikke lineære funksjonen:

$$y_k = h(x_k) + v_k \quad (4.25)$$

hvor v_k er tilfeldig målestøy.

En lineær tilnærming er gitt ved:

$$\begin{aligned}\delta y_k &= y_k - h(\tilde{x}_k) \\ &= h(x_k) + v_k - h(\tilde{x}_k) \\ &\approx H_k \delta x_k + v_k,\end{aligned}\tag{4.26}$$

hvor H_k er designmatrisa med partiell deriverte

$$H_k = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=\tilde{x}_k}\tag{4.27}$$

For et utvidet Kalmanfilter har man at:

$$\Phi_k = \Phi(x_k)\tag{4.28a}$$

$$H_K = H(x_k)\tag{4.28b}$$

$$Q_k = Q(x_k)\tag{4.28c}$$

Tilbakekobling vil si at feilestimatene blir brukt til å oppdatere tilstanden. Dersom man forutsetter full tilbakekobling brukes feilestimatene til å oppdatere alle tilstandene. Man får da at: $\delta \tilde{x}_k \equiv 0$. Dette vil si at tidsoppdatering av tilstandsvektoren er triviell og kan sløyfes (i motsetning til et ordinært Kalmanfilter). Ved delvis tilbakekobling blir bare en begrenset del av tilstandene korrigert med feilestimatene. NavLab bruker begrenset tilbakekobling ved at det bare er posisjon, orientering og hastighet som korrigeres.

4.5 Lineariserte feillikninger for treghetsnavigasjon

En måling vil aldri være helt fri for feil. For mange sensorer kan målingen tilnærmes som en rett linje i det aktuelle måleområdet. Parametrene som da skal bestemmes betegnes skalafaktor (stigningstall) og offset (vertikal forskyvning av grafen). Den lineære tilpasningen vil ikke stemme nøyaktig med sann verdi og man får dermed både skalafaktorfeil og offsetfeil. Formelverket som følger er hentet fra [Gade, 1997].

For en måling \tilde{m} har vi følgende sammenheng:

$$\tilde{m} = m + \delta m \quad (4.29)$$

m er da sann verdi og δm representerer feilen. Dersom man tilnærmer den virkelige funksjonen som en rett linje, kan feilen skrives som:

$$\delta m = \Delta m_{skalafaktor} m + \Delta x_{bias} + \xi_m \quad (4.30)$$

hvor $\Delta m_{skalafaktor}$ er skalafaktorfeil og $\Delta x_{bias} + \xi_m$ er offsetfeil. For en treghetssensor vil skalafaktorfeilen være tilnærmet konstant med hensyn på tiden for et gitt miljø. Offsetfeilen er delt i to ledd fordi den ofte modelleres som en langsamvarierende bias Δx_{bias} pluss hvit støy ξ_m .

Feilmodell for akselerometermåling:

$$\tilde{f}_{IB}^B = (1 + \Delta f_{skalafaktor}) f_{IB}^B + \Delta f_{bias} + \xi_f \quad (4.31)$$

Feilmodell for gyromåling:

$$\tilde{\omega}_{IB}^B = (1 + \Delta \omega_{skalafaktor}) \omega_{IB}^B + \Delta \omega_{bias} + \xi_\omega \quad (4.32)$$

Feil i akselerometer- og gyromålinger vil gi feil i posisjon, hastighet og orientering. Alle utregnede størrelser kan på samme måte som målingene uttrykkes som sann verdi pluss feil. Likningene er vist for L ettersom det er det NavLab bruker.

$$\hat{x}_{EB}^L = \dot{x}_{EB}^L + \delta \dot{x}_{EB}^L, \quad (4.33a)$$

$$\hat{R}_L^E = R_L^E + \delta R_L^E = (I + S(e_{LE}^E)) R_L^E = R_L^E (I + S(e_{EL}^L)) \quad (4.33b)$$

$$\hat{R}_B^L = R_B^L + \delta R_B^L = (I + S(e_{LB}^L)) R_B^L = R_B^L (I + S(e_{BL}^B)) \quad (4.33c)$$

\hat{R}_L^E er estimert posisjon, \hat{x}_{EB}^L er estimert hastighet og \hat{R}_B^L er estimert orientering. S er skjevsymmetrisk matriserepresentasjon av henholdsvis e_{LB}^B og e_{EL}^L . e representerer feil i estimat av rotasjonsmatrisene. Ved å innføre feil på navigasjonslikningene fås følgende likninger for hastighetsfeil, posisjonsfeil og

orienteringsfeil :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta x_{EB}^L = & R_B^L \delta f_{IB}^B + e_{LB}^L \times f_{IB}^L + \delta \bar{g}_B^L - (2\delta\omega_{IE}^L + \delta\omega_{EL}^L) \times \dot{x}_{EB}^L \\ & - (2\omega_{IE}^L + \omega_{EL}^L) \times \delta x_{EB}^L \end{aligned} \quad (4.34a)$$

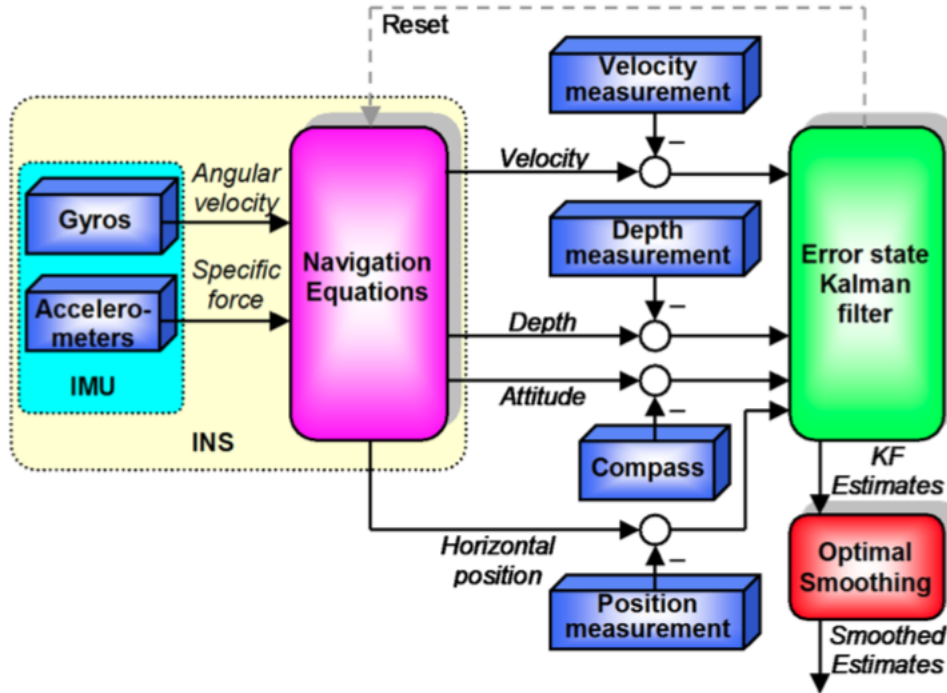
$$\frac{d}{dt} e_{EL}^L = \delta\omega_{EL}^L + e_{EL}^L \times \omega_{EL}^L \quad (4.34b)$$

$$\frac{d}{dt} e_{LB}^L = R_B^L \delta\omega_{IB}^B - \delta\omega_{IE}^L - \delta\omega_{EL}^L + e_{LS}^L \times (\omega_{IE}^L + \omega_{EL}^L) \quad (4.34c)$$

Produkter av feilledd er droppet. Likningene på matriseform (+ tidsavhengighet for sensorfeil) utgjør Φ i Kalmanfilteret, mens feilene i kinematiske tilstander + sensorfeil utgjør x . For full utledning av likningene i 4.34 se [Gade, 1997, s.39-44].

4.6 Kalmanfilter for treghetsnavigasjon

Figur 4.2 viser gangen i et Kalmanfilter med eksterne sensorer. NavLab bruker et såkalt “Error-state”-kalmanfilter. Det vil si at det er avvikene mellom tilstandene fra INS og tilstandene fra støttesensorene som tas inn i Kalmanfilteret, og ikke selve målingene. Dette betyr at det ikke er selve dynamikken til fartøyet som beregnes i filteret, men feiltilstandene. Dette er en effektiv måte å oppnå et lineært system og for å unngå komplekse tilpasninger av filteret.



Figur 4.2: Gangen i et Kalmanfilter med eksterne sensorer. Hentet fra [Gade, 2009].

Feil oppstår som følge av feil i initiell tilstand og støy relatert til treghets-sensorene slik at den integrerte tilstanden fra et INS divigerer fra den sanne tilstanden. Støttesensorer gir ekstern informasjon som kan brukes til å glatte ut sensorstøy og korrigere estimatene.

5 Utstyr og programvare

Dataene som er brukt i oppgaven ble samlet inn i desember 2017. FFIs forskningsfartøy H.U.Sverdrup ble brukt til å samle inn dataene. Sensorer som ble brukt i datainnsamlingen er beskrevet under.

5.1 TAGS-6 gravimeter

Tyngdedata er samlet inn med NGU sitt gravimeter. Dette er et gravimeter av typen Turnkey Airborne Gravity System (TAGS-6) laget av Microg/Lacoste. TAGS-6 er et relativt gravimeter som består av en dempet fjær-sensor montert på en gyrostabilisert plattform. I tillegg har den integrert GPS og rubidium klokke som gir høy presisjon på tidssampling. Spesifikasjoner til TAGS-6 er gitt i tabell 5.1 [Lacoste, 2018].

Spesifikasjoner TAGS-6	
Sensor	20,000 mGal kalibrert rekkevidde 3 mGal drift per måned
System	0.01 mGal oppløsning 0.02 mGal statisk repeterbarhet 0.6 mGal nøyaktighet 20 Hz loggerate
Stabiliserende plattform	Max plattformrotasjon: $\pm 25^\circ$ pitch $\pm 30^\circ$ roll
Temperatur	5-50°C

Tabell 5.1: Spesifikasjoner for TAGS-6

Gravimeteret ble montert under dekk nær Sverdrups massemiddepunkt. Ved bruk av gravimeteret er det viktig å ta noen forholdsregler. Tyngdedataene er kun pålitelige når de er samlet inn med konstant hastighet og kurs. Mye turbulens og skarpe manøvre kan føre til at dataene blir ubrukelige. Hvert gravimeter har egne spesifikasjoner når det gjelder filtre som brukes for å fjerne støy som følge av bevegelser, og stabiliseringstid etter en sving. For NGU sitt system brukes et preprosessering filter på 60 sekund, og stabiliseringstid etter en sving er 90 sekunder [Haase et al., 2016].



Figur 5.1: Bilde av gravimeterets montering i H.U.Sverdrup. IMUen står plassert rett utenfor høyre bildekant. (Foto: NGU)

5.2 HG9900 IMU

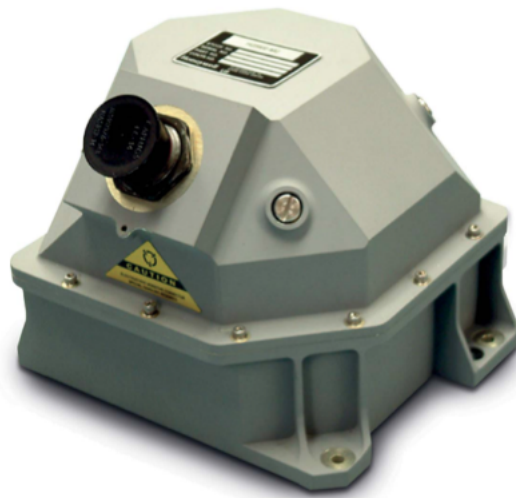
HG9900 er en IMU som består av tre ringlaser gyroskop og tre kvarts akselerometere. HG9900 er en high-end sensor. Det vil si at den har veldig god nøyaktighet. Spesifikasjoner for HG9900 er gitt i tabell 5.2 og i tabell 5.3 [Honeywell, 2016].

Akselerometer	
Skala faktor	100PPM
Skala faktor assymmetri	20PPM
Bias repeterbarhet	25 μ g
Velocity Random Walk	15 μ g/ \sqrt{Hz}

Tabell 5.2: Spesifikasjoner for akselerometer til HG9900

Gyro	
Skala faktor	5PPM
Bias	$0.003deg/h$
Angular Random Walk	$0.002deg/\sqrt{h}$

Tabell 5.3: Spesifikasjoner for gyro til HG9900



Figur 5.2: Illustrasjon av HG9900 [Honeywell, 2016]

5.3 Trimble BD982 GNSS-mottaker

Trimble BD982 er en flerfrekvent GNSS-mottaker. Den kan måle signaler fra alle typer GNSS, blant annet GPS, GLONASS, Beidou, GALILEO og SBAS. Det ble brukt differensiell GNSS. Differensiell posisjonering med GNSS er en sanntids posisjoneringsteknikk hvor det brukes to eller flere mottakere. Den ene mottakeren er plassert på en referansestasjon med gitte koordinater. Referansestasjonen beregner korreksjoner som brukes til å forbedre posisjons-estimatet til mottakeren i ukjent posisjon [Hofman Wellenhof et al., 2007, s. 415]. I dette tilfellet brukes korreksjoner fra SBAS/EGNOS. SBAS står for Satellite-based Augmentation Systems. EGNOS står for European Geostationary Navigation Overlay Service. SBAS/EGNOS er altså et europeisk sys-

tem for differensielle korreksjoner⁴. Ved bruk av SBAS kan man forvente en horisontal nøyaktighet på 0.5m og vertikal nøyaktighet på 0.85m [Trimble, 2016].



Figur 5.3: Illustrasjon av BD982 GNSS-mottaker [Trimble, 2016]

5.4 Sensorenes plassering i forhold til hverandre

Tabell 5.4 viser hvordan sensorene er plassert i forhold til båtens massemiddepunkt.

Sensor	x [m]	y [m]	z [m]
Origo (båtens massemiddepunkt)	0	0	0
IMU	2.2	0.2	1.97
GPS	-9.87	0.077	-21.348
Gravimeter	0.8	0	1.92

Tabell 5.4: Sensorenes plassering i H.U.Sverdrup. Koordinatene er gitt i B, dvs. at x peker fremover i båtens kjøreretning, y er styrbord og z peker ned.

For en GPS-mottaker er referansepunktet i fasesenteret til antennen. En IMU har referansepunktet i skjæringen mellom de ulike treghtsaksene. Avstanden mellom referansepunktene kalles for en leverarm [Petovello, 2003, s. 77]. I Navlab refereres alle målinger til IMUen. Det vil si at det må legges inn en leverarm-korreksjon mellom GPS-mottaker og IMU for at GPS-posisjonen

⁴<https://www.gsa.europa.eu/european-gnss/what-gnss/what-sbas> (25.04.2018)

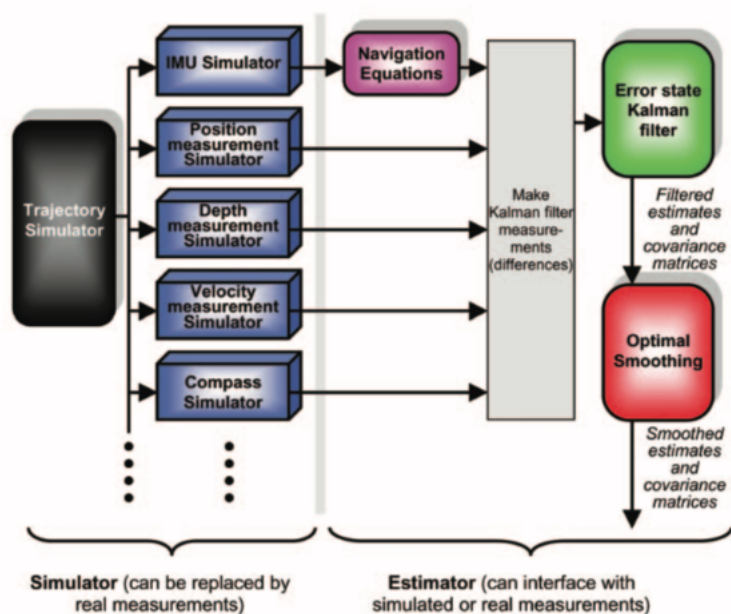
skal være gitt i IMUens referansepunkt. Det er valgt å ikke legge inn en leverarm-korreksjon mellom IMU og gravimeteret. Grunnen til dette er at sensorene står så nærme hverandre at man antar en endring i tyngdeverdien fra gravimeterets plassering til IMUen vil være minimal. IMUens orientering i forhold til Sverdrup er gitt i tabell 5.5.

H.U.Sverdrup	x	y	z
Orientering til IMU	-x	y	-z

Tabell 5.5: IMUens orientering i farkosten.

5.5 NavLab

Navlab er et simulerings- og post-prosesserings verktøy for navigasjon utviklet av FFI. NavLab er implementert i Matlab og består av en simulator og en estimator. Hovedstrukturen til Navlab vises i figur 5.4.



Figur 5.4: Navlabs hovedstruktur. Fargene som brukes korresponderer til grafene som genereres av de ulike delene i NavLab [Gade, 2004].

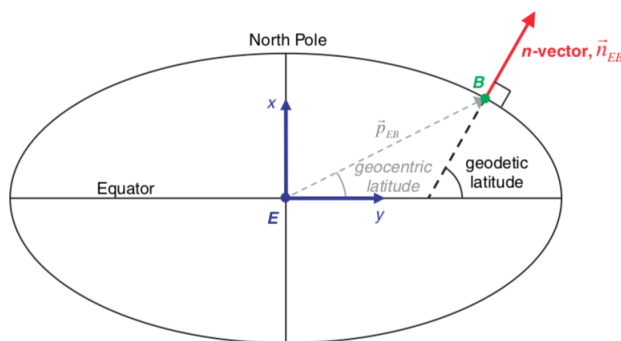
Simulatoren kan simulere et hvert kjøretøys bane som spesifiseres av brukeren. I tillegg kan brukeren spesifisere et sett med tilgjengelige sensorer og deres spesifikasjoner. Basert på spesifisert bane og sensorspesifikasjoner, simuleres et sett med kunstige målinger. Dette inkluderer også feil, slik som hvit støy og farget støy. Simulatoren ble ikke brukt i denne undersøkelsen.

Estimatoren sin oppgave er å estimere kjøretøyets posisjon, hastighet og orientering. Dette gjøres ved å kombinere all tilgjengelig informasjon, slik som sensormålinger og matematiske modeller for sensorfeil. Alt implementeres så i et Kalmanfilter. Dersom modellen som brukes i Kalmanfilteret er riktig, vil man få et optimalt estimat.

Siden NavLab består av ulike moduler kan programmet tilpasses til å ta inn ulike målinger. Dette gjøres ved å lage en målelikning for sensoren som skal brukes, og implementere den i NavLab [Gade, 2004].

5.5.1 n-vektor i NavLab

Det er verdt å merke seg at NavLab bruker n-vektor til å representere posisjon. n-vektor er normalvektoren til referanseellipsoiden (se figur 5.5). Ved å representere posisjon ved hjelp av n-vektor behandles alle posisjoner likt, uten at det oppstår singulariteter eller diskontinuiteter. En annen fordel ved å bruke n-vektor er at de fleste posisjonsberegninger løses ved hjelp av enkel algebra.



Figur 5.5: Referanseellipsoide med n-vektor, geodetisk og geosentrisk breddegrad. Origo til kjøretøyets referanseramme er vist med grønt. Origo og to av aksene til E-systemet er vist med blått [Gade, 2010]

Sammenhengen mellom n -vektor og lengdegrad(λ)/breddegrad(ϕ) er gitt av geometrien. n -vektor uttrykt ved hjelp av lengdegrad og breddegrad er gitt som [Gade, 2010]:

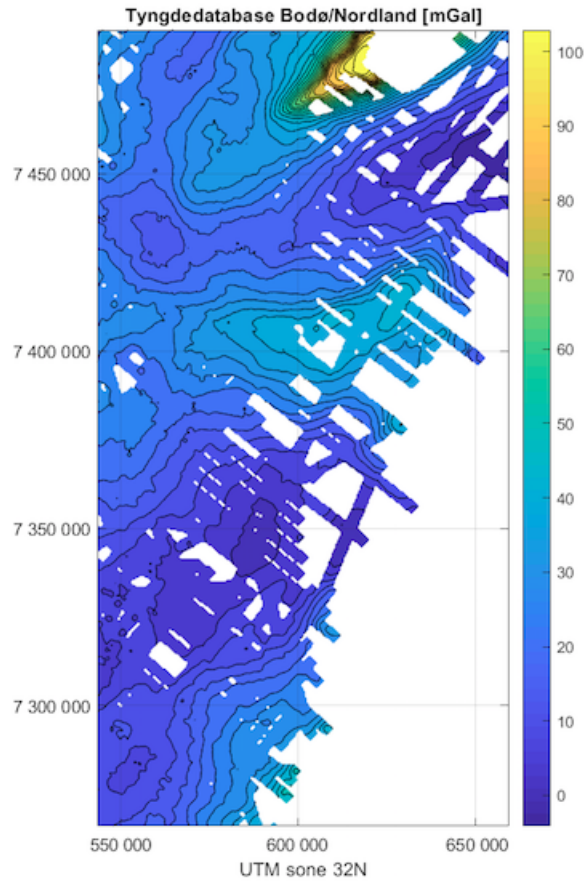
$$\mathbf{n}^E = \begin{bmatrix} \sin(\phi) \\ \sin(\lambda)\cos(\phi) \\ -\cos(\lambda)\cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

5.6 Tyngdedatabase

I 2010 gav NGU ut et tyngdeanomaly-kart for nord-Atlanteren. På kontinentalsokkelen består den marine tyngdedatabasen av 554 000km med skipsprofiler. Profildataene er blitt utjevnet ved hjelp av en median utjevningsteknikk [Haase et al., 2016].

Databasen brukt som referansekart i denne oppgaven er et utsnitt fra NGUs tyngdeanomaly-kart. Området vi har valgt å se på er havet utenfor Bodø i Nordland $65.5^\circ - 67.5^\circ N$ og $10^\circ - 12.5^\circ E$. Databasen ble levert i 2 eksemplarer, begge på grid-form. En versjon med lengde- og breddegrad i WGS84, her er avstand mellom punktene i griddet 0.01° . Den andre versjonen er gitt i UTM sone 32N, med 500 meter mellom punktene i griddet. I denne oppgaven er det valgt å bruke griddet gitt i UTM. Dette er fordi interpoleringsalgoritmen som brukes til å hente ut tyngdeverdi i antatt posisjon er avhengig av at avstanden mellom punktene hele tiden er lik. For WGS84-griddet er avstanden lik gitt grader, men avstanden mellom hver grad varierer etter hvor på jorda man befinner seg. I tillegg har UTM-griddet høyere oppløsning enn WGS84-griddet. Databasen er vist i figur 5.6.

Tyngdedatabasen er et tyngdeanomalikart med friluftsanomalier. Det vil si at det inneholder korreksjon for normaltyngde (WGS84), tidekorreksjoner, Eötvös-korreksjon og friluftskorreksjon. Friluftskorreksjonen er effektivt lik 0 når målinger er gjort på havnivå.



Figur 5.6: Tyngdedatabase gitt i UTM koordinater.

Hvis man ser på figur 5.6 ser man at det er en del variasjoner i tyngdefeltet. Siden databasen er satt sammen av ulike skipsprofiler er det noen områder hvor det mangler data, disse områdene er hvite. Det er valgt å ikke interpolere over områdene uten data. Grunnen til dette er at mesteparten av målingene som er samlet inn er i områder med god dekning. I tillegg er mange av områdene uten data veldig store, og interpolasjon over store områder uten data vil bidra til usikkerhet i kartgrunnlaget. Siden databasen er levert av NGU og man ikke har informasjon om nøyaktig hvordan dataene er satt sammen, ønsker man ikke å tilføre denne ekstra usikkerheten til databasen.

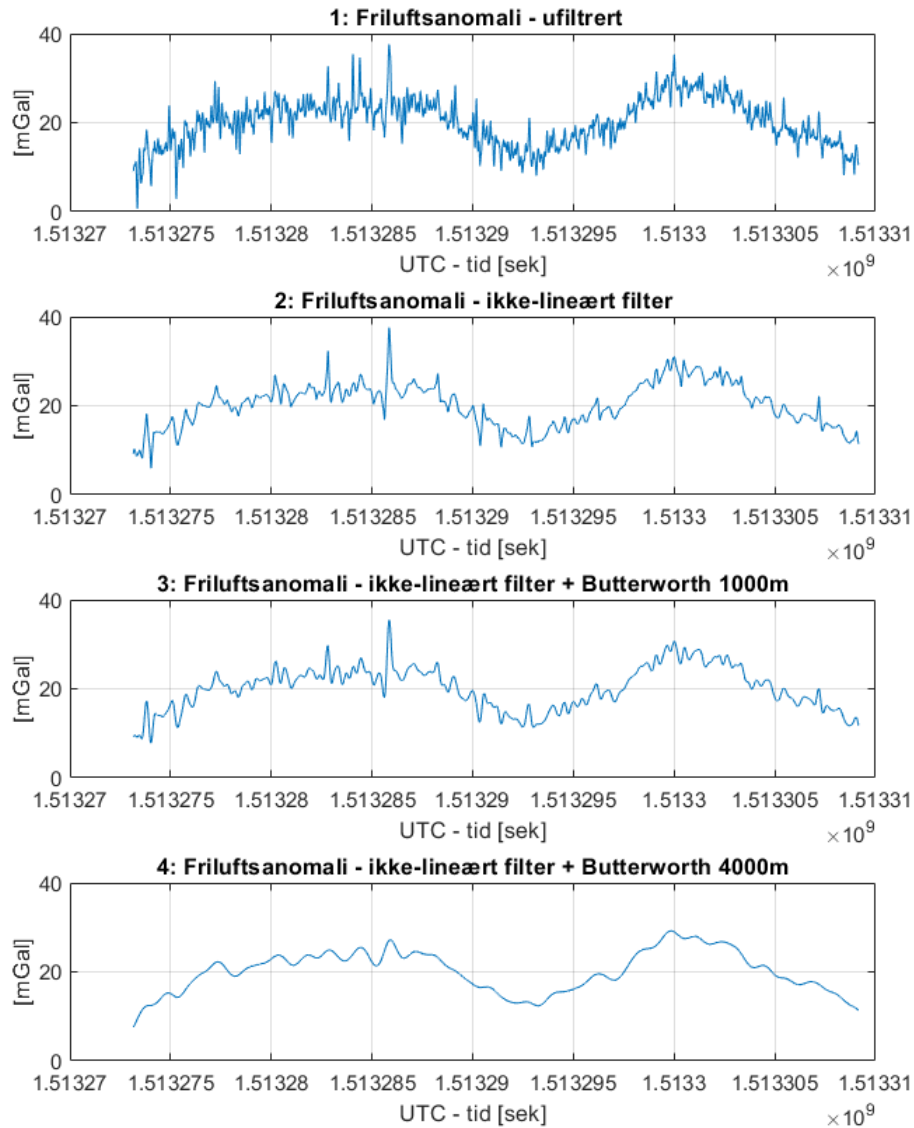
Griddet datakvalitet	
Oppløsning	500 m
Minste bølgelengde innhold	5 000 m

Tabell 5.6: Kvalitet og nøyaktighet til griddet.

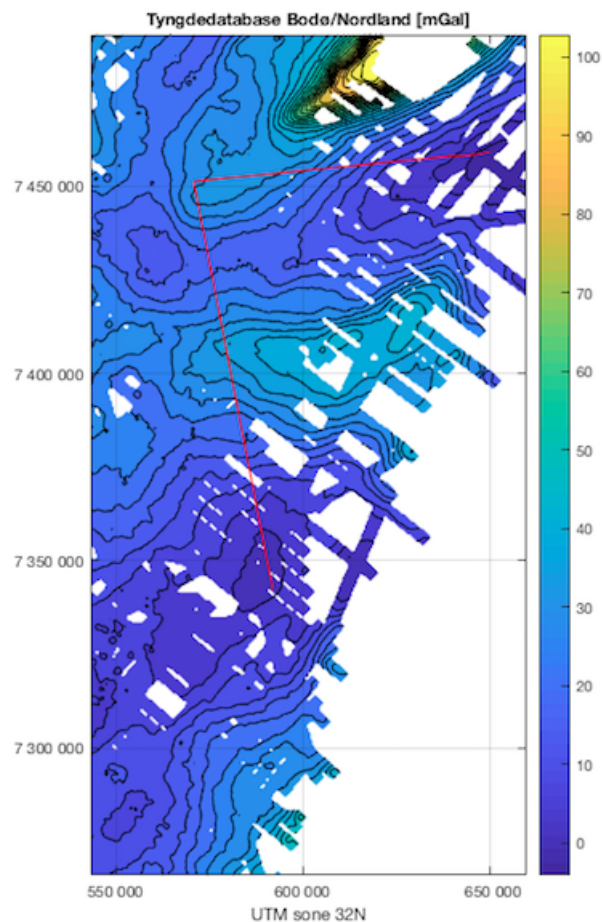
5.7 Tyngdemålinger

Tyngdemålingene fra gravimeteret ble levert ferdig prosessert fra NGU. For å kunne bruke tyngdedatabasen for navigasjonsformål må tyngdemålingene kunne sammenliknes med databasen. Det vil si at tyngdemålingene må påføres samme korreksjoner som databasen. I tillegg må dataene ligge på samme datum. I dette tilfellet er WGS84 brukt. Det er viktig å merke seg at det som videre er omtalt som tyngdemålinger egentlig er ferdig prosesserte tyngdeanomalier gitt i samme datum som tyngdedatabasen.

De målte tyngdedataene kan filtreres på ulike måter. De prosesserte tyngdemålingene ble levert med ulike filtere. Figur 5.7 viser hvordan filterene påvirker målingene. Siden tyngdedatabasen har en bølgelengde på 5000m, er det valgt å bruke 4000m Butterworth filter da dette korresponderer best med databasen. Figur 5.8 viser hvor båten har kjørt. Den røde linja er GPS-track hvor vi har tyngdemålinger.



Figur 5.7: Tyngdemålinger med ulike filtreringer. 1: er ufiltrert friluftanomali. 2: er friluftsanomali filtrert med et ikke-lineært 60s lavpassfilter for å fjerne støy. 3: er friluftsanomali med et ikke-lineært 60s lavpassfilter for å fjerne støy og et Butterworth filter med 1000m cut-off frekvens. 4: er friluftsanomali med et ikke-lineært 60s lavpassfilter for å fjerne støy og et Butterworth filter med 4000m cut-off frekvens.



Figur 5.8: Oversiktsbilde. Den røde linja markerer hvor båten har kjørt og hvor det er samlet inn data.

5.7.1 Tyngdemålinger fra et neddykket fartøy

Dersom tyngdemålingene hadde vært gjort fra en neddykket ubåt vil ikke tyngdemålingene være på samme datum som tyngdedatabasen. For å kunne sammenlikne målingene med databasen (som er på havoverflaten) må enten databasen “senkes” ned til ubåten arbeidsdybde, eller så må tyngdemålingene fra ubåten “løftes” til databasen. Jo nærmere jordsentrum målingene gjøres jo mer høyfrekvent innhold vil målingene få. Dataene fra tyngdedatabasen (som inneholder data fra tyngdemålinger gjort ved havoverflaten) vil der-

for ikke inneholde det korte bølgelengdeinnholdet som tyngdemålingene fra ubåten har.

For å sammenlikne data fra neddykket fartøy med overflatedata kan upward continuation⁵ brukes på tyngdemålingene fra ubåten til å føre dem opp på samme datum som tyngdedatabasen. Dette vil føre til at tyngdemålingene vil miste noe signalinnhold. I og med at tyngdemålingene kun skal sammenliknes med data fra tyngdedatabasen (som ikke inneholder høyfrekvent signal) er dette uproblematisk. [Haase et al., 2016]

⁵Upward continuation knytter en tyngdeanomali i punkt P i rommet til tyngdeanomalien på geoiden.

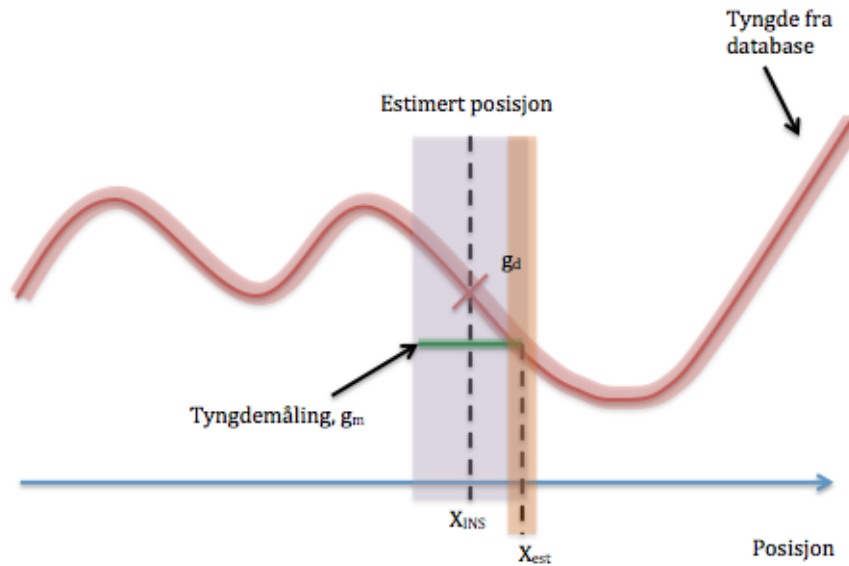
6 Metode

Metoden som ble brukt i denne oppgaven er basert på terrengreferert navigasjon. Det finnes ulike metoder for terrengreferert navigasjon. Typisk har man søkemetoder og gradientfølgende metoder. Det som skiller disse er hvordan de finner posisjonen. Det som er felles for metodene er at man må ha en antatt posisjon som utgangspunkt. Hvor nøyaktig den antatte posisjonen må være er avhengig av hvilken metode som benyttes. For å kunne bruke terrengreferert navigasjon må terrenget ha variasjon. Er variasjonen liten vil det ikke være mulig å posisjonere seg [Mandt, 2001].

I denne oppgaven er det brukt en gradientbasert metode. Søkemetodene vil derfor ikke bli nærmere beskrevet.

6.1 Gradientbasert metode

Gradientbaserte metoder baserer seg på å modellere endringer i terrenget rundt en antatt posisjon, gjerne lineært. I dette tilfellet vil terrenget være tyngdefeltet. Man får inn en tyngdemåling som så sammenliknes med tyngde for antatt posisjon i tyngdedatabasen. Rundt hver antatt posisjon beregnes det en gradient i nord/sør retning og en gradient i øst/vest retning. Dersom det er en forskjell mellom målt tyngde og tyngde fra databasen brukes disse gradientene til å korrigere posisjonen slik at målt tyngde og tyngde i antatt posisjon passer sammen, se figur 6.1. I et optimalt tilfelle vil da estimert posisjon være tilnærmet lik sann posisjon. Gradientbaserte metoder krever at initialposisjon er gitt med god nøyaktighet.



Figur 6.1: En-dimensjonal skisse som viser posisjonsforbedring fra INS posisjonen til tyngdereferert posisjon.

Figur 6.1 illustrerer hvordan tyngdereferert posisjonsestimert bidrar til å korrigere INS posisjon for et optimalt tilfelle. Referansekartets inkludert referansekartets usikkerhet er markert med rød linje, målt tyngde med usikkerhetsintervall er gitt i grønt og INS posisjonsestimert (x_{INS}) er markert med lilla. Dersom man sammenlikner målt tyngde med tyngde fra databasen i posisjonsestimert ser man at den målte tyngde har lavere verdi. Gradientfølgningen fører til korrigert posisjon (x_{est}).

I denne oppgaven blir det gjort full treghtsnavigasjon med støtte av målte tyngdedata i NavLab. Siden Navlab bruker Kalmanfiltrering til å estimere posisjonsestimater må det lages en målelikning med gradientfølgning som implementeres i Kalmanfilteret. Den implementerte gradientfølgningen modellerer endringen i tyngde rundt en posisjon som en lineær funksjon. Målelikningen bruker forskjellen mellom målt tyngde og tyngde fra antatt posisjon i en tyngdedatabase til å finne posisjonskorreksjoner. Hver gang det kommer inn en ny tyngdemåling, går programmet inn i tyngdedatabasen, slår opp på antatt posisjon og henter ut en tyngdeverdi. Målelikningen er beskrevet i kapittel 6.2. Her blir det også beskrevet hvordan likningen må settes opp for

å knyttes til en feiltilstand som estimeres i Kalmanfilteret.

6.2 Målelikning for tyngde

Etterhvert som målinger kommer inn går programmet inn i tyngdedatabasen, slår opp på estimert posisjon og henter ut en tyngdeverdi. Deretter sjekkes differansen mellom tyngde fra antatt posisjon og målt tyngde for sann posisjon. Denne differansen kan brukes til å estimere posisjonsfeil. Det kan settes opp en feilmodell for tyngdedatabasen og en feilmodell for målt tyngde.

Feilmodell for tyngdedatabase

Tyngdeverdien \tilde{g}_d fra tyngdedatabasen kan uttrykkes som:

$$\tilde{g}_d = g + \delta g_d \quad (6.1)$$

hvor er \tilde{g}_d tyngdeverdi fra databasen, g er sann tyngde og δg_d er en feil. Feilen kan deles opp i minst to komponenter:

$$\delta g_d = g_{d,bias} + v_d \quad (6.2)$$

hvor $g_{d,bias}$ er bias og v_d er hvit støy. Biasen inneholder globale feil og andre korrelerte feil, mens hvit støy beskriver feil som ikke er korrelert mellom oppslagene. Biasen modelleres som en første ordens Gauss-Markov prosess:

$$\delta \dot{g}_d = \frac{1}{T_{g_d}} \delta g_d + \xi_{g_d} \quad (6.3)$$

hvor T_{g_d} er en tidskonstant som forteller hvor raskt biasen varierer og ξ_{g_d} er prosesstøy. Variansen til ξ_{g_d} kan regnes fra T_{g_d} og variansen til g_d [Gelb, 1974]:

$$var(\xi_{g_d}) = \frac{2}{T_{g_d}} var(g_d) \quad (6.4)$$

Feilmodell for tyngdemålinger

Tyngdemålingene \tilde{g}_m er gitt av:

$$\tilde{g}_m = g + \Delta g_z + \delta g_m \quad (6.5)$$

hvor g er sann tyngde, Δg_z er korreksjon for å få målingen på samme referanseflate som tyngdedatabasen⁶. Så lenge målingen er gitt som en tyngdeanomali referert til samme referanseflate som tyngdeverdiene i tyngdedatabasen faller dette leddet bort. δg_m er feilen. Denne feilen kan også deles opp i en bias $g_{m,bias}$ og hvit støy v_m .

$$\delta g_m = g_{m,bias} + v_m \quad (6.6)$$

Biasen til tyngdemålingen modelleres også som en første ordens Gauss-Markov prosess:

$$\delta \dot{g}_m = \frac{1}{T_{g_m}} \delta g_m + \xi_{g_m} \quad (6.7)$$

med tidskonstant T_{g_m} og prosesstøy ξ_{g_m} .

Målelikning

Man har en antatt posisjon. Sammenhengen mellom tyngde ved oppslag i database og tyngde i sann posisjon $g(x,y)$ kan skrives som en første ordens tilnærming. Man antar at tyngden er lokalt deriverbar. Antatt posisjon kan skrives som sann posisjon pluss et tillegg:

$$\hat{x} = x + \delta x \quad (6.8a)$$

$$\hat{y} = y + \delta y \quad (6.8b)$$

For oppslag i databasen har vi da at antatt horisontal posisjon er sann posisjon pluss et tillegg i henholdsvis x og y :

$$g_d(\hat{x}, \hat{y}) = g(x, y) + \frac{\partial g}{\partial x} \delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \delta y + \text{høyereordensledd} + \delta g_d \quad (6.9)$$

Dersom man ser på differansen mellom tyngde fra databasen og målt tyngde får vi:

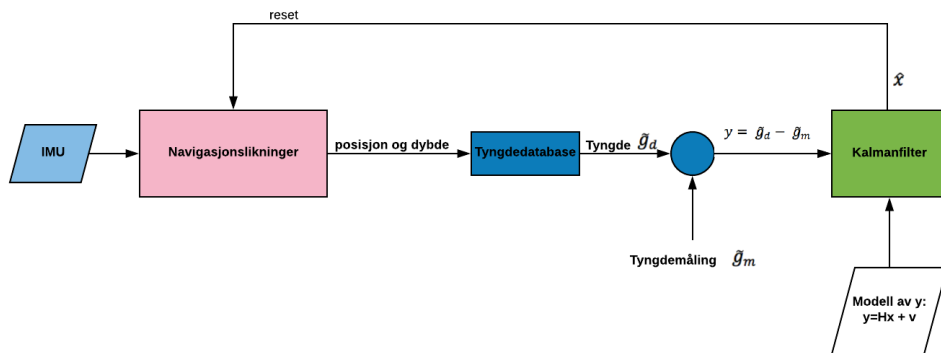
$$y = \tilde{g}_d - \tilde{g}_m = \frac{\partial g}{\partial x} \delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \delta y + \text{høyereordensledd} + \delta g_d - \delta g_m \quad (6.10)$$

⁶F.eks friluftreduksjon eller upward continuation

Høyere ordens ledd er veldig små, og vi ser derfor bort fra dem. I tillegg antar man at feilen for tyngdemålingene er betydelig større enn feilen fra tyngden i tyngdedatabasen. δg_d kan derfor neglisjeres. Målelikning for Kalmanfilteret blir da:

$$y = \frac{\partial g}{\partial x} \delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \delta y - \delta g_m \quad (6.11)$$

$$y = Hx + v = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta g_{m,bias} \end{bmatrix} + v \quad (6.12)$$



Figur 6.2: Flytdiagram som viser hvordan likningene inngår i Kalmanfilteret.

6.2.1 Implementering av målelikningen i NavLab

For å implementere likning 6.12 i NavLab må noen hensyn tas. Tyngdegradientene skal knyttes til den horisontale posisjonsfeilen. I NavLab estimeres ikke den horisontale posisjonsfeilen direkte. Fra navigasjonslikningene vet vi at posisjon i L er gitt som rotasjonsmatrisa R_L^E . Dermed er det feiltilstanden e_{EL}^L som kan knyttes direkte til posisjonsfeilen. I NavLab er horisontal posisjon representert som n-vektor (figur 5.5), dermed må man se på sammenhengen mellom n_{EB}^E og R_L^E for å finne et uttrykk for posisjonsfeilen (likning

3.13). Dersom man antar en kuleformet jord er horisontal posisjonen p_{EB}^E gitt av:

$$p_{EB}^E = r_{EB} n_{EB}^E \quad (6.13)$$

Ved å sette opp feillikning for 6.13, kan den løses med hensyn på δp_{EB}^E . Deretter kan δp_{EB}^E dekomponeres i L, og løses med hensyn på e_{EL}^L . Dermed får man et uttrykk for horisontal posisjonsfeil uttrykt med e_{EL}^L som kan settes inn i målelikningen sammen med tyngdegradientene.

Målelikningen som brukes i Kalmanfilteret til NavLab er gitt i likning 6.14. For fullstendig utledning se appendix B.

$$y = Hx + v = [H_1 \quad -1] \begin{bmatrix} e_{ELx}^L \\ e_{ELy}^L \\ \delta g_{m,bias} \end{bmatrix} + v \quad (6.14)$$

hvor

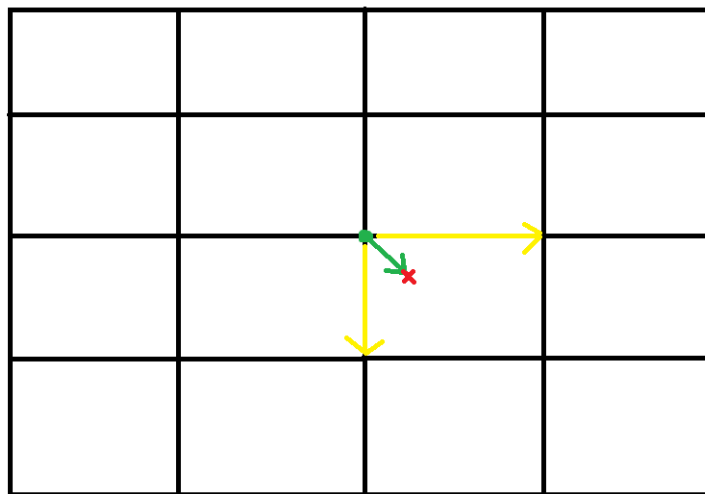
$$H_1 = -\frac{dg}{dx^M} R_L^M r_{EB} S(n_{EB}^L) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

hvor $\frac{dg}{dx^M}$ er tyngdegradientene, R_L^M er sammenhengen mellom L og M og r_{EB} er avstanden fra jordsentrum til farkosten.

6.3 Oppslag i tyngdedatabasen

Hver gang filteret får inn en ny tyngdemåling slår den opp på antatt posisjon i databasen og finner nærmeste posisjon. Siden griddet i tyngdedatabasen er forholdsvis grov med en oppløsning på 500m, er det valgt å interpolere en tyngdeverdi for antatt posisjon. Grunnen til dette er at med så grov oppløsning risikerer man at det blir slått opp på samme tyngdeverdi så lenge fartøyet befinner seg innenfor samme rute i griddet. Interpolasjonsmetoden er illustrert i figur 6.3. Antatt posisjon er merket som rødt kryss. Det blir slått opp i nærmeste posisjon i griddet som inneholder en tyngdeverdi, her merket med grønt punkt. Man finner avstanden mellom antatt posisjon og posisjon til oppslaget. Deretter beregnes det en gradient i henholdsvis nord/sør-retning

og øst/vest-retning (markert med gule piler). Disse brukes så til å beregne en ny tyngdeverdi i antatt posisjon.

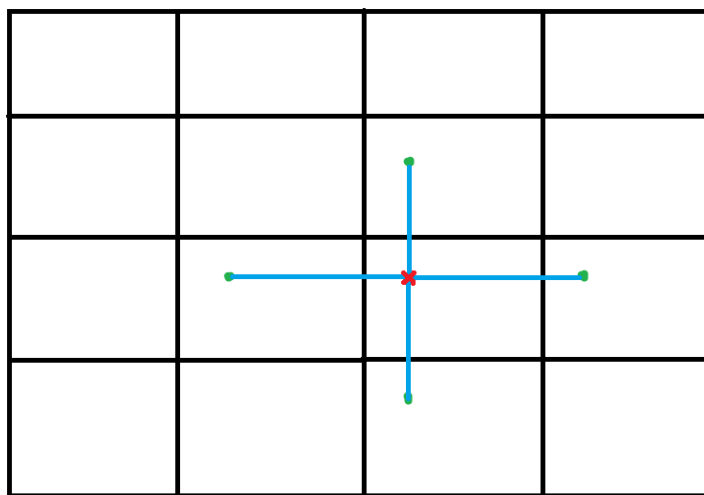


Figur 6.3: Interpolasjon av tyngdeverdi ved oppslag i tyngdedatabasen.

6.4 Beregning av gradienter til input i Kalmanfilteret

Det ble testet ulike måter å beregne gradienter til input i filteret på. Den metoden som er presentert her er den som gav best resultat for områdene som blir undersøkt. Det er valgt å beregne gradientene lineært over et område nord/sør for antatt posisjon, og øst/vest for antatt posisjon, se figur 6.4. Siden tyngdeverdien fra oppslaget i tyngdedatabasen er interpolert, er det valgt å også interpolere gradientene. Hadde man brukt nærmeste tyngdeverdi i oppslaget, ville det vært mer naturlig å benytte nærmeste verdi til å beregne gradientene også. Interpolasjonen gjøres ved at det interpoleres en tyngdeverdi på hver side av antatt posisjon (nord, sør, øst og vest) på samme måte som i kapittel 6.3. Siden griddet har oppløsning på 500m, er det valgt at de interpolerte tyngdeverdiene er 500m fra antatt posisjon i hver retning. Gradientene beregnes lineært over antatt posisjon. Det vil si at nord/sør gradienten beregnes fra punktet nord for antatt posisjon til punktet sør for antatt posisjon. Det samme gjelder for øst/vest gradienten. Gradientene beregnes med andre ord over en avstand på 1000m. Det at gradientene beregnes

over antatt posisjon gjør at det ikke blir tatt hensyn til om tyngdeverdien i antatt posisjon ligger på en lokal “topp” eller “bunn”. Dermed blir det ikke tatt hensyn til om gradienten skifter fortegn mellom antatt posisjon og hver av ytterpunktene. For å unngå områder der dette skjer er det laget en sjekk på om det er et fortegnskifte i løpet av de 1000 meterene gradienten beregnes over. Dersom det er det blir gradientene satt lik 0, og bidrar dermed ikke i filteret.



Figur 6.4: Interpolasjon av tyngdeverdi ved oppslag i tyngdedatabasen.

6.5 Gjennomføring av kjøringene i NavLab

For at resultatene skal være mest mulig realistiske i forhold til hvordan en ubåt opererer er det gjort noen valg. En neddykket ubåt navigerer ved hjelp av IMU, EM-logg (fart mot vann) og dybdesensor. Planen var derfor å bruke de samme sensorene i tillegg til tyngdemålingene. På grunn av integrasjonsproblemer med EM-loggen kunne ikke den brukes. I denne oppgaven er derfor løsningen kjørt med IMU, dybde og tyngdemålinger (heretter kalt tyngdeløsning) og vil bli sammenliknet med en løsning med kun IMU og dybde (heretter kalt IMU-løsning).

Siden man er avhengig av god initialposisjon ved bruk av gradientbaserte

metoder er det i tillegg valgt å bruke GPS i starten av hver kjøring for å sikre at Kalmanfilteret har initialisert seg og at man har god kontroll på posisjonen. Slik det er gjort her kjører Kalmanfilteret ca 30 min med full navigasjon. Deretter skrur GPS posisjon av, og filteret kjører videre med IMU, tyngdemålinger og dybdemålinger. Dybdemålingene er egentlig GPS-høydemålinger regnet om til dybde.

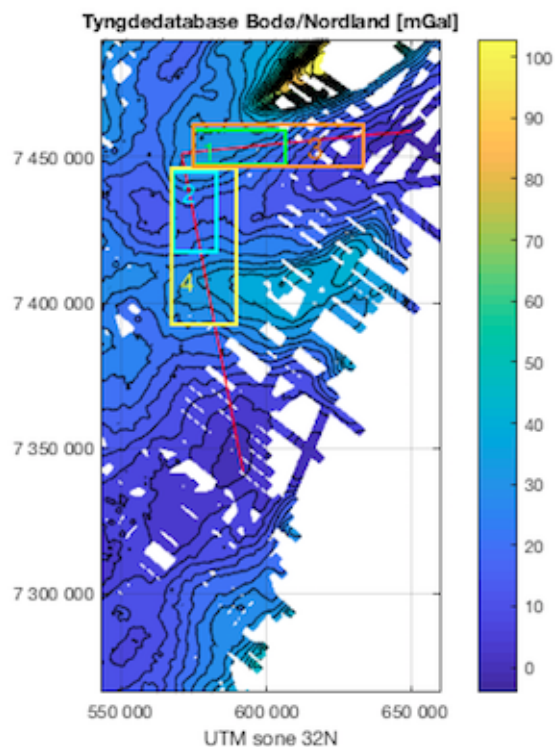
Det er valgt å unngå områder hvor det mangler mye data i tyngdedatabasen fordi man ønsker å se hvordan programmet virker i områder hvor man har tyngdedata å navigere etter. I tillegg testes ikke metoden gjennom svingen. Grunnen til dette er at data fra gravimeteret blir ubrukelige når det er mye bevegelse og turbulens. Stabiliseringstid etter en sving er ca 90sek. Dersom man hadde hatt målinger fra EM-loggen tilgjengelig ville det vært interessant å bruke tyngdemålinger frem til svingen, Em-logg gjennom svingen og tyngdemålinger igjen etter svingen. Det er ikke gjort noe glatting av løsningene, grunnen til dette er at man ønsker å vite hvordan løsningen fungerer i sanntid.

Systeminformasjon for input i filteret slik det er definert for .INI-filene i Navlab er gitt i Appendix C. Det er verdt å merke seg at standardavviket til gravimeterbiasen er satt forholdsvis høyt (7 mGal). Grunnen til dette er at vi har et konstant avvik mellom oppslagene i databasen og tyngdemålingene.

7 Resultater

I dette kapitlet vil det først bli presentert plott med resultater fra kjøringene, etterfulgt av en tabell med største feil, og størrelsen på feilen ved slutten av kjøringen. Deretter kommer det en vurdering av resultatene.

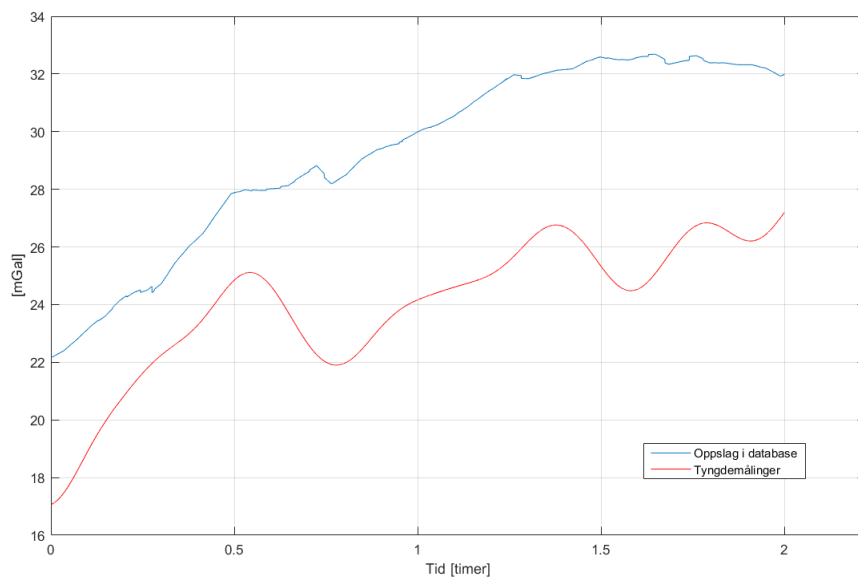
Resultatene som er presentert under er fra fire ulike kjøringene. Områdene er markert i figur 7.1. I område 1 er det kjørt langs en jevn skråning. I område 2 er terrenget mer variert, og det kjøres på tvers tyngdekotene. Område 3 og 4 er en forlengelse av kjøringene i område 1 og 2. Det som er felles for alle kjøringene er at den første halvtimen er kjørt med full navigasjon. Dette for at filteret skal stabilisere seg og at vi har full kontroll på posisjonen før GPS-en skrur av.



Figur 7.1: Testområder.

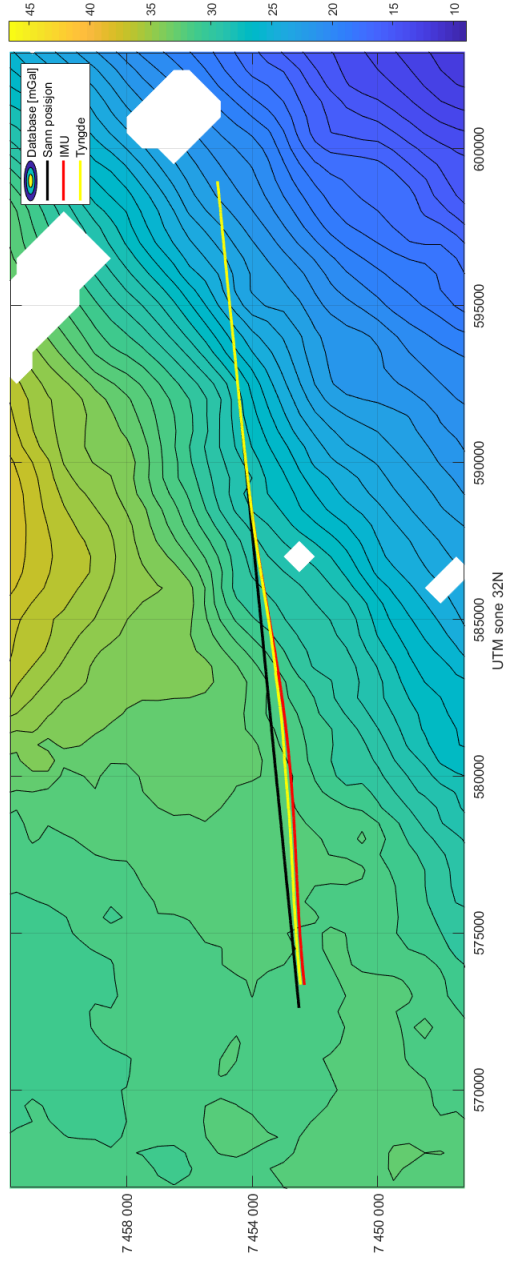
7.1 Område 1

Denne kjøringen varer i 2 timer. Figur 7.2 viser tyngdeverdi fra antatt posisjon (blått) og målt tyngde i sann posisjon (rød). Man ser her at det er et betydelig avvik mellom tyngdeverdien fra databasen og den målte tyngdeverdien.



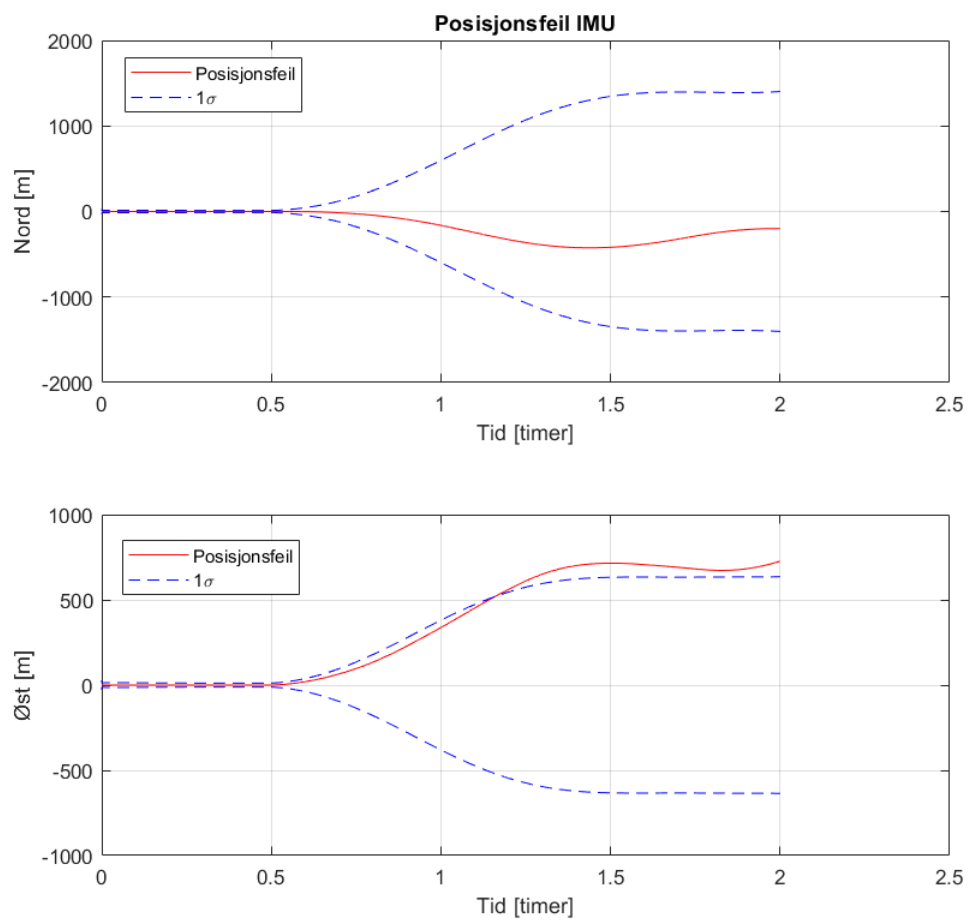
Figur 7.2: Tyngdeverdi fra database og målt tyngdeverdi.

Figur 7.3 viser sann posisjon og de ulike estimatene for posisjonen med tyngdedatabasen som bakgrunn. Her ser man at man får en forbedring av posisjonsestimater fra tyngdeløsningen i forhold til IMU-løsningen.

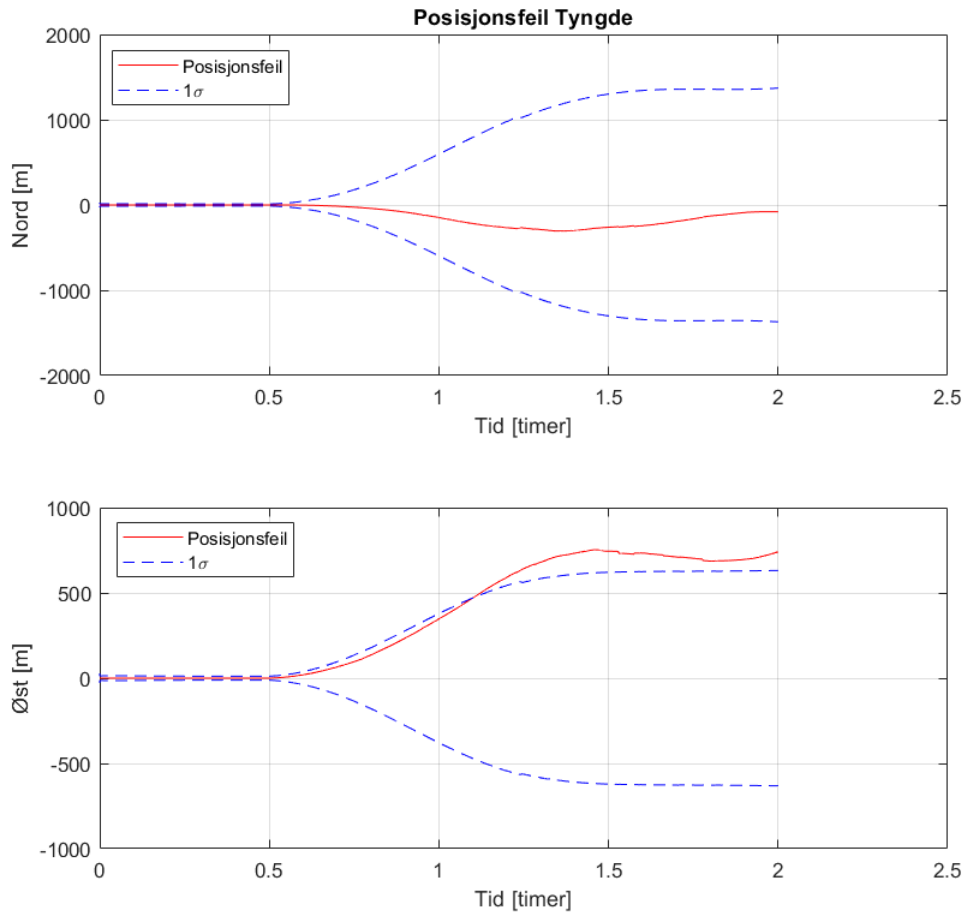


Figur 7.3: Oversikt over posisjon. Svart er sann posisjon, rød er IMU-løsning og gul viser tyngde-løsning.

Figur 7.4 og 7.5 viser absolutt posisjonsfeil i henholdsvis nord og øst.



Figur 7.4: Posisjonsfeil IMU.

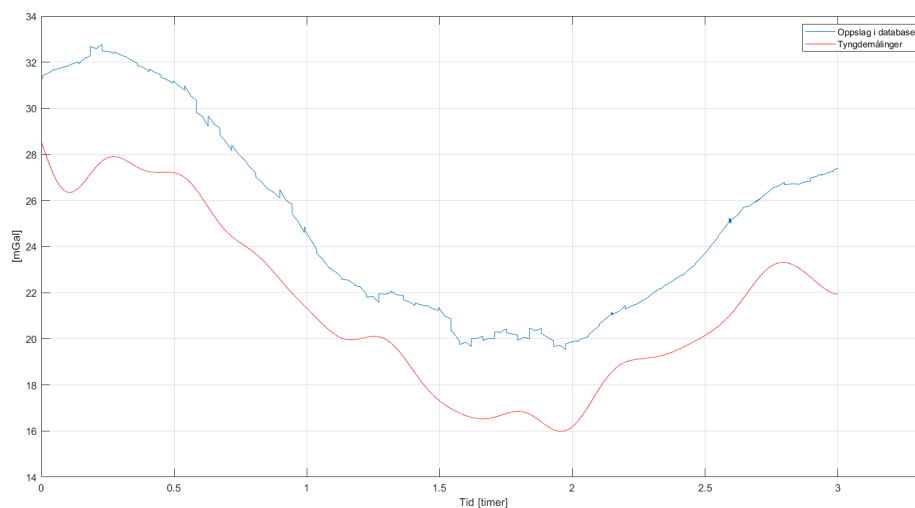


Figur 7.5: Posisjonsfeil tyngde.

Dersom man sammenlikner de to figurene ser man at posisjonsfeilen i nord blir litt mindre for tyngdeløsningen enn for løsningen med kun IMU (og tybde). I øst er feilen cirka like stor for begge løsningene. Når det gjelder standardavvikene, her gitt som 1σ er usikkerheten for begge estimatene cirka like stor.

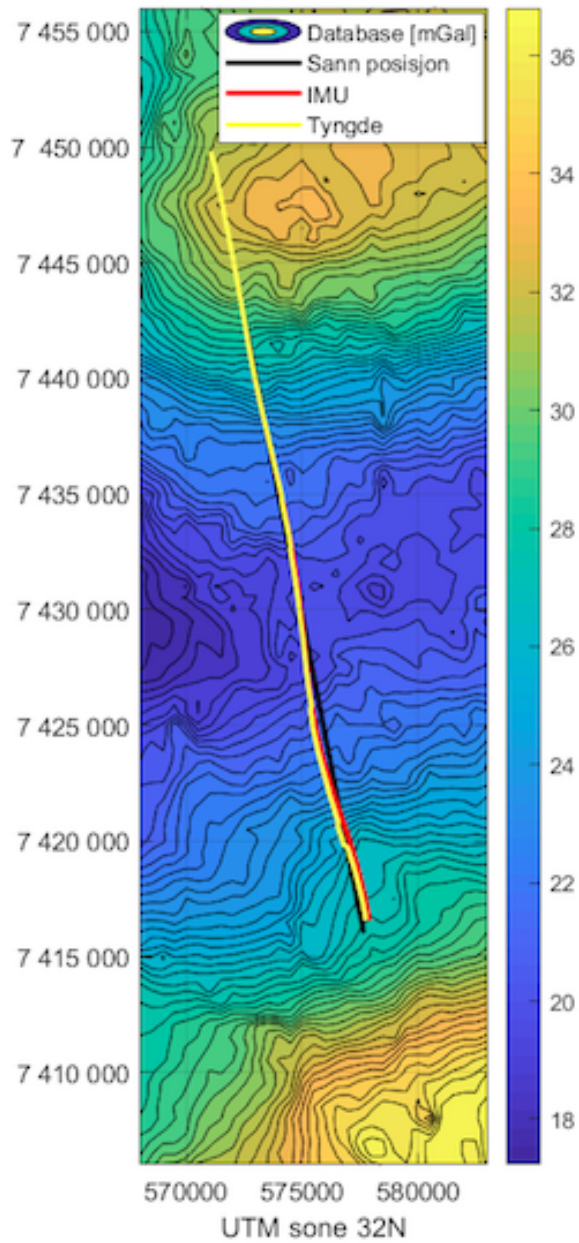
7.2 Område 2

Denne kjøringen varer i 3 timer. Område 2 skiller seg fra område 1 ved at det her er større variasjon i helningen, både når det gjelder retning og størrelse. I figur 7.6 ser man igjen et betydelig avvik mellom målt tyngde og tyngdeverdi fra databasen. I tillegg er oppslagene veldig hakkete.

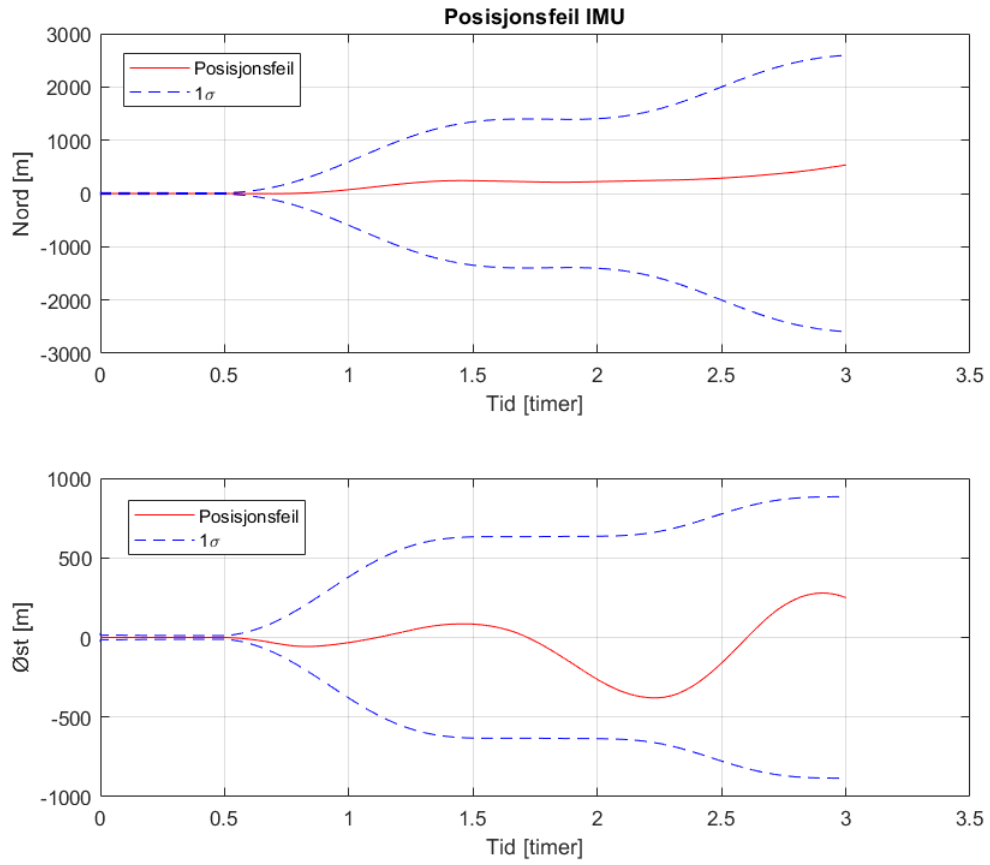


Figur 7.6: Tyngdeverdi fra database og målt tyngdeverdi.

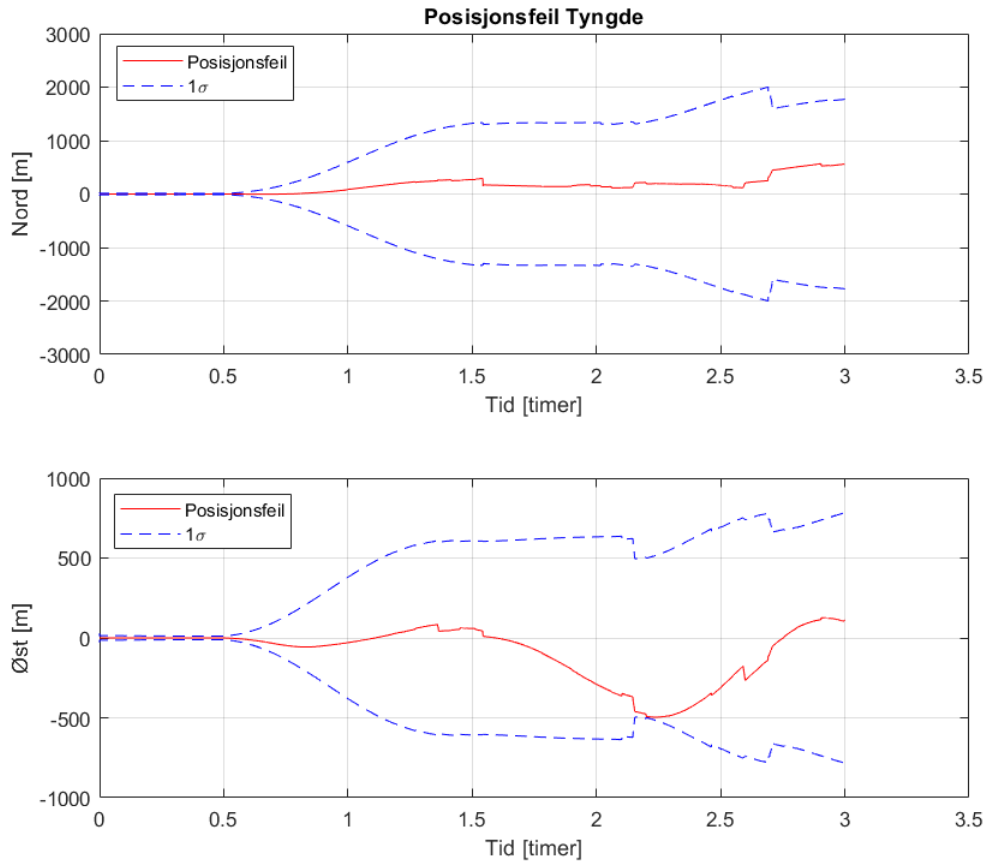
I figur 7.7 ser man at IMU og tyngdeløsninga samsvarer lenge. På et punkt sklir tyngdeløsninga litt ut, men klarer å hente seg inn igjen. I tillegg er tyngdeløsninga litt hakkete.



Figur 7.7: Oversikt over posisjon. Svart er sann posisjon, rød er IMU-løsning og gul viser tyngde-løsning.



Figur 7.8: Posisjonsfeil IMU.

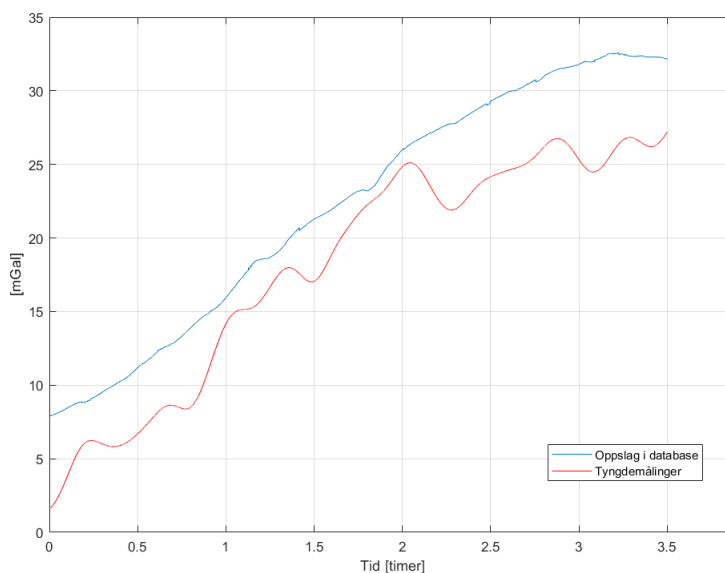


Figur 7.9: Posisjonsfeil Tyngde.

Når det kommer til figur 7.8 og 7.9 ser man at standardavviket for nord blir betydelig lavere på tyngdeløsningen enn for IMUen. For øst blir det også lavere, men selve posisjonsfeilen er høyere i øst. Tyngdeløsningene er hakkete, slik man så i figur 7.7. Likevel holder den seg innenfor standardavviket.

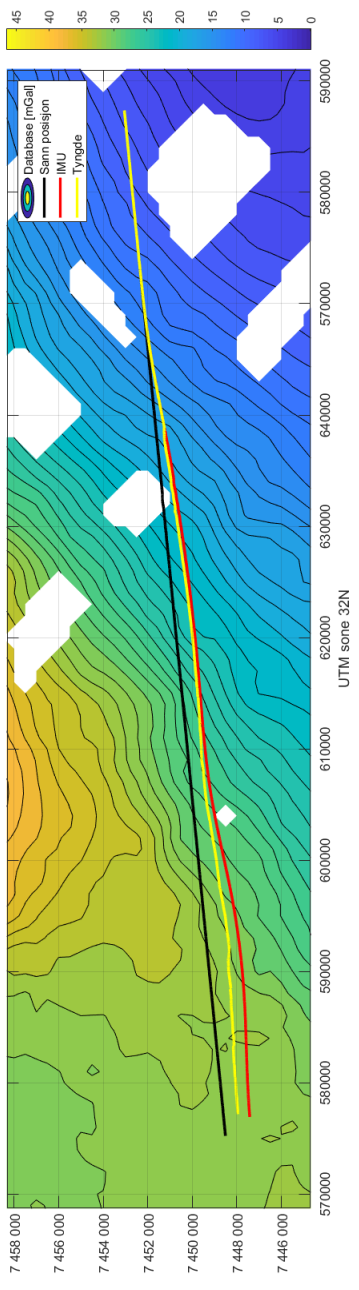
7.3 Område 3

Denne kjøringen varer i 3.5 timer. Dette området er som sagt en forlengelse av område 1. Det er likevel interessant å se på da kjøringen starter mye tidligere enn i område 1. Man kan dermed se hvor mye posisjonsestimater er ulikt område 1 på slutten av kjøringen. Igjen ser man at det er et avvik mellom målt tyngde og oppslag i databasen.

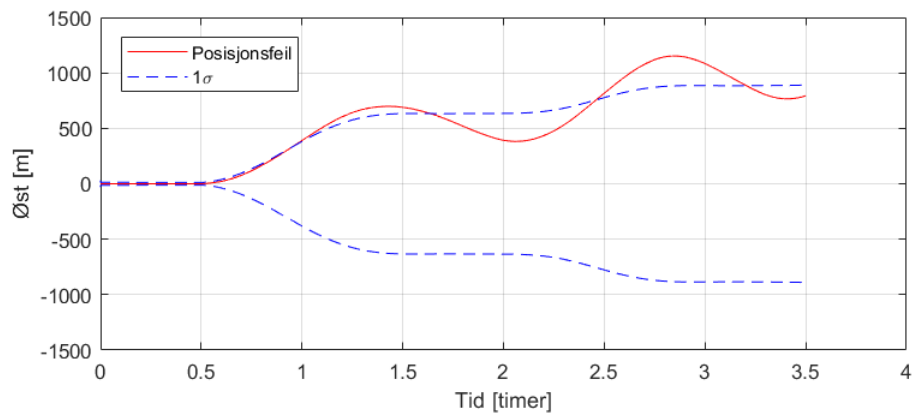
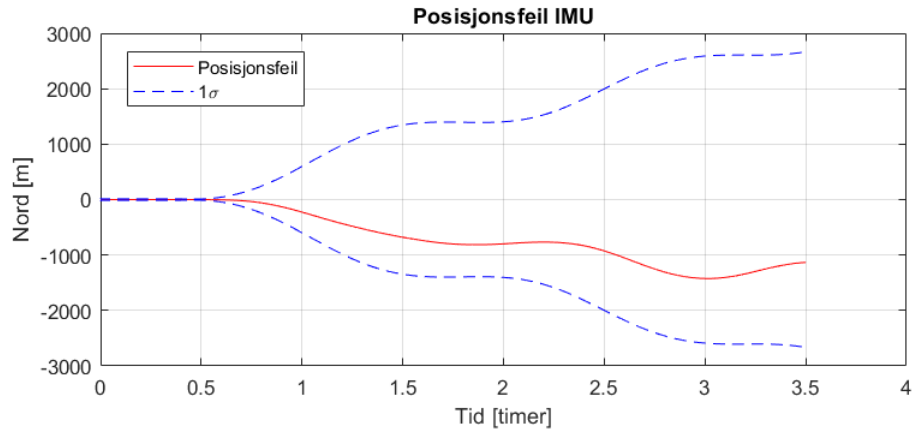


Figur 7.10: Tyngdeverdi fra database og målt tyngdeverdi.

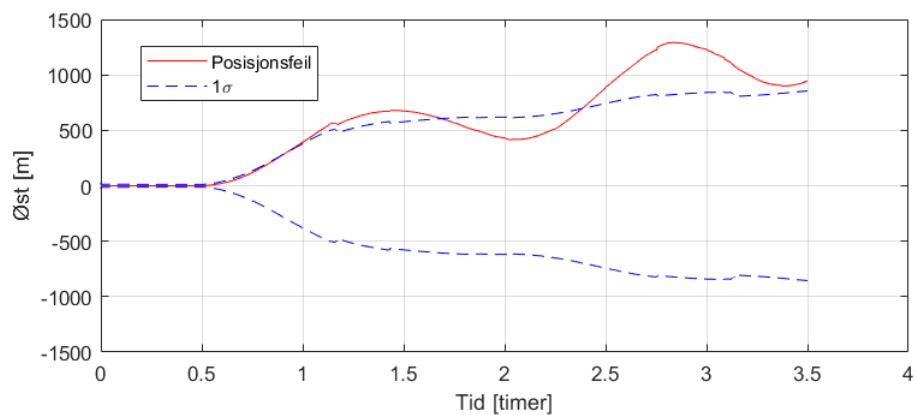
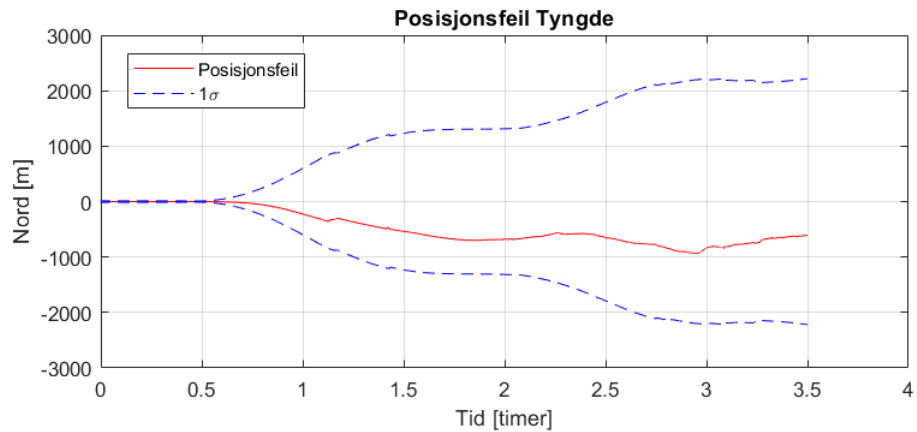
For figur 7.11 ser man at det også her gir tyngdeløsningen en tydelig forbedring i posisjonsestimater.



Figur 7.11: Oversikt over posisjon. Svart er sann posisjon, rød er IMU-løsning og gul viser tynge-løsning.



Figur 7.12: Posisjonsfeil IMU.

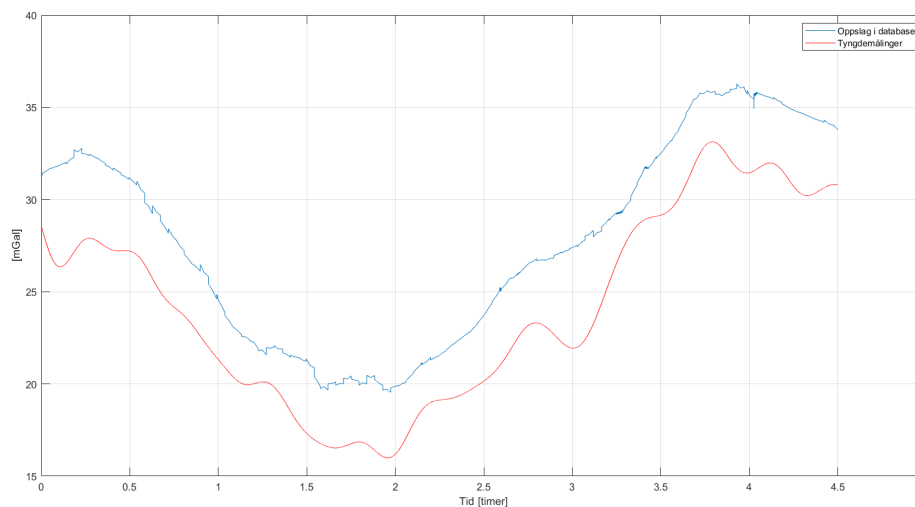


Figur 7.13: Posisjonsfeil tyngde.

Her ser man at standardavviket blir lavere i nord for tyngdeløsningen. I tillegg er posisjonsfeilen i nord lavere enn for IMUen. Posisjonsfeilen i øst blir derimot større for tyngdeløsningen. Standardavviket i øst er likt for begge løsningene. Verken tyngdeløsningen eller IMU-løsningen holder seg innenfor 1σ i øst.

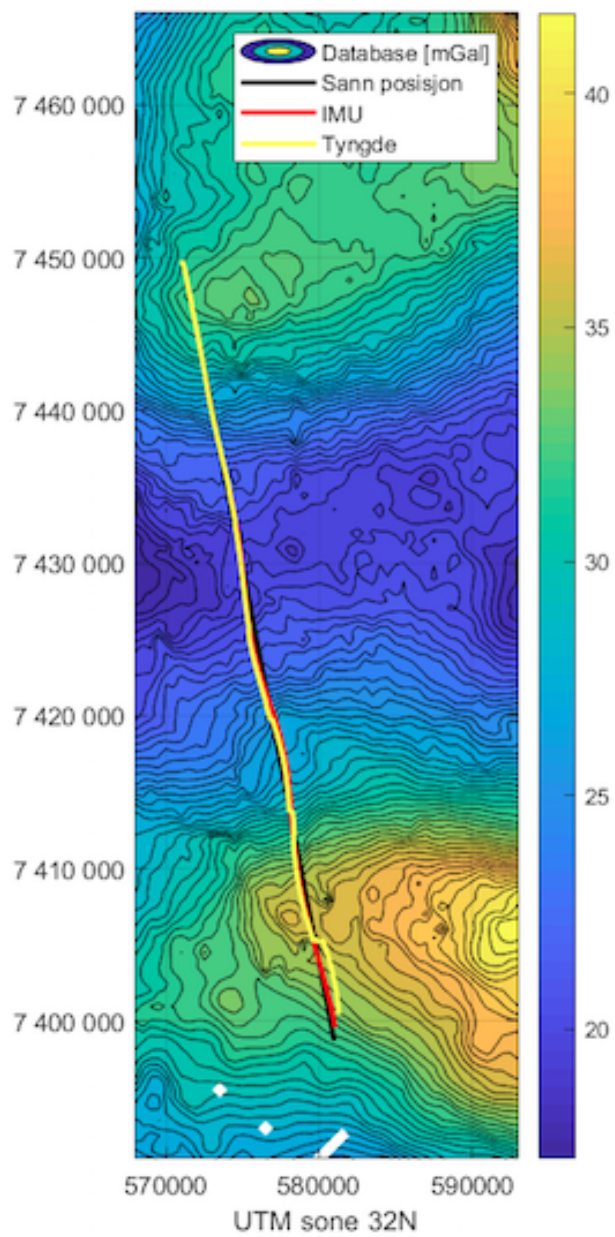
7.4 Område 4

Denne kjøringen varer i 4.5 timer. Igjen er det et avvik mellom oppslagene og målingene.



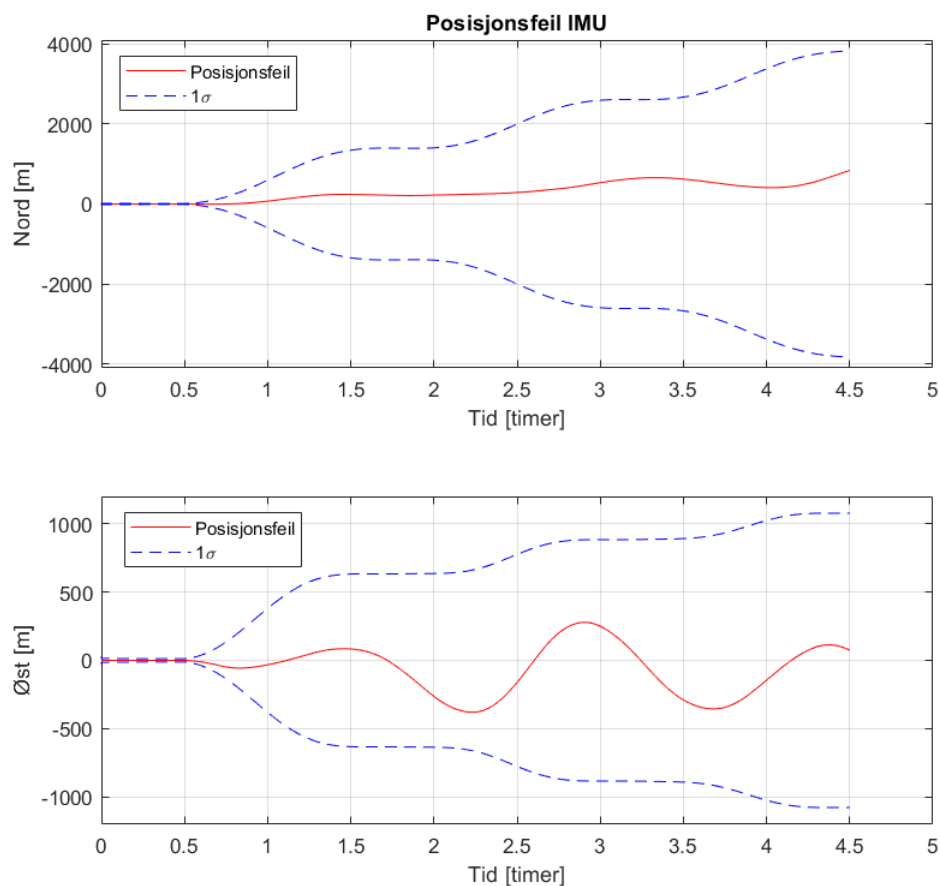
Figur 7.14: Tyngdeverdi fra database og målt tyngdeverdi.

I figur 7.15 ser man at det i første halvdel av kjøringen ser ut som man får en forbedring i posisjonsestimater. Deretter sklir tyngdeløsningen ut, uten å klare å hente seg inn igjen.

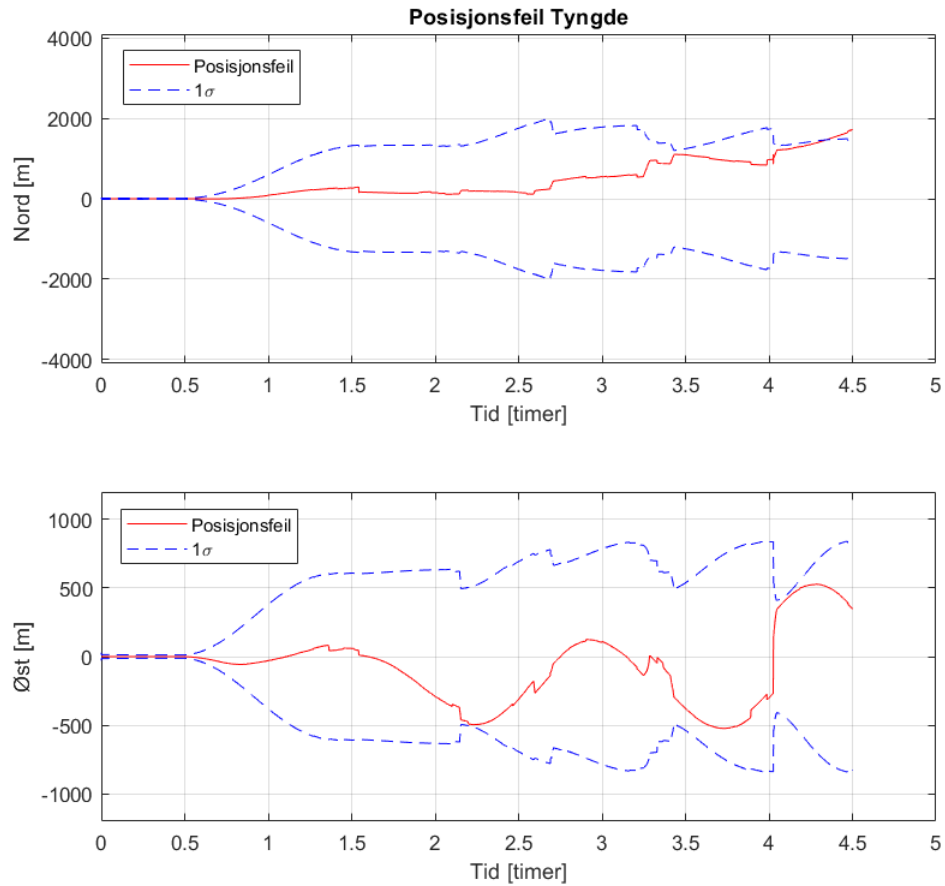


Figur 7.15: Oversikt over posisjon. Svart er sann posisjon, rød er IMU-løsning og gul viser tyngde-løsning.

I figur 7.16 og 7.17 ser man at posisjonsfeilen fra tyngdeløsningen blir generelt større enn for IMU-løsningen. Etter ca 4 timer gjør tyngdeløsningen ett hopp rett øst.



Figur 7.16: Posisjonsfeil IMU.



Figur 7.17: Posisjonsfeil tyngde.

Tabell 7.1 er en oversikt med største absolutte posisjonsfeil og standardavvik for hvert område. Man ser her at for alle områdene blir standardavviket lavere med tyngdeløsningen enn med IMUen. Likevel er ikke nødvendigvis posisjonsfeilen lavere med tyngdeløsningen enn med IMUen.

Største avvik fra sann posisjon				
Område 1				
	Pos.feil IMU	Pos.feil Tyngde	Std.avvik IMU	Std.avvik Tyngde
Nord	425 m	305 m	1403 m	1371m
Øst	727 m	754 m	635 m	631 m
Område 2				
	Pos.feil IMU	Pos.feil Tyngde	Std.avvik IMU	Std.avvik Tyngde
Nord	535 m	567 m	2594 m	2001 m
Øst	379 m	496 m	884 m	783 m
Område 3				
	Pos.feil IMU	Pos.feil Tyngde	Std.avvik IMU	Std.avvik Tyngde
Nord	1424 m	934 m	2667 m	2218 m
Øst	1152 m	1292 m	890 m	856 m
Område 4				
	Pos.feil IMU	Pos.feil Tyngde	Std.avvik IMU	Std.avvik Tyngde
Nord	842 m	1722 m	3826 m	2000 m
Øst	380 m	528 m	1077 m	845 m

Tabell 7.1: Største avvik fra sann posisjon, og største standardavvik.

Tabell 7.2 viser hvor stor posisjonsfeilen og standardavviket er på slutten av hver kjøring. Her ser man igjen at standardavviket for tyngdeløsningen er lavere enn for IMUen.

Avvik fra sann posisjon ved slutten av hver kjøring.				
Område 1				
	Pos.feil IMU	Pos.feil Tyngde	Std.avvik IMU	Std.avvik Tyngde
Nord	201 m	80 m	1403 m	1371 m
Øst	727 m	741 m	635 m	631 m
Område 2				
	Pos.feil IMU	Pos.feil Tyngde	Std.avvik IMU	Std.avvik Tyngde
Nord	535 m	557 m	2594 m	1772 m
Øst	250 m	110 m	884 m	783 m
Område 3				
	Pos.feil IMU	Pos.feil Tyngde	Std.avvik IMU	Std.avvik Tyngde
Nord	1133 m	609 m	2667 m	2218 m
Øst	794 m	947 m	890 m	856 m
Område 4				
	Pos.feil IMU	Pos.feil Tyngde	Std.avvik IMU	Std.avvik Tyngde
Nord	842 m	1722 m	3826 m	1427 m
Øst	75 m	347 m	1077 m	829 m

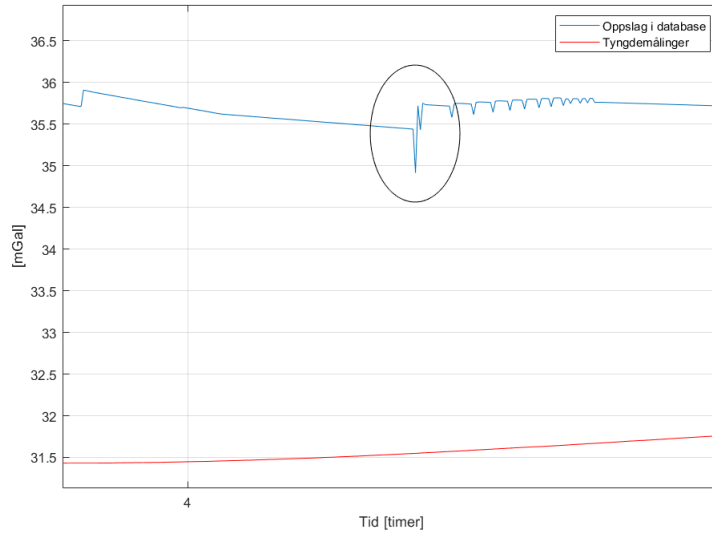
Tabell 7.2: Avvik fra sann posisjon, og standardavvik ved slutten av hver kjøring.

7.5 Vurdering av resultater

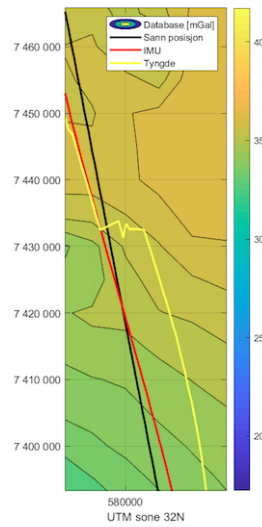
I dette kapitlet diskuteres resultatene. De ulike plottene vil ikke bli kommentert hver for seg, men bli sett i sammenheng med hverandre.

Det første man merker seg er at det er betydelig forskjell i resultat fra kjøringene i område 1 og 3 kontra område 2 og 4. For område 1 og 3 ser man en betydelig forbedring i posisjonsestimatet fra tyngdeløsningen i forhold til IMU-løsningen. I disse områdene er terrenget jevnt, og man kjører på skrått langs en skråning. Det at man skjærer kotene i en vinkel mellom 0° og 90° gjør at får observerbarhet både i øst- og nordkomponenten til tyngdegradienten. I område 2 og 4 kjører man derimot rett nord/sør. Her skjærer man kotene 90° og får dermed størst observerbarhet i nord/sør-retning. Dermed er det lite informasjon i øst-vest, og lite grunnlag til å si noe om hvor det er mest sannsynlig at posisjonen er i øst-vest.

Man ser også at plottene med posisjonsestimatene fra tyngdeløsningen “hakker”. Dette spesielt for område 2 og 4. Den eneste integritetsjekken NavLab gjør når det kommer inn nye målinger er at den sjekker at posisjonsestimatet er innenfor 3σ . Det vil si at når man har et standardavvik på for eksempel 1500m tillater NavLab at posisjonsestimatet kan hoppe langt. Med andre ord må det bety at det enten er målingen som brukes i dette tidspunktet som er problemet, eller at desigmatrisen bør settes opp på en annen måte. Dersom man ser på det store hoppet fra område 4 (se figur 7.19), kan man se at det i oppslaget fra databasen er et stort “hakk” for tidspunktet hvor hoppet skjer. “Hakket” er på nesten en mGal (figur 7.18), og er markert med en sirkel.



Figur 7.18: Utsnitt av figur 7.14



Figur 7.19: Utsnitt av figur 7.15

Dersom man ser på verdiene i databasen for oppslaget ved tidspunktet når posisjonsestimatet hopper, ser det ved første øyekast ikke ut som det er

noe galt i databasen. Det er likevel verdt å merke seg at dette hoppet skjer akkurat i det oppslaget bytter rute å slå opp i. Forskjellen i verdi for de to rutene er på 0.26mGal. Nedenfor er et utsnitt av databasen i dette tidspunktet. Det første oppslaget er markert med rødt, neste oppslag er markert med blått.

36.0335	35.9161	36.2373	36.5125
36.0416	36.0421	36.2044	36.5045
35.5635	35.5980	35.8583	36.1221
34.2080	34.7178	35.4199	35.8051
34.3987	34.6678	35.1930	35.5440

Figur 7.20: Utsnitt fra tyngdedatabase. Tyngdeverdiene er gitt i mGal.

Dersom en ser på raden over og under oppslaget i databasen kan det se ut som man har en kraftig gradient som endrer seg raskt. Dette kan være en indikasjon på at noe er galt i databasen, men det er vanskelig å si sikkert.

Posisjonsestimatene for område 2 og 4 hopper mye mer enn estimatene for område 1 og 3. Dersom man ser på plottene med tyngdemålinger og oppslag for de ulike områdene ser man at oppslagene fra databasen er mye mer hakkete for område 2 og 4. I teorien skal ikke oppslagene bli så hakkete når det brukes interpolasjon for å hente ut verdier fra griddet. Det er også bemerkelsesverdig at oppslagene er så hakkete i dette området, mens for de andre områdene blir oppslagene mer glatt til tross for at samme interpolasjonsalgoritme er brukt i alle områdene. Dette kan tyde på at kvaliteten på grunnlagsdataene er dårligere for område 2 og 4 enn for de andre områdene.

Dersom man ser på oppslaget i databasen, har man hele tiden et avvik mellom oppslag og måling. Dette er ikke forventet. I teorien skulle de samsvart ganske bra, mens her har man et konstant offset på mellom 3 og 4 mGal i snitt. Målelikningen bruker differansen til estimere nye posisjonsestimater. Dermed er det ikke ønskelig med et slikt avvik. I og med at dette offsetet er

her er det prøvd å kompensere ved å sette et standardavvik for gravimeterbiasen i Kalmanfilteret som skal kunne håndtere det. Formen på kurven til tyngdemålingene er stort sett lik formen på kurven til oppslagene. Målingene inneholder mer informasjon enn databasen. Dette skyldes at filtreringen av tyngdmålingene har en cut-off på 4000m, mens signalinnholdet i databasen er på 5000m. Ideelt sett burde tyngdmålingene være likt filtrert som databasen. Det er ikke en fordel at målingene har mer signalinnhold enn oppslagene.

På grunn av det konstante avviket mellom oppslag og målinger, er det valgt å teste en kjøring i område 1 og 2 med å legge til en konstant verdi på målingene slik at de får samme gjennomsnittsverdi som databasen. Samtidig endres standardavviket for gravimeterbiasen i Kalmanfilteret tilsvarende. Dette gjøres for å se hvordan løsningen er ved godt samsvar mellom målinger og database. Ved disse kjøringene er det valgt å senke standardavviket til biasen ned til 2mGal og standardavviket til hvit støy til 0.2mGal. Resultatene for disse kjøringene er gitt i Appendix D. Ut fra disse plottene ser man at posisjonsestimater for område 1 med justerte målinger blir betydelig bedre. Tyngdeløsningen ligger og hopper rundt sann posisjon. For område 2 derimot er ikke dette tilfellet. Her blir tyngdeløsningene dårligere og mer hakkete enn hvis målingene ikke er justert for avviket. Dette kan tyde på at man ikke har klart å modellere feil og biaser godt nok i målelikningen som blir brukt.

8 Vurdering av metoden

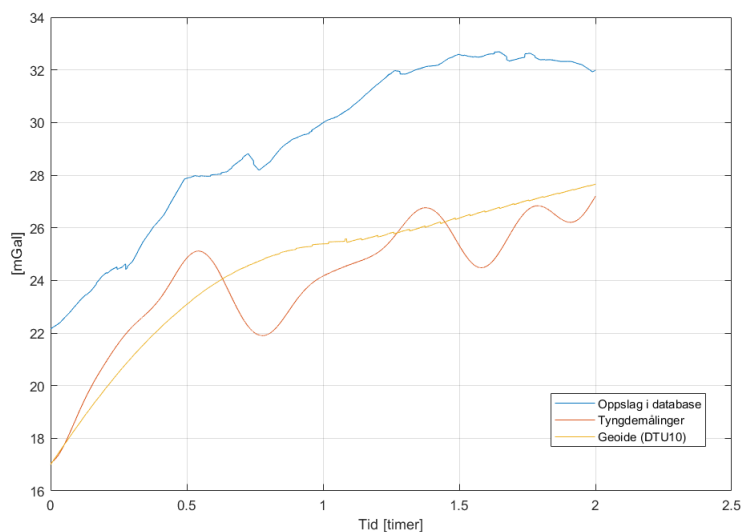
Resultatene viser at det er mulig å få en forbedring i posisjonsestimater. Ut fra resultatene ser man at retningene med størst observerbarhet bidrar mest til aidingen. Dette er forventet. Plottene med posisjonsfeil viser en tydelig forbedring i estimatet av posisjon i komponentene med observerbarhet. I figur 7.15 ser man likevel at når man får mer observerbarhet i øst på slutten av kjøringen så blir ikke posisjonsestimater bedre, men drar mer ut.

Det er tydelig at målelikningen ikke er robust nok. Opp til flere steder opplever man at det er underlige hopp i resultatene. Dette kunne nok vært unngått med annen tilnærming til målelikningen. Det virker som om antakelsen om at biasen til tyngdedatabasen er neglisjerbar ikke er god nok. Det hadde nok vært mer ideelt å modellere biasene på en mer kompleks måte. For eksempel kan det modelleres en bias for målingene og en for databasen. Det er likevel verdt å merke seg at selv om posisjonsestimater for noen av kjøringene blir dårligere med tyngdeløsningen enn med IMU-en så holder den seg innenfor standardavviket.

Databasen har grov oppløsning, med data kun hver 500m. Det kunne nok vært en fordel med finere oppløsning, gitt at datagrunnlaget støtter det. Som nevnt tidligere er det ikke ønskelig å innføre usikkerhet i form av ukjent interpolasjon. Dersom man velger å bruke nærmeste verdi i oppslagene risikerer man å slå opp på samme tyngdeverdi i lang tid før neste rute kommer. På grunn av den grove oppløsningen er det derfor valgt å bruke interpolasjon. Det at databasen er satt sammen av flere måleoppdrag gjort gjennom flere år med ulike instrumenter gjør at det er en viss usikkerhet knyttet til nøyaktigheten på databasen. Vi kan ikke vite sikkert om alle områdene i databasen er av like god kvalitet. Ut fra tyngdeoppslagene kan det tyde på at kvaliteten på grunnlagsdataene i område 2 og 4 ikke er like god som i område 1 og 3. Det at det blir så stor forskjell i resultatene i de ulike områdene tyder på at man burde ha bedre kontroll på grunnlagsdataene som brukes til sammenlikning. En mulighet kan være å modellere terrenget på en annen måte enn som et grid.

Det at man får det konstante avviket mellom databasen og målingene viser at det er usikkerhet knyttet til dataene. Man kan ikke være sikre på om det er databasen eller målingene som inneholder en feil. Dersom man sjekker

verdiene mot en geoidmodell (DTU10) ser man at målingene stemmer veldig bra med geoidmodellen, mens databaseverdiene ligger over (se figur 8.1). Dette kan tyde på at det har skjedd en forskyvning i databasen. Likevel ble det valgt å bruke databasen og målingene slik de fremstår. Det ble i tillegg gjort en test ved å “flytte” målingene opp til databasen, og sette ned bias og hvit støy. Man så da en betydelig forbedring i resultatene for område 1. Dette viser at det er viktig å ha godt samsvar mellom målinger og databasen.



Figur 8.1: Tyngdeverdi fra database, målt tyngdeverdi og geoidmodell.

Det er også viktig å ha kontroll på hvordan målingene filtreres og hvilke korreksjoner som brukes. For denne oppgaven ble tyngdemålingene levert ferdig filtrerte. Det kunne nok vært en fordel å prøve ulike filtre på egenhånd, både når det gjelder tyngdemålingene og databasen. Målingene og databasen målingene skal sammenliknes med må være på samme datum og inneholde de samme korreksjonene.

Når det kommer til gradientene er beregningsmetoden valgt ut i fra prøving og feiling. Interpolasjonen som jeg endte opp med her er den som fungerer best for området databasen dekker. Dette er ikke en robust metode, og man risikerer at denne interpoleringen ikke nødvendigvis fungerer i andre områder, og for andre tyngdekart.

Ved bruk av denne type navigasjon i sanntid er man avhengig av å kunne stole på at grunnlagsdataene er gode. En ulempe med å bruke tyngdemålinger i sanntid er at tyngdekartet er gitt som anomalier, det vil si at målingene også må gis som anomalier. Altså påføres samme korreksjoner som databasen (i sanntid). For Eötvös-korreksjonen må en ha informasjon om breddegrad, hastighet og farkostens orientering. Usikkerhet i denne korreksjonen kan gi stor usikkerhet på målingen. I tillegg må de andre korreksjonene gjøres i sanntid. Det er også viktig å merke seg at posisjonsestimatet dras mot der tyngdeverdiene har best samsvar, og ikke nødvendigvis mot sann posisjon.

Metoden er testet i et område som inneholder mye variasjoner i tyngdefeltet. Med andre ord et veldig ideelt område for en slik metode. Det virker som metoden fungerer best når man kjører på skrått langs en skråning. I område 2 og 4 så man at å kjøre på tvers av tyngdekotene ikke gav tilsvarende bra resultat. Dette kan nok skyldes at man i område 1 og 3 får observerbarhet både i øst- og nordkomponenten til tyngdegradienten når man ikke kjører direkte langs eller 90° på tyngdekotene. Mens man får størst observerbarhet i nordkomponenten til tyngdegradienten når man i område 2 og 4 kjører direkte 90° på tyngdekotene. Det burde ikke være slik. Ideelt sett er det ønskelig med en metode som ikke krever spesielle egenskaper i terrenget. Det ville vært en fordel å også teste metoden i flere områder. Da får man sett hvordan utslag man får i posisjonsestimatet i ulike scenarier. I tillegg kan det gjøres en bedre kvalitetskontroll på gradientene og databasen. En integritetssjekk som kan gjøres er å gå gjennom databasen og sette en grenseverdi for hvor store gradientene kan bli.

8.1 Videre arbeid

Nedenfor er en liste med aspekter det kan være verdt å se nærmere på:

- Få bedre kontroll på filtrering. FFI har rådataene fra toktet, og dermed muligheten til å teste ut ulike filtreringer.
- Sjekke om terrenget kan modelleres på en annen måte enn som et grid. Man er avhengig av å kunne modellere gradientene lineært og terrenget må dermed ikke modelleres for komplekst. Likevel kan det være lurt å modellere terrenget litt mer avansert enn det som er gjort i denne oppgaven.
- Sjekke om resultatet blir annerledes i andre områder hvor tyngdevariasjonen er større eller lavere.
- Utføre bedre kvalitetskontroll på gradienter og database.

8.2 Konklusjon

Resultatene fra denne studien viser at tyngdereferert posisjonering kan fungere. NGU konkluderte med det samme, men nå har man fått bekreftet at det også er mulig med full treghtsnavigasjon og virkelige tyngdemålinger. I tillegg har denne studien skaffet en bedre oversikt over hvilke aspekter som bør undersøkes nærmere.

Området metoden er testet i er veldig godt egnet for denne typen posisjonering, på grunn av mye variasjon i tyngdesignalet. Likevel ble resultatet noe varierende. Testene viste at man må ta hensyn i forhold til databearbeiding. Stort avvik mellom målinger og oppslag gav dårligere posisjonsestimater, enn når avviket var mindre. Det er viktig å ha god kontroll på filtreringen av målingene, og hvilke korreksjoner som påføres. Databasen og målingene bør ideelt sett filtreres likt, og påføres de samme korreksjonene. Andre hensyn som må tas er at databasen må ha fin nok oppløsning til å fange opp variasjoner i tyngdefeltet, i tillegg til at man ønsker god dekning i området med data. Databasen i denne oppgaven har som nevnt litt grov oppløsning, i tillegg til at den inneholder områder hvor det mangler informasjon.

Slik målelikningen er satt opp i denne oppgaven, virker det som den ikke klarer å håndtere feil og biaser godt nok. Muligens er det lurt å modellere biasene hver for seg, eller sette opp målelikning slik at den modellerer biaser og støy på en mer kompleks måte. I tillegg må det brukes en interpolasjonsmetode som er robust nok til å kunne brukes uansett type terreng. Dette kan kombineres med en integritetssjekk som sjekker størrelse på forskjeller og gradienter ut fra en analyse av databasen, og forkaster målinger som er utenfor det normale.

Referanser

- Bishop, G. C. (2001). Navigation with gravitational field maps.
- Blakely, R. J. (1995). *Potential theory in Gravity and Magnetic Applications*. Cambridge university Press.
- Farell, J. A. (2008). *Aided Navigation: GPS with high rate sensors*. McGraw-Hill education.
- Gade, K. (1997). Integrering av treghetsnavigasjon i en autonom farkost. Ffi/rapport-2001/05900, Forsvarets Forskningsinstitutt.
- Gade, K. (2003). Navlab: overview and user guide. Technical report, Forsvarets forskningsinstitutt, Kjeller.
- Gade, K. (2004). Navlab, a generic simulation and post-processing tool for navigation. *European Journal of Navigation*, 2(4):51–59.
- Gade, K. (2009). Introduction to inertial navigation and kalman filtering. tutorial for iain world congress, stockholm, sweden, oct. 2009.
- Gade, K. (2010). A non-singular horizontal position representation. *The journal of navigation*, 63(2):395–417.
- Gelb, A. (1974). *Applied Optimal Estimation*. The M.I.T press.
- Ghilani, C. D. (2010). *Adjustment Computations: Spatial Data Analysis*. John Wiley and Sons, Inc.
- Haase, C., Dumais, M.-A., and Brønner, M. (2016). Feasibility study for gravity-aided navigation on the norwegian shelf. Technical report, Norges Geologiske Undersøkelse.
- Hofman Wellenhof, B., Lichtenegger, H., and Wasle, E. (2007). *GNSS - Global Navigation Satellite Systems: GPS, GLONASS, Galileo and more*. SpringerWienNewYork.
- Hofmann-Wellenhof, B. and Moritz, H. (2006). *Physical geodesy*. Springer-WienNewYork, second edition.

- Honeywell (2016). Hg9900 inertial measurement unit. Tilgjengelig fra <https://aerospace.honeywell.com/en/~media/aerospace/files/brochures/n61-1638-000-000-hg9900inertialmeasurementunit-bro.pdf> (lest 02.02.2018).
- Jekeli, C. (2001). *Inertial navigation systems with geodetic applications*. Walter de Gruyter.
- Kjørsvik, N. S. (2010). Introduction to inertial navigation.
- Kristiansen, O. (2017). Parameterestimeringsteknikker, introduksjon til minste kvadraters metode og kalmanfiltrering.
- Lacoste, M. (2018). Tags-6 gravity meter (turnkey airborne gravity system) with aerograv data processing software. tilgjengelig fra: <http://www.microglacoste.com/tags-6.php> (lest 19.01.2018).
- Mandt, M. (2001). Terrengreferert posisjonering for undervannsfarkoster. Ffi/rapport-2001/05900, Forsvarets Forskningsinstitutt.
- Moryl, J., Rice, H., and Shinnars, S. (1998). The universal gravity module for enhanced submarine navigation. *Position Location and Navigation Symposium, IEEE. doi: 0.1109/PLANS.1998.670124*.
- Petovello, Mark, G. (2003). Real-time integration of a tactical-grade imu and gps for high-accuracy positioning and navigation.
- Rice, H., Mendelsohn, L., Aarons, R., and Mazzola, D. (2000). Next generation marine precision navigation system. *Position Location and Navigation Symposium, IEEE. doi: 10.1109/PLANS.2000.838303*.
- Timmen, L. (2010). *Absolute and relative gravimetry. I Sciences of geodesy-I, s.1-48*. Springer.
- Torge, W. and Müller, J. (2012). *Geodesy 4th edition*. De Gruyter.
- Trimble (2016). Trimble bd982. Tilgjengelig fra <http://trl.trimble.com/docushare/dsweb/Get/Document-867958/> (lest 25.04.2018).
- Woodman, O. J. (2007). An introduction to inertial navigation. Technical report, University of Cambridge, Computer Laboratory.

A Noen matematiske sammenhenger

A.1 Enkel tidsderivasjon av ulike koordinatsystemer

Dette delkapitlet viser sammenhengen mellom den tidsderiverte av en vilkårlig vektor \vec{k} i to ulike koordinatsystemer. Utledningene som følger er hentet fra [Gade, 1997].

Man tar utgangspunkt i sammenhengen:

$$k^A = R_B^A k^B \quad (\text{A.1})$$

Hvor k^A og k^B er en vilkårlig vektor i hvert sitt koordinatsystem. R_B^A er rotasjonsmatrisen fra B til A. Derivasjon med hensyn på tid gir:

$$\dot{k}^A = \dot{R}_B^A k^B + R_B^A \dot{k}^B \quad (\text{A.2})$$

Den deriverte av rotasjonsmatrisen \dot{R}_B^A er avhengig av rotasjonen mellom koordinatsystemene:

$$\dot{R}_B^A = R_B^A S(\omega_{AB}^B) \quad (\text{A.3})$$

$S(\omega_{AB}^B)$ er per definisjon vinkelhastigheten til vektorer som dreies av rotasjonsmatrisen.

$$S(\omega_{AB}^B) = [\omega_{AB}^B \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Ved å bruke likning A.3 får man:

$$\dot{k}^A = R_B^A S(\omega_{AB}^B) k^B + R_B^A \dot{k}^B \quad (\text{A.5})$$

Noe som gir:

$$\dot{k}^A = R_B^A (S(\omega_{AB}^B) k^B + \dot{k}^B) = R_B^A (\dot{k}^B + \omega_{AB}^B \times k^B) \quad (\text{A.6})$$

På koordinatfri form blir dette:

$${}^A \frac{d}{dt}(\vec{k}) = {}^B \frac{d}{dt}(\vec{k}) + \omega_{AB} \times \vec{k} \quad (\text{A.7})$$

A.2 Similaritetstransformasjon

Dette delkapitlet viser hvordan en vektor som er argument i kryssproduktoperatoren kan transformeres mellom ulike systemer. Utledningene er hentet fra [Gade, 1997].

Vi har en generell vektor:

$$\vec{k}_1 = \vec{k} \times \vec{k}_2 \quad (\text{A.8})$$

Den kan dekomponeres i koordinatsystemene A og B, som er vilkårlige.

$$\vec{k}_1^A = \vec{k}^A \times \vec{k}_2^A \quad (\text{A.9a})$$

$$\vec{k}_1^B = \vec{k}^B \times \vec{k}_2^B \quad (\text{A.9b})$$

Dersom man transformerer k_1^B til A får man:

$$k^A \times k_2^A = R_B^A(k^B \times k_2^B) \quad (\text{A.10})$$

Dette er det samme som:

$$S(k^A)k_2^A = R_B^A S(k^B)k_2^B \quad (\text{A.11})$$

k_2^B kan erstattes med k_2^A transformert til B. Da får vi:

$$S(k^A)k_2^A = R_B^A S(k^B)R_A^B k_2^A \quad (\text{A.12})$$

$$S(k^A) = R_B^A S(k^B)R_A^B$$

Denne sammenhengen blir ofte kalt for similaritetstransformasjon.

B Implementering av målelikningen i NavLab - Utledning

I dette kapitlet vises fullstendig utledning av likning 6.14.

For å implementere likning 6.12 i Navlab, må den horisontale posisjonsfeilen knyttes til en feiltilstand som estimeres i Navlab. Tyngdegradientene er gitt som endring i tyngde per meter. En feiltilstand som estimeres i Navlab, kan knyttes direkte til posisjonsfeilen. Dette er e_{EL}^L som er feilen i navigasjonslikningenes estimat av rotasjonsmatrisa R_L^E . Man må altså finne sammenhengen mellom horisontal posisjonsfeil og feiltilstand e_{EL}^L . Siden horisontal posisjon blir representert som n-vektor i Navlab (figur 5.5) må man bruke sammenhengen mellom n_{EB}^E og R_L^E som utgangspunkt. Denne sammenhengen er gitt som:

$$n_{EB}^E = R_L^E n_{EB}^L \quad (\text{B.1})$$

hvor:

$$n_{EB}^L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Dersom man antar en kuleformet jord er horisontal posisjonen p_{EB}^E gitt av:

$$p_{EB}^E = r_{EB} n_{EB}^E \quad (\text{B.3})$$

hvor r_{EB} er avstanden fra jordsentrum til farkosten og n_{EB}^E er posisjon gitt som n-vektor. Navigasjonslikningenes estimat av posisjonen kan skrives slik:

$$\hat{p}_{EB,naveq,c}^E = p_{EB}^E + \delta p_{EB,naveq,c}^E \quad (\text{B.4})$$

Hvor p_{EB}^E er sann posisjon, og $\delta p_{EB,naveq,c}^E$ er feil i estimert posisjon fra navigasjonslikningen. På samme måte som likning B.3 har vi at posisjonsestimateret kan skrives:

$$\hat{p}_{EB,naveq,c}^E = \hat{r}_{EB,naveq,c} \hat{n}_{EB,naveq,c}^E \quad (\text{B.5})$$

hvor

$$\hat{r}_{EB,naveq,c} = r_{EL} - \hat{z}_{EB,naveq,c} \quad (\text{B.6a})$$

$$\hat{n}_{EB,naveq,c}^E = n_{EB}^E + \delta n_{EB,naveq,c}^E \quad (\text{B.6b})$$

hvor $\hat{r}_{EB,naveq,c}$ er estimat for avstanden fra jordsentrum til farkosten, r_{EL} er avstanden fra jordsentrum til ellipsoiden, $\hat{z}_{EB,naveq,c}$ er estimert avstand fra ellipsoiden til farkosten (dybde), $\hat{n}_{EB,naveq,c}^E$ er estimert posisjon uttrykt som n-vektor og $\delta n_{EB,naveq,c}^E$ er feil i posisjon uttrykt som n-vektor. Estimert dybde $\hat{z}_{EB,naveq,c}$ kan skrives slik:

$$\hat{z}_{EB,naveq,c} = z_{EB} + \delta z_{EB,naveq,c} \quad (\text{B.7})$$

z_{EB} er sann dybde og $\delta z_{EB,naveq,c}$ er feil i estimert dybde. Setter likning B.6a, B.6b og B.7 inn i B.5:

$$\hat{p}_{EB,naveq,c}^E = (r_{EL} - (z_{EB} + \delta z_{EB,naveq,c}))(n_{EB}^E + \delta n_{EB,naveq,c}^E) \quad (\text{B.8})$$

Fra likning B.4 ser vi at posisjonsfeilen kan skrives slik:

$$\delta p_{EB,naveq,c}^E = \hat{p}_{EB,naveq,c}^E - p_{EB}^E \quad (\text{B.9})$$

Setter inn likning B.3 og B.8 i likning B.9:

$$\delta p_{EB,naveq,c}^E = (r_{EL} - (z_{EB} + \delta z_{EB,naveq,c}))(n_{EB}^E + \delta n_{EB,naveq,c}^E) - r_{EB} n_{EB}^E \quad (\text{B.10})$$

$$\delta p_{EB,naveq,c}^E = (r_{EL} - z_{EB} - \delta z_{EB,naveq,c})(n_{EB}^E + \delta n_{EB,naveq,c}^E) - r_{EB} n_{EB}^E \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} \delta p_{EB,naveq,c}^E &= (r_{EL} - z_{EB})n_{EB}^E + (r_{EL} - z_{EB})\delta n_{EB,naveq,c}^E \\ &\quad - \delta z_{EB,naveq,c}n_{EB}^E - \delta z_{EB,naveq,c}\delta n_{EB,naveq,c}^E - r_{EB}n_{EB}^E \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\delta p_{EB,naveq,c}^E = r_{EB}\delta n_{EB,naveq,c}^E - \delta z_{EB,naveq,c}n_{EB}^E - \delta z_{EB,naveq,c}\delta n_{EB,naveq,c}^E \quad (\text{B.13})$$

Første ordens feil i posisjon blir da:

$$\delta p_{EB,naveq,c}^E = r_{EB}\delta n_{EB,naveq,c}^E - \delta z_{EB,naveq,c}n_{EB}^E \quad (\text{B.14})$$

Siden feiltilstanden e_{EL}^L er gitt i lokalt system, må også posisjonsfeilen gis i lokalt system:

$$\begin{aligned}\delta p_{EB,naveq,c}^L &= (R_L^E)^T \delta p_{EB,naveq,c}^E \\ &= (R_L^E)^T (r_{EB} \delta n_{EB,naveq,c}^E - \delta z_{EB,naveq,c} n_{EB}^E) \\ &= r_{EB} \delta n_{EB,naveq,c}^L - \delta z_{EB,naveq,c} n_{EB}^L\end{aligned}\quad (\text{B.15})$$

Hvis man ser nærmere på $\delta n_{EB,naveq,c}^L$ har vi at:

$$\delta n_{EB,naveq,c}^L = (R_L^E)^T \delta n_{EB,naveq,c}^E = (R_L^E)^T (\hat{n}_{EB,naveq,c}^E - n_{EB}^E) \quad (\text{B.16})$$

hvor:

$$\hat{n}_{EB,naveq,c}^E = \hat{R}_{L,naveq,c}^E n_{EB}^L \quad (\text{B.17})$$

Estimert rotasjonsmatrise $\hat{R}_{L,naveq,c}^E$ inneholder en feil gitt av:

$$\hat{R}_{L,naveq,c}^E = R_L^E (I + S(e_{EL}^L)) \quad (\text{B.18})$$

I er identitetsmatrisen, S er skjevsymmetrisk matriserepresentasjon av e_{EL}^L , e_{EL}^L er feil i estimat av rotasjonsmatrisa, og R_L^E er sann rotasjon. Settes likning B.17 og B.18 inn i likning B.16 får vi:

$$\delta n_{EB,naveq,c}^L = (R_L^E)^T (R_L^E (I + S(e_{EL}^L)) n_{EB}^L - R_L^E n_{EB}^L) \quad (\text{B.19})$$

$$\delta n_{EB,naveq,c}^L = S(e_{EL}^L) n_{EB}^L \quad (\text{B.20})$$

$$\delta n_{EB,naveq,c}^L = -S(n_{EB}^L) e_{EL}^L \quad (\text{B.21})$$

Setter likning B.21 inn i likning B.15 og sitter igjen med posisjonsfeil:

$$\delta p_{EB,naveq,c}^L = -r_{EB} S(n_{EB}^L) e_{EL}^L - \delta z_{EB,naveq,c} n_{EB}^L \quad (\text{B.22})$$

For en farkost på havoverflaten, er man interessert i horisontal posisjon, og siste leddet i likning B.22 faller derfor bort:

$$\delta p_{EB,naveq,c}^L = -r_{EB}S(n_{EB}^L)e_{EL}^L \quad (\text{B.23})$$

Rotasjonsmatrisen R_L^E er definert slik at tredje komponent i e_{EL}^L ikke inneholder feil og er derfor lik 0 ($e_{EL,z}^L = 0$). For at tyngdegradienten skal relateres til feiltilstand e_{EL}^L i Navlab, må gradienten relateres til posisjonsfeilen δp_{EB}^L . Posisjonsfeilen kan skrives slik:

$$\delta p_{EB,naveq,c}^L = \frac{dx^L}{de_{EL}^L} e_{EL}^L \quad (\text{B.24})$$

hvor

$$\frac{dx^L}{de_{EL}^L} = -r_{EB}S(n_{EB}^L) \quad (\text{B.25})$$

Gradientene er beregnet i M systemet $\frac{dg}{dx^M}$. Vi har da:

$$\frac{dg}{dx^M} = \left[\frac{\partial g}{\partial x} \quad \frac{\partial g}{\partial y} \quad \frac{\partial g}{\partial z} \right] \quad (\text{B.26})$$

Vi ser her på horisontal posisjon hvor tyngdemålinger og tyngdedatabase er gitt som tyngdeanomalier i et kartplan. z gradienten $\frac{\partial g}{\partial z}$ er derfor lik 0. Siden gradientene er gitt i M systemet og posisjonsfeilen i L systemet er sammenhengen mellom M og L gitt som en rotasjonsmatrise R_L^M .

Målelikningen kan da skrives slik:

$$\begin{aligned} y &= \frac{dg}{dx^M} R_L^M \frac{dx^L}{de_{EL}^L} e_{EL}^L - \delta g_{m,bias} + v \\ &= \frac{dg}{dx^M} R_L^M (-r_{EB}S(n_{EB}^L)) e_{EL}^L - \delta g_{m,bias} + v \\ &= -\frac{dg}{dx^M} R_L^M r_{EB}S(n_{EB}^L) e_{EL}^L - \delta g_{m,bias} + v \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Siden tredje komponent i e_{EL}^L er 0 og dermed kjent er det kun de to første

komponentene som estimeres i Kalmanfilteret. Det vil si at målelikningen inneholder kun x og y komponenten til e_{EL}^L . Man har at:

$$e_{EL}^L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{EL,x}^L \\ e_{EL,y}^L \end{bmatrix} \quad (\text{B.28})$$

Bruker denne sammenhengen i målelikningen:

$$y = -\frac{dg}{dx^M} R_L^M r_{EB} S(n_{EB}^L) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{EL,x}^L \\ e_{EL,y}^L \end{bmatrix} - \delta g_{m,bias} + v \quad (\text{B.29})$$

setter:

$$H_1 = -\frac{dg}{dx^M} R_L^M r_{EB} S(n_{EB}^L) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.30})$$

og får et enklere uttrykk for likning B.29

$$y = H_1 \begin{bmatrix} e_{EL,x}^L \\ e_{EL,y}^L \end{bmatrix} - \delta g_{m,bias} + v \quad (\text{B.31})$$

Endelig målelikning for Kalmanfilteret blir da:

$$y = Hx + v = [H_1 \quad -1] \begin{bmatrix} e_{EL_x}^L \\ e_{EL_y}^L \\ \delta g_{m,bias} \end{bmatrix} + v \quad (\text{B.32})$$

C Systeminformasjon

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
                        Kalman filter parameters:
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Gyros %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Current values: HG9900

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Gyro continous measurement noise, Angular Random Walk
(mn_gyro):
% Magnitude power density [rad/sqrt(s)]
% Spec for HG9900: 8.73e-7 rad/sqrt(s) = 0.003 deg/sqrt(h)
pd_mn_gyro_x = 8.73e-7 %rad/sqrt(s) = 0.003 deg/sqrt(h)
pd_mn_gyro_y = 8.73e-7 %rad/sqrt(s) = 0.003 deg/sqrt(h)
pd_mn_gyro_z = 8.73e-7 % rad/sqrt(s) = 0.003 deg/sqrt(h)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Gyro bias (Domg_gyro_bias):
% Magnitude [rad/s]
% Bias for HG9900 according to spec: 1.45e-8 rad/s = 0.003 deg/h
% Scale factor for HG9900 according to spec: 5 ppm
std_Domg_gyro_bias_x = 1.45e-8 %rad/s = 0.003 deg/h
std_Domg_gyro_bias_y = 1.45e-8 %rad/s = 0.003 deg/h
std_Domg_gyro_bias_z = 1.45e-8 %rad/s = 0.003 deg/h

% Timeconstant [seconds]:
% HW spec is 20 minutes for bias and 1000 hours for scale factor
T_Domg_gyro_bias_x = 600 % s
T_Domg_gyro_bias_y = 600 % s
T_Domg_gyro_bias_z = 600 % s

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Accelerometers %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Current values: HG9900

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Accelerometer continous measurement noise (mn_acc):
% Magnitude power density [m/s^(3/2)]
% For HG9900: use 15 ug/sqrt(Hz)
% From specs: 1.27e-5 m/s^(3/2)
pd_mn_acc_x = 1.27e-5 % m/s^(3/2)
pd_mn_acc_y = 1.27e-5 % m/s^(3/2)
pd_mn_acc_z = 1.27e-5 % m/s^(3/2)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Accelerometer bias (Df_acc_bias):
% Magnitude [m/s^2]:
% Bias for HG9900 according to spec: 2.45e-4 m/s^2 = 25 ug
% Scale factor for HG9900 according to spec: 100 ppm
std_Df_acc_bias_x = 2.45e-4 %m/s^2 = 25 ug
std_Df_acc_bias_y = 2.45e-4 %m/s^2 = 25 ug
std_Df_acc_bias_z = 0.02 %

% Timeconstant [seconds]:
% HW spec is 1000 hours for bias and scale
T_Df_acc_bias_x = 1200 % s
```

```
T_Df_acc_bias_y = 1200 % s
T_Df_acc_bias_z = 1200 % s
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Position measurement (posm) %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% Nominal GPS pos values
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% posm white measurement noise (w_posm_dp):
```

```
% Standard deviation (in L [meters]):
```

```
std_w_posm_dp_x = 2.5 % m
```

```
std_w_posm_dp_y = 2.5 % m
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% posm bias (Dp_posm_bias):
```

```
% This variable decides if the standard deviation of the bias in
% posm is depth dependent (which is typical for acoustic position,
HPR/HiPAP)
```

```
std_posm_bias_is_depth_dependent = 0
```

```
This is used if depth dependent:
```

```
% HiPAP direction uncertainty (deg):
```

```
std_Dp_posm_bias_angle_deg = 0.1 % deg
```

```
This is used if not depth dependent:
```

```
% Magnitude (in L [meters]):
```

```
std_Dp_posm_bias_x = 10 % m
```

```
std_Dp_posm_bias_y = 10 % m
```

```
% Timeconstant (in L, T_Dp_posm_bias=T_e_posm_bias) [seconds]:
```

```
T_Dp_posm_bias_x = 60 % s
```

```
T_Dp_posm_bias_y = 60 % s
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Depth measurement (depthm) %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% Current values: Nominal GPS Height
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% depthm white measurement noise (w_depthm):
```

```
% Standard deviation [meters]:
```

```
std_w_depthm = 0.2 % m
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% depthm bias (Dz_depthm_bias):
```

```
% Magnitude [meters]:
```

```
std_Dz_depthm_bias = 2 % m
```

```
% Timeconstant [seconds]:
```

```
T_Dz_depthm_bias = 20 % s
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Gravity measurements %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% gravity white measurement noise (w_Gravity):
% Standard deviation [mGal]:
std_w_Gravity = 0.6      % mGal

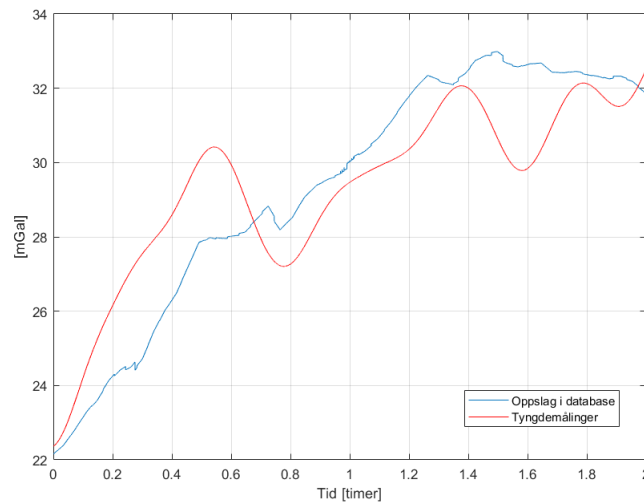
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% depthm bias (Da_Gravity_bias):
% Magnitude [mGal]:
std_Da_Gravity_bias = 7  % mGal

% Timeconstant [seconds]:
T_Da_Gravity_bias = 1000      % s
```

D Resultatplott - justerte målinger

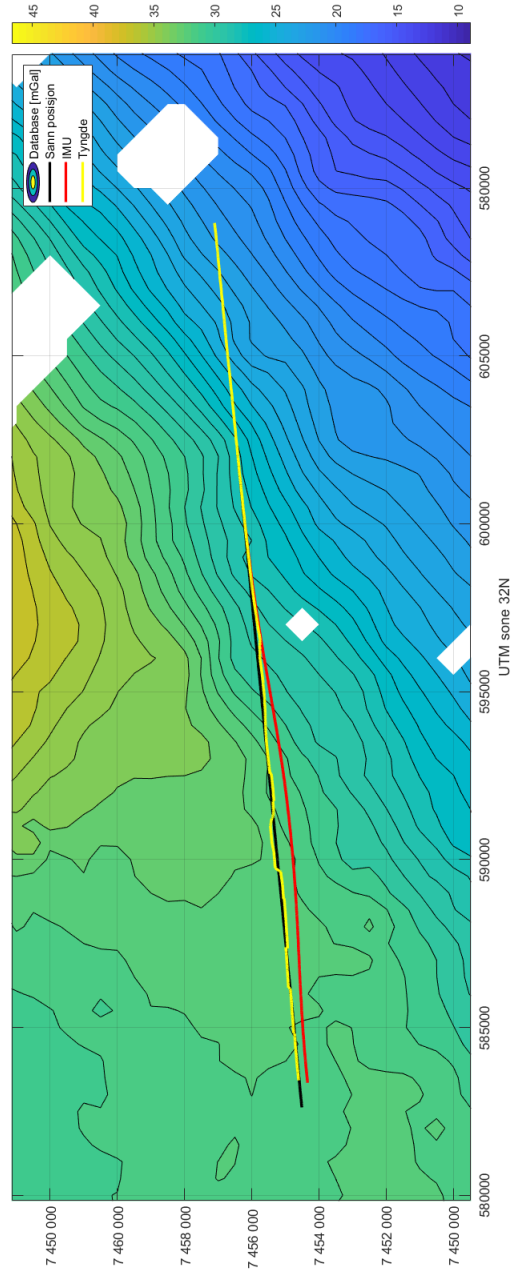
D.1 Område 1 - justerte målinger

Her ser man bedre samsvar mellom oppslag og database. Likevel er det ikke en 100% match.



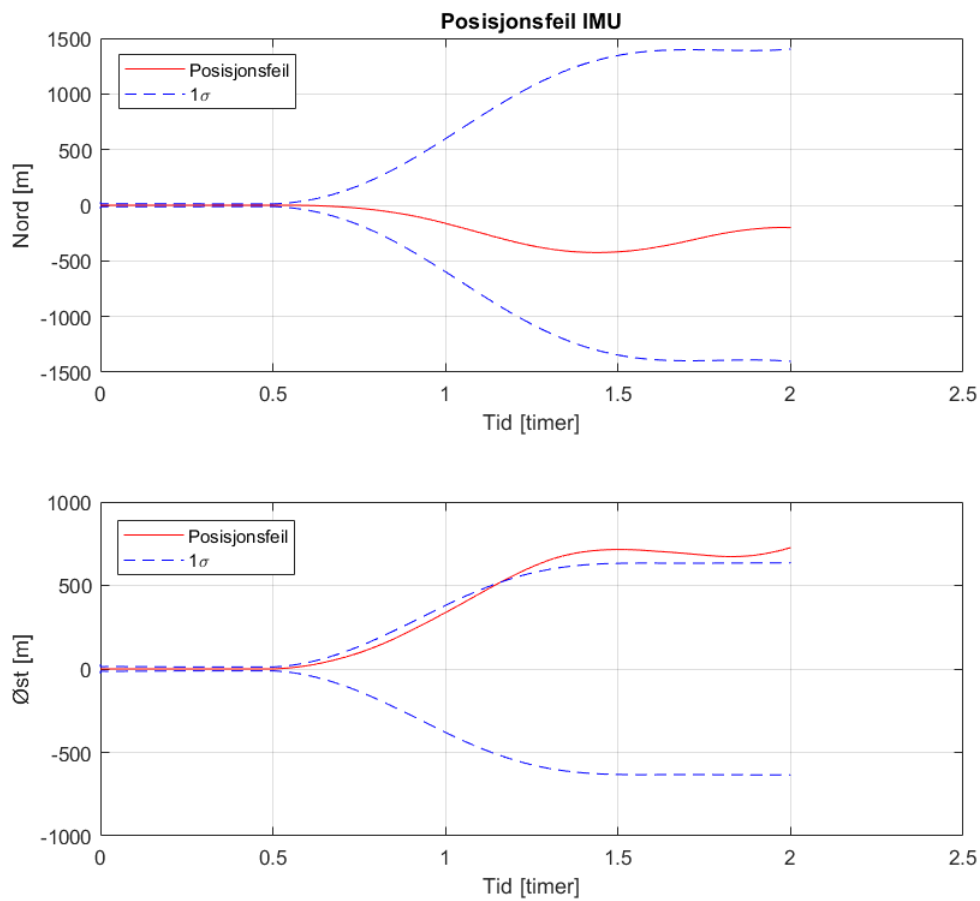
Figur D.1: Tyngdeverdi fra database og målt tyngdeverdi.

Når det kommer til figur D.2 ser man her at tyngdeløsningen samsvarer veldig godt med sann posisjon. Dette minner mer om resultatene NGU fikk.

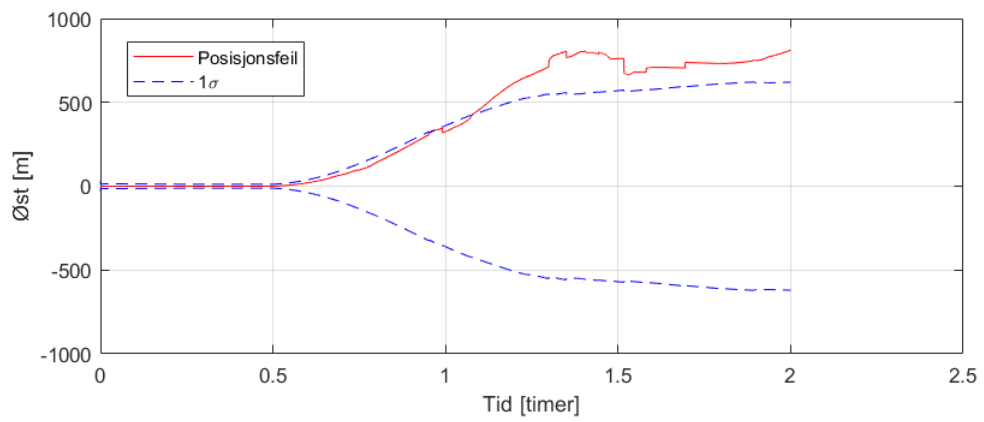
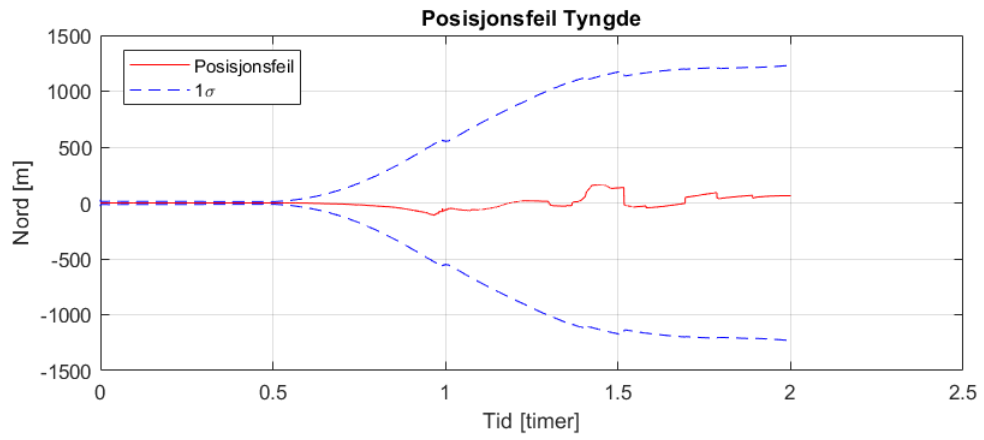


Figur D.2: Oversikt over posisjon. Svart stripe er sann posisjon, rød er IMU-løsning og gul viser tyngdeløsning.

Når det kommer til absolutt posisjonsfeil er den mye lavere i nord for tyngdeløsningen enn IMUen, mens standardavviket kun blir litt redusert. For øst ser man at posisjonsfeilen blir litt større for tyngdeløsningen enn IMUen.



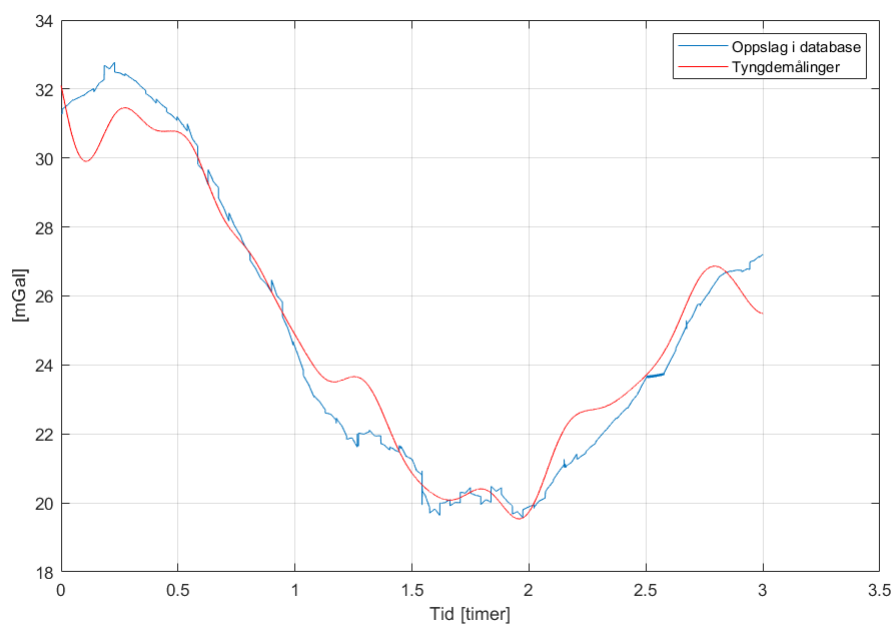
Figur D.3: Posisjonsfeil IMU.



Figur D.4: Posisjonsfeil Tyngde.

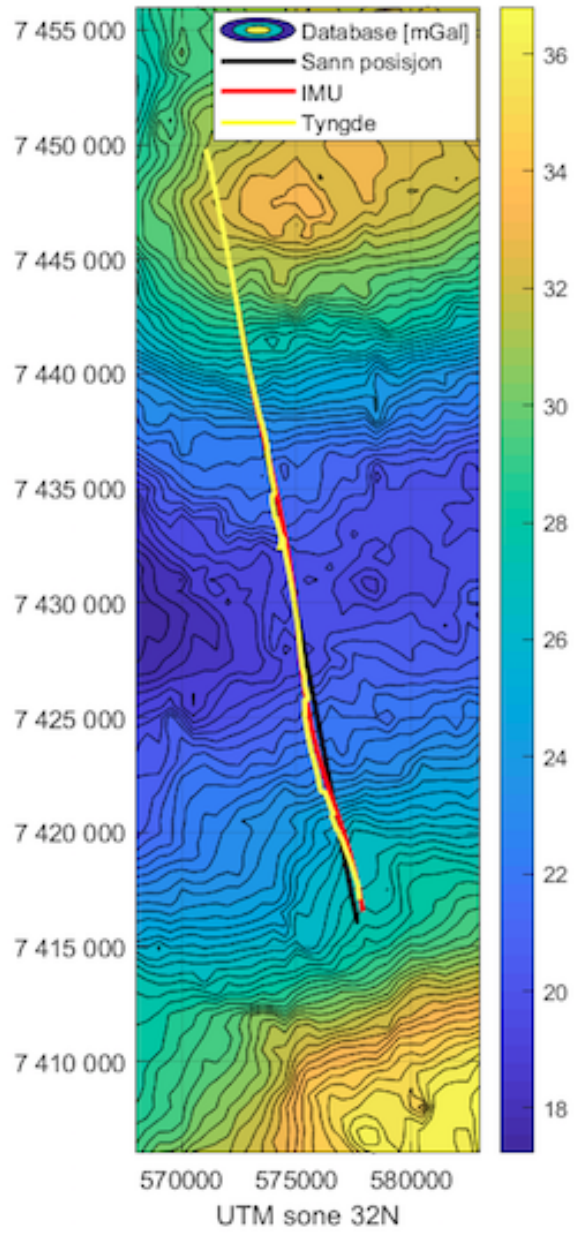
D.2 Område 2 - justerte målinger

Igjen ser man at oppslagene passer bedre med målingene.

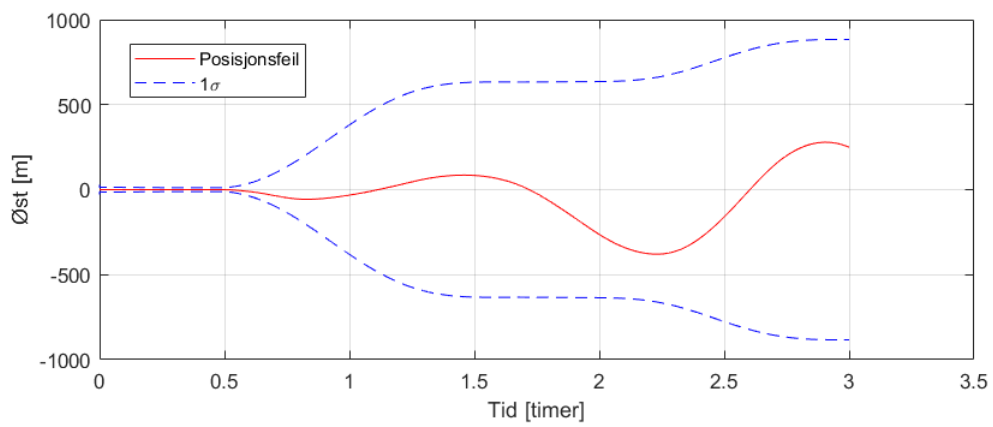
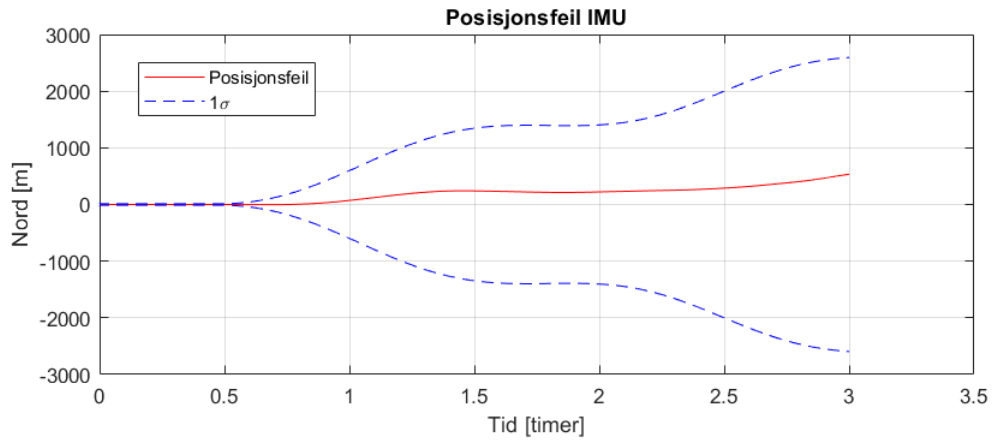


Figur D.5: Tyngdeverdi fra database og målt tyngdeverdi.

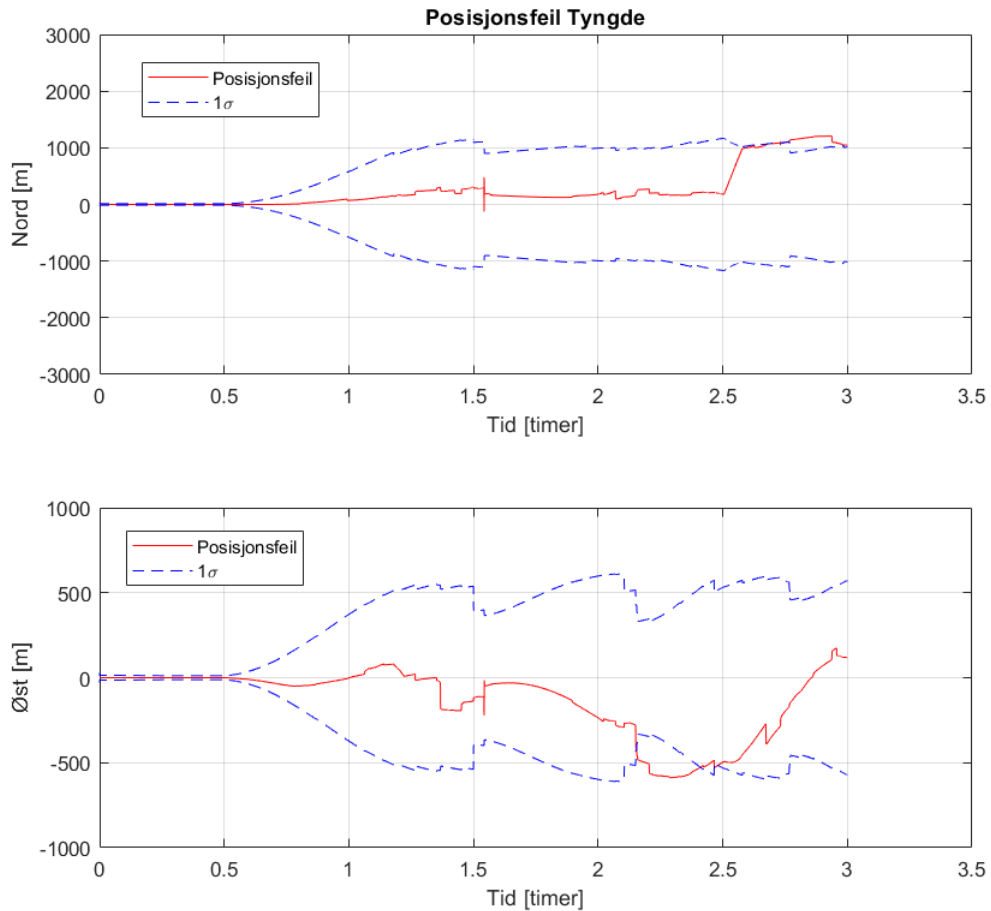
Her blir tyngdeløsningen dårligere enn IMUen. Tyngdeløsningen fra denne kjøringen blir heller ikke bedre enn tyngdeløsningen fra område 2 uten justering av målingene. Den blir faktisk litt verre med mer hakking.



Figur D.6: Oversikt over posisjon. Svart er sann posisjon, rød er IMU-løsning og gul viser tyngde-løsning.



Figur D.7: Posisjonsfeil IMU.



Figur D.8: Posisjonsfeil tyngde.

Plottene med posisjonsfeil viser at det er perioder hvor man får mye haking. Generelt blir posisjonsfeilen både i nord og øst for tyngdeløsningen høyere enn for IMU-løsningen, mens standardavvikket i nord og øst blir lavere for tyngdeløsningen.

Største avvik fra sann posisjon				
Område 1				
	Pos.feil IMU	Pos.feil Tyngde	Std.avvik IMU	Std.avvik Tyngde
Nord	424.6 m	161.5 m	1403 m	1232m
Øst	726.9 m	810.8 m	635.4 m	621.6 m
Område 2				
	Pos.feil IMU	Pos.feil Tyngde	Std.avvik IMU	Std.avvik Tyngde
Nord	534.6 m	1205 m	2594 m	1171 m
Øst	379.4 m	587.9 m	883.6 m	613.4 m

Tabell D.1: Største avvik fra sann posisjon, og største standardavvik.

Avvik fra sann posisjon ved slutten av hver kjøring.				
Område 1				
	Pos.feil IMU	Pos.feil Tyngde	Std.avvik IMU	Std.avvik Tyngde
Nord	201.3 m	64.11 m	1403 m	1232 m
Øst	726.9 m	810.8 m	635.4 m	620.8 m
Område 2				
	Pos.feil IMU	Pos.feil Tyngde	Std.avvik IMU	Std.avvik Tyngde
Nord	534.6 m	1045 m	2594 m	1016 m
Øst	249.8 m	116.5 m	883.6 m	570.6 m

Tabell D.2: Avvik fra sann posisjon, og standardavvik ved slutten av hver kjøring.



Norges miljø- og biovitenskapelige universitet
Noregs miljø- og biovitenskapelige universitet
Norwegian University of Life Sciences

Postboks 5003
NO-1432 Ås
Norway