УДК 517.929.4+519.21

ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ОБРАТИМОСТЬ МАТРИЦ И УСТОЙЧИВОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Р.И.Кадиев, А.В. Поносов

Аннотация. Исследуются вопросы глобальной экспоненциальной p–устойчивости ($2 \leq p < \infty$) систем нелинейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями специального вида на основе теории положительно обратимых матриц. Для этого применяются идеи и методы, разработанные Н.В.Азбелевым и его учениками для исследования вопросов устойчивости детерминированных функционально–дифференциальных уравнений. Приводятся достаточные условия глобальной экспоненциальной p–устойчивости ($2 \leq p < \infty$) систем нелинейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями в терминах положительной обратимости матриц, построенных по исходной системе. Проверяется выполнимость этих условий для конкретных уравнений.

1. Введение.

Вопросам устойчивости решений систем со случайными параметрами посвящено большое количество работ. Достаточно полный их список приведен в монографиях [1]–[4]. В основном, в этих работах исследование стохастической устойчивости проводится традиционными методами, основанными на функционалах Ляпунова–Красовского–Разумихина. Однако применение этих методов во многих случаях встречает серьёзные трудности. Поэтому эффективные признаки устойчивости обычно удается доказывать лишь для сравнительно узких классов стохастических дифференциальных уравнений с последействием. С другой стороны, в теории устойчивости детерминированных функционально–дифференциальных уравнений высокую эффективность показал *W–метод*, т.е. метод преобразования исходного уравнения с помощью вспомогательного уравнения, разработанный Н.В.Азбелевым и его учениками. Целью такого преобразования является получение интегрального уравнения, для которого проще исследовать нужные свойства решений.

Для нелинейных дифференциальных уравнений Ито с последействием вопросы устойчивости изучены недостаточно. В работах [5], [6] исследовались вопросы локальной устойчивости решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений с последействием с помощью W–метода. В случае линейных уравнений локальная устойчивость решений и глобальная устойчивость решений эквивалентны, в нелинейном же случае из глобальной устойчивости решения следует локальная устойчивость этого же решения, но обратное неверно. Кроме того, в случае линейных уравнений из локальной устойчивости некоторого решения уравнения следует локальная устойчивость любого решения этого же уравнения, а в случае нелинейных уравнений этот факт также неверен.

В настоящей работе исследуются вопросы глобальной экспоненциальной p–устойчивости ($2 \leq p < \infty$) систем нелинейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями специального вида. При этом применяются принципы W–метода и теория положительно обратимых матриц. Отличие от классического W–метода состоит в том, что каждое уравнение системы преобразуется независимо от остальных, а каждая компонента решения оценивается отдельно. Такой подход, в сочетании со специальным видом уравнения, позволяет получить новые результаты не только для нелинейных, но и для линейных уравнений, как важном частном случае уравнений нелинейных. Для получения оценок в статье использован метод работы [7], примененный там для исследования глобальной экспоненциальной устойчивости систем детерминированных нелинейных дифференциальных уравнений с запаздываниями.

2. Предварительные сведения и объект исследования.

Пусть: $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geq 0}, P)$ — стохастический базис; $\mathcal{B}_i, i = 2, ..., m$ — независимые стандартные винеровские процессы; $1 \leq p < \infty$; c_p — положительное число, зависящее от p ([8], с. 65) и используемое в оценке (2); E — символ математического ожидания; $|.|$ — норма в R^n; $||.||$ — норма $n \times n$–матрицы, согласованная с нормой в R^n; $||.||_X$ — норма в нормированном пространстве X; μ — мера Лебега на $[0, +\infty)$.

Пусть $B = (b_{ij})_{i,j=1}^m$ — $m \times m$–матрица. Матрица B называется неотрицательной, если $b_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, ..., m$, и положительной, если $b_{ij} > 0$, $i, j = 1, ..., m$.

Определение 1.[9] Матрица $B = (b_{ij})_{i,j=1}^m$ называется $\mathcal{M}$–матрицей, если $b_{ij} \leq 0$ при $i, j = 1, ..., m$ и $i \neq j$ и выполнено одно из следующих условий:

– для матрицы B существует положительная обратная матрица B^{-1};

– диагональные миноры матрицы B положительны.

Лемма 1. [9] Матрица B является $\mathcal{M}$–матрицей, если $b_{ij} \leq 0$ при $i, j = 1, ..., m$ и $i \neq j$, а также выполнено одно из следующих условий:

– $b_{ii} > \sum\limits_{j=1 i\neq j}^{m} |b_{ij}|$, $i = 1, ..., m$;

– $b_{jj} > \sum\limits_{i=1 i\neq j}^{m} |b_{ij}|$, $j = 1, ..., m$;

– существуют положительные числа ξ_i, $i = 1, ..., m$ такие, что $\xi_i b_{ii} > \sum\limits_{j=1, i\neq j}^{m} \xi_j |b_{ij}|$, $i = 1, ..., m$;

– существуют положительные числа ξ_i, $i = 1, ..., m$ такие, что $\xi_j b_{jj} > \sum\limits_{i=1, i\neq j}^{m} \xi_i |b_{ij}|$, $i = 1, ..., m$.

Объектом исследования настоящей статьи является система дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями вида

$$dx_i(t) = \left[-a_i(t) x_i(h_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(t, x_j(h_{ij}(t))) \right] dt + \\ \sum_{l=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} G_{ij}^l(t, x_j(h_{ij}^l(t))) \right] d\mathcal{B}_l(t) \, (t \geq 0), \; i = 1, ..., n \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x_i(t) = \varphi_i(t) \; (t < 0), \; i = 1, ..., n, \tag{1a}$$

$$x_i(t) = b_i, \; i = 1, ..., n, \tag{1b}$$

где:

1. a_i — измеримая по Лебегу функция, заданная на $[0, \infty)$ и такая, что $0 < \bar{a}_i \leq a_i \leq A_i$ $(t \in [0, \infty))$ μ–почти всюду для некоторых положительных чисел $\bar{a}_i, A_i$ при $i = 1, ..., n$;

2. $F_{ij}(., u)$ — измеримая по Лебегу функция, заданная на $[0, \infty)$, $F_{ij}(t, .)$ — непрерывная функция на R^1 такая, что $|F_{ij}(t, u)| \leq \bar{F}_{ij}|u|$ $(t \in [0, \infty))$ μ–почти всюду для некоторого положительного числа $\bar{F}_{ij}$ при $i, j = 1, ..., n$;

3. $G_{ij}^l(., u)$ — измеримая по Лебегу функция, заданная на $[0, \infty)$, $G_{ij}^l(t, .)$ — непрерывная функция на R^1 такая, что $|G_{ij}^l(t, u)| \leq \bar{G}_{ij}^l |u|$ $(t \in [0, \infty))$ μ–почти всюду для некоторого положительного числа $\bar{G}_{ij}^l$ при $l = 1, ..., m$, $i, j = 1, ..., n$;

4. h_i, h_{ij}, h_{ij}^l — измеримые по Лебегу функции, заданные на $[0, \infty)$ такие, что $0 \leq t - h_i(t) \leq \tau_i, 0 \leq t - h_{ij}(t) \leq \tau_{ij}, 0 \leq t - h_{ij}^l(t) \leq \tau_{ij}^l$ $(t \in [0, \infty))$ μ–почти всюду для некоторых положительных чисел $\tau_i, \tau_{ij}, \tau_{ij}^l$ при $l = 1, ..., m$, $i, j = 1, ..., n$;

5. φ_i — $\mathcal{F}_0$–измеримый скалярный случайный процесс, заданный на $[\sigma_i, 0)$, где $\sigma_i = \max\{\tau_i, \tau_{ij}, \tau_{ij}^l, l = 1, ..., m, j = 1, ..., n\}$;

6. b_i — $\mathcal{F}_0$–измеримая скалярная случайная величина при $i = 1, ..., n$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения:

– $b := col(b_1, ..., b_n)$;

– $\varphi := col(\varphi_1, ..., \varphi_n)$;

– $Z(t) := col(\mathcal{B}_1(t), ..., \mathcal{B}_m(t))$;

– k^n — линейное пространство n–мерных $\mathcal{F}_0$ — измеримых случайных величин;

– $L^n(Z)$ состоит из $n \times m$–матриц, элементы которых являются прогрессивно измеримыми случайными процессами, заданными на $[0, +\infty)$, а строки этих матриц являются локально (т.е. на отрезках $[0, T]$ для любого $T \in [0, +\infty)$) интегрируемыми по Z; при этом интеграл по первому элементу строки понимается в смысле Лебега, а по остальным элементам строки - в смысле Ито;

– D^n состоит из n–мерных прогрессивно измеримых случайных процессов на $[0, +\infty)$, представимых в виде $x(t) = x(0) + \int\limits_0^t f(s) dZ(s)$ $(t \geq 0)$, где $x(0) \in k^n, f \in L^n(Z)$.

В дальнейшем используется также следующее обозначение, связанное с пространствами k^n:

$$k_p^n = \left\{ \alpha : \alpha \in k^n, \|\alpha\|_{k_p^n} = E|\alpha|^p < \infty \right\}.$$

Отметим, что задача (1), (1a), (1b) имеет единственное решение, если дополнительно предположить, что функции $F_{ij}(t, u)$, $G_{ij}^l t, u)$ удовлетворяют условию Липщица по u при $l = 1, ..., m$, $i, j = 1, ..., n$ [10]. В дальнейшем будем считать, что функции $F_{ij}(t, u)$, $G_{ij}^l t, u)$ удовлетворяют условию Липщица по u при $l=1,...,m$, $i,j=1,...,n$. Обозначим через $x(t,b,\varphi)$ — решение системы (1), удовлетворяющее условиям (1a) и (1b), т.е. $x(t,b,\varphi)=\varphi$ при $t<0$ и $x(0,b,\varphi)=b$. Очевидно при этом, что $x(.,b,\varphi)\in D^n$.

Определение 2. Будем говорить, что система (1) глобально экспоненциально *p–устойчива* ($1\le p<\infty$), если существуют положительные числа K,λ такие, что для решений $x(t,b,\varphi)$ задачи (1), (1a), (1b) выполнено неравенство

$$(E|x(t,b,\varphi)|^p)^{1/p}\le K\exp\{-\lambda t\}\left(||b||_{k_p^n}+vrai\sup_{t<0}(E|\varphi(t)|^p)^{1/p}\right)\ (t\in[0,\infty)).$$

Лемма 2. Пусть $f(s)$ — скалярный случайный процесс, интегрируемый по винеровскому процессу $\mathcal{B}(s)$ на отрезке $[0,t]$. Тогда справедливо неравенство

$$\left(E\left|\int_0^t f(s)d\mathcal{B}(s)\right|^{2p}\right)^{1/2p}\le c_p\left(E\left(\int_0^t|f(s)|^2d(s)\right)^p\right)^{1/2p}, \tag{2}$$

где c_p — некоторое число, зависящее от p.

Справедливость неравенства (2) следует из неравенства 4 работы [8] (стр. 65), где приведено и конкретное выражение для c_p.

Лемма 3. Пусть $g(s)$ — скалярная функция на $[0,\infty)$, квадрат которой локально суммируем, $f(s)$ — скалярный случайный процесс такой, что $\sup\limits_{s\ge0}(E|f(s)|^{2p})^{1/2p}<\infty$. Тогда справедливы следующие неравенства

$$\sup_{t\ge0}\left(E\left|\int_0^t g(s)f(s)ds\right|^{2p}\right)^{1/2p}\le\sup_{t\ge0}\left(\int_0^t|g(s)|ds\right)\sup_{t\ge0}\left(E\left|f(s)\right|^{2p}\right)^{1/2p}, \tag{3}$$

$$\sup_{t\ge0}\left(E\left|\int_0^t(g(s))^2(f(s))^2ds\right|^{p}\right)^{1/2p}\le\sup_{t\ge0}\left(\int_0^t(g(s))^2ds\right)^{1/2}\sup_{t\ge0}\left(E\left|f(s)\right|^{2p}\right)^{1/2p}. \tag{4}$$

Доказательство. Докажем только неравенство (3), так как неравенство (4) доказывается аналогично. Имеем

$$\sup_{t\ge0}\left(E\left|\int_0^t g(s)f(s)ds\right|^{2p}\right)^{1/2p}\le\sup_{t\ge0}\left(E\left(\int_0^t|g(s)||f(s)|ds\right)^{2p}\right)^{1/2p}\le$$

$$\sup_{t\ge0}\left(E\left(\int_0^t|g(s)|^{(2p-1)/2p}|g(s)|^{1/2p}|f(s)|ds\right)^{2p}\right)^{1/2p}\le$$

$$\sup_{t\ge0}\left(E\left(\left(\int_0^t|g(s)|ds\right)^{2p-1}\int_0^t|g(s)||f(s)|^{2p}ds\right)^{1/2p}\right)\le$$

$$\sup_{t\ge0}\left(\left(\int_0^t|g(s)|ds\right)^{2p-1}\int_0^t|g(s)|E|f(s)|^{2p}ds\right)^{1/2p}\le\sup_{t\ge0}\left(\int_0^t|g(s)|ds\right)\sup_{t\ge0}\left(E|f(s)|^{2p}\right)^{1/2p}.$$

3. Основной результат.

Пусть C — $n\times n$–матрица, элементы которой определены следующим образом

$$c_{ii}=1-\frac{A_i^2\tau_i+A_i\bar F_{ii}\tau_i+c_pA_i\sqrt{\tau_i}\sum\limits_{i=1}^m\bar G_{ii}^l+\bar F_{ii}}{\bar a_i}-\frac{c_p\sum\limits_{l=1}^m\bar G_{ii}^l}{\sqrt{2\bar a_i}},i=1,...,n,$$

$$c_{ij}=-\frac{A_i\bar{F}_{ij}\tau_i+c_pA_i\sqrt{\tau_i}\sum\limits_{i=1}^{m}\bar{G}_{ij}^l+\bar{F}_{ij}}{\bar{a}_i}-\frac{c_p\sum\limits_{l=1}^{m}\bar{G}_{ij}^l}{\sqrt{2\bar{a}_i}}, i,j=1,...,n, i\neq j.$$

Теорема. *Если матрица C является $\mathcal{M}$–матрицей, то система (1) глобально экспоненциально $2p$–устойчива.*

Доказательство. Систему (1) с условиями (1a) запишем в следующем виде

$$\begin{aligned} d\bar{x}_i(t)&=\left[-a_i(t)\bar{x}_i(h_i(t))+\sum_{j=1}^{n}F_{ij}(t,\bar{x}_j(h_{ij}(t))+\bar{\varphi}_j(h_{ij}(t)))-a_i(t)\bar{\varphi}_i(h_i(t))\right]dt+\\ &\sum_{l=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}G_{ij}^l(t,\bar{x}_j(h_{ij}^l(t))+\bar{\varphi}_j(h_{ij}^l(t)))\right]d\mathcal{B}_l(t)\,(t\geq 0), i=1,...,n, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\bar{x}_i(t)$ — неизвестный скалярный случайный процесс на $(-\infty,,\infty)$ такой, что $\bar{x}_i(t)=0$ при $t<0$ и $\bar{\varphi}_i(t)$ — известный скалярный случайный процесс на $(-\infty,,\infty)$ такой, что $\bar{\varphi}_i(t)=\varphi_i(t)$ при $t\in[\delta,0]0$ и $\bar{\varphi}_i(t)=0$ при t не принадлежащем отрезку $[\delta,0]0$ для $i=1,...,n$. Обозначим через $\bar{x}(t,b,\bar{\varphi})$ решение системы (5), удовлетворяющее условию (1b). Очевидно, что решение задачи (5), (1b) при $t\geq 0$ совпадает с решением задачи (1), (1a), (1b), т.е. $x(t,b,\varphi)=\bar{x}(t,b,\bar{\varphi})$ при $t\geq 0$.

Если в системе (5) сделать замену $\bar{x}_i(t)=\exp\{-\lambda t\}y_i(t)$, где $y_i(t)$ — неизвестный скалярный случайный процесс на $(-\infty,,\infty)$ такой, что $y_i(t)=0$ при $t<0$, $0<\lambda<\min\{\hat{a}_i, i=1,...,n\}$ для $i=1,...,n$, то получится уравнение

$$\begin{aligned} dy_i(t)=[\lambda y_i(t)-\exp\{\lambda(t-h_i(t))\}a_i(t)y_i(h_i(t))+\\ \sum_{j=1}^{n}\exp\{\lambda t\}F_{ij}(t,\exp\{-\lambda h_{ij}(t))\}y_j(h_{ij}(t))+\bar{\varphi}_j(h_{ij}(t)))-\exp\{\lambda t\}a_i(t)\bar{\varphi}_i(h_i(t))\Big]dt+\\ \sum_{l=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}\exp\{\lambda t\}G_{ij}^l(t,\exp\{-\lambda h_{ij}^l(t))\}y_j(h_{ij}^l(t))+\bar{\varphi}_j(h_{ij}^l(t)))\right]d\mathcal{B}_l(t)\,(t\geq 0), i=1,...,n. \end{aligned} \tag{6}$$

Положив $\eta_i(t)=\exp\{\lambda(t-h_i(t))\}a_i(t)-\lambda$, систему (6) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} dy_i(t)=\Big[-\eta_i(t)y_i(t)+\exp\{\lambda(t-h_i(t))\}a_i(t)\int_{h_i(t)}^{t}dy_i(s)+\\ \sum_{j=1}^{n}\exp\{\lambda t\}F_{ij}(t,\exp\{-\lambda h_{ij}(t))\}y_j(h_{ij}(t))+\bar{\varphi}_j(h_{ij}(t)))-\exp\{\lambda t\}a_i(t)\bar{\varphi}_i(h_i(t))\Big]dt+\\ \sum_{l=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}\exp\{\lambda t\}G_{ij}^l(t,\exp\{-\lambda h_{ij}^l(t))\}y_j(h_{ij}^l(t))+\bar{\varphi}_j(h_{ij}^l(t)))\right]d\mathcal{B}_l(t)\,(t\geq 0), i=1,...,n. \end{aligned} \tag{7}$$

Подставляя выражение для $dy_i(t)$ из правой части i–го уравнения системы (6) в i–тое уравнение системы (7) при $i=1,...,n$, получим

$$\begin{aligned} dy_i(t)=\Big[-\eta_i(t)y_i(t)+\exp\{\lambda(t-h_i(t))\}a_i(t)\int_{h_i(t)}^{t}\{[\lambda y_i(s)-\exp\{\lambda(s-h_i(s))\}a_i(s)y_i(h_i(s))+\\ \sum_{j=1}^{n}\exp\{\lambda s\}F_{ij}(s,\exp\{-\lambda h_{ij}(s))\}y_j(h_{ij}(s))+\bar{\varphi}_j(h_{ij}(s))-\exp\{\lambda s\}a_i(s)\bar{\varphi}_i(h_i(s))\Big]ds+\\ \sum_{l=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}\exp\{\lambda s\}G_{ij}^l(s,\exp\{-\lambda h_{ij}^l(s))\}y_j(h_{ij}^l(s))+\bar{\varphi}_j(h_{ij}^l(s)))\right]d\mathcal{B}_l(s)\}+\\ \sum_{j=1}^{n}\exp\{\lambda t\}F_{ij}(t,\exp\{-\lambda h_{ij}(t))\}y_j(h_{ij}(t))+\bar{\varphi}_j(h_{ij}(t)))-\exp\{\lambda t\}a_i(t)\bar{\varphi}_i(h_i(t))\Big]dt+\\ \sum_{l=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}\exp\{\lambda t\}G_{ij}^l(t,\exp\{-\lambda h_{ij}^l(t))\}y_j(h_{ij}^l(t))+\bar{\varphi}_j(h_{ij}^l(t)))\right]d\mathcal{B}_l(t)\,(t\geq 0), i=1,...,n. \end{aligned} \tag{8}$$

Из системы (8) с учетом условия (1b) получается уравнение

$$
\begin{gathered}
y_i(t)=\exp\left\{-\int\limits_0^t \mu_i(s)ds\right\} b_i+\int\limits_0^t \exp\left\{-\int\limits_s^t \mu_i(\zeta)d\zeta\right\}\exp\{\lambda(s-h_i(s))\}a_i(s)\int\limits_{h_i(s)}^s \lambda y_i(\zeta)d\zeta ds- \\
\int\limits_0^t \exp\left\{-\int\limits_s^t \mu_i(\zeta)d\zeta\right\}\exp\{\lambda(s-h_i(s))\}a_i(s)\int\limits_{h_i(s)}^s \exp\{\lambda(\zeta-h_i(\zeta))\}a_i(\zeta)y_i(h_i(\zeta))d\zeta ds+ \\
\sum_{j=1}^n\int\limits_0^t \exp\left\{-\int\limits_s^t \mu_i(\zeta)d\zeta\right\}\exp\{\lambda(s-h_i(s))\}a_i(s)\int\limits_{h_i(s)}^s \exp\{\lambda\zeta\} \\
F_{ij}(\zeta,\exp\{-\lambda h_{ij}(\zeta)\})y_j(h_{ij}(\zeta))+\bar\varphi_j(h_{ij}(\zeta))d\zeta ds- \\
\int\limits_0^t \exp\left\{-\int\limits_s^t \mu_i(\zeta)d\zeta\right\}\exp\{\lambda(s-h_i(s))\}a_i(s)\int\limits_{h_i(s)}^s \exp\{\lambda\zeta\}a_i(\zeta)\bar\varphi_i(h_i(\zeta))d\zeta ds+ \\
\sum_{l=1}^m[\sum_{j=1}^n\int\limits_0^t \exp\left\{-\int\limits_s^t \mu_i(\zeta)d\zeta\right\}\exp\{\lambda(s-h_i(s))\}a_i(s)\int\limits_{h_i(s)}^s \exp\{\lambda\zeta\} \\
G^l_{ij}(\zeta,\exp\{-\lambda h^l_{ij}(\zeta)\})y_j(h^l_{ij}(\zeta))+\bar\varphi_j(h^l_{ij}(\zeta)))d\mathcal{B}_l(\zeta)ds+ \\
\sum_{j=1}^n\int\limits_0^t \exp\left\{-\int\limits_s^t \mu_i(\zeta)d\zeta\right\}\exp\{\lambda s\}F_{ij}(s,\exp\{-\lambda h_{ij}(s)\})y_j(h_{ij}(s))+\bar\varphi_j(h_{ij}(s)))ds- \\
\int\limits_0^t \exp\left\{-\int\limits_s^t \mu_i(\zeta)d\zeta\right\}\exp\{\lambda s\}a_i(s)\bar\varphi_i(h_i(s))ds+ \\
\sum_{l=1}^m\left[\sum_{j=1}^n\int\limits_0^t \exp\left\{-\int\limits_s^t \mu_i(\zeta)d\zeta\right\}\exp\{\lambda s\}G^l_{ij}(s,\exp\{-\lambda h^l_{ij}(s)\})y_j(h^l_{ij}(s))+\bar\varphi_j(h^l_{ij}(s)))\right]d\mathcal{B}_l(s) \\
(t\geq 0),\, i=1,...,n.
\end{gathered}
\tag{9}
$$

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями $\hat y_i=\sup\limits_{t\geq 0}\left(E|y_i(t)|^{2p}\right)^{1/2p}$, $\hat\varphi_i=vrai\sup\limits_{t<0}\left(E|\varphi_i(t)|^{2p}\right)^{1/2p}$, $||\varphi||=vrai\sup\limits_{t<0}\left(E|\varphi(t)|^{2p}\right)^{1/2p}$ и неравенствами (2)–(4).

Из уравнения (9) с учетом предыдущих обозначений и неравенств (2)–(4) получаем

$$
\begin{gathered}
\hat y_i\leq ||b_i||_{k^1_{2p}}+\left[\lambda\exp\{\lambda\tau_i\}A_i\tau_i+\exp\{2\lambda\}A_i^2\tau_i\right]\hat y_i\sup_{t\geq 0}\int\limits_0^t \exp\left\{-\int\limits_s^t \mu_i(\zeta)d\zeta\right\}ds+ \\
\sum_{j=1}^n \exp\{\lambda\tau_i\}A_i\tau_i\bar F_{ij}\exp\{\lambda\tau_{ij}\}(\hat y_j+\hat\varphi_j)\sup_{t\geq 0}\int\limits_0^t \exp\left\{-\int\limits_s^t \mu_i(\zeta)d\zeta\right\}ds+ \\
\exp\{2\lambda\tau_i\}A_i^2\tau_i\hat\varphi_i\sup_{t\geq 0}\int\limits_0^t \exp\left\{-\int\limits_s^t \mu_i(\zeta)d\zeta\right\}ds+ \\
\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n \exp\{\lambda\tau_i\}A_i\sqrt{\tau_i}c_p\exp\{\lambda\tau^l_{ij}\}\bar G^l_{ij}(\hat y_j+\hat\varphi_j)\sup_{t\geq 0}\int\limits_0^t \exp\left\{-\int\limits_s^t \mu_i(\zeta)d\zeta\right\}ds+ \\
\sum_{j=1}^n \exp\{\lambda\tau_{ij}\}\bar F_{ij}(\hat y_j+\hat\varphi_j)\sup_{t\geq 0}\int\limits_0^t \exp\left\{-\int\limits_s^t \mu_i(\zeta)d\zeta\right\}ds+ \\
\exp\{\lambda\tau_i\}A_i\hat\varphi_i\sup_{t\geq 0}\int\limits_0^t \exp\left\{-\int\limits_s^t \mu_i(\zeta)d\zeta\right\}ds+ \\
\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n c_p\exp\{\lambda\tau^l_{ij}\}\bar G^l_{ij}(\hat y_j+\hat\varphi_j)\sup_{t\geq 0}\left(\int\limits_0^t \exp\left\{-2\int\limits_s^t \mu_i(\zeta)d\zeta\right\}ds\right)^{1/2},\, i=1,...,n.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Так как

$$
\sup_{t\geq 0}\int\limits_0^t \exp\left\{-\int\limits_s^t \mu_i(\zeta)d\zeta\right\}ds=\sup_{t\geq 0}\int\limits_0^t\left[\exp\left\{-\int\limits_s^t \mu_i(\zeta)d\zeta\right\}\mu_i(s)\right]/\mu_i(s)ds\leq\frac{1}{\bar a_i-\lambda},\, i=1,...,n
$$

и

$$
\sup_{t\geq 0}\left(\int\limits_0^t \exp\left\{-2\int\limits_s^t \mu_i(\zeta)d\zeta\right\}ds\right)^{1/2}=
$$

$$
\sup_{t\geq 0}\left(\int\limits_0^t\left[\exp\left\{-2\int\limits_s^t \mu_i(\zeta)d\zeta\right\}2\mu_i(s)\right]/(2\mu_i(s))ds\right)^{1/2}\leq\frac{1}{\sqrt{2(\bar a_i-\lambda)}},\, i=1,...,n,
$$

то из оценок (10) и с учетом того, что норма в R^n выбрана так, чтобы $\hat{\varphi}_j \le ||\varphi||$ при $j = 1, ..., n$, получаем

$$\hat{y}_i \le ||b_i||_{k^1_{2p}} + \frac{[\lambda \exp\{\lambda\tau_i\}A_i\tau_i + \exp\{2\lambda\}A_i^2\tau_i]\hat{y}_i + \sum\limits_{j=1}^{n} \exp\{\lambda\tau_i\}A_i\tau_i\bar{F}_{ij}\exp\{\lambda\tau_{ij}\}\hat{y}_j}{\bar{a}_i - \lambda} +$$

$$\frac{\sum\limits_{l=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} \exp\{\lambda\tau_i\}A_i\sqrt{\tau_i}c_p\exp\{\lambda\tau_{ij}^l\}\bar{G}_{ij}^l\hat{y}_j + \sum\limits_{j=1}^{n}\exp\{\lambda\tau_{ij}\}\bar{F}_{ij}\hat{y}_j}{\bar{a}_i - \lambda} + \frac{\sum\limits_{l=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_p\exp\{\lambda\tau_{ij}^l\}\bar{G}_{ij}^l\hat{y}_j}{\sqrt{2(\bar{a}_i - \lambda)}} + \tag{11}$$

$$M_i(\lambda)||\varphi||, \; i = 1, ..., n,$$

где

$$M_i(\lambda) := \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \exp\{\lambda\tau_i\}A_i\tau_i\bar{F}_{ij}\exp\{\lambda\tau_{ij}\} + \exp\{2\lambda\tau_i\}A_i^2\tau_i + \sum\limits_{l=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\exp\{\lambda\tau_i\}A_i\sqrt{\tau_i}c_p\exp\{\lambda\tau_{ij}^l\}\bar{G}_{ij}^l}{\bar{a}_i - \lambda} +$$

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\exp\{\lambda\tau_{ij}\}\bar{F}_{ij} + \exp\{\lambda\tau_i\}A_i}{\bar{a}_i - \lambda} + \frac{\sum\limits_{l=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_p\exp\{\lambda\tau_{ij}^l\}\bar{G}_{ij}^l}{\sqrt{2(\bar{a}_i - \lambda)}}, \; i = 1, ..., n.$$

Обозначим теперь $y(t) = col(y_1(t), ..., y_n(t))$, $\bar{y} = col(\bar{y}_1, ..., \bar{y}_n)$,$M(\lambda) = col(M_1(\lambda), ..., M_n(\lambda))$ и пусть $C(\lambda) = (c_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^n$ — $n \times n$–матрица, элементы которой определены следующим образом:

$$c_{ii} = 1 - \frac{\lambda\exp\{\lambda\tau_i\}A_i\tau_i + \exp\{2\lambda\}A_i^2\tau_i + \exp\{\lambda\tau_i\}A_i\tau_i\bar{F}_{ii}\exp\{\lambda\tau_{ii}\}}{\bar{a}_i - \lambda} +$$

$$\frac{\sum\limits_{l=1}^{m}\exp\{\lambda\tau_i\}A_i\sqrt{\tau_i}c_p\exp\{\lambda\tau_{ii}^l\}\bar{G}_{ii}^l + \exp\{\lambda\tau_{ii}\}\bar{F}_{ii}}{\bar{a}_i - \lambda} + \frac{\sum\limits_{l=1}^{m} c_p\exp\{\lambda\tau_{ii}^l\}\bar{G}_{ii}^l}{\sqrt{2(\bar{a}_i - \lambda)}}$$

$$c_{ij} = -\frac{\exp\{\lambda\tau_i\}A_i\tau_i\bar{F}_{ij}\exp\{\lambda\tau_{ij}\}}{\bar{a}_i - \lambda} +$$

$$\frac{\sum\limits_{l=1}^{m}\exp\{\lambda\tau_i\}A_i\sqrt{\tau_i}c_p\exp\{\lambda\tau_{ij}^l\}\bar{G}_{ij}^l + \exp\{\lambda\tau_{ij}\}\bar{F}_{ij}}{\bar{a}_i - \lambda} + \frac{\sum\limits_{l=1}^{m} c_p\exp\{\lambda\tau_{ij}^l\}\bar{G}_{ij}^l}{\sqrt{2(\bar{a}_i - \lambda)}} \; i, j = 1, ..., n, i \ne j.$$

Тогда из оценок (11) получаем

$$C(\lambda)\bar{y} \le ||b||_{k^n_{2p}} + M(\lambda)||\varphi||. \tag{12}$$

Очевидно также, что $C(0) = C$. В силу условий теоремы матрица C является $\mathcal{M}$–матрицей, а тогда при достаточно малых λ матрица $C(\lambda)$ также является $\mathcal{M}$–матрицей, а значит существует $\lambda = \lambda_0$ такое, что $C(\lambda_0)$ положительно обратима. Тогда из неравенства (12) получаем

$$|\bar{y}| \le K(||b||_{k^n_{2p}} + ||\varphi||), \tag{13}$$

где $K = ||(C(\lambda_0)^{-1}|| \max\{1, |M(\lambda_0)|\}$. С

Поскольку $x(t, b, \varphi) = \exp\{-\lambda t\}y(t)$ и $\sup\limits_{t\ge 0}(E|y(t))^{2p})^{1/2p} \le |\bar{y}|$, то из неравества (13) следует, что существуют положительные числа $\lambda = \lambda_0$, $K = ||(C(\lambda_0)^{-1}|| \max\{1, |M(\lambda_0)|\}$ такие, что для решения $x(t, b, \varphi)$ задачи (1), (1a), (1b) выполнено неравенство

$$(E|x(t, b, \varphi)|^p)^{1/p} \le K\exp\{-\lambda t\}\left(||b||_{k^n_p} + vrai\sup_{t<0}(E|\varphi(t)|^p)^{1/p}\right) \; (t \in [0, \infty)).$$

Следовательно, система (1) глобально экспоненциально p–устойчива.

Теорема доказана.

4. Следствия из основного результата.

Отдельно рассмотрим случай, когда система дифференциальных уравнений Ито (1) содержит только внедиагональные нелинейности, т.е. имеет вид

$$\begin{gathered} dx_i(t) = \left[-a_i(t)x_i(h_i(t)) + \sum_{j=1, i\neq j}^{n} F_{ij}(t, x_j(h_{ij}(t))) \right] dt + \\ \sum_{l=1}^{m} \left[\sum_{j=1, i\neq j}^{n} G_{ij}^l(t, x_j(h_{ij}^l(t))) \right] d\mathcal{B}_l(t)\, (t \geq 0), i = 1, ..., n. \end{gathered} \tag{14}$$

Пусть C — $n \times n$–матрица, элементы которой определены следующим образом

$$c_{ii} = 1 - \frac{A_i^2 \tau_i}{\bar{a}_i}, i = 1, ..., n,$$

$$c_{ij} = -\frac{A_i \bar{F}_{ij} \tau_i + c_p A_i \sqrt{\tau_i} \sum\limits_{i=1}^{m} \bar{G}_{ij}^l + \bar{F}_{ij}}{\bar{a}_i} - \frac{c_p \sum\limits_{l=1}^{m} \bar{G}_{ij}^l}{\sqrt{2\bar{a}_i}}, i, j = 1, ..., n, i \neq j.$$

Тогда из основной теоремы получаем

Следствие 1. *Если матрица C является $\mathcal{M}$–матрицей, то система (14) глобально экспоненциально $2p$–устойчива.*

Пусть теперь в линейной части системы (1) отсутствуют запаздывания, т.е. $h_i(t) = t$ при $i = 1, ..., n$. Система тогда принимает вид

$$\begin{gathered} dx_i(t) = \left[-a_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(t, x_j(h_{ij}(t))) \right] dt + \\ \sum_{l=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} G_{ij}^l(t, x_j(h_{ij}^l(t))) \right] d\mathcal{B}_l(t)\, (t \geq 0), i = 1, ..., n. \end{gathered} \tag{15}$$

Пусть C — $n \times n$–матрица, элементы которой определены следующим образом

$$c_{ii} = 1 - \frac{\bar{F}_{ii}}{\bar{a}_i} - \frac{c_p \sum\limits_{l=1}^{m} \bar{G}_{ii}^l}{\sqrt{2\bar{a}_i}}, i = 1, ..., n, c_{ij} = -\frac{\bar{F}_{ij}}{\bar{a}_i} - \frac{c_p \sum\limits_{l=1}^{m} \bar{G}_{ij}^l}{\sqrt{2\bar{a}_i}}, i, j = 1, ..., n, i \neq j.$$

Тогда из основной теоремы получаем

Следствие 2. *Если матрица C является $\mathcal{M}$–матрицей, то система (15) глобально экспоненциально $2p$–устойчива.*

Пусть теперь система (1) является линейной, т.е. имеет вид

$$\begin{gathered} dx_i(t) = \left[-a_i(t)x_i(h_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(t)x_j(h_{ij}(t)) \right] dt + \\ \sum_{l=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} G_{ij}^l(t)x_j(h_{ij}^l(t)) \right] d\mathcal{B}_l(t)\, (t \geq 0), i = 1, ..., n, \end{gathered} \tag{16}$$

где дополнительно предполагается, что F_{ij} — измеримая по Лебегу функция, заданная на $[0, \infty)$ и такая, что $|F_{ij}(t)| \leq \bar{F}_{ij}$ $(t \in [0, \infty))$ μ–почти всюду для некоторого положительного числа $\bar{F}_{ij}$ при $i, j = 1, ..., n$, а G_{ij}^l — измеримая по Лебегу функция, заданная на $[0, \infty)$ и такая, что $|G_{ij}^l(t)| \leq \bar{G}_{ij}^l$ $(t \in [0, \infty))$ μ–почти всюду для некоторого положительного числа $\bar{G}_{ij}^l$ при $l = 1, ..., m$, $i, j = 1, ..., n$.

Пусть C — $n \times n$–матрица, элементы которой определены следующим образом

$$c_{ii} = 1 - \frac{A_i^2 \tau_i + A_i \bar{F}_{ii} \tau_i + c_p A_i \sqrt{\tau_i} \sum\limits_{i=1}^{m} \bar{G}_{ii}^l + \bar{F}_{ii}}{\bar{a}_i} - \frac{c_p \sum\limits_{l=1}^{m} \bar{G}_{ii}^l}{\sqrt{2\bar{a}_i}}, i = 1, ..., n,$$

$$c_{ij} = -\frac{A_i \bar{F}_{ij} \tau_i + c_p A_i \sqrt{\tau_i} \sum\limits_{i=1}^{m} \bar{G}_{ij}^l + \bar{F}_{ij}}{\bar{a}_i} - \frac{c_p \sum\limits_{l=1}^{m} \bar{G}_{ij}^l}{\sqrt{2\bar{a}_i}}, i, j = 1, ..., n, i \neq j.$$

Тогда из основной теоремы получаем

Следствие 3. *Если матрица C является $\mathcal{M}$–матрицей, то система (16) глобально экспоненциально $2p$–устойчива.*

Следующий результат справедлив для системы (16), имеющей вид

$$\begin{gathered} dx_i(t) = \left[-a_i(t)x_i(h_i(t)) + \sum_{j=1, i\neq j}^{n} F_{ij}(t)x_j(h_{ij}(t)) \right] dt + \\ \sum_{l=1}^{m} \left[\sum_{j=1, i\neq j}^{n} G_{ij}^l(t)x_j(h_{ij}^l(t)) \right] d\mathcal{B}_l(t)\, (t \geq 0), i = 1, ..., n. \end{gathered} \tag{17}$$

Пусть C — $n \times n$–матрица, элементы которой определены следующим образом

$$c_{ii} = 1 - \frac{A_i^2 \tau_i}{\bar{a}_i} - \frac{c_p \sum\limits_{l=1}^{m} \bar{G}_{ii}^l}{\sqrt{2\bar{a}_i}}, i = 1, ..., n,$$

$$c_{ij} = -\frac{A_i \bar{F}_{ij} \tau_i + c_p A_i \sqrt{\tau_i} \sum\limits_{i=1}^{m} \bar{G}_{ij}^l + \bar{F}_{ij}}{\bar{a}_i} - \frac{c_p \sum\limits_{l=1}^{m} \bar{G}_{ij}^l}{\sqrt{2\bar{a}_i}}, i, j = 1, ..., n, i \neq j.$$

Тогда из следствия 3 выводим

Следствие 4. *Если матрица C является $\mathcal{M}$–матрицей, то система (17) глобально экспоненциально $2p$–устойчива.*

Следующий частный случай системы (16) имеет такой вид

$$\begin{gathered} dx_i(t) = \left[-a_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(t)x_j(h_{ij}(t)) \right] dt + \\ \sum_{l=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} G_{ij}^l(t)x_j(h_{ij}^l(t)) \right] d\mathcal{B}_l(t)\, (t \geq 0), i = 1, ..., n. \end{gathered} \tag{18}$$

Пусть C — $n \times n$–матрица, элементы которой определены следующим образом

$$c_{ii} = 1 - \frac{\bar{F}_{ii}}{\bar{a}_i} - \frac{c_p \sum\limits_{l=1}^{m} \bar{G}_{ii}^l}{\sqrt{2\bar{a}_i}}, i = 1, ..., n, c_{ij} = -\frac{\bar{F}_{ij}}{\bar{a}_i} - \frac{c_p \sum\limits_{l=1}^{m} \bar{G}_{ij}^l}{\sqrt{2\bar{a}_i}}, i, j = 1, ..., n, i \neq j.$$

Повторное применение следствия 3 дает

Следствие 5. *Если матрица C является $\mathcal{M}$–матрицей, то система (18) глобально экспоненциально $2p$–устойчива.*

Наконец, рассмотрим еще один важный частный случай системы (16)

$$\begin{gathered} dx_i(t) = \left[-a_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1, i\neq j}^{n} F_{ij}(t)x_j(h_{ij}(t)) \right] dt + \\ \sum_{l=1}^{m} \left[\sum_{j=1, i\neq j}^{n} G_{ij}^l(t)x_j(h_{ij}^l(t)) \right] d\mathcal{B}_l(t)\, (t \geq 0), i = 1, ..., n. \end{gathered} \tag{19}$$

Пусть C — $n \times n$–матрица, элементы которой определены следующим образом

$$c_{ii} = 1, i = 1, ..., n, c_{ij} = -\frac{\bar{F}_{ij}}{\bar{a}_i} - \frac{c_p \sum\limits_{l=1}^{m} \bar{G}_{ij}^l}{\sqrt{2\bar{a}_i}}, i, j = 1, ..., n, i \neq j.$$

Тогда из следствия 3 получаем

Следствие 6. *Если матрица C является $\mathcal{M}$–матрицей, то система (19) глобально экспоненциально $2p$–устойчива.*

Изучим теперь подробнее систему (1) в двумерном случае.

Следствие 7. *Пусть в системе (1) $n = 2$ и выполнены неравенства*

$$\sqrt{2}(A_1^2 \tau_1 + A_1 \bar{F}_{11} \tau_1 + c_p A_1 \sqrt{\tau_1} \sum_{i=1}^{m} \bar{G}_{11}^l + \bar{F}_{11}) + \sqrt{\bar{a}_1} c_p \sum_{l=1}^{m} \bar{G}_{11}^l < \sqrt{2}\bar{a}_1,$$

$$
\begin{gathered}
(\sqrt{2}\bar{a}_1 - \sqrt{2}(A_1^2\tau_1 + A_1\bar{F}_{11}\tau_1 + c_pA_1\sqrt{\tau_1}\sum_{i=1}^{m}\bar{G}_{11}^l + \bar{F}_{11}) - \sqrt{\bar{a}_1}c_p\sum_{l=1}^{m}\bar{G}_{11}^l)\times \\
(\sqrt{2}\bar{a}_2 - \sqrt{2}(A_2^2\tau_2 + A_2\bar{F}_{22}\tau_2 + c_pA_2\sqrt{\tau_2}\sum_{i=1}^{m}\bar{G}_{22}^l + \bar{F}_{22}) - \sqrt{\bar{a}_2}c_p\sum_{l=1}^{m}\bar{G}_{22}^l) > \\
(\sqrt{2}(A_1\bar{F}_{12}\tau_1 + c_pA_1\sqrt{\tau_1}\sum_{i=1}^{m}\bar{G}_{12}^l + \bar{F}_{12}) + \sqrt{\bar{a}_1}c_p\sum_{l=1}^{m}\bar{G}_{12}^l) \\
(\sqrt{2}(A_2\bar{F}_{21}\tau_2 + c_pA_2\sqrt{\tau_2}\sum_{i=1}^{m}\bar{G}_{21}^l + \bar{F}_{21}) + \sqrt{\bar{a}_2}c_p\sum_{l=1}^{m}\bar{G}_{21}^l).
\end{gathered}
$$

Тогда система (1) глобально экспоненциально $2p$–устойчива.

Доказательство. Для доказательства следствия 7 воспользуемся основной теоремой. В предположениях следствия матрица C является квадратной матрицей размерности 2×2 с неположительными внедиагональными элементами. Тогда ввиду определения 1 она будет $\mathcal{M}$–матрицей, если ее диагональные миноры положительны. В нашем случае диагональными минорами будут число c_{11} и определитель матрицы C, равный $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$. Нетрудно убедиться в том, что первое неравенство в следствии 7 обеспечивает условие $c_{11} > 0$, тогда как второе неравенство в следствии 7 дает соотношение $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} > 0$.

Следствие даказано.

Из следствий 5 и 7 получаем

Следствие 8. *Пусть в системе (18) $n = 2$ и выполнены неравенства*

$$
\sqrt{2}\bar{F}_{11} + \sqrt{\bar{a}_1}c_p\sum_{l=1}^{m}\bar{G}_{11}^l < \sqrt{2}\bar{a}_1,
$$

$$
\begin{gathered}
(\sqrt{2}\bar{a}_1 - \sqrt{2}\bar{F}_{11} - \sqrt{\bar{a}_1}c_p\sum_{l=1}^{m}\bar{G}_{11}^l)(\sqrt{2}\bar{a}_2 - \sqrt{2}\bar{F}_{22} - \sqrt{\bar{a}_2}c_p\sum_{l=1}^{m}\bar{G}_{22}^l) > \\
(\sqrt{2}\bar{F}_{12} + \sqrt{\bar{a}_1}c_p\sum_{l=1}^{m}\bar{G}_{12}^l)(\sqrt{2}F_{21} + \sqrt{\bar{a}_2}c_p\sum_{l=1}^{m}\bar{G}_{21}^l).
\end{gathered}
$$

Тогда система (18) глобально экспоненциально $2p$–устойчива.

И наконец, из следствий 6 и 8 получаем

Следствие 9. *Пусть в системе (19) $n = 2$ и выполнены условия*

$$
(\sqrt{2}\bar{F}_{12} + \sqrt{\bar{a}_1}c_p\sum_{l=1}^{m}\bar{G}_{12}^l)(\sqrt{2}F_{21} + \sqrt{\bar{a}_2}c_p\sum_{l=1}^{m}\bar{G}_{21}^l) < 2\bar{a}_1\bar{a}_2.
$$

Тогда система (19) глобально экспоненциально $2p$–устойчива.

5. Пример.

Рассмотрим систему двух уравнений следующего вида:

$$
\begin{gathered}
dx_1(t) = [-a_1x_1(t-h_1) + a_{11}F_{11}(x_1(t-h_{11})) + a_{12}F_{12}(x_2(t-h_{12}))]\,dt + \\
[b_{11}G_{11}(x_1(t-\tau_{11})) + b_{12}G_{12}(x_2(t-\tau_{12}))]\,d\mathcal{B}(t)\ (t \geq 0), \\
dx_2(t) = [-a_2x_1(t-h_2)) + a_{21}F_{21}(x_1(t-h_{21})) + a_{22}F_{22}(x_2(t-h_{22}))]\,dt + \\
[b_{21}G_{21}(x_1(t-\tau_{21})) + b_{22}G_{22}(x_2(t-\tau_{22}))]\,d\mathcal{B}(t)\ (t \geq 0),
\end{gathered} \tag{20}
$$

где $a_1, a_2, h_{ij}, \tau_{ij}, a_{ij}, b_{ij}, i, j = 1, 2$ — некоторые положительные числа, $F_{ij}, G_{ij}, i, j = 1, 2$ — непрерывные скаярные функции на $(-\infty, +\infty)$ такие, что $|F_{ij}(u)| \leq |u|, |G_{ij}(u)| \leq |u|, i, j = 1, 2$, $\mathcal{B}$ — стандартный винеровский процесс.

Из следствия 7 получаем, что если для системы (20) выполнены неравенства

$$
\sqrt{2}(a_1^2h_1 + a_1a_{11}h_1 + c_pa_1\sqrt{h_1}b_{11} + a_{11}) + \sqrt{a_1}c_pb_{11} < \sqrt{2}a_1,
$$

$$
\begin{gathered}
(\sqrt{2}a_1 - \sqrt{2}(a_1^2h_1 + a_1a_{11}h_1 + c_pa_1\sqrt{h_1}b_{11} + a_{11}) - \sqrt{a_1}c_pb_{11})\times \\
(\sqrt{2}a_2 - \sqrt{2}(a_2^2h_2 + a_2a_{22}h_2 + c_pa_2\sqrt{h_2}b_{22} + a_{22}) - \sqrt{a_2}c_pb_{22}) > \\
(\sqrt{2}(a_1a_{12}h_1 + c_pa_1\sqrt{h_1}b_{12} + a_{12}) + \sqrt{a_1}c_pb_{12})(\sqrt{2}(a_2a_{21}h_2 + c_pa_2\sqrt{h_2}b_{21} + a_{21}) + \sqrt{a_2}c_pb_{21}),
\end{gathered}
$$

то системы (20) будет глобально экспоненциально $2p$–устойчивой.

Пусть, далее, в системе (20) $a_{ii}, b_{ii}, i = 1, 2$. В этом случае, выполнение неравенств

$$
a_1h_1 < 1,
$$

$$
\begin{gathered}
(\sqrt{2}a_1 - \sqrt{2}a_1^2h_1)(\sqrt{2}a_2 - \sqrt{2}a_2^2h_2) > \\
(\sqrt{2}(a_1a_{12}h_1 + c_pa_1\sqrt{h_1}b_{12} + a_{12}) + \sqrt{a_1}c_pb_{12})(\sqrt{2}(a_2a_{21}h_2 + c_pa_2\sqrt{h_2}b_{21} + a_{21}) + \sqrt{a_2}c_pb_{21})
\end{gathered}
$$

дает глобальную экспоненциальную $2p$–устойчивость системы (20).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.
2. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференционально–функциональных уравнений. Рига: Зинате, 1989.
3. Mao X. Stochastic Differential Equations and Applications /Chichester: Horwood Publishing Itd.1997.360p.
4. Mohammed S.–E.F. Stochastic Functional Differential Equations With Memory. Theory, Examples and Applications // Proceeding of The Sixth on Stochastic Analysis. Geilo. Norway. 1996. P.1–91.
5.Кадиев Р.И. К вопросу об устойчивости стохастических функционально–дифференциальных уравнений по первому приближению //Изв. Вузов. Математика. 1999. N 10. С.3-8.
6. Кадиев Р.И. Устойчивость решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями по линейному приближению. //Дифференц. уравнения. Минск. Т.49. N 8. 2013. С.963-970.
7. Berezansky L., Braverman E., Idels L. Nev global exponential stability criteria for nonlinear delay differential systems with applications to bam neural networks.// ...
8. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986.
9. A. Berman and R. Plemmons, Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences, Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press, New York-London, 1979.
10. Кадиев Р.И. Существование и единственность решения задачи Коши для функционально–дифференциальных уравнений по семимартингалу //Изв. Вузов. Математика. 1995. N 10. С.35-40.

Дагестанский НЦ РАН, Дагестанский государственный университет
г.Махачкала
Норвежский университет естественных наук
г.Ос

Работа выполнена при частичной поддержке Норвежского Совета по Исследованиям, грант 239070.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Фамилия, имя, отчество: Кадиев Рамазан Исмаилович
Дата рождения: 8 февраля 1962 года
Место работы: Дагестанский государственный университет
Занимаемая должность: заведующий кафедрой математико-экономических методов Дагестанского государственного университета
Ученое звание и степень: профессор кафедры математического анализа, доктор физико-математических наук
Служебный адрес: 36700, Россия, Республика Дагестан, г. Махачкала, ул. М.Гаджиева, 43а, Дагестанский государственный университет
Служебный телефон: 684285
Домашний адрес: Россия, Республика Дагестан, г. Махачкала, ул. Айвазовского, 4, 99
Домашний телефон: 664136
Электронный адрес: kadiev r@mail.ru
Факс:
Основные научные исследования: Стохастические дифференциальные уравнения и устойчивость их решений, стохастический анализ и его приложения в экономике.

Фамилия, имя, отчество: Поносов Аркадий Владимирович
Дата рождения: 29 июня 1957 года
Место работы: Норвежский университет естественных наук
Занимаемая должность: профессор института математических и технических наук
Ученое звание и степень: профессор, dr. rer.-nat.
Служебный адрес: Norwegian University of Life Sciences, Department of Mathematical Sciences and Technology, P.O. Box 5003 N-1432, As, Norway
Служебный телефон: +47 6723 1630
Домашний адрес: Refsnesbakken 4D, N-1518 Moss, Norway
Домашний телефон: +47 9901 8810
Электронный адрес: arkadi@nmbu.no
Основные научные исследования: Стохастические дифференциальные уравнения и устойчивость их решений, стохастический и функциональный анализ, теория управления, а также их приложения в биологии

Реферат

УДК 57.929.4+519.21

Кадиев Р.И., Поносов А.В. Положительная обратимость матриц и устойчивость дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями //Дифференц. уравнения

Исследуются вопросы глобальной экспоненциальной p–устойчивости $(2 \le p < \infty)$ систем нелинейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями специального вида на основе теории положительно обратимых матриц. Для этого применяются идеи и методы, разработанные Н.В.Азбелевым и его учениками для исследования вопросов устойчивости детерминированных функционально–дифференциальных уравнений. Приводятся достаточные условия глобальной экспоненциальной p–устойчивости $(2 \le p < \infty)$ систем нелинейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями в терминах положительной обратимости матриц, построенных по исходной системе. Проверяется выполнимость этих условий для конкретных уравнений.

Библиогр. 10 назв.