



Norges miljø- og  
biovitenskapelige  
universitet

**Masteroppgave 2017 30 stp**

Norges miljø- og biovitenskapelige universitet  
Handelshøyskolen  
Espen Haug

# **Bitcoins verdi i diversifiserte porteføljer**

**En Out-of-Sample studie**

The Value of Bitcoin in Multi-Asset-Portfolios

An Out-of-Sample Analysis

**Mathias A. Iversen & Kjetil Vindedal**

Master i Økonomi og Administrasjon  
Handelshøyskolen

## Forord

Da vi bestemte tema for masteroppgaven i januar 2017, lå prisen på Bitcoin rundt 800 dollar. I dag handles den for rundt 17 000 dollar per Bitcoin. Vi har et ambivalent forhold til dette. På den ene siden har det gjort oppgaven vår aktuell, på den andre siden: Vi skulle ha investert!

Etterpåkløskap til side, vi vil gjerne takke våre veiledere Espen Haug og Tom Erik Sønsteng Henriksen for råd og veiledning gjennom skriveprosessen. Vi vil også takke medstudenter, foreldre og Stig Otnes Kolstad for spennende diskusjoner rundt Bitcoin.

## Sammendrag

Bitcoin har fra sin spede start i 2009 gått fra å være en kryptovaluta handlet mellom entusiaster, til å få betydelig oppmerksomhet i media for sin kraftige verdistigning. Bitcoin har også fått anerkjennelse fra deler av finansverden, og fikk et gjennombrudd da CME Groupe annonserte at de lanserer Bitcoin future produkter i løpet av fjerde kvartal 2017. Det har til nå vært relativt få studier som vurderer Bitcoin fra et finansielt perspektiv. Datagrunnlaget har, naturlig nok, vært begrenset i tid, og mange av studiene har benyttet in-sample analyser i stedet for mer realistiske out-of-sample analyser.

Vi analyserer åtte investeringsstrategier out-of-sample, fra risikoaverse strategier som Minimum Variance og Risk Parity, til optimeringsstrategier som Max Sharpe og Omega optimering med og uten Bitcoin i investeringsuniverset. Investeringsuniverset tar utgangspunkt i en investor, som er eksponert i råvarer, amerikanske aksjer og obligasjoner. Datagrunnlaget benyttet er fra perioden september 2012 til september 2017. Vi har delt dette inn i tre delperioder og sett på rullerende mål for å undersøke om resultatene er konsistente over tid.

Kombinert med svært høy volatilitet og avkastning, viser Bitcoinavkastningene lave og stabile korrelasjoner med avkastningene til de andre investeringsobjektene. Bitcoin reduserer ikke risikoen signifikant til de risikoaverse porteføljene i hele perioden. Dette er konsistent i alle delperioder. Porteføljene som inkluderer Bitcoin oppnår signifikant bedre risikojusterte avkastningsmål i heleperioden samlet, men det er variasjoner mellom delperiodene. Bitcoin vurderes som et mulig investeringsobjekt hvis målet er å øke risikojustert avkastning, men innebærer økt risiko. Bitcoininvesteringer er ikke et godt alternativ for risiko-reduksjon i perioden vi har undersøkt. Sensitive oppfølgende studier er nødvendig på grunn av Bitcoins unge alder og for å se i hvilken grad resultatene tåler tidens tann.

## Abstract

Since its inception in 2009, Bitcoin has gone from being a cryptocurrency traded between enthusiasts, to attain plenty of media attention for its extreme appreciation. Parts of the financial elite have started to recognise Bitcoin as a viable investment, and the cryptocurrency broke a new barrier when CME Groupe announced to launch Bitcoin futures in the fourth quarter of 2017. Until now the financial literature pertaining to Bitcoin is scarce. The literature is characterized by the short period of data, and the tendency to use in-sample tests as opposed to more realistic out-of-sample analyses.

We employ eight different asset allocation strategies in this out-of-sample study of portfolio benefits of Bitcoin investments, spanning from risk averse strategies like Minimum Variance and Risk Parity, to optimization of risk-adjusted return measures as Max Sharpe, and Omega optimization. For each strategy, we obtain one portfolio with and on without Bitcoin. Our investment universe is that of an American investor, exposed in commodities, American stocks and bonds. We split our data sample period: September 2012 - September 2017, in three sub periods and compare rolling measures to compare historical performance.

Compared to our other assets, Bitcoin exhibits persistently low correlations paired with exceedingly high volatility and returns. Bitcoin does not reduce the risk of the Minimum Variance and the Risk Parity portfolios for the whole examined period. This also holds for all subperiods. The portfolios containing Bitcoin improves the risk-adjusted return measures significantly for all strategies, with some variations between the subperiods. We consider Bitcoin as a viable investment if the goal is to increase risk-adjusted returns, but not if the goal only is risk reduction. Due to the short time period available, and the possible early-stage behavior of Bitcoin, future studies are needed to see if the results stands the test of time.

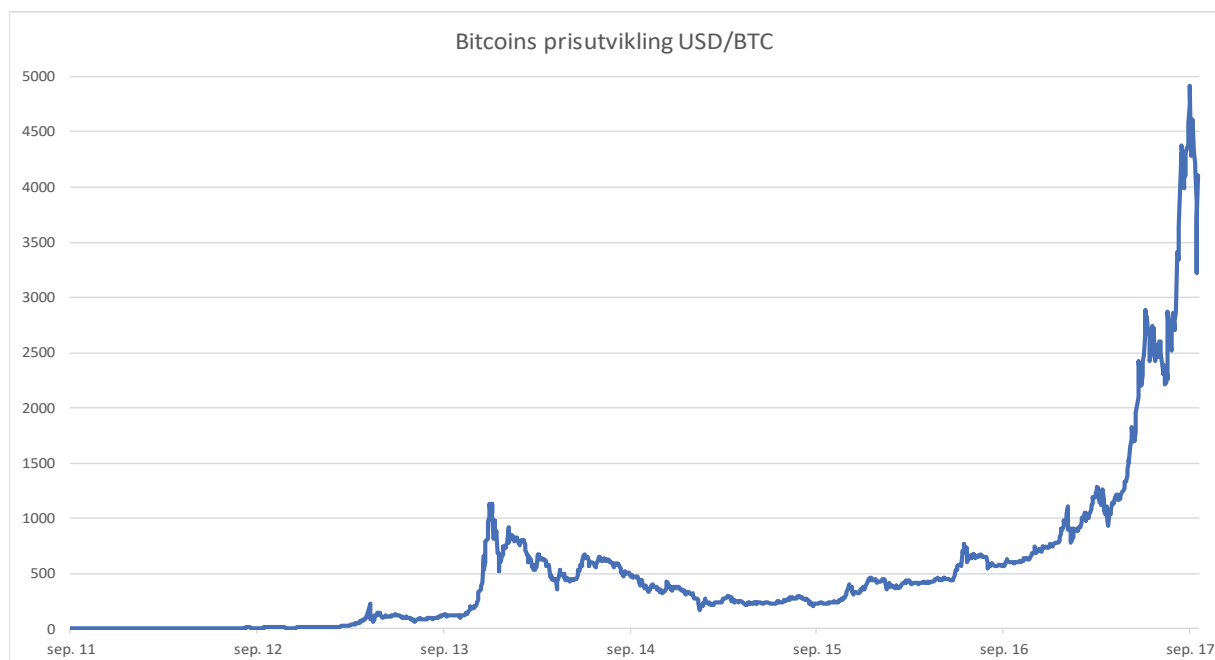
# Innholdsfortegnelse

Sammendrag .....	I
Abstract .....	II
1 Introduksjon .....	1
2 Bitcoins historie, teknologi og plass i økonomien .....	3
2.1 Hva er kryptovalutaer? .....	4
2.1.1 Elektroniske penger .....	5
2.1.2 Digital valuta/ virtuell valuta .....	6
2.1.3 Sentralisert og desentralisert valuta .....	6
2.1.4 Kryptovaluta .....	7
2.1.5 Bitcoinbrukere .....	7
2.1.6 Markeder .....	8
2.2 Bitcoin og blokkjede .....	8
2.2.1 Dobbelbruk problemet .....	8
2.2.2 Mining .....	10
2.2.3 Åpen kildekode .....	11
2.2.4 Anonymitet i blokkjeder og transaksjoner .....	12
3 Litteratur .....	12
4 Data og deskriptiv statistikk .....	14
4.1 Utgangspunkt for analyser .....	14
4.2 Avkastningsdistribusjon .....	14
4.3 Deskriptiv statistikk av Bitcoin og andre aktiva .....	16
5 Modeller for sammensetning av porteføljer .....	20
5.1 Minimum Variance (MinVar) .....	22
5.2 Risk Parity (RP) .....	23
5.3 Max Sharpe (MS) .....	24
5.4 Mean Variance (MV) .....	24
5.5 Reward-to-risk timing (R-to-R) .....	25
5.6 Omega optimering .....	26
5.7 Evalueringsmetoder for porteføljesammensetningene .....	26
6 Resultater av porteføljesammensetninger .....	26
6.1 Hele perioden .....	27
6.2 Delperiode 1 .....	29
6.3 Delperiode 2 .....	31
6.4 Delperiode 3 .....	32
6.5 Minimum Variance (MinVar) .....	34
6.6 Risk Parity (RP) .....	35
6.7 Max Sharpe (MS) .....	36
6.8 Mean Variance (MV) .....	38
6.9 Reward-to-risk timing (R-to-R) .....	41
6.10 Omegaoptimering .....	42
7 Robusthetsevaluering .....	44
7.1 Alternative optimeringsvinduer .....	44
7.2 Transaksjonskostnader .....	44
7.3 Handlevolum .....	47
8 Oppsummering og konklusjon .....	48
Referanser .....	50
Appendiks .....	53

# 1 Introduksjon

Etter inntoget i 2009, har Bitcoin gått fra å være en kryptovaluta handlet mellom entusiaster, til et blomstrende monetært system som får betydelig oppmerksomhet i media for sin kraftige verdistigning. Den virkelige anerkjennelsen fra finanseliten kom da CME Group (2017), 31.10.2017, annonserte at de lanserer Bitcoin future produkter i løpet av fjerde kvartal 2017.

Per 18.09.2017 er det over 1100 uregulerte digitale kryptovalutaer med en samlet markedsverdi på om lag 120 milliarder dollar (CoinMarketCap, 2017). Bitcoin er den klart største av disse både i handlevolum og markedsverdi, og utgjør omlag 50% av markedsverdien (CoinMarketCap, 2017). Den kraftige verdistigningen (Figur 1) og høye markedsverdien har gjort at investorer har fått øynene opp for Bitcoin. Spørsmålet de må stille seg er om det er verdt den høye risikoen.



Figur 1: Bitcoins prisutvikling i amerikanske dollar per Bitcoin, i perioden 01.09.2011 til 18.09.2017.

Forskningsartikler som omhandler Bitcoin har hovedsakelig vært IT- eller jusrelaterte, hvor fokuset har vært sikkerhetsprotokoller, svindel, kriminelle aktiviteter, hvitvasking av penger, krypteringsteknikker og lignende. De siste fire årene har det også kommet flere artikler om Bitcoin sett fra et finansielt perspektiv.

Flere studier har funnet at en inkludering av Bitcoin i investeringsuniverset har gitt den effisiente fronten et positivt skift (Briere, Oosterlinck, & Szafarz, 2015)(først publisert som working paper i

2013) (Carpenter, 2016). Ved å implementere en Mean-Variance-spanning test fant Briere et al. (2015) også at den effisiente fronten er signifikant bedre. Problemet med denne tilnærmingen er at den baserer seg på in-sample test. Dette gjør at analysene bare viser at Bitcoin forbedrer den effisiente fronten i valgte periode med kjent avkastning. In-sample analyser begrenser seg slik til å undersøke den maksimale potensielle forbedringen ved å inkludere Bitcoin uten estimeringsfeil.

Carpenter (2016) og Kajtazi & Moro (2017) undersøkte Bitcoin i porteføljer ved out-of-sample estimering, for henholdsvis det amerikanske og kinesiske markedet. Carpenter brukte en modifisert utgave av Mean-variance (Markowitz, 1952), med en avkastningsreduksjon for Bitcoin, mens Kajtazi og Moro brukte en mean-conditional-value-at-risk tilnærming. Begge fant at Bitcoin forbedret risikojusterte avkastningsmål frem til det kraftige prisetallet i slutten av 2013 og starten av 2014, men ikke etter.

Målet med oppgaven er å besvare følgende forskningsspørsmål (i): I hvilken grad kan Bitcoin redusere risikoen til en portefølje bestående av aksjer, obligasjoner og råvarer? (ii): Kan Bitcoin forbedre den risikojusterte avkastningen til en portefølje bestående av aksjer, obligasjoner og råvarer? (iii) Har den eventuelle reduksjonen av risiko, og forbedringen av risikojustert avkastning vært konsistent i perioden september 2012 til september 2017?

For å besvare forskningsspørsmålene (i) – (iii) tester vi åtte porteføljestrategier. Flere optimeringsmetoder øker robustheten til analysen i forhold til tidligere studier. Vi benytter bare out-of-sample backtesting i evalueringen av porteføljestrategiene. I evalueringen benyttes Sharpe rate og Omega rate som risikojusterte avkastningsmål. Sharpe raten (Sharpe, 1966) er et tradisjonelt risikojustertavkastningsmål som baserer seg på Gauss fordeling, mens Omega rate (Keating & Shadwick, 2002) ikke trenger noen antagelser om fordelingen. Slik hensyntar vi bedre de tunge halen til avkastningene som Bitcoin har vist seg å ha (Osterrieder & Lorenz, 2017).

Før vi prøver å besvare spørsmålene er det viktig å ha en grunnleggende forståelse av Bitcoin og teknologien bak. Derfor organiserer vi oppgave som følger:

- I kapittel 2 ser vi på historien til Bitcoin, forklarer forskjellige aspekter ved teknologien og setter den i sammenheng med andre monetære systemer.
- I kapittel 3 går vi gjennom relevant litteratur om Bitcoin i porteføljer og halerisikoen til Bitcoin.

- Kapitel 4 redegjør for datagrunnlaget og viser avkastningsdistribusjonen til Bitcoin, samt deskriptiv statistikk og korrelasjoner for avkastningene til de forskjellige investeringsobjektene.
- I kapittel 5 viser vi hvordan vi har implementert de forskjellige investeringsstrategiene og bakgrunnen for valg av strategier.
- I kapittel 6 rapporter og diskuterer vi resultatene for de forskjellige investeringsstrategiene.
- I kapittel 7 analyseres og diskuteres robustheten til resultatene.
- I kapittel 8 oppsummerer vi resultatene, før vi til slutt presenterer våre konklusjoner og anbefalinger.

## 2 Bitcoins historie, teknologi og plass i økonomien

Bitcoin ble introdusert i 2009 som den første desentraliserte kryptovalutaen av en eller flere hittil ikke identifiserte programmerere under pseudonymet Satoshi Nakamoto. Bitcoin er en desentralisert åpen kildekode som baserer seg på en distribuert blokkjedeteknologi. De første som beskrev kryptografisk sikrede blokkjeder var Harber & Stornetta (1991). Den første distribuerte blokkjeden ble beskrevet i white paperet «Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System» (Nakamoto, 2008) og implementert gjennom Bitcoin i 2009. Her beskrives et matematisk system som kan bli brukt til å produsere og administrere en digital valuta, hovedsakelig designet for å støtte online-transaksjoner. Blokkjedeteknologien, som er grunnlaget for Bitcoins suksess sammenlignet med tidligere virtuelle valutaer, ble koblet sammen med et peer-to-peer<sup>1</sup> nettverk, og løste slik problemet med dobbel bruk (når en person, som utfører en online transaksjon, sender de samme pengene til to forskjellige motparter samtidig). Når Bitcoin sendes og mottas via pseudonyme Bitcoinadresser, blir transaksjonen mellom brukerne bekreftet av nettverket uten oppsyn fra en sentral enhet. Dette muliggjøres gjennom en blokkjede, som innehar en offentlig kronologisk log over alle Bitcoin transaksjoner (European Central Bank, 2012). Slik vet alle deltakerne i nettverket om Bitcoinadressen som sender Bitcoin har nok enheter til å gjennomføre transaksjonen. Mens andre nettbaserte betalingssystemer, som for eksempel PayPal, Ebay, Dwolla, Wepay, og Google Wallet, fortsatt har

---

<sup>1</sup> «Peer-to peer»: En måte å organisere ressursdeling på i et datanett uten behov for en sentral myndighet. Systemet er selvorganiserende og består av autonome likeverdige noder.



problemer/hindringer med utenlandske betalinger, tillater Bitcoin forbrukerne å handle i et stadig mer globalt marked. (European Central Bank, 2012), (Pieters & Vivanco, 2016).

Som kryptovaluta, eksisterer Bitcoin kun digitalt og har ingen fysisk eksistens eller opprinnelse. Den er utstedt og kontrollert av brukerne og akseptert i økende grad som et betalingsmiddel i virtuelle samfunn og til dels hos nettbutikker og noe få fysiske utsalgsteder. Nye Bitcoins utvinnes gjennom såkalt «mining», som er en prosess hvor det kreves store mengder datakraft for å løse tunge matematiske algoritmer. Det utstedes Bitcoins til den «mineren» som er tidligst ute med å løse den matematiske algoritmen til den nye blokken. Blockchain er opprettet slik at en ny blokk, med nye transaksjoner, blir i snitt opprettet hvert 10.minutt. Når flere og kraftigere maskiner deltar i «mining»-prosessen, øker vanskelighetsgraden på algoritmen for å sikre en jevn tilførsel av Bitcoin (Nakamoto, 2008).

## 2.1 Hva er kryptovalutaer?

Terminologien som brukes i forbindelse med Bitcoin er til tider innviklet og upresis. For å lage en oversikt over de forskjellige begrepene har vi basert oss på Bank for International Settlements (BIS) (2015) og Pieters (2016). I rapporten har Pieters satt sammen definisjonene brukt av European Central Bank (ECB), BIS og Bitcoin Magazine. Vi har oversatt og gjengitt oversikten til BIS, som vi anser som den beste, i Figur 2.

Fysisk		Elektronisk			
Mulige substitutter for fysiske penger	Tradisjonelle penger (kvotert i en suverenvaluta)			Mulige substitutter for ikke fysiske penger	
Naturlige byttemidler (brød, skjell) Privat utstedte sedler (for eksempel penger utstedt av lokale myndigheter som Bristol Pound)	Sentralbankpenger		Kommersiellbankpenger	Elektroniske penger (vid definisjon)	
	Penger (mynter og sedler)	Sentralbank-innskudd		Lovlig anerkjente elektroniske penger (elektroniske penger snever definisjon)	Digital valuta
				Sentralisert	Desentralisert
Peer-to-peer fysisk bytting (ingen spesifikk infrastruktur er nødvendig)	Tradisjonell finansiell infrastruktur Alternativt bilaterale avtaler (for eksempel korrespondentbanker)		Elektroniske pengebytte mekanismer: peer-to-peer muligheter men behov for en betrodd tredjepart. I mange tilfeller er byttemekanismene sentralisert og ligner på tradisjonell finansiell infrastruktur.		Desentraliserte byttemuligheter (peer-to-peer elektronisk bytting)
Peer-to-peer	Behov for en betrodd tredjepart			Peer-to-peer	

Aktivum

Byttemekanisme

Figur 2: Oversiktsinndeling av fysiske og elektroniske penger, samt substitutter, bearbeidet etter BIS (2015).

### 2.1.1 Elektroniske penger

BIS (2015) definerer elektroniske penger på to måter: Lovlig anerkjent<sup>2</sup> og vidt definert. Lovlig anerkjent er verdi lagret på et instrument som for eksempel et «chip kort» eller en harddisk, som er akseptert som betaling av mange som ikke bruker elektroniske penger. Instrumentet er forhåndsbetalt, og trenger ikke nødvendigvis å bruke bankkontoer i overføringene, men må i de fleste jurisdiksjoner være kvoter i samme valuta som sentralbank eller finansiellbank penger og kan lett byttes til par mot disse. Eksempler på dette er forhåndsbetalte debetkort og PayPal. I en videre definisjon inkluderes også digitalvaluta og ikke-finansielle penger som for eksempel bonuspoeng hos flyselskap.

<sup>2</sup> Hva som er lovlig anerkjent varierer mellom jurisdiksjoner. I EU må en utsteder av lovlige anerkjente elektroniske penger ha en tillatelse til å utstede elektroniske penger. Slike penger er en fordring på utsteder, og de må være mulig å bruke hos andre enn utstederen (DIRECTIVE 2009/110/EC Article 2(1-2), 2009). Lovlig anerkjente elektroniske penger må ikke forveksles med tvungent betalingsmiddel sentralbankloven (1985) §14. Etter vår kjennskap er det ingen jurisdiksjoner der elektroniske penger er tvunget betalingsmiddel.

## 2.1.2 Digital valuta/ virtuell valuta

Digital valuta er en undergruppe av den vide definisjonen av elektroniske penger og trenger ikke nødvendigvis representerer en fysisk verdi. I motsetning til lovlig definerte elektroniske penger, er digitalvaluta ikke kvotert i, og trenger heller ikke være knyttet mot Fiat-penger<sup>3</sup>, men er denominert i sin egen enhet.

I European Central Bank (2016) sitt forslag til definisjon av virtuell valuta i deres kommentar til EU-direktivitet 2015/849, er «virtual currencies» en digital representasjon av verdi som hverken er utstedt av en sentralbank eller en offentlig myndighet, eller tilknyttet en lovlig etablert valuta. Den innehar ikke lovlig status som valuta eller penger, men er akseptert som et byttemiddel og muligens til annen bruk. Den kan overføres, lagres eller byttes elektronisk. ECBs definisjon av virtuell valuta skiller seg ikke tydelig fra BIS' definisjon av digital valuta. Pieters (2016) definerer virtuell valuta som en undergruppe av digital valuta som villet blitt utstedt eller hovedsakelig brukt til å kjøpe virtuelle og fysiske goder. Hun deler den videre inn i sentraliserte og desentraliserte virtuelle valutaer. Vi støtter oss på BIS' definisjon, og mener begrepene er sammenfallende.

## 2.1.3 Sentralisert og desentralisert valuta

Digital- og virtuellvaluta er enten sentraliserte eller desentraliserte. En sentralisert valuta er en valuta som er utgitt og vedlikeholdt av en betrodd tredjepart. Desentralisert valuta baserer seg i stedet på blokkjedeteknologi og løsning av kryptografiske gåter. Eksempler på sentralisert virtuellvaluta er i hovedsak valutaer som brukes i dataspill, som FIFA-coins, WoW gold osv. Disse brukes til å kjøpe fordeler i spillet, og er vanskelig og ofte ulovlig å bytte mot fysiske goder eller Fiatpenger. Det finnes også en tredje løsning, med private eller konsortiums blokkjeder. Det kommer vi tilbake til i kapittel 2.2.4.

---

<sup>3</sup> Penger uten en indre verdi. Det er penger (mynter og sedler) som er utstedt av en sentralbank og erklært å være penger.

#### 2.1.4 Kryptovaluta

Kryptovaluta refererer til elektroniske penger som er generert ved hjelp av kryptografisk teknologi for å regulere pengemengden og verifisere transaksjoner. Kryptovalutaer er i all hovedsak desentraliserte virtuelle valutaer, men det finnes eksempler på sentraliserte kryptovalutaer. Videre har flere sentralbanker annonsert at de jobber med digitale sentralbankpenger. Avhengig av hvilken teknologi de velger å bruke så kan det falle inn under flere av gruppene vi har nevnt.

#### 2.1.5 Bitcoinbrukere

Motivasjonen til å kjøpe Bitcoin har utviklet seg over tid, ettersom markedet har blitt større og mer integrert i verdensøkonomien. I begynnelsen var det i stor grad idealister og dataentusiaster som brukte Bitcoin. Den ble snart tatt i bruk av kriminelle. De pseudonyme egenskapene, hvor transaksjonene registreres med offentlige adresser uten å knytte de til en person, blir ansett som attraktive for disse gruppene. Nye teknikker for å identifisere Bitcoinbrukere har gjort og vil gjøre den mindre attraktiv for kriminelle. Det forskes mye på dette temaet, både av universiteter og politimyndigheter. Politimyndighetene offentliggjør i liten grad sine funn, men det er flere forskningsartikler om temaet. Et av de seneste gjennombruddene er Goldfeder, Kalodner, Reisman, & Narayanan (2017) som viser muligheter for å knytte identiteter opp mot offentlige Bitcoinadresser. Selv om politimyndighetene holder kortene tett til brystet, har de i intervjuer uttalt seg om fordeler ved at kriminelle bruker Bitcoin. Et eksempel er Meiklejohn (forsker som jobber tett med politimyndigheter) som uttalte «But if you catch people using something like Silk Road<sup>4</sup>, you've uncovered their whole criminal history,» (Bohannon, 2017).

Tradisjonelle investorer har også fått øynene opp for Bitcoin, men det strides om hvor godt egnet Bitcoin er som investeringsobjekt. JPMorgans administrerende direktør Jamie Dimon utalte 19.09.2017 «Hvis JPMorgan ansatte handler Bitcoin så ville han sparke dem umiddelbart, av to grunner: «Det er mot våre regler og de er dumme, begge deler er farlig.» (Henry & Irrera, 2017). JPMorgan har senere moderert uttalelsen. CME-group har på sin side bestemt seg for å lansere

---

<sup>4</sup> Silk Road var en online illegal markedsplass på dypnettet, der det i hovedsak ble handlet narkotika.

Bitcoinderivater på sine børser (CME Group, 2017). Som diskutert i litteraturdelen er det også uenighet blant forskere om hvor nyttig Bitcoin er i en investeringsportefølje.

### 2.1.6 Markeder

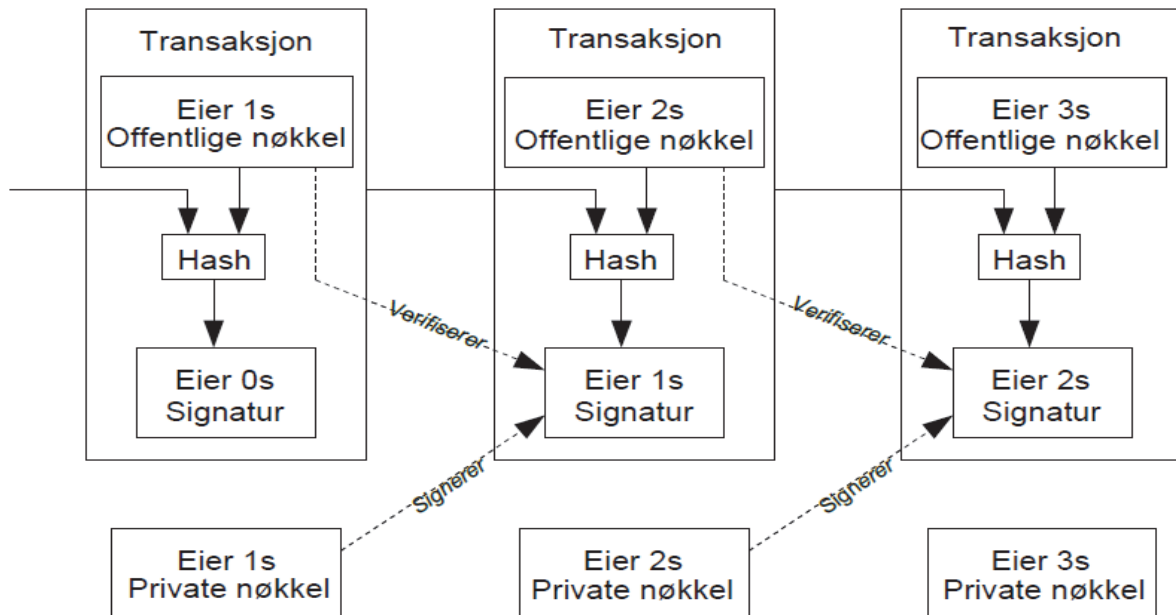
Det er flere måter å anskaffe Bitcoin på, den vanligste er gjennom en Bitcoin-børs. Disse er som andre elektroniske markedsplasser, der en kjøper (selger) indikerer antall Bitcoin den vil kjøpe (selge) og prisen man er villig til å betale (motta) i tradisjonell valuta, eller annen kryptovaluta. Børsene fungerer som prisstillere, og matcher kjøpere med selgere mot en avgift i bytte mot at de tar på seg motpartsrisiko. Andre måter å anskaffe Bitcoin på er ved «mining» se kapittel 2.2.2, eller ved direkte kjøp/bytte med en som er villig til å selge/bytte Bitcoin.

## 2.2 Bitcoin og blokkjede

«Blockchain er en digital hovedbok der økonomiske transaksjoner kan programmeres til å føre opp alt av verdi, og ikke bare finansielle transaksjoner.» – Don og Alex Tapscott, forfattere av boken «Bitcoin Revolusjon» fra 2016.

### 2.2.1 Dobbelbruk problemet

Et av kravene til å være et godt byttemiddel, er at byttemiddelet må være vanskelig å forfalske. For fysiske penger er dette løst ved sikkerhetselementer i sedlene. Nakamoto (2008) definerte en elektroniskmynt (senere Bitcoin) som en kjede av digitale signaturer. Hver eier overfører eierskapet til neste eier ved å legge til en digital signering på slutten av mynten. Slike signaturer er også svært vanskelige å forfalske, og er slik godt egnet for å overføre digitalt verdi. Problemet er at mottakeren ikke kan være sikker på om senderen, sender de samme myntene til to forskjellige mottakere. Den vanlige løsningen på dette problemet er at en sentralisert myndighet eller en betrodd tredjepart overværer transaksjonen.



Figur 3: Grafisk fremstilling av Bitcoin overføringer, oversatt fra Nakamoto (2008).

Nakamoto løste problemet ved at bare den første transaksjonen er gyldig. For å ha en oversikt over hvilken transaksjon som ble gjort først blir alle transaksjoner offentliggjort, og tidsstempelt<sup>5</sup> i et peer-to-peer nettverk. Denne kjeden av transaksjoner og tidsstempler overføres til den distribuerte blokkjeden.

Prosesen går som følger: Senderen av Bitcoin lager en transaksjon og overfører transaksjonen til nettverket. Transaksjonsmeldingen inneholder detaljer om mottakerens offentlige adresse, verdien på transaksjonen, tidspunktet for transaksjonen og en kryptografisk signatur som beviser overføringen (Figur 3).

Transaksjonsautentisering oppstår ved at nodene (datamaskiner/brukere) av nettverket mottar meldingen og verifiserer gyldigheten ved å dekode den digitale signaturen. Den autentiserte transaksjonen blir deretter plassert i en «kø» av ventende transaksjoner.

De ventende transaksjonene blir satt sammen i en blokk, av nodene i nettverket. Ca. hvert 10 minutter sender den første noden, som har løst den kryptografiske algoritmen, blokken sin til

<sup>5</sup> Dette gjøres gjennom en avtrykksfunksjon/hashfunksjon, som er en funksjon som forvandler data fra en tilfeldig størrelse til en fastsatt størrelse.

nettverket for validering. Nodene i nettverket mottar blokken og starter så å validere blokken gjennom en iterativ prosess som krever konsensus fra et flertall brukere av nettverket.

Valideringsteknikken som Bitcoin her tar i bruk kalles «proof of work»<sup>6</sup>. Teknikken sørger for at alle transaksjonene er gyldige, og gjør uredelige transaksjoner umulig. Hvis alle transaksjonene blir validert, vil den nye blokken bli «kjedet» inn i blokkjeden, og vi får dermed en ny oppdatert versjon av hovedboken som så gjøres tilgjengelig for hele nettverket. Hele denne prosessen kan fullføres innen 3-10 sekunder (EVRY, 2015).

### 2.2.2 Mining

Prosesen med å legge til transaksjonsposter til Bitcoins offentlige hovedbok av tidligere transaksjoner kalles mining. Denne hovedboken er det som kalles blockchain. Når «minere» har løst de tunge matematiske algoritmene forbundet med en blokk, verifiserer de transaksjonene og den oppklarte blokken legges til nettverket. På denne måten sikrer «minerene» all eierskapshistorikk og gjør dermed Bitcoin uavhengig av å ha en tredjepart til å sikre transaksjonene.

Den «mineren» som raskest løser algoritmen til en ny blokk, blir belønnet med nye utstedte Bitcoins og får dermed danne den nye blokken. På grunn av høy vanskelighetsgrad går gjerne «minerene» sammen i lag for å løse oppgavene, men da må også gevinsten deles med de andre som er med. Når flere og kraftigere maskiner deltar i «mining» prosessen, øker vanskelighetsgraden på algoritmen for å opprettholde tidsbruken. Vanskeligheten blir justert hver 14.dag og er illustrert i Figur 4.

---

<sup>6</sup> “Proof of work”: Data som er vanskelig (kostbart, tidskrevende) å produsere, men som er lett for andre å verifisere og tilfredsstillere visse krav.



Figur 4: Den månedlige utviklingen til vanskelighetsgraden av å finne en hash under et gitt nivå målt som hash/sekund, logaritmisk skala (bitcoinity.org, 2017).

På starten ble det generert 50 Bitcoins til de som løste oppgaven raskest. Etter 210,000 blokker halveres antall utstedte Bitcoins, og det opprettes i snitt en ny blokk hvert 10. minutt. Dette betyr at halveringen vil oppstå ca. hvert 4. år og den siste blokken som blir halvert vil være i oktober 2140. Det vil da være generert 21.millioner Bitcoins. Halveringsmekanismen er konstruert slik at tilførselen av Bitcoin er analog med tilførselen av gull (Nakamoto, 2008), der vi har en avtagende tilførsel til det er tomt. Dette gav algoritmeløsningen navnet «mining».

### 2.2.3 Åpen kildekode

Bitcoin protokollen og programvaren er offentlig tilgjengelig. Kildetoden ligger åpent tilgjengelig slik at programmerere kan verifisere hvordan Bitcoin fungerer. Alle kan forandre på koden og lage sin egen versjon av programvaren. Sikkerheten ligger i implementasjonen av protokollen, ikke i hemmeligholdingen av protokollen.

Bitcoin har i dag flere utviklere som jobber med kildetoden. For at forandringer skal bli akseptert må over 50% av nettverkets datakraft akseptere endringene, men det er fortsatt mulig å bruke eldre versjoner av programvaren. Hvis over 95% av nettverkets datakraft aksepterer endringen må alle



bytte til den nye versjonen. For noen av oppdateringene har de lagt inn en kode slik at den bare blir aktivert ved >95% konsensus. Et eksempel på dette er SegWit2x.

#### 2.2.4 Anonymitet i blokkjeder og transaksjoner

De fleste kryptovalutaer som Bitcoin baserer seg på «public ledger», eller offentlig hovedbok. Alle deltakerne i nettverket vet til enhver tid hvor mange enheter kryptovaluta hver offentlig adresse har og hvilke adresser de overfører til. Dette er lite attraktivt som transaksjonssystem for finansielle institusjoner, da de gjerne vil holde sine kontantstrømmer hemmelig. Et alternativ til dette er private blokkjeder, der det bare er en eller flere utvalgte aktører som verifiserer legitimiteten til transaksjonene. Her kan det i tillegg programmeres slik at en deltaker bare har rett til å se transaksjoner den er en del av, eller se transaksjoner ut i fra andre spesifiserte krav (EVRY, 2015). Privateblokkjeder er testet i flere business caser, for eksempel har EVRY testet ut blokkjede teknologien på syndikering av lån (EVRY, 2015). En annen løsning for at andre ikke skal ha tilgang til dine transaksjoner er zero-knowledge proof (Goldwasser, Micali, & Rackoff, 1985). I et slikt system kan man verifisere at en konto har nok enheter til å gjennomføre en transaksjon, uten å gi fra seg noen annen informasjon enn akkurat det.

### 3 Litteratur

Briere, Oosterlinck, & Szafarz, (2015) var den første artikkelen som tok for seg hvordan Bitcoin kan nyttes i en investeringsportefølje. Gjennom analyse av Bitcoins historiske avkastninger i perioden 2010-2013 fant de at Bitcoin har hatt bemerkelsesverdig lav korrelasjon med investeringsobjekter som aksjer, obligasjoner, råvarer og tradisjonelle valutaer. I analysen av porteføljer gjorde de en in-sample spanning test, og konstruerte en effisient front. De konkluderte med at Bitcoin gir signifikante diversifiseringsfordeler men tok forbehold med tanke på Bitcoins alder og den korte perioden med data.

Det er også gjort studier som bruker out-of-sample optimering for å se om Bitcoin kan være et godt tillegg i en investeringsportefølje. En av de første er Carpenter (2016), som brukte en modifisert versjon av Markowitz' (1952) mean-variance. Ved å optimere porteføljene hver tredje måned basert på de siste tre månedene, testet han de out-of-sample. Out-of-sample testen ble gjort i to perioder,

en som omfatter alle dataene (januar 2012 til mai 2016) og en fra februar 2014 til mai 2016. Han valgte den siste perioden for å utelate dataene fra det han karakteriserte som en investeringsboble i slutten av 2013 og starten av 2014. Funnene viste at Bitcoin kan være et godt diversifiseringsobjekt, men Carpenter mente det skyldes utviklingen i slutten av 2013 og starten av 2014. Etter det fant Carpenter at Bitcoin ikke forbedret porteføljen. Bruken av mean-variance ved bare å legge restriksjoner på short-salg og giring kan gi ustabile porteføljer med mange hjørneløsninger (Broadie, 1993). Tremåneders vinduer i optimeringen trekker også i samme retning.

De fleste studiene vi har undersøkt har sett på Bitcoin fra en amerikansk investors ståsted. Disse har i hovedsak funnet at Bitcoin ikke har hatt signifikante korrelasjoner med andre aktiva (for eksempel aksjer, obligasjoner, G10 valutaer og gull (Yermack, 2015)). I kontrast til dette fant Kajtazi & Moro (2017) at Bitcoin har hatt lave, men signifikante korrelasjoner med kinesiske aktiva. De hevdet derfor at Bitcoin har vært tettere knyttet til svingninger i det kinesiske markedet.

Videre undersøkte Kajtazi og Moro (2017) effekten av å legge til Bitcoin i en optimal portefølje i det kinesiske markedet. De brukte en mean-conditional-value-at-risk tilnærming og testet denne out-of-sample, både med rebalanseringer hver sjettemåned, og uten rebalanseringer. De laget fire forskjellige porteføljer, naive, long-only, uten restriksjoner og  $\pm 100\%$  vekter portefølje. De to siste har bare vært teoretisk mulig inntil nylig, da det ikke har vært mulige å short-selge Bitcoin direkte på børs. Kajtazi og Moro (2017) viste at naive og long-only porteføljene med Bitcoin gjorde det bedre frem til slutten av 2013, men med ingen signifikant forbedring etter det. De fant ingen forbedring for porteføljen uten begrensninger og  $\pm 100\%$  vekter porteføljen.

Osterrieder & Lorenz (2017) var den første studien som så på halerisiko-karakteristikkene til Bitcoinavkastninger. Studien ble senere utvidet til å omhandle et utvalg kryptovalutaer i Osterrieder, Lorenz, & Strika (2016), og resultatene tydet på at kryptovalutaers avkastninger har sterke, ikke normale egenskaper med store haler og høy volatilitet. Videre er det at de fant at Bitcoin både har høyere likviditet og lavere volatilitet enn de andre kryptovalutaene.

## 4 Data og deskriptiv statistikk

### 4.1 Utgangspunkt for analyser

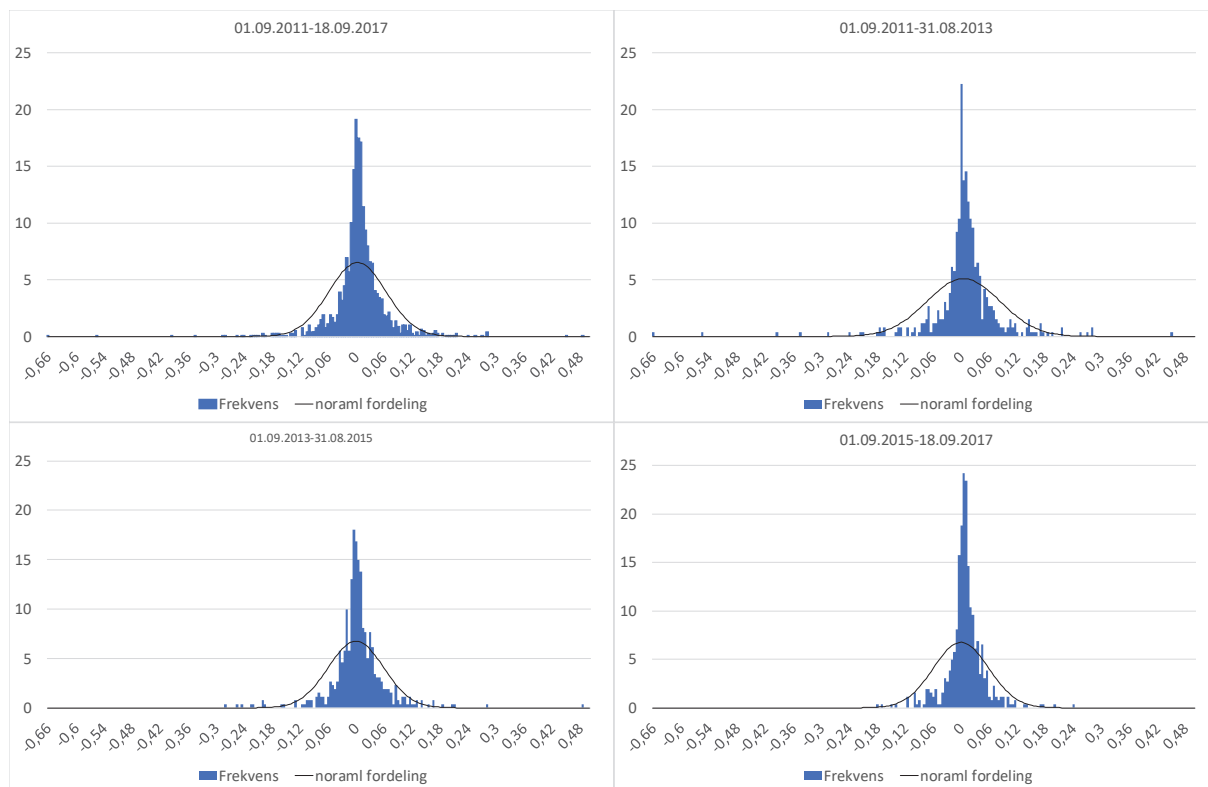
For å analysere diversifiseringsutbytte ved å inkludere Bitcoin i porteføljer, har vi tatt utgangspunkt i en investor i det amerikanske markedet, som allerede har investert i porteføljer bestående av obligasjoner, aksjer og råvarer. Vi har valgt S&P 500 Composite - Tr til å representere aksjer, S&P U.S. Aggregate Bond Index for obligasjoner og Bloomberg- Commodity Tr - Return Ind. (Ofcl) for råvarer, og USD to Bitcoin (Bitstamp) - Exchange Rate for Bitcoin prisen. Alle dataene er hentet fra Reuters Datastream.

På grunn av det lave og ustabile handlevolumet før 2012 (bitcoinity.org, 2017) (Carpenter, 2016) og mangel på daglig prishistorikk før 01.09.2011, er dette valgt som startpunkt for analysene våre. Vi ser på avkastningsdistribusjon og deskriptiv statistikk i perioden 01.09.2011- 18.09.2017. Videre har vi valgt å dele inn i tre delperioder. Delperiode 1: 01.09.2011 – 31.08.2013, delperiode 2: 01.09.2013 – 31.08.2015, og delperiode 3: 01.09.2015 – 18.09.2017. Når optimerte modellene er delperiode 1 kortere enn de to andre, da vi bruker data fra 01.09.2011-31.08.2012 til å estimere start vektene til porteføljene. Dette gir oss om lag fem år med optimerte porteføljer, og delperiode 1 for porteføljene er altså 01.09.2012 – 31.08.2013.

### 4.2 Avkastningsdistribusjon

Før vi presenterer en deskriptiv analyse av investeringsobjektene, gir vi en visuell fremstilling av Bitcoins log-avkastnings distribusjon (Figur 4). Figuren viser de daglige log-avkastningene til Bitcoin kursen mot amerikanske dollar. Fra distribusjonen og Jarque Bera testen (

Tabell 1) ser vi at log-avkastningene til Bitcoin er signifikant forskjellig fra en normal-distribusjon med samme standardavvik.



Figur 5 A, B, C og D: Bitcoins daglige log-avkastningsdistribusjon, plottet mot en normalfordeling med samme standardavvik rundt medianen til fordelingen. For hele perioden: 01.09.2011-18.09.2017, Delperiode 1: 01.09.2011-31.08.2013, Delperiode 2: 01.09.2013-31.08.2015 og Delperiode 3: 01.09.2015-18.09.2017.

Vi kan forkaste normalfordeling på 5% nivå for alle investeringsobjektene i alle periodene. På 1% nivå kan vi forkaste normalfordeling for alle investeringsobjektene i alle delperiodene, med unntak av obligasjoner i delperiode 2 og råvarer i delperiode 3. Brudd på normalfordeling må tas hensyn til i evalueringen, og understreker viktigheten av å undersøke skjevhet, kurtose, avkastningsfordelingen og risikjusterte avkastningsmål som ikke gjør antagelser om avkastningsdistribusjonen.

Tabell 1: Jarque-Bera test for de ulike investeringsobjektene i hele perioden: 01.09.2011-18.09.2017, delperiode 1: 01.09.2011-31.08.2013, delperiode 2: 01.09.2013-31.08.2015 og delperiode 3: 01.09.2015-18.09.2017. Jarque-Bera test verdier, \* er signifikant på 5% nivå \*\* på 1% nivå og \*\*\* på 0,1% nivå.

Perioder	Jarque-Bera test			
	Bitcoin	Råvare	Aksjer	Obligasjoner
Hele perioden	32049***	258***	550***	81***
Delperiode 1	8806***	177***	98***	26***
Delperiode 2	3658 ***	113***	269***	5,7*
Delperiode 3	774 ***	5,8*	194***	61***

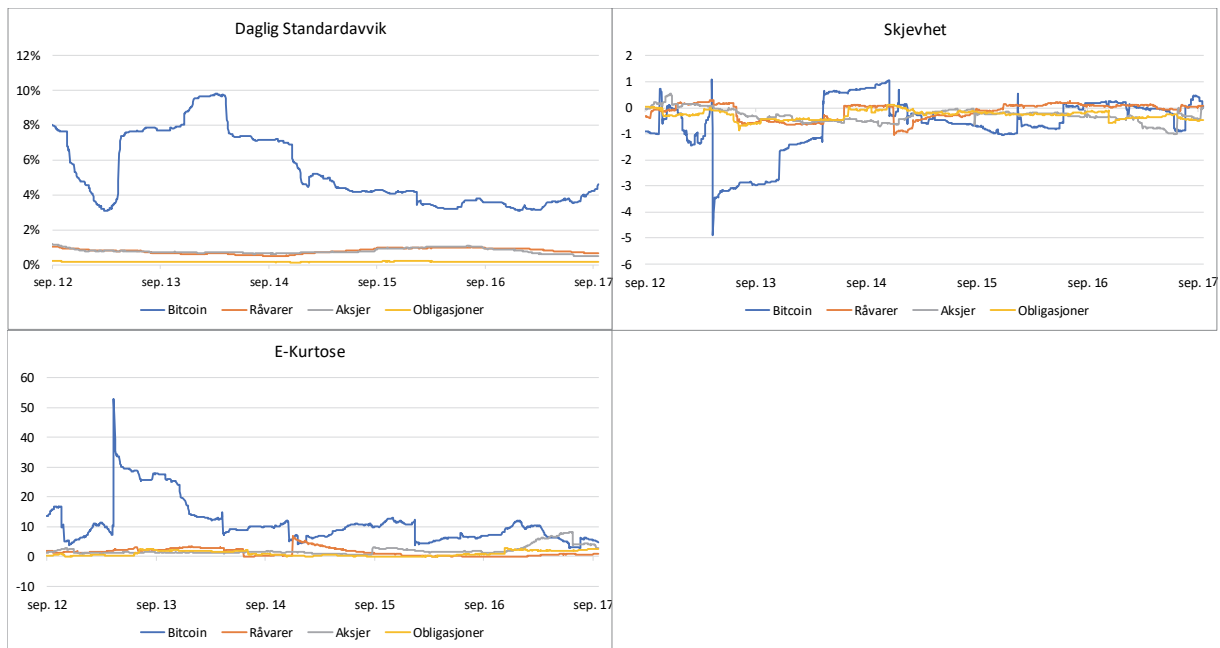
### 4.3 Deskriptiv statistikk av Bitcoin og andre aktiva

Tabell 2 viser deskriptiv statistikk av investeringsobjektene log-avkastninger for perioden 01.09.2011 – 18.09.2017, bestående av 1578 daglige observasjoner. Den gjennomsnittlige årlige avkastningen for Bitcoin er 102,81%, -10,66% for råvarer, 14% for aksjer og 2,43% for obligasjoner. Bitcoin har i tillegg til denne eksepsjonelt høye avkastningen, et årlig standardavvik på 98,72%, en excess kurtose på 21,97 og en negativ skjevhet på -1,089. Alle risikomålene, standardavvik, skjevhet og kurtose, avslører at Bitcoin har langt høyere risiko enn de andre investeringsobjektene. Til tross for denne risikoen, er avkastningen til Bitcoin såpass mye høyere enn de andre investeringsobjektene at Bitcoin likevel oppnår en høyere Sharpe rate. Sharpe rate tar ikke hensyn til kurtose og negativ skjevhet, hvilket er vesentlig med tanke på halerisiko. For å kunne sammenligne et risikostjustert avkastningsmål, som ikke krever noen antagelse om distribusjonen, har vi beregnet Omega rate. Dette berregnes, som nevnt, ved forholdet mellom summen over og under avkastningsterskelen. Å flytte avkastningsterskelen, eventuelt flytte perioden, kan medføre store endringer. Dette er også noe av kritikken mot Omega raten, der ekstreme observasjoner kan gi en rate som ikke fanger opp den egentlige distribusjonen.

Tabell 2: Deskriptiv statistikk og korrelasjoner for de ulike investeringsobjektene avkastning i hele perioden 01.09.2011-18.09.2017, korrelasjoner merket \* er signifikant forskjellige fra 0 på 5% nivå.

01.09.2011-18.09.2017	Bitcoin	Råvarer	Aksjer	Obligasjoner
<i>Årlig</i>				
Gjennomsnitt	102,81 %	-10,66 %	14,00 %	2,43 %
Standardavvik	98,72 %	13,23 %	13,51 %	2,90 %
Sharpe	1,04	-0,82	1,02	0,77
<i>Daglig</i>				
Omega	1,26	0,87	1,20	1,15
E-Kurtose	21,97	1,95	2,85	1,03
Skjevhet	-1,089	-0,193	-0,237	-0,205
Minimum	-66,39 %	-4,51 %	-4,02 %	-0,87 %
Maksimum	48,48 %	3,70 %	4,25 %	0,71 %
<i>Korrelasjoner</i>				
Bitcoin	1*			
Råvarer	0,032	1*		
Aksjer	0,008	0,348*	1*	
Obligasjoner	0,019	-0,167*	-0,388*	1*

Figur 6A illustrerer et 260dagers rullende standardavvik for avkastningene til investeringsobjektene. Bitcoinavkastningene har et mye høyere standardavvik i hele perioden. Det er interessant å se at det har blitt lavere, og har vært stabilt i en lengere periode fra starten av 2015. Dette kan tyde på at Bitcoin har blitt et sikrere investeringsobjekt men som vi ser har det tidligere endret seg raskt.



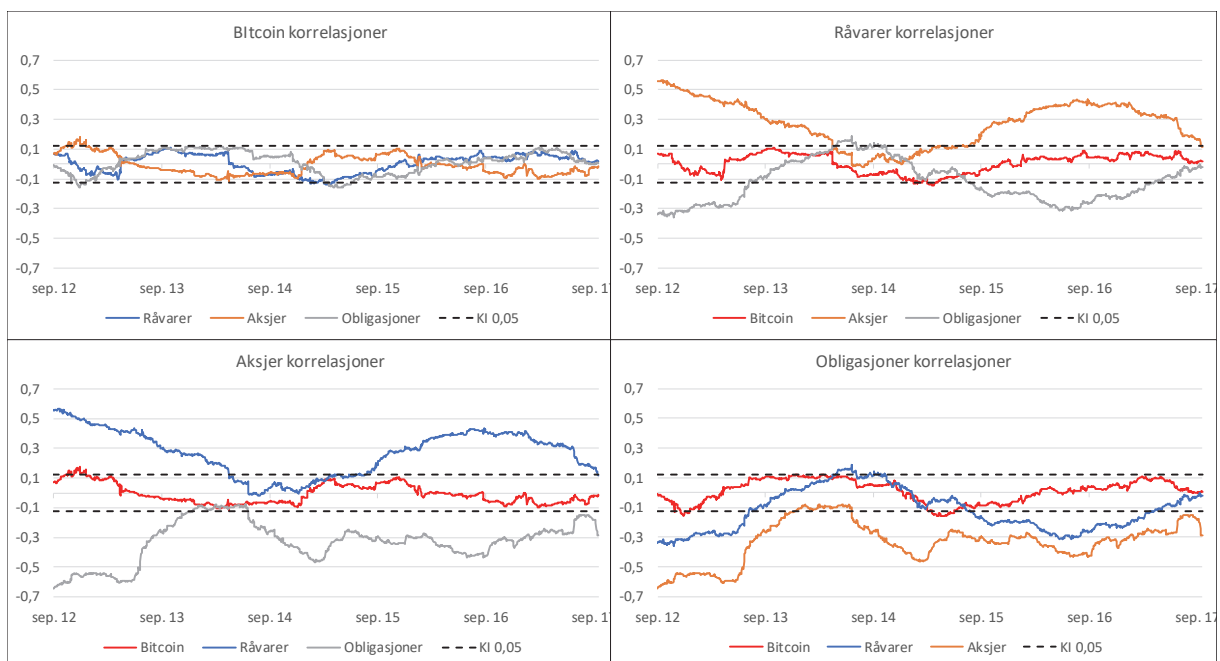
Figur 6 A, B og C: 260 handledagers rullerende daglig standardavvik(A), skjevhet (B) og eksess kurtose (C) til de ulike investeringsobjektene avkastning i perioden 01.09.2012 - 18.09.2017.

Bitcoinavkastningene har en negativ skjevhet for hele perioden med en skjevhet på  $-1,089$ . Dette indikerer en asymmetrisk distribusjon hvor halene på venstre side av distribusjonen er lenger og feitere enn på høyre side. Det er interessant at avkastningsdistribusjonen har gått fra å være negativ til å være positiv i både periode 2 og 3. Dette er en attraktiv egenskap for investorer, da positiv skjevhet indikerer flere positive ytterpunkter enn negative. Dette er dog en ustabil parameter, og som vist i Figur 6B var skjevheten til Bitcoinavkastningene kraftig negativ i starten, men har nå stabilisert seg og tendert til å være positive i perioder.

Bitcoinavkastningenes høye kurtose sammenlignet med de andre investeringsobjektene avkastninger indikerer at Bitcoinavkastningene har flere halehendelser. Fra periode 1 til 3 har excess-kurtose til Bitcoinavkastningene vist en nedadgående trend. Den har gått fra å være  $19,77$  i delperiode 1,  $12,88$  i delperiode 2 og til å være  $5,89$  i delperiode 3. Figur 6C illustrer Bitcoinavkastningenes 260 handledager rullerende excess-kurtose. Excess-kurtosen til Bitcoinavkastningene har i de senere årene vært lav og relativt stabil. Dette kan gjøre Bitcoin til et mer attraktivt investeringsobjekt for investorer, men vi ser også av grafen at excess-kurtosen til Bitcoinavkastningene var lav før den steg kraftig i starten av 2013.

Som vist i Tabell 2 har avkastningene til Bitcoin tilnærmet ingen korrelasjon med de analyserte investeringsobjektene. Dette er konsistent med funnene til Yermack (2015). Vi har illustrert

korrelasjonene i Figur 7 med et 260 handledagers rullerende vindu. Vi har lagt inn et 5% konfidensintervall for å vise når korrelasjonene er signifikant forskjellig fra 0. Bitcoin ligger stabilt innenfor konfidensintervallet i stort sett hele perioden mens de andre investeringsobjektene har mye større grad av variasjon, og befinner seg stort sett utenfor konfidensintervallet (Figur 6). At Bitcoin viser tilnærmet null korrelasjon, tyder på at Bitcoin er en god hedge i en investeringsportefølje. Korrelasjoner er et stabilt mål, sammenlignet med standardavvik, skjevhet, og kurtose. Selv om korrelasjonene har vært stabile i perioden vi har undersøkt, kan dette endre seg i framtiden. Både fordi flere investorer får øynene opp for Bitcoin, noe som vil knytte Bitcoins avkastninger tettere til avkastningene til andre aktiva, og fordi at korrelasjoner har en tendens til å øke i perioder med høy volatilitet og i «bear markets» (Erb, Harvey, & Viskanta, 1994), (Longin & Solnik, 1995) (Longin & Solnik, 2001).



Figur 7 A, B, C og D: 260 handledagers glidende korrelasjoner mellom avkastningene til de ulike investeringsobjektene i perioden 01.09.2012- 18.09.2017, de stiplede linjene er 5% konfidensintervaller (KI 0,05).

Vi har, som nevnt, delt opp i 3 delperioder for å se på utviklingen til de statistiske målene. Vi ser at avkastning og standardavvik i stor grad har variert. I delperiode 2 (1.09.2013-31.08.2015) var den årlige avkastningen til Bitcoin 30,46%, med et standardavvik på 95,22%. I delperiode 3 (01.09.2015-18.09.2017) var avkastningen hele 140,04% med 66,02 % i standardavvik. Dette har gitt utslag på våre risikjusterte avkastningsmål, og i delperiode 2 har både aksjer og obligasjoner en høyere Sharpe- og Omega rate enn Bitcoin.

Tabell 3: Deskriptiv statistikk og korrelasjoner for avkastningene til de ulike investeringsobjektene i delperiode 1: 01.09.2011-31.08.2013, korrelasjoner merket \* er signifikant forskjellige fra 0 på 5% nivå.

01.09.2011-31.08.2013	Bitcoin	Råvarer	Aksjer	Obligasjoner
<i>Årlig</i>				
Gjennomsnitt	136,86 %	-11,47 %	16,78 %	1,55 %
Standardavvik	126,29 %	14,19 %	15,76 %	3,13 %
Sharpe	1,08	-0,85	1,02	0,29
<i>Daglig</i>				
Omega	1,28	0,87	1,21	1,08
E-Kurtose	19,77	2,74	2,11	1,03
Skjevhet	-1,870	-0,400	-0,107	-0,175
Minimum	-66,39 %	-4,51 %	-3,73 %	-0,81 %
Maksimum	44,55 %	3,70 %	4,25 %	0,71 %
<i>Korrelasjoner</i>				
Bitcoin	1*			
Råvarer	0,077	1*		
Aksjer	0,028	0,483*	1*	
Obligasjoner	0,038	-0,242*	-0,504*	1*

Tabell 4: Deskriptiv statistikk og korrelasjoner for avkastningene til de ulike investeringsobjektene i delperiode 2: 01.09.2013-31.08.2015.

01.09.2013-31.08.2015	Bitcoin	Råvarer	Aksjer	Obligasjoner
<i>Årlig</i>				
Gjennomsnitt	30,46 %	-17,97 %	11,47 %	3,10 %
Standardavvik	95,22 %	12,27 %	12,37 %	2,82 %
Sharpe	0,32	-1,49	0,90	0,98
<i>Daglig</i>				
Omega	1,07	0,78	1,17	1,19
E-Kurtose	12,88	2,25	3,33	0,41
Skjevhet	0,628	-0,169	-0,345	-0,152
Minimum	-28,07 %	-3,94 %	-4,02 %	-0,52 %
Maksimum	48,48 %	2,99 %	3,84 %	0,59 %
<i>Korrelasjoner</i>				
Bitcoin	1*			
Råvarer	-0,04	1*		
Aksjer	0,001	0,146*	1*	
Obligasjoner	-0,004	-0,076	-0,28*	1*



Tabell 5: Deskriptiv statistikk og korrelasjoner for avkastningene til de ulike investeringsobjektene i delperiode 3: 01.09.2015-18.09.2017.

01.09.2015-18.09.2017	Bitcoin	Råvarer	Aksjer	Obligasjoner
<i>Årlig</i>				
Gjennomsnitt	140,04 %	-2,76 %	13,73 %	2,63 %
Standardavvik	66,02 %	13,17 %	12,16 %	2,75 %
Sharpe	2,05	-0,56	0,75	-0,72
<i>Daglig</i>				
Omega	1,52	0,97	1,23	1,17
E-Kurtose	5,89	0,51	2,83	1,55
Skjevhet	0,128	0,032	-0,409	-0,287
Minimum	-18,03 %	-2,72 %	-3,66 %	-0,87 %
Maksimum	23,84 %	2,42 %	2,49 %	0,52 %
<i>Korrelasjoner</i>				
Bitcoin	1*			
Råvarer	0,035	1*		
Aksjer	-0,029	0,354*	1*	
Obligasjoner	0,015	-0,162*	-0,333*	1*

## 5 Modeller for sammensetning av porteføljer

Vi har i porteføljene våre tatt i bruk investeringsstrategier som har vært grundig studert i litteraturen og hyppig brukt av kapitalforvaltere (Bessler & Wolff, 2015). Vi har vurdert om Bitcoin kan forbedre en portefølje bestående av aksjer, obligasjoner og råvarer. Strategiene vi har sett på er; Max Sharpe, Mean Variance, Minimum Variance, Reward-to-risk timing, risk parity og omega maksimering. Alle modellene er long-only, og har skrankene:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \wedge \omega_i \geq 0 \quad (1)$$

Der  $\omega_i$  er vekten til investeringsobjekt i.

Vi har gruppert modellene for portefølje optimeringer inn i risikobaserte modeller som er valgt for å belyse forskningsspørsmål (i), og risikojusterte-avkastningsmodeller som er valgt for å belyse forskningsspørsmål (ii)(Tabell 6). Vi har to risiko modeller: risk parity og minimum variance. Risk parity baserer seg på standardavvikene til de forskjellige investeringsobjektene, mens minimum variance i tillegg tar med korrelasjonene. De risikojusterte-avkastningsmodellene vi tester er mean variance (med tre nivåer på volatilitetsskrankene), max sharpe, omega maksimering og reward-to-risk timing. Mean variance og max sharpe baserer seg på standardavvik, korrelasjoner og historiske avkastninger, omega maksimeringen optimeres etter historisk avkastningsfordeling og reward-to-risk timing bruker standardavvik og historiske avkastninger.

Tabell 6: Oversikt over optimeringsmodellene, inndelt i risikomodeller og risikojusterte avkastningsmodeller.

Modell	Forkortelser	Forkortelser med Bitcoin	Forkortelser uten Bitcoin
<b>Risiko modeller</b>			
Minimum Variance	MinVar	MinVar BTC	MinVar U-BTC
Risk Parity	RP	RP BTC	RP U-BTC
<b>Risikojusterte avkastningsmodeller</b>			
Max Sharpe	MS	MS BTC	MS U-BTC
Mean Variance 5%	MV 5%	MV 5% BTC	MV 5% U-BTC
Mean Variance 10%	MV 10%	MV 10% BTC	MV 10% U-BTC
Mean Variance 15%	MV 15%	MV 15% BTC	MV 15% U-BTC
Reward-to-risk timing	R-to-R	R-to-R BTC	R-to-R U-BTC
Omega optimization	Omega	Omega BTC	Omega U-BTC

En grunn til å bare basere seg på risikomål er at de som regel har lavere estimeringsfeil enn avkastningene (Chopra & Ziemba, 1993). Selv om omega optimeringen inkluderer de høyere momentene til avkastningsfordelingen og derfor baserer seg på mer informasjon så er estimatene av de høyere momentene mer ustabile enn korrelasjonene, standardavvik og avkastninger.

For å teste porteføljene våre out-of-sample har vi testet investeringsstrategiene våre med et rullerendevindu som gjort av DeMiguel, Garlappi, & Uppal (2009). Vi rebalanserer vektene til porteføljene første dag i hver måned. Estimeringen baserer seg på de 260 siste dagens simple return (lineære avkastning), da disse er additive mellom aktiva (Meucci, 2010).

$$r_t = \frac{V_{t+1} - V_t}{V_t} \quad (2)$$

Der  $r_t$  er den lineære avkastningen i periode t og  $V_t$  er verdien i starten av perioden, og  $V_{t+1}$  er verdien i slutten av perioden. Ut i fra dette estimerer vi parameterne vi trenger til de forskjellige strategien, for så å estimere vektene vi bruker den neste måneden. Ut ifra disse vektene regner vi avkastningene til porteføljene den neste måneden. I utregningen av avkastningene til porteføljene bruker vi logaritmiske avkastninger, da disse er tidsadditive (Meucci, 2010) og summen av normaldistribuerte variabler er normal distribuerte, mens produkter av normaldistribuerte variabler ikke er det.

$$r_t = \ln\left(\frac{V_{t+1}}{V_t}\right) \quad (3)$$

Der  $r_t$  er den logaritmiske avkastningen i periode t og  $V_t$  er verdien i starten av perioden, og  $V_{t+1}$  er verdien i slutten av perioden. Denne rullerende fremgangsmåten er brukt til å estimere vektene i perioden 01.09.2012 til 18.09.2017.

For å sikre robustheten til resultatene våre, har vi gjort de samme analysene med 65 og 130 dagers vindu. Perioden vi har undersøkt, har vi delt opp i tre delperioder. Delperiode 1<sup>7</sup>: 01.09.2012-31.08.2013, delperiode 2: 01.09.2013-31.08.2015, og delperiode 3: 01.09.2015-18.09.2017. De tre delperiodene er valgt for å se på utviklingen over tid. På grunn av datagrunnlag og utviklingen til Bitcoin med hensyn på handle-volum er den første perioden kortere. I motsetning til Carpenter (2016) har vi ikke valgt å lage en egen «etter boble» periode, men delperiode 3 (september 2015 til september 2017) som ikke er påvirket av hverken den sterke veksten i slutten av 2013 eller det kraftige fallet i starten av 2014.

Carpenter (2016) hevder at Bitcoin gjennomgikk en spekulativ boble i slutten av 2013 og starten av 2014. Problemet med dette er at det er vanskelig å definere når en boble starter, og når den slutter. I tillegg vil man kunne tilpasse start og slutt punkt for å få resultater som underbygger hypotesen man vil teste. For å vise hvordan Bitcoin har påvirket porteføljene uten at periode inndeling påvirker resultatene, har vi sett på hvordan de risikojusterte avkastningsmålene sharpe og omega rate har utviklet seg over tid med et rullende vindu på 260 handledager og fremstilt det grafisk. Vi diskutere evalueringen av porteføljene i kapittel 5.7.

## 5.1 Minimum Variance (MinVar)

Strategien til MinVar har fått økt interesse fra investorer og har blitt implementert i varierte kvantitative investeringsfond og børshandlede produkter. Formålet til strategien er å minimere risikoen til porteføljen. Risikoen måles i varians av porteføljens avkastninger:

$$\min_{\omega} Var = \omega' \Sigma \omega \quad (4)$$

Hvor  $\omega$  er vektoren til porteføljens vektene og  $\Sigma$  er kovarians matrisen til investeringsobjektene.

Fordelen med MinVar er at den ikke krever avkastnings estimater, som vanligvis inneholder større estimeringsfeil enn kovarians og standardavvik (Chopra & Ziemba, 1993). Strategien prøver å profitere på lav volatilitets-abnormaliteter (Haugen & Heins, 1975) (Haugen & Baker, 1991). I motsetning til Risk Parity (5.2) tar den også hensyn til investeringsobjektene korrelasjoner. Vi har

---

<sup>7</sup> Som nevnt i kapitel 4 er delperiode 1 ett år kortere i modellene enn i deskriptiv statistikk fordi vi bruker første året til å bestemme start vektene.

sett at Bitcoin har vist lave og stabile korrelasjoner med de andre investeringsobjektene. Likevel tror vi ikke korrelasjonene vil veie opp for Bitcoins høye volatilitet, og vi forventer en Minimum Variance portefølje med små andeler Bitcoin.

## 5.2 Risk Parity (RP)

Som et alternativ til tradisjonell porteføljeteori, har Risk Parity i de siste årene utviklet seg til å bli en populær investeringsstrategi. Investeringskonseptet oppsto på 1990 tallet, og fikk navnet etter at Qian (2005) brukte uttrykket. Siden har flere og flere fond, samt indekser valgt å implementere investeringsstrategien, som for eksempel: Aquila Risk-parity, Invesvo Balanced Risk, og MSCI Risk weighted indexes (Anderson, Bianchi, & Goldberg, 2012). Ideen bak risikoparitet er at alle komponentene i en portefølje har likt risikobidrag til porteføljens totale risiko. Det oppnår man ved å fordele vekten etter formelen:

$$\omega_i = \frac{1/\hat{\sigma}_i^2}{\sum_{i=1}^n (1/\hat{\sigma}_i^2)} \quad (5)$$

Der  $\omega_i$  er vekten til investeringsobjekt  $i$  og  $\hat{\sigma}_i$  er det estimerte standardavviket til objekt  $i$ .

Risk parity prøver også å utnytte lav volatilitets-abnormaliteter, som baserer seg på at investeringsobjekter med lav volatilitet vanligvis har høyere premium per enhet volatilitet enn investeringsobjekter med høy volatilitet. (Baker, Bradley, & Wurgler, 2011) (Frazzini & Pedersen, 2014)

I våre porteføljer bestående av aksjer, obligasjoner, råvarer og (Bitcoin) forventer vi som Bessler og Wolf (2015) at obligasjoner vil utgjøre mesteparten av porteføljene. I porteføljen som inkluderer Bitcoin forventer vi at den vil ha den laveste andel, på grunn av Bitcoins høye volatilitet. Flere fond og indekser velger å implementere strategien (e.q. Aquila Risk-parity, Invesvo Balanced Risk, MSCI), samt også pensjonsfond og langsiktige investorer (Anderson, Bianchi, & Goldberg, 2012).

### 5.3 Max Sharpe (MS)

Sharpe rate er et risikomål basert på Markovitz' porteføljeteori, som forutsetter at investorer ønsker å minimere risiko for en gitt avkastning. Sharpe raten beregnes ved å trekke risikofri rente fra avkastningen til porteføljen og deretter dele på standardavvik.

$$S = \frac{E[R-r_f]}{\sigma} \quad (6)$$

Vi får vektene ved å maximere med hensyn på vektene:

$$\max_{\omega_i} \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \mu_i - r_f}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} \omega_i \omega_j}} \quad (7)$$

Der  $\omega_i$  er portefølje vektene,  $r_f$  er risikofri rente,  $\sigma_{ij}$  er kovariansmatrisen og  $\mu_i$  er avkastningen til investeringsobjekt i.

Siden porteføljen forsøker å maksimere forholdet mellom avkastning og risiko, er det sannsynlig at porteføljen i perioder allokere store andeler i enkelte investeringsobjekter. Som vi har sett av den deskriptive analysen, gjorde Bitcoin det svært godt i siste periode med tanke på Sharpe raten. Vi forventer derfor at porteføljen med Bitcoin til tider vil allokere store andeler Bitcoin i siste periode.

### 5.4 Mean Variance (MV)

Mean Variance tar hensyn til både risiko og avkastning, og er definert som følger:

$$\max_{\omega} U = \omega' \mu - \frac{\delta}{2} \omega' \Sigma \omega \quad (8)$$

Gitt skranken:

$$\omega' \Sigma \omega \leq \hat{\sigma}_C \quad (9)$$

Hvor U er en funksjon for investors nytte,  $\omega$  er vektoren til portefølje vektene,  $\Sigma$  er kovarians matrisen til investeringsobjektene,  $\mu$  er vektoren til avkastningsestimatene,  $\delta$  er den risiko averse koeffisienten og  $\hat{\sigma}_C$  er valgt nivå for årlig standardavvik. I resultatene er  $\delta$  satt til 2, for robusthet har vi også testet med 4,6,8 og 10.

Vi har valgt forskjellige nivåer på årlige standardavvik som skranker (5-,10- og 15%), for å sammenligne de ulike tilpasningene etter hvilken risiko man er villig til å påta seg. Når vi øker volatilitet skrankene forventer vi at porteføljen tar på seg mer risiko, og inkluderer større andeler av risikable aktiva med høy avkastning.

## 5.5 Reward-to-risk timing (R-to-R)

Kirby & Ostdiek (2012) foreslo en investeringsstrategi kalt reward-to-risk timing som ikke krever optimering. Strategien setter vekt basert på forholdet mellom avkastning og risiko til investeringsobjektene. Vi har beregnet dette ved å ta gjennomsnittlig avkastning til investeringsobjektene, hvis positiv, delt på investeringsobjektene varians.

Gitt ved likningen:

$$\hat{\mu}_i^+ / \hat{\sigma}_i^2 \tag{10}$$

Så deler vi hver av de på summen:

$$\sum_{i=1}^n \hat{\mu}_i^+ / \hat{\sigma}_i^2 \tag{11}$$

Da får vi vektene gitt ved:

$$\omega_i = \frac{\hat{\mu}_i^+ / \hat{\sigma}_i^2}{\sum_{i=1}^n \hat{\mu}_i^+ / \hat{\sigma}_i^2} \tag{12}$$

Der  $\hat{\mu}_i^+$  er avkastningen til investeringsobjekt i hvis den er positiv, og  $\hat{\sigma}_i$  er standardavviket til investeringsobjekt i. For å forhindre short-salg, setter vi vektene til investeringsobjektene lik null hvis avkastningen er negativ. I det lite sannsynlige tilfellet der alle avkastningene er negative, velger vi en likevektet portefølje.

Reward-to-risk timing porteføljen vektlegger også avkastning i tillegg til risiko. Dette gjør at vi forventer en portefølje med større andeler, enn for eksempel MinVar og Risk parity, i investeringsobjekter som innehar høyere risiko. Risk-to-reward strategien tar ikke hensyn til kovariansene og ignorerer dermed diversifiseringseffekten til Bitcoins lave korrelasjoner med aksjer, obligasjoner og råvarer.

## 5.6 Omega optimering

Omega er et risikomål introdusert av Keating og Shadwick (2002) som hensyntar de høyere momentene i en historisk avkastnings distribusjon. Omega raten er definert som forholdet mellom den avkastnings vektete sannsynlighet over et gitt nivå og avkastnings vektete sannsynlighet under gitt nivå. Funksjonen krever ingen antagelser om distribusjonen, og er definert som følger:

$$\Omega = \frac{\int_r^b (1-F(x))dx}{\int_a^r F(x)dx} \quad (13)$$

F er den kumulative distribusjons funksjon for investeringsobjektene avkastning definert på intervallet [a, b] og r er avkastningsterskelen. En avkastningsverdi under valgt terskel anses som tap og avkastningsverdi over terskel anses som gevinst. Vektene er regnet ut ved å maksimere:

$$\max_{\omega_i} \Omega = \frac{\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n if(-\omega_{i,t} * \mu_{i,t}) > 0}{-\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n if(-\omega_{i,t} * \mu_{i,t}) < 0} \quad (14)$$

Med hensyn på vektene ( $\omega_i$ ). Der  $\mu_{i,t}$  er avkastningen til investeringsobjekt i, på tidspunkt t.  $\omega_{i,t}$  er vekten til investeringsobjekt i, på tidspunkt t.

På grunn av at risikofri rente har ligget nær null i størstedelen av perioden har vi valgt 0 som avkastningsterskel.

## 5.7 Evalueringmetoder for porteføljesammensetningene

For å evaluere effekten av å inkludere Bitcoin i investeringsuniverset for en portefølje bestående av aksjer, obligasjoner og råvarer beregnes flere prestasjonsmål; gjennomsnittlig avkastning, volatilitet, skjevhet og kurtose. I tillegg ser vi på de risikjusterte avkastningsmålene Sharpe rate og Omega rate.

## 6 Resultater av porteføljesammensetninger

I dette kapitlet viser vi først resultatene til de forskjellige porteføljene i de valgte periodene. Vi har valgt å dele perioden i tredelperioder, med ett år i den første, og to år i de to neste. Den første delperioden er kortere fordi vi bruker det første året med data til å bestemme start-vektene. Vi

valgte å ikke gjøre enn ex-ante inndeling slik Carpenter (2016) har gjort da det strider imot out-of-sample premissene vi har lagt til grunn. I den andre delen viser vi resultatene fra hver optimeringsmetode. Til slutt diskuterer vi transaksjonskostnader og likviditetsbegrensninger ut i fra handlevolum.

## 6.1 Hele perioden

I hele perioden (01.09.2012-18.09.2017) har alle porteføljene som inkluderer Bitcoin signifikant<sup>8</sup> høyere Sharpe rate sammenlignet med de som ikke innehar Bitcoin (Tabell 7). Omega ratene er også høyere for alle Bitcoin porteføljene. Standardavviket er enten høyere eller like høyt for porteføljene med Bitcoin i forhold til de uten. Det er signifikant høyere i Max Sharpe (MS), Mean-variance (MV) 15%, Risk-to-reward timing (R-to-R) og Omega porteføljene. Disse porteføljene allokere relativt store andeler i Bitcoin. MV 5% og 10% har også allokert relativt store andeler i Bitcoin, uten et signifikant høyere standardavvik, men likevel høyere avkastning. Dette kan tyde på at investoren kompenseres for økt eksess kurtose og mer negativ skjevhet i avkastningsfordelingen. MV 5% er den som har oppnådd høyest Sharpe rate i perioden, både med og uten Bitcoin som en del av investeringsuniverset. Strategien oppnår også høyest Omega rate når man utelater Bitcoin. Omega optimeringen med Bitcoin oppnår høyest Omega rate i perioden, tett fulgt av R-to-R. Men med en den høyeste eksess kurtosen 106,4, den mest negative skjevheten på -5,48 og et maksimalt daglig tap på -22% må det anses som en svært risikabel strategi.

---

<sup>8</sup> Vi har brukt signifikans testen probability of skill, foreslått av Bailey & Lopez de Prado (2012)

$$P\widehat{SR}(SR^*) = Z \left[ \frac{(\widehat{SR} - SR^*)\sqrt{n-1}}{\sqrt{1 - \hat{\gamma}_3 \widehat{SR} + \frac{\hat{\gamma}_4 - 1}{4} \widehat{SR}^2}} \right]$$

Der  $\widehat{SR}$  er estimert Sharpe ratio,  $SR^*$  er Sharpe raten vi tester mot (Sharpe raten til porteføljen uten Bitcoin),  $Z$  er Kumulativ fordelingsfunksjonen til standar normalfordeling,  $\hat{\gamma}_3$  er skjevheten,  $\hat{\gamma}_4$  er kurtosen og  $n$  er antall observasjoner. Testen er gjort på daglig data med daglig Sharpe ratio.



Tabell 7: Deskriptiv statistikk og gjennomsnittlige porteføljeandeler for de forskjellige optimeringsstrategiene i hele perioden: 01.09.2012-18.09.2017. De årlige målene som er signifikant høyere enn tilsvarende mål for samme investeringsstrategi er markert i fet skrift. Gjennomsnittsvektene som er signifikant forskjellige fra 0 er også markert i fet skrift. Max Sharpe (MS), Mean Variance (MV), Minimum Variance (MinVar), Risk-to-reward timing (R-to-R), Risk Parity (RP) og Omega optimering (Omega).

	MS		MV 5%		MV 10%		MV 15%		MinVar		R-to-R		RP		Omega	
	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC
	Årlig															
Gjennomsnitt	<b>17,9%</b>	5,1%	11,1%	8,0%	21,1%	13,5%	<b>30,2%</b>	13,7%	2,6%	2,5%	<b>21,4%</b>	5,5%	2,0%	1,8%	<b>26,2%</b>	7,1%
Standardavvik	<b>9,9%</b>	5,3%	4,9%	4,8%	9,7%	9,4%	<b>14,2%</b>	11,7%	2,4%	2,4%	<b>12,0%</b>	5,7%	2,5%	2,5%	<b>20,6%</b>	6,0%
Sharpe	<b>1,80</b>	0,92	<b>2,24</b>	1,62	<b>2,15</b>	1,42	<b>2,12</b>	1,15	<b>0,99</b>	0,94	<b>1,77</b>	0,92	<b>0,72</b>	0,62	<b>1,26</b>	1,15
	Daglig data															
Omega	1,53	1,23	1,48	1,32	1,49	1,29	1,49	1,23	1,20	1,19	1,54	1,22	1,14	1,12	1,54	1,31
E-Kurtose	16,97	9,88	4,74	1,86	7,61	2,08	9,59	2,71	2,33	2,35	25,99	8,63	1,77	1,79	106,4	23,77
Skjevhet	0,68	-0,27	-0,72	-0,23	-0,90	-0,24	-1,00	-0,28	-0,42	-0,41	-0,07	-0,34	-0,38	-0,37	-5,48	-1,01
Gjennomsnitt	0,07%	0,02%	0,04%	0,03%	0,08%	0,05%	0,12%	0,05%	0,01%	0,01%	0,08%	0,02%	0,01%	0,01%	0,10%	0,03%
Minimum	-4,3%	-2,1%	-1,9%	-1,4%	-4,5%	-2,5%	-7,0%	-3,7%	-0,7%	-0,7%	-8,0%	-2,1%	-0,8%	-0,8%	-22%	-3,7%
Maksimum	5,7%	2,2%	1,5%	1,1%	3,3%	2,4%	5,1%	3,6%	0,7%	0,7%	6,9%	2,2%	0,6%	0,6%	9,6%	3,6%
	Andeler gjennomsnitt															
Bitcoin	<b>6,3%</b>		<b>4,2%</b>		<b>9,4%</b>		<b>14,7%</b>		<b>0,1%</b>		<b>7,7%</b>		<b>0,1%</b>		<b>11,2%</b>	
Råvarer	<b>1,0%</b>	<b>1,2%</b>	<b>0,9%</b>	<b>1,4%</b>	<b>1,3%</b>	<b>1,7%</b>	<b>0,5%</b>	<b>1,7%</b>	<b>3,6%</b>	<b>3,5%</b>	<b>2,5%</b>	<b>2,7%</b>	<b>4,9%</b>	<b>4,9%</b>	<b>0,9%</b>	<b>0,8%</b>
Aksjer	<b>32,9%</b>	<b>34,2%</b>	<b>27,1%</b>	<b>39,6%</b>	<b>47,9%</b>	<b>75,5%</b>	<b>60,4%</b>	<b>89,0%</b>	<b>9,2%</b>	<b>9,2%</b>	<b>31,6%</b>	<b>36,3%</b>	<b>4,9%</b>	<b>4,9%</b>	<b>29,5%</b>	<b>35,0%</b>
Obligasjoner	<b>59,8%</b>	<b>64,6%</b>	<b>67,8%</b>	<b>59,0%</b>	<b>41,4%</b>	<b>22,8%</b>	<b>24,4%</b>	<b>9,4%</b>	<b>87,1%</b>	<b>87,2%</b>	<b>58,2%</b>	<b>60,9%</b>	<b>90,1%</b>	<b>90,3%</b>	<b>58,4%</b>	<b>64,1%</b>

Alle strategiene utenom Minimum-variance (MinVar) og Risk Parity (RP) tildeler i snitt betydelige vekter i Bitcoin (Tabell 7). MinVar og RP vektene er også signifikant forskjellig fra 0. MV 15% tildeler den største gjennomsnittsansandelen med 14,7%. Vi ser at R-to-R, Omega og MS strategiene i perioder har hatt veldig høye andeler allokert i Bitcoin (Tabell 8). Slike fordelinger i enkelt objekter står i skarp kontrast til motivet med portefølje diversifisering. Standardavviket til vektene er et uttrykk for hvor store rebalanseringene er, og høyere rebalanseringer vil medføre høyere transaksjonskostnader. Vi har valgt å bruke sum av standardavvikene for å sammenligne rebalanseringshyppigheten<sup>9</sup> mellom porteføljene. Hadde vi brukt gjennomsnitt av standardavvikene ville dette gitt en fordel til porteføljene som inkluderer Bitcoin, da porteføljen inkluderer ett ekstra investeringsobjekt. Som ventet er det MinVar og RP strategiene som har lavest rebalanseringer. Blant maksimeringsstrategiene har MV 5% den klart laveste rebalanseringen og laveste andelen Bitcoin (Tabell 8). Vi ser også interessant at den aldri har mindre enn 50% i obligasjoner, dette stemmer godt med preferansene til en konservativ investor. Som et alternativ til å se på summen av standardavvikene, kunne vi sett på de absolutte forandringene. Dette diskuterer vi i kapittel 7.2.

<sup>9</sup> I kapittel 7.2 ser vi nærmere på transaksjonskostnadene.

Tabell 8: Oversikt over høyeste og laveste andelen til hvert investeringsobjekt i de ulike porteføljene, samt standardavviket til porteføljevektene for hele perioden 01.09.2012 - 18.09.2017. Sum av standardavvikene er regnet som  $\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{\omega_i}^2}$  der  $\sigma_{\omega_i}$  er standardavviket til vektene til objekt i. Max Sharpe (MS), Mean Variance (MV), Minimum Variance (MinVar), Risk-to-reward timing (R-to-R), Risk Parity (RP) og Omega optimering (Omega).

	MS		MV 5%		MV 10%		MV 15%		MinVar		R-to-R		RP		Omega	
	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC
Max andel																
Bitcoin	65,8%		9,2%		19,6%		29,8%		0,6%		89,8%		0,3%		86,0%	
Råvarer	20,8%	22,0%	12,2%	17,5%	21,7%	34,4%	13,2%	100,0%	5,2%	5,2%	26,2%	27,8%	9,4%	9,4%	22,0%	19,6%
Aksjer	93,3%	100,0%	49,1%	62,8%	93,1%	100,0%	100,0%	100,0%	12,9%	12,9%	93,4%	100,0%	10,1%	10,1%	89,1%	100,0%
Obligasjoner	91,5%	100,0%	96,3%	100,0%	96,3%	100,0%	96,3%	100,0%	90,2%	90,2%	96,4%	100,0%	94,3%	94,5%	91,5%	100,0%
Min andel																
Bitcoin	0,0%		0,0%		0,0%		0,0%		0,0%		0,0%		0,0%		0,0%	
Råvarer	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,9%	0,9%	0,0%	0,0%	2,9%	2,9%	0,0%	0,0%
Aksjer	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	6,2%	6,2%	0,0%	0,0%	2,6%	2,6%	0,0%	0,0%
Obligasjoner	0,0%	0,0%	50,1%	37,2%	6,9%	0,0%	0,0%	0,0%	83,2%	83,3%	0,0%	0,0%	84,1%	84,2%	0,0%	0,0%
Standardavvik vekter																
Bitcoin	8,9%		2,9%		6,3%		9,8%		0,2%		11,6%		0,1%		13,5%	
Råvarer	3,2%	3,6%	2,5%	4,1%	4,3%	6,6%	2,2%	12,8%	1,0%	1,0%	5,7%	6,2%	1,9%	1,9%	3,2%	2,9%
Aksjer	29,4%	31,2%	12,7%	13,8%	26,7%	25,9%	32,4%	29,9%	1,7%	1,7%	30,1%	35,3%	1,7%	1,7%	24,6%	30,3%
Obligasjoner	33,6%	31,8%	11,6%	14,3%	23,9%	25,9%	27,1%	27,6%	1,5%	1,4%	35,4%	36,7%	3,0%	3,1%	32,6%	30,7%
Sum	45,6%	44,7%	17,7%	20,3%	36,6%	37,2%	43,4%	42,6%	2,5%	2,5%	48,2%	51,3%	3,9%	4,0%	43,1%	43,2%

## 6.2 Delperiode 1

I delperiode 1 (01.09.2012-31.08.2013) har alle porteføljene som inkluderer Bitcoin høyere Sharpe rate enn sin motpart, men forskjellen er ikke signifikant for Minimum Variance (MinVar) porteføljen (Tabell 9). MinVar porteføljen har også lavere Omega rate, med Bitcoin. Omega, Reward-to-Risk timing, og Max Sharpe porteføljene har signifikant høyere standardavvik med Bitcoin. Interessant finner vi at Mean Variance (MV) 5 og 10% har signifikant lavere standardavvik når vi utvider investeringsuniverset til å inneholde Bitcoin, men begge to har adskillig høyere kurtose og negativ skjevhet. Den høyeste Sharpe raten i perioden er Omega porteføljen med Bitcoin, den har også den høyeste Omega raten. I tillegg har den lavere kurtose enn optimeringen uten Bitcoin, og høy positiv skjevhet. Den første delperioden er kort og kan derfor gi uventede utslag.

Tabell 9: Deskriptiv statistikk og gjennomsnittlige porteføljeandeler for de forskjellige optimeringsstrategiene i delperiode 1: 01.09.2012-31.08.2013. De årlige målene som er signifikant høyere enn tilsvarende mål for samme investeringsstrategi og vektene som er signifikant forskjellige fra 0 er markert i fet skrift. Gjennomsnittsvektene som er signifikant forskjellige fra 0 er også markert i fet skrift. Max Sharpe (MS), Mean Variance (MV), Minimum Variance (MinVar), Risk-to-reward timing (R-to-R), Risk Parity (RP) og Omega optimering (Omega).

	MS		MV 5%		MV 10%		MV 15%		MinVar		R-to-R		RP		Omega	
	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC
Årlig																
Gjennomsnitt	15,7%	0,7%	13,7%	7,4%	24,9%	11,3%	35,7%	12,3%	0,1%	-0,1%	27,0%	2,2%	-1,1%	-1,6%	<b>30,9%</b>	6,7%
Standardavvik	<b>8,6%</b>	3,7%	4,0%	<b>4,8%</b>	8,0%	<b>9,7%</b>	11,9%	12,7%	2,5%	2,5%	<b>15,1%</b>	5,1%	2,6%	2,6%	<b>7,2%</b>	3,3%
Sharpe	<b>1,82</b>	0,17	<b>3,38</b>	1,53	<b>3,12</b>	1,15	<b>2,99</b>	0,96	0,03	-0,06	<b>1,78</b>	0,42	<b>-0,45</b>	-0,65	<b>4,31</b>	2,00
Daglig data																
Omega	1,53	1,04	1,78	1,30	1,74	1,22	1,71	1,18	1,01	1,19	1,58	1,10	0,93	0,90	2,57	1,50
E-Kurtose	20,19	9,46	9,48	1,00	13,27	1,34	14,01	1,19	4,36	4,36	26,59	9,96	3,00	3,06	7,04	8,98
Skjevhet	-2,36	-1,16	-1,29	0,18	-1,72	0,15	-1,82	0,09	-0,82	-0,81	-2,76	-0,91	-0,73	-0,72	1,47	-0,28
Gjennomsnitt	0,06%	0,00%	0,05%	0,03%	0,10%	0,04%	0,14%	0,05%	0,00%	0,00%	0,10%	0,01%	0,00%	-0,01%	0,12%	0,03%
Minimum	-4,2%	-1,3%	-1,7%	-0,9%	-3,7%	-1,9%	-5,6%	-2,5%	-0,7%	-0,7%	-8,0%	-1,8%	-0,7%	-0,7%	-1,4%	-1,2%
Maksimum	2,0%	1,0%	0,8%	1,0%	1,6%	2,1%	2,3%	2,5%	0,6%	0,6%	3,5%	1,4%	0,5%	0,5%	2,6%	0,9%
Andeler gjennomsnitt																
Bitcoin	<b>4,1%</b>		<b>5,0%</b>		<b>10,6%</b>		<b>16,1%</b>		<b>0,04%</b>		<b>7,3%</b>		<b>0,1%</b>		<b>9,3%</b>	
Råvarer	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	<b>2,1%</b>	<b>2,1%</b>	<b>0,9%</b>	<b>1,0%</b>	<b>3,7%</b>	<b>3,7%</b>	<b>0,3%</b>	0%
Aksjer	<b>24,8%</b>	<b>24,6%</b>	<b>22,0%</b>	<b>42,0%</b>	<b>34,1%</b>	<b>76,8%</b>	<b>45,8%</b>	<b>97,5%</b>	<b>10,5%</b>	<b>10,6%</b>	<b>28,8%</b>	<b>32,2%</b>	<b>3,7%</b>	<b>3,7%</b>	<b>20,5%</b>	<b>23,2%</b>
Obligasjoner	<b>71,1%</b>	<b>75,4%</b>	<b>73,0%</b>	<b>58,0%</b>	<b>55,3%</b>	<b>23,2%</b>	<b>38,1%</b>	<b>2,5%</b>	<b>87,3%</b>	<b>87,4%</b>	<b>62,9%</b>	<b>66,8%</b>	<b>92,5%</b>	<b>92,6%</b>	<b>69,9%</b>	<b>76,8%</b>

I delperiode 1 er det MV 15% som i gjennomsnitt allokterer høyest andel i Bitcoin. I denne perioden er det ingen av porteføljene som har hatt høyere andel Bitcoin, enn i underkant av 30%. Dette er trolig høyere enn hva de fleste investorer finner akseptabelt i enkeltobjekter, spesielt når de er så risikable som Bitcoin. Flere av porteføljene har til tider plassert store andeler i henholdsvis aksjer og obligasjoner, men dette er indekser, og strider ikke mot prinsippene om portefølje diversifisering.

Tabell 10: Oversikt over høyeste og laveste andelen til hvert investeringsobjekt i de ulike porteføljene, samt standardavviket til porteføljevektene for delperiode 1: 01.09.2012 - 31.08.2013. Sum av standardavvikene er regnet som  $\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{\omega_i}^2}$  der  $\sigma_{\omega_i}$  er standardavviket til vektene til objekt i. Max Sharpe (MS), Mean Variance (MV), Minimum Variance (MinVar), Risk-to-reward timing (R-to-R), Risk Parity (RP) og Omega optimering (Omega).

	MS		MV 5%		MV 10%		MV 15%		MinVar		R-to-R		RP		Omega	
	Max andel	Min andel	Max andel	Min andel	Max andel	Min andel	Max andel	Min andel	Max andel	Min andel	Max andel	Min andel	Max andel	Min andel	Max andel	Min andel
Bitcoin	11,3%	0,3%	9,2%	2,0%	19,6%	4,5%	29,8%	6,9%	0,2%	0,1%	16,1%	1,2%	0,3%	0,0%	23,6%	0,3%
Råvarer	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	4,3%	4,2%	6,5%	7,1%	5,7%	5,7%	1,8%	0,0%
Aksjer	88,7%	82,5%	31,7%	45,6%	57,4%	86,7%	82,0%	100,0%	11,3%	11,7%	88,5%	100,0%	5,1%	5,1%	67,7%	71,7%
Obligasjoner	85,1%	85,2%	79,1%	67,5%	68,9%	42,3%	59,0%	18,2%	88,1%	88,1%	85,4%	87,8%	93,7%	93,7%	85,5%	85,2%
Bitcoin	0,3%	0,3%	2,0%	4,5%	6,9%	0,0%	0,0%	0,0%	0,9%	0,9%	1,2%	0,0%	0,0%	3,0%	3,0%	0,0%
Råvarer	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,9%	0,9%	0,0%	0,0%	3,0%	3,0%	0,0%	0,0%
Aksjer	12,6%	14,8%	12,9%	32,5%	14,1%	57,7%	15,3%	81,8%	8,9%	8,9%	10,9%	12,2%	3,0%	3,0%	8,6%	14,8%
Obligasjoner	0,0%	17,5%	65,4%	54,4%	36,0%	13,3%	7,9%	0,0%	86,7%	86,9%	0,0%	0,0%	89,2%	89,2%	8,7%	28,3%
Standardavvik vektor																
Bitcoin	3,5%	0,1%	2,3%	4,7%	7,1%	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%	4,8%	0,1%	0,1%	0,1%	8,2%	0,1%
Råvarer	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,8%	0,8%	2,1%	2,3%	0,7%	0,7%	0,5%	0,0%
Aksjer	22,3%	19,5%	5,8%	4,2%	13,0%	8,6%	20,0%	5,7%	0,7%	0,8%	28,1%	33,0%	0,6%	0,6%	16,9%	16,7%
Obligasjoner	25,1%	19,5%	4,1%	4,2%	9,6%	8,6%	14,8%	5,7%	0,5%	0,4%	31,5%	33,2%	1,1%	1,1%	23,3%	16,7%
Sum	33,8%	27,6%	7,4%	5,9%	16,8%	12,1%	25,9%	8,0%	1,2%	1,2%	42,6%	46,8%	1,4%	1,4%	29,9%	23,6%

## 6.3 Delperiode 2

I delperiode 2 (01.09.2013-31.08.2015) har alle porteføljene som inkluderer Bitcoin, med unntak av Minimum Variance og Omega oppnådd en høyere Sharpe rate enn tilsvarende portefølje uten Bitcoin. Det er signifikant høyere i Max Sharpe (MS), Reward-to risk-timing (R-to-R) og Mean Variance (MV) porteføljene. Omega porteføljen har signifikant dårligere Sharpe enn porteføljen uten Bitcoin. MS, R-to-R, Omega, og MV 10 og 15% har signifikant høyere standardavvik i forhold til tilsvarende portefølje uten Bitcoin. I delperiode 2 er det MV 5% som har den høyeste Sharpe raten. Her har MV 5% med Bitcoin tilsvarende standardavvik som MV 5% uten Bitcoin, men en god del høyere kurtose og negativ skjevhet. Omega med Bitcoin har også i periode 2 høyest Omega rate, men denne gangen er porteføljen svært risikabel med et standardavvik på 28,8%, E-kurtose lik 65,16 og en negativ skjevhet på -4,36. MS og R-to-R har i porteføljen som inkluderer Bitcoin oppnådd positiv skjevhet.

Tabell 11: Deskriptiv statistikk og gjennomsnittlige porteføljeandeler for de forskjellige optimeringsstrategiene i delperiode 2: 01.09.2013-31.08.2015. De årlige målene som er signifikant høyere enn tilsvarende mål for samme investeringsstrategi er markert i fet skrift. Gjennomsnittsvektene som er signifikant forskjellige fra 0 er også markert i fet skrift. Max Sharpe (MS), Mean Variance (MV), Minimum Variance (MinVar), Risk-to-reward timing (R-to-R), Risk Parity (RP) og Omega optimering (Omega).

	MS		MV 5%		MV 10%		MV 15%		MinVar		R-to-R		RP		Omega	
	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC
Årlig																
Avkastning	18,4%	8,3%	11,4%	9,2%	21,5%	16,4%	30,9%	18,6%	2,9%	3,0%	18,3%	8,5%	2,3%	2,2%	43,4%	11,8%
Standardavvik	<b>10,7%</b>	6,1%	5,3%	5,0%	<b>10,9%</b>	10,1%	<b>15,4%</b>	11,4%	2,5%	2,5%	<b>10,8%</b>	6,6%	2,5%	2,5%	<b>28,8%</b>	6,3%
Sharpe	<b>1,72</b>	1,34	<b>2,14</b>	1,81	<b>1,97</b>	1,62	<b>2,00</b>	1,62	1,17	1,18	<b>1,69</b>	1,28	0,89	0,88	1,50	<b>1,87</b>
Daglig data																
Omega	1,47	1,29	1,44	1,35	1,42	1,31	1,44	1,31	1,22	1,22	1,47	1,28	1,16	1,16	1,68	1,47
E-Kurtose	15,92	5,83	4,38	1,41	7,06	1,21	10,26	1,14	1,48	1,50	17,85	5,69	0,95	0,97	65,16	8,80
Skjevhet	1,14	-0,06	-0,86	-0,42	-1,08	-0,44	-1,27	-0,39	-0,20	-0,20	1,31	-0,24	-0,14	-0,15	-4,36	-0,83
Avkastning	0,07%	0,03%	0,04%	0,04%	0,08%	0,06%	0,12%	0,07%	0,01%	0,01%	0,07%	0,03%	0,01%	0,01%	0,17%	0,05%
Minimum	-3,3%	-2,1%	-1,9%	-1,3%	-4,5%	-2,3%	-7,0%	-2,5%	-0,6%	-0,6%	-3,3%	-2,1%	-0,6%	-0,6%	-22,4%	-2,5%
Maksimum	5,8%	2,2%	1,0%	1,0%	2,3%	2,0%	4,3%	2,4%	0,7%	0,7%	6,1%	2,2%	0,6%	0,6%	9,6%	1,7%
Andeler gjennomsnitt																
Bitcoin	<b>4,3%</b>		<b>1,6%</b>		<b>3,8%</b>		<b>6,0%</b>		<b>0,1%</b>		<b>4,4%</b>		<b>0,1%</b>		<b>8,8%</b>	
Råvarer	1,6%	1,4%	1,2%	1,1%	1,9%	0,6%	0,2%	0%	4,0%	3,9%	2,1%	2,2%	6,5%	6,5%	1,8%	1,2%
Aksjer	<b>45,0%</b>	<b>44,1%</b>	<b>37,1%</b>	<b>45,4%</b>	<b>70,5%</b>	<b>89,3%</b>	<b>89,7%</b>	<b>100,0%</b>	<b>9,1%</b>	<b>9,2%</b>	<b>42,3%</b>	<b>46,1%</b>	<b>5,3%</b>	<b>5,3%</b>	<b>39,6%</b>	<b>42,2%</b>
Obligasjoner	<b>49,1%</b>	<b>54,5%</b>	<b>60,1%</b>	<b>53,5%</b>	<b>23,9%</b>	<b>10,0%</b>	<b>4,1%</b>	0%	<b>86,7%</b>	<b>86,9%</b>	<b>51,2%</b>	<b>51,7%</b>	<b>88,1%</b>	<b>88,2%</b>	<b>49,7%</b>	<b>56,6%</b>

I delperiode 2 er det Omega strategien som i gjennomsnitt allokerer høyest andel i Bitcoin, og på det meste inneholder porteføljen 37% Bitcoin. En så stor andel Bitcoin gir porteføljen en svært høy kurtose, og verdien til porteføljen kan falle så mye som 22,4% i løpet av en dag (Tabell 11).

Tabell 12: Oversikt over høyeste og laveste andelen til hvert investeringsobjekt i de ulike porteføljene, samt standardavviket til porteføljevektene for delperiode 2: 01.09.2013 - 31.08.2015. Sum av standardavvikene er regnet som  $\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{\omega_i}^2}$  der  $\sigma_{\omega_i}$  er standardavviket til vektene til objekt i. Max Sharpe (MS), Mean Variance (MV), Minimum Variance (MinVar), Risk-to-reward timing (R-to-R), Risk Parity (RP) og Omega optimering (Omega).

	MS	MV 5%		MV 10%		MV 15%		MinVar		R-to-R		RP		Omega		
	Max andel															
Bitcoin	15,1%		3,3%		7,3%		11,2%		0,6%		15,9%		0,2%		37,0%	
Råvarer	20,8%	22,0%	12,2%	13,0%	21,7%	13,2%	4,4%	0,0%	5,2%	5,2%	26,2%	27,8%	9,4%	9,4%	22,0%	19,6%
Aksjer	93,3%	100,0%	49,1%	50,8%	93,1%	98,1%	100,0%	100,0%	10,9%	10,9%	93,4%	100,0%	6,6%	6,6%	89,1%	100,0%
Obligasjoner	86,6%	86,6%	71,5%	57,9%	45,3%	16,6%	20,8%	0,0%	89,0%	88,6%	90,6%	90,6%	91,8%	91,9%	86,9%	86,9%
	Min andel															
Bitcoin	0,0%		0,0%		0,0%		0,0%		0,0%		0,0%		0,0%		0,0%	
Råvarer	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	2,3%	1,6%	0,0%	0,0%	3,9%	3,9%	0,0%	0,0%
Aksjer	13,4%	13,4%	26,2%	40,8%	49,1%	83,4%	70,4%	100,0%	7,5%	7,5%	9,4%	9,4%	3,7%	3,7%	13,1%	13,1%
Obligasjoner	0,0%	0,0%	50,1%	38,5%	6,9%	0,0%	0,0%	0,0%	84,4%	85,3%	0,0%	0,0%	84,1%	84,2%	0,0%	0,0%
	Standardavvik vekter															
Bitcoin	5,1%		1,3%		3,0%		4,8%		0,2%		5,2%		0,0%		11,9%	
Råvarer	4,6%	4,7%	3,4%	3,6%	6,0%	2,7%	0,9%	0,0%	0,7%	0,8%	5,9%	6,2%	1,9%	1,9%	4,9%	4,1%
Aksjer	33,3%	33,8%	7,4%	2,8%	14,3%	4,3%	10,3%	0,0%	0,9%	1,0%	32,5%	37,3%	0,9%	0,9%	27,4%	32,7%
Obligasjoner	38,7%	34,8%	6,7%	4,4%	12,6%	5,0%	6,9%	0,0%	1,1%	1,0%	38,1%	38,1%	2,6%	2,6%	38,2%	33,4%
Sum	51,5%	48,8%	10,6%	6,4%	20,2%	7,1%	13,3%	0,0%	1,6%	1,6%	50,6%	53,7%	3,3%	3,4%	48,8%	46,9%

## 6.4 Delperiode 3

I delperiode 3 (01.09.2015-18.09.2017) har porteføljene som inneholder Bitcoin signifikant høyere Sharpe rate (Tabell 13). Dette gjelder også alle porteføljenes standardavvik med unntak av Mean Variance 5%, Risk Parity og Minimum Variance. Max Sharpe (MS) med Bitcoin har utfra våre risikjusterte avkastningsmål prestert best både når det gjelder Sharpe rate og omega rate. MS, og Risk-to-Reward timing (R-to-R) har som i delperiode 2, oppnådd positiv skjevhet.

Tabell 13: Deskriptiv statistikk og gjennomsnittlige porteføljeandeler for de forskjellige optimeringsstrategiene i delperiode 3: 01.09.2015-18.09.2017. De årlige målene som er signifikant høyere enn tilsvarende mål for samme investeringsstrategi er markert i fet skrift. Gjennomsnittsvektene som er signifikant forskjellige fra 0 er også markert i fet skrift. Max Sharpe (MS), Mean Variance (MV), Minimum Variance (MinVar), Risk-to-Reward timing (R-to-R), Risk Parity (RP) og Omega optimering (Omega).

	MS		MV 5%		MV 10%		MV 15%		MinVar		R-to-R		RP		Omega	
	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC
Årlig																
Avkastning	<b>19,7%</b>	4,5%	9,7%	7,0%	18,9%	11,8%	26,9%	9,5%	3,5%	3,3%	<b>21,6%</b>	4,2%	3,3%	2,9%	7,1%	2,9%
Standardavvik	<b>9,6%</b>	5,0%	4,8%	4,5%	<b>9,3%</b>	8,5%	<b>13,9%</b>	11,4%	2,3%	2,3%	<b>11,3%</b>	5,1%	2,4%	2,4%	<b>14,5%</b>	6,7%
Sharpe	<b>2,00</b>	0,80	<b>1,90</b>	1,45	<b>1,98</b>	1,34	<b>1,90</b>	0,79	<b>1,29</b>	1,20	<b>1,87</b>	0,73	<b>1,15</b>	1,02	<b>0,45</b>	0,35
Daglig data																
Omega	1,60	1,22	1,42	1,31	1,47	1,29	1,46	1,17	1,28	1,26	1,58	1,20	1,25	1,22	1,15	1,11
E-Kurtose	18,15	14,99	3,61	3,02	5,84	4,10	6,66	5,33	2,02	2,04	25,28	13,21	1,83	1,87	76,76	30,44
Skjevhet	1,57	-0,38	-0,35	-0,21	-0,30	-0,21	-0,36	-0,41	-0,40	-0,39	1,83	-0,35	-0,40	-0,39	-6,20	-1,09
Avkastning	0,08%	0,02%	0,04%	0,03%	0,07%	0,05%	0,10%	0,04%	0,01%	0,01%	0,08%	0,02%	0,01%	0,01%	0,03%	0,01%
Minimum	-3,0%	-1,9%	-1,3%	-1,4%	-2,9%	-2,5%	-4,4%	-3,7%	-0,7%	-0,7%	-4,0%	-1,9%	-0,8%	-0,8%	-11,4%	-3,7%
Maksimum	5,1%	1,9%	1,5%	1,1%	3,3%	2,4%	5,1%	3,6%	0,5%	0,5%	6,9%	1,9%	0,5%	0,5%	4,9%	3,6%
Andeler gjennomsnitt																
Bitcoin	<b>9,4%</b>		<b>6,4%</b>		<b>14,3%</b>		<b>22,4%</b>		<b>0,1%</b>		<b>11,2%</b>		<b>0,2%</b>		<b>14,4%</b>	
Råvarer	<b>0,9%</b>	<b>1,0%</b>	<b>1,0%</b>	<b>2,4%</b>	<b>1,3%</b>	<b>3,5%</b>	<b>1,1%</b>	<b>4,1%</b>	<b>3,9%</b>	<b>3,9%</b>	<b>3,6%</b>	<b>4,1%</b>	<b>3,8%</b>	<b>3,8%</b>	<b>0,3%</b>	<b>0,9%</b>
Aksjer	<b>25,0%</b>	<b>25,3%</b>	<b>19,8%</b>	<b>32,7%</b>	<b>32,6%</b>	<b>61,4%</b>	<b>39,0%</b>	<b>74,1%</b>	<b>8,6%</b>	<b>8,6%</b>	<b>22,6%</b>	<b>28,9%</b>	<b>5,0%</b>	<b>5,0%</b>	<b>24,0%</b>	<b>33,7%</b>
Obligasjoner	<b>64,7%</b>	<b>73,7%</b>	<b>72,8%</b>	<b>64,8%</b>	<b>51,8%</b>	<b>35,0%</b>	<b>37,4%</b>	<b>21,8%</b>	<b>87,4%</b>	<b>87,5%</b>	<b>62,6%</b>	<b>67,1%</b>	<b>91,0%</b>	<b>91,2%</b>	<b>61,2%</b>	<b>65,3%</b>

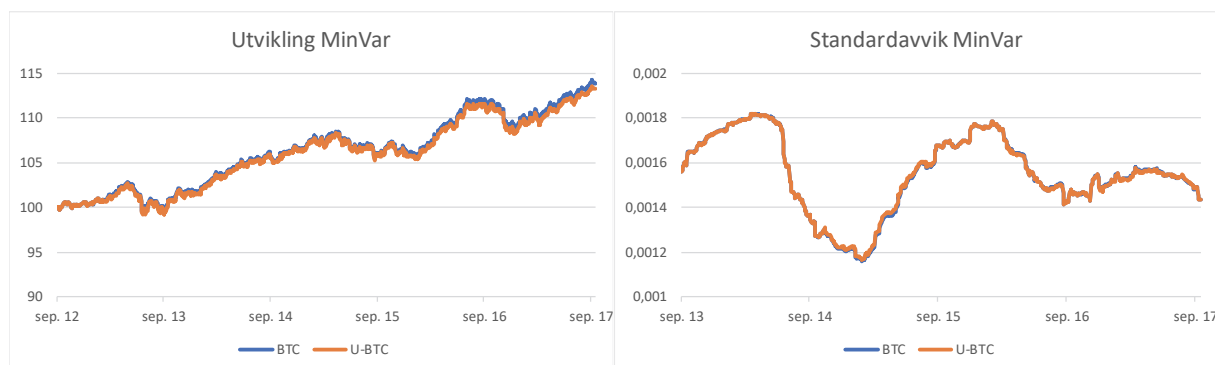
MV15% allokerer størst gjennomsnittlig andel, men har i løpet av perioden kun en maks andel på 28,8%. Til sammenligning har R-to-R hele 89,8% og Omega 86% på det meste.

Tabell 14: Oversikt over høyeste og laveste andelen til hvert investeringsobjekt i de ulike porteføljene, samt standardavviket til porteføljevektene for delperiode 3: 01.09.2015 - 18.09.2017. Sum av standardavvikene er regnet som  $\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{\omega_i}^2}$  der  $\sigma_{\omega_i}$  er standardavviket til vektene til objekt i. Max Sharpe (MS), Mean Variance (MV), Minimum Variance (MinVar), Risk-to-Reward timing (R-to-R), Risk Parity (RP) og Omega optimering (Omega).

	MS		MV 5%		MV 10%		MV 15%		MinVar		R-to-R		RP		Omega	
	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC	BTC	U-BTC
Max andel																
Bitcoin	65,8%		8,5%		18,9%		28,8%		0,4%		89,8%		0,3%		86,0%	
Råvarer	6,0%	8,6%	6,5%	17,5%	9,9%	34,4%	13,2%	100,0%	4,9%	4,9%	19,6%	22,0%	5,4%	5,4%	3,1%	5,8%
Aksjer	85,0%	100,0%	42,9%	62,8%	77,7%	100,0%	80,5%	100,0%	12,9%	12,9%	84,8%	100,0%	10,1%	10,1%	81,2%	98,9%
Obligasjoner	91,5%	100,0%	96,3%	100,0%	96,3%	100,0%	96,3%	100,0%	90,2%	90,2%	96,4%	100,0%	94,3%	94,5%	91,5%	100,0%
Min andel																
Bitcoin	0,0%		0,0%		0,0%		0,0%		0,0%		0,0%		0,1%		0,0%	
Råvarer	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	2,8%	2,5%	0,0%	0,0%	2,9%	2,9%	0,0%	0,0%
Aksjer	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	6,2%	6,2%	0,0%	0,0%	2,6%	2,6%	0,0%	0,0%
Obligasjoner	0,0%	0,0%	50,9%	37,2%	8,5%	0,0%	0,0%	0,0%	83,2%	83,3%	0,0%	0,0%	84,4%	84,5%	0,0%	1,1%
Standardavvik vektor																
Bitcoin	12,2%		2,2%		4,8%		7,4%		0,1%		16,5%		0,1%		16,1%	
Råvarer	2,0%	3,0%	2,0%	5,2%	2,9%	9,7%	3,3%	19,9%	0,6%	0,7%	6,4%	7,1%	0,7%	0,7%	0,8%	1,8%
Aksjer	23,8%	30,6%	12,8%	19,3%	25,5%	34,8%	29,7%	42,5%	2,3%	2,2%	24,9%	32,2%	2,3%	2,3%	21,2%	31,0%
Obligasjoner	28,6%	30,7%	13,6%	20,3%	26,5%	35,8%	31,6%	39,9%	2,0%	2,0%	33,3%	35,0%	2,9%	2,9%	28,0%	30,9%
Sum	39,3%	43,5%	18,9%	28,5%	37,2%	50,8%	44,1%	61,6%	3,1%	3,1%	45,2%	48,1%	3,7%	3,8%	38,7%	43,9%

## 6.5 Minimum Variance (MinVar)

Det glidende standardavviket for Minimum Variance er omtrent identisk for MinVar-BTC og MinVar-U-BTC. Dette følger av at porteføljen inkluderer svært små andeler av Bitcoin. Andelen er likevel nok til at MinVar-BTC oppnår litt høyere avkastning. Dette kommer tydeligst fram på slutten av perioden.

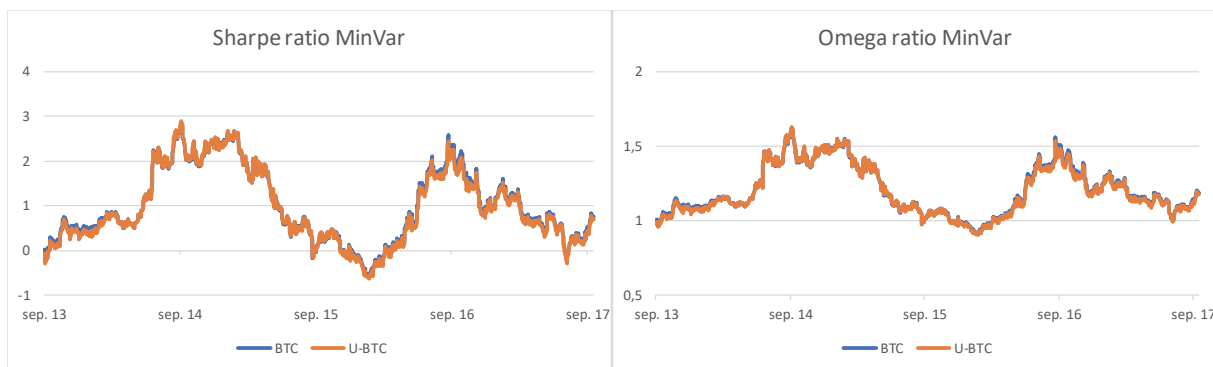


Figur 8 A og B: Grafisk fremstilling av verdi utviklingen til Minimum Variance porteføljen for perioden 01.09.2012-18.09.2017, indeksert til 100 01.09.2012 og 260 handledagers glidende standardavvik til Minimum Variance porteføljene med og uten Bitcoin, for perioden 01.09.2013 - 18.09.2017.

Figur 9A og B illustrer minimum variance porteføljens rullerende sharpe- og omega rate. Selv om det er vanskelig å se fra grafen, har MinVar-BTC oppnådd et signifikant bedre sharpe rate<sup>10</sup> og en litt høyere omega rate. Hvem av MinVar porteføljene som har prestert best, har i løpet av periodene variert. MinVar-BTC hadde sine beste prestasjoner i periode 3.

Siden MinVar kun søker å minimere risiko har mesteparten av porteføljen bestått av obligasjoner. Bitcoin har en ekstrem høy volatilitet som ikke kompenserer for de lave korrelasjonene. Dette gir forventet resultat hvor MinVar-BTC i gjennomsnitt kun allokterer 0,1% Bitcoin. Når det gjelder våre risikjusterte avkastningsmål er MinVar sammen med RP den porteføljen som oppnår lavest rater. Porteføljen tar, som nevnt, på seg liten risiko, men oppnår også liten avkastning.

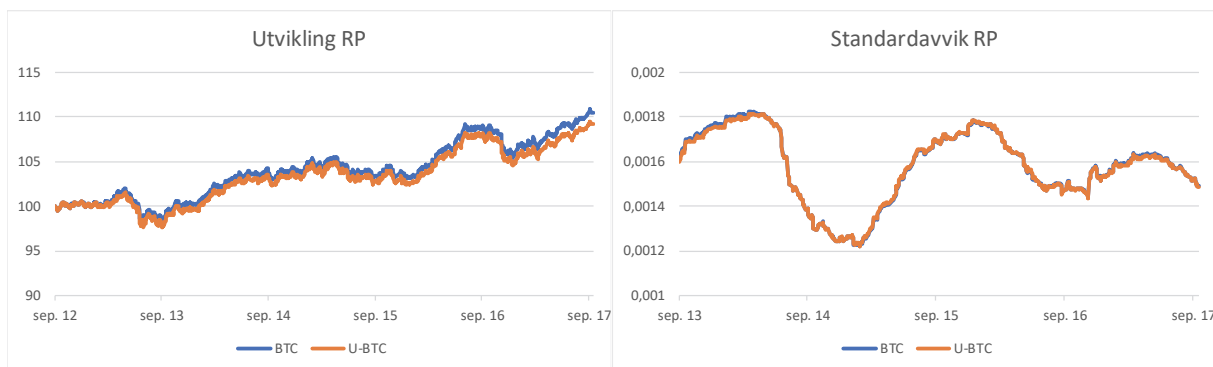
<sup>10</sup> Ikke signifikant når man justerer for transaksjonskostnader, se kapittel 7.1.



Figur 9 A og B: Grafisk fremstilling av 260 handledagers rullerende Sharpe og Omega rater til Minimum Variance porteføljene med og uten Bitcoin, for perioden 01.09.2013 - 18.09.2017.

## 6.6 Risk Parity (RP)

Med svært små Bitcoin andeler, er det er små forskjeller mellom porteføljene. Standardavviket (Figur 10B) er som i Minimum variance omtrent helt identisk mellom porteføljen med og uten Bitcoin, mens avkastningen (Figur 10A) er noe høyere for porteføljen med Bitcoin. Selv om Risk Parity strategien med Bitcoin (RP-BTC) ikke gjør det nevneverdig bedre enn Risk Parity strategien uten Bitcoin (RP-U-BTC) med tanke på våre risikojusterte avkastningsmål, har RP-BTC oppnådd litt høyere avkastning uten å ta på seg mer risiko.

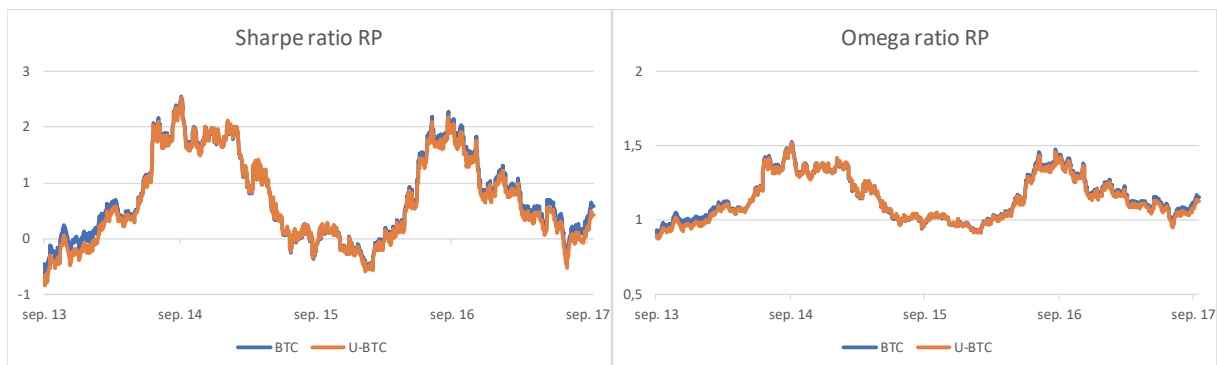


Figur 10 A og B: Grafisk fremstilling av verdi utviklingen til Risk Parity porteføljen for perioden 01.09.2012- 18.09.2017, indeksert til 100 01.09.2012 og 260 handledagers glidende standardavvik til Risk Parity porteføljene med og uten Bitcoin, for perioden 01.09.2013 - 18.09.2017.

RP-BTC gjør det noe bedre med hensyn på Sharpe- og Omega rate (Figur 11). Forskjellen er minimal, men nok til at Sharpe-raten i både delperiode 1 og periode 3 er signifikant høyere for RP-BTC i forhold til RP-U-BTC.



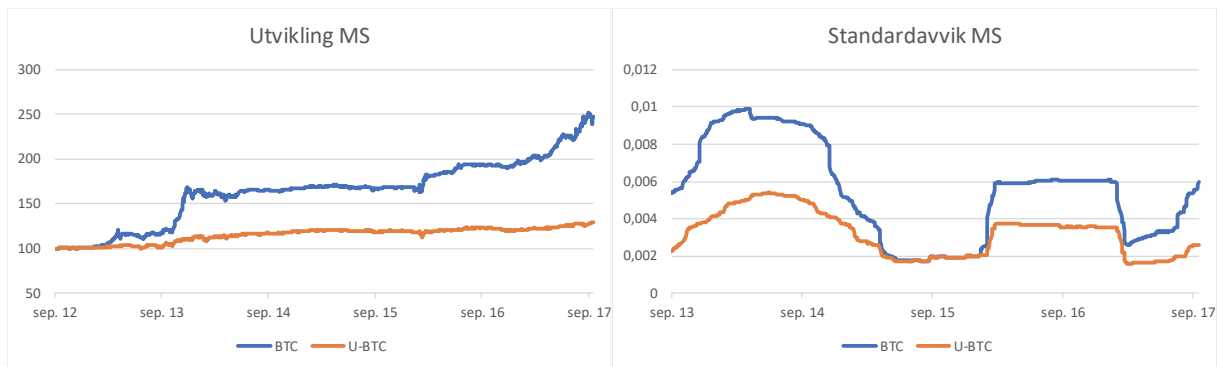
Andel Bitcoin er tilnærmet tilsvarende som i MinVar-BTC, og porteføljen allokerer i gjennomsnitt kun 0,1% Bitcoin og 0,3% på det meste. Maksandelen er dermed noe lavere enn MinVar-BTC og vi ser også at andel obligasjoner er noe høyere. Dette gjør at vi får en portefølje med svært lav avkastning og liten risiko. Strategien baserer seg på at alle investeringsobjektene skal tilføre like mye risiko til porteføljen. De lave andelene allokeret i Bitcoin illustrerer hvor høy risiko Bitcoin har i forhold til de andre investeringsobjektene.



Figur 11 A og B: Grafisk fremstilling av 260 handledagers rullerende Sharpe og Omega rater til Risk Parity porteføljene med og uten Bitcoin, for perioden 01.09.2013 - 18.09.2017.

## 6.7 Max Sharpe (MS)

Max Sharpe porteføljen med Bitcoin (MS-BTC) har i hele perioden hatt like høyt eller høyere rullerende standardavvik enn Max Sharpe porteføljen uten Bitcoin (MS-U-BTC) (se Figur 12). I perioden der det rullerende standardavviket har vært tilsvarende har også verdiutviklingen vært det. De store forskjellene i verdiutviklingen kom i perioder da standardavviket til MS-BTC var høyere enn standardavviket til MS-U-BTC.



Figur 12 A og B: Grafisk fremstilling av verdi utviklingen til Max Sharpe porteføljen for perioden 01.09.2012- 18.09.2017, indeksert til 100 01.09.2012 og 260 handledagers glidende standardavvik til Max Sharpe porteføljene med og uten Bitcoin, for perioden 01.09.2013 - 18.09.2017.

I periodene vi har undersøkt har porteføljen med Bitcoin hatt signifikant høyere Sharpe rate. Dette ser vi også av grafen, hvor MS-BTC stort sett ligger høyere enn MS U-BTC (se Figur 13). Samme resultater finner vi også for Omega raten. MS-BTC har høyere Omega rate for alle periodene vi har undersøkt, og som vi ser av grafene følger Sharpe og Omega hverandre ganske tett.

MS-BTC har i gjennomsnitt bestått av 6,3% Bitcoin og på det meste 65,8%. Porteføljen har gjort det bedre enn MS-U-BTC med hensyn på våre risikjusterte avkastningsmål, men sammenlignet med våre andre optimaliseringsporteføljer er det flere som har oppnådd høyere Sharpe rate. Porteføljen har i perioden hatt en positiv skjevhet, samt høy kurtose, og er en av porteføljene som i løpet av perioden har oppnådd høyest Omega rate.



Figur 13 A og B: Grafisk fremstilling av 260 handledagers rullerende Sharpe og Omega rater til Max Sharpe porteføljene med og uten Bitcoin, for perioden 01.09.2013 - 18.09.2017.

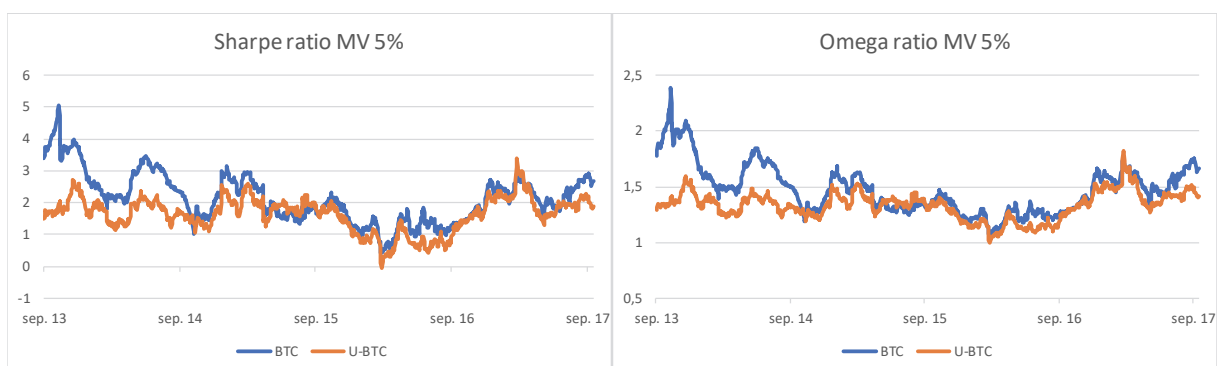
## 6.8 Mean Variance (MV)

Med en begrensning på 5% volatilitet ser vi av Figur 14B, at standardavviket i store deler av perioden har vært lavere enn tilsvarende portefølje uten BTC. Fra Tabell 7 ser vi at standardavviket kun er 0,1% høyere i løpet av hele perioden. Å inkludere Bitcoin i Mean Variance 5% har bidratt til god meravkastning (Figur 14A) uten særlig forskjell i standardavvik (Figur 14B).



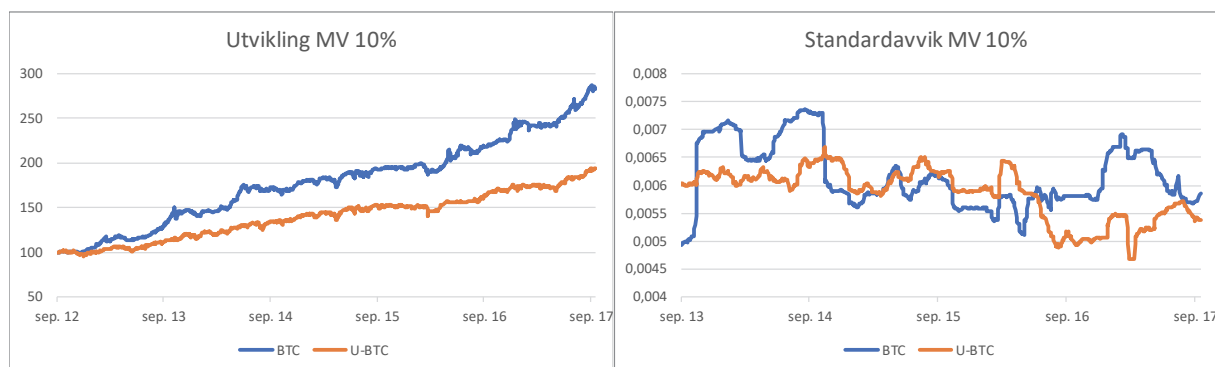
Figur 14 A og B: Grafisk fremstilling av verdi utviklingen til Mean Variance 5% porteføljen for perioden 01.09.2012-18.09.2017, indeksert til 100 01.09.2012 og 260 handledagers glidende standardavvik til Mean Variance 5% porteføljene med og uten Bitcoin, for perioden 01.09.2013 - 18.09.2017.

Et lavt standardavvik og en god del høyere avkastning, fører naturligvis til en høy Sharpe rate. Sharpe raten på 2,24 er den høyeste av porteføljeutvalget vårt, og kan i stor grad tilskrives perioden før 2014 (Figur 15A). Dette samsvarer med Carpenter (2016) sine funn. Bitcoin -inkluderingen i MV 5% har, som nevnt, ikke medført høyere standardavvik men både E-kurtose og den negative skjevheten har gått opp. Likevel har Mean Variance porteføljen med Bitcoin (MV 5%-BTC) stort sett en høyere Omega rate i hele perioden (Figur 15B). I gjennomsnitt allokterer porteføljen 4,2% i Bitcoin og 9,2% på det meste. At andelen ikke er høyere, er som forventet med porteføljens volatilitetsskranke.



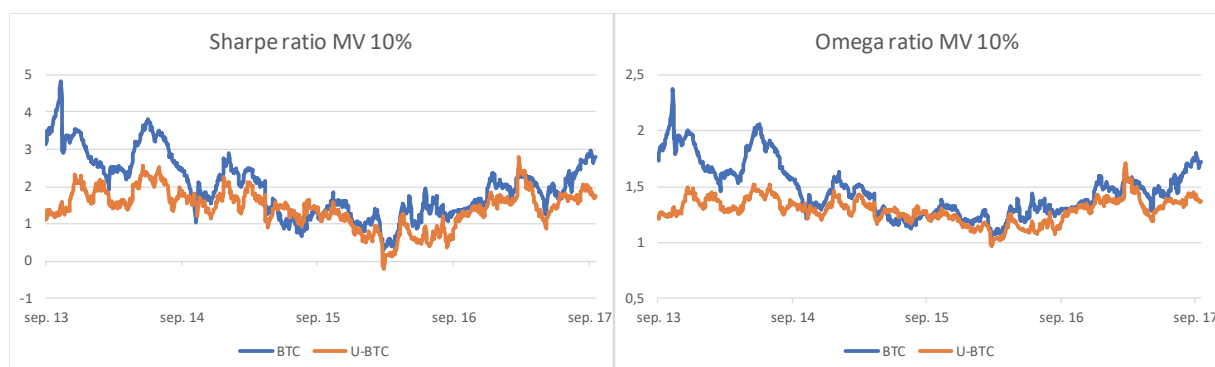
Figur 15 A og B: Grafisk fremstilling av 260 handledagers rullerende Sharpe og Omega rater til Mean Variance 5% porteføljene med og uten Bitcoin, for perioden 01.09.2013 - 18.09.2017.

Når vi øker volatilitetsbegrensningen til 10% ser vi at vi at både verdiutviklingen og standardavviket øker. Fra Tabell 7 ser vi at standardavviket til porteføljen med Bitcoin har økt fra 4,9% til 9,7%. Avkastningen har nesten økt tilsvarende, og vi får utvalgets nest høyeste sharpe rate på 2,15. Dette er signifikant sammenlignet med porteføljen uten Bitcoin.



Figur 16 A og B: Grafisk fremstilling av verdi utviklingen til Mean Variance 10% porteføljen for perioden 01.09.2012-18.09.2017, indeksert til 100 01.09.2012 og 260 handledagers glidende standardavvik til Mean Variance 10% porteføljene med og uten Bitcoin, for perioden 01.09.2013 - 18.09.2017.

Sharpe raten til porteføljen med Bitcoin har også her stort sett vært høyere i hele perioden (Figur 17A). Funnene er ganske tilsvarende som for MV 5%, bare mer ekstreme. Dette ser vi også av kurtosen og skjevheten som har økt ytterligere. Omega raten er som i MV 5%, også høyere for MV 10%-BTC i forhold til MV 10%-U-BTC (Figur 17B). Med en høyere volatilitetskranke er det naturlig at porteføljen allokerer en større andel i Bitcoin. Fra Tabell 7 og Tabell 8 ser vi nettopp dette, hvor gjennomsnittsandelen har økt til 9,4% og maksandelen til 19,6%.



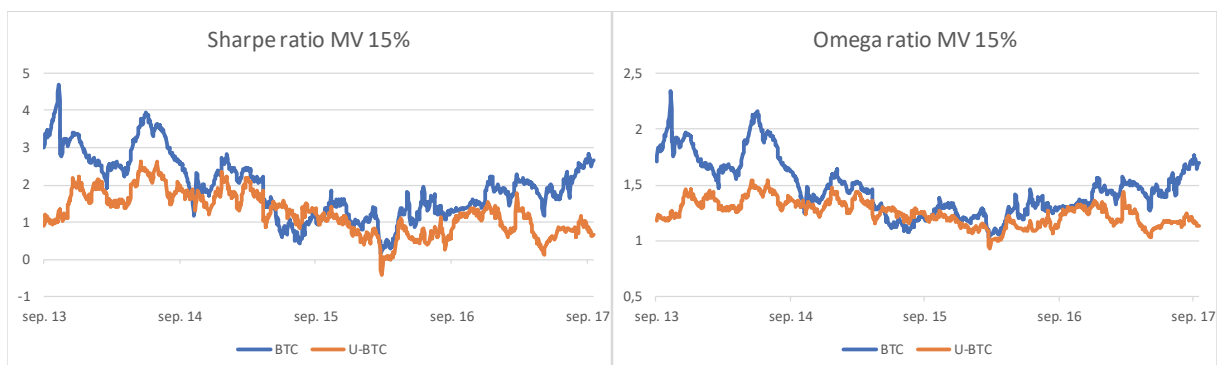
Figur 17 A og B: Grafisk fremstilling av 260 handledagers rullende Sharpe og Omega rater til Mean Variance 10% porteføljene med og uten Bitcoin, for perioden 01.09.2013 - 18.09.2017.

Den siste volatilitetskranken vi har satt opp er 15%. Porteføljen tillater nå enda større andeler i Bitcoin, og resultatene vi får er tilsvarende som ved forrige skranke økning. Fra Figur 18A og B ser vi

at både standardavviket og verdiutviklingen har økt, og i Tabell 7 ser vi at MV15%-BTC har oppnådd et standardavvik på 14,2% og en avkastning på 30,2%. Dette gir en Sharpe rate på 2,12, som er tett etter de andre Mean Variance - porteføljene. Kurtosen og skjevheten har som ved forrige økning av skranken, også økt ytterligere, men ikke mer enn at Omega raten er tilsvarende som de andre Mean Variance-porteføljene.



Figur 18 A og B: Grafisk fremstilling av verdi utviklingen til Mean Variance 15% porteføljen for perioden 01.09.2012-18.09.2017, indeksert til 100 01.09.2012 og 260 handledagers glidende standardavvik til Mean Variance 15% porteføljene med og uten Bitcoin, for perioden 01.09.2013 - 18.09.2017.



Figur 19 A og B: Grafisk fremstilling av 260 handledagers rullerende Sharpe og Omega rater til Mean Variance 15% porteføljene med og uten Bitcoin, for perioden 01.09.2013 - 18.09.2017.

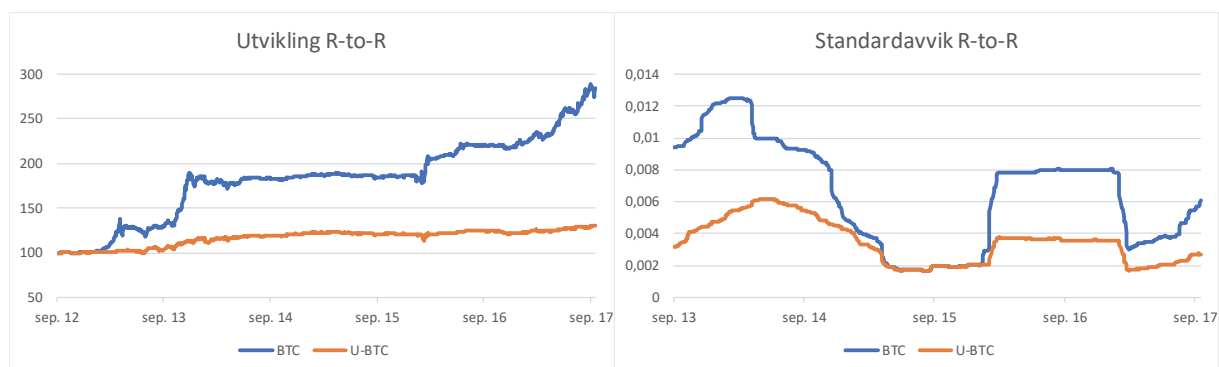
Vektene til Mean Variance – porteføljene er volatile, og det er store rebalanseringer. Dette kommer av porteføljestrategiens tendens til å velge hjørneløsninger (Broadie, 1993), og dette medfører naturlig høye transaksjonskostnader (Best, Michael J, & R., 1991). Fra Tabell 8 og Tabell 15 ser vi at vi får høyere rebalanseringskostnader og flere hjørneløsninger når vi utvider skrankene. En ser også at porteføljen uten Bitcoin oppnår flere hjørneløsninger som følge av færre aktiva.

Investeringsalternativene våre, med unntak av Bitcoin, er basert på indekser. Det betyr, at det ikke vil stride helt imot diversifiseringsprinsippene om vi skulle få 100% i disse investeringsalternativene.

Unntaket er, i tillegg til Bitcoin, når det oppstår 100% i råvarer (Bessler & Wolff, 2015). Dette skyldes at råvareindekser gjerne er volum vektet, og store deler vil da være plassert i olje. I vår utvalgte råvareindeks er det kun 30,6% i energi (Bloomberg, 2017) i kontrast til for eksempel Nasdaq commodity benchmark index som er vektet ut ifra  $\frac{2}{3}$ \*markedsverdi +  $\frac{1}{3}$  handle volum (NASDAQ, 2016). Denne har om lag 57 % i energi og over 33 % i olje (NASDAQ, 2017).

## 6.9 Reward-to-risk timing (R-to-R)

Reward-to-Risk porteføljen har i løpet av hele perioden hatt store andeler plassert i Bitcoin. Dette har medført høye maksimale daglige verdiforandringer (Tabell 7). På det meste har Bitcoin falt 8% og steget 6,9%. Fallet oppsto i den første delperioden (Tabell 9), og den høyeste verdistigning var i den siste delperioden (Tabell 13). Som for Max Sharpe porteføljene har Risk-to-Reward porteføljen med Bitcoin (R-to-R-BTC) i hele perioden hatt like høyt eller høyere rullerende standardavvik enn R-to-R porteføljen uten Bitcoin (R-to-R-U-BTC) (Figur 20B). I perioden der det rullerende standardavviket har vært tilsvarende har også verdiutviklingen vært det (Figur 20A og B). De store forskjellene i verdiutviklingen kom i perioder da standardavviket til R-to-R-BTC var høyere enn standardavviket til R-to-R-U-BTC.



Figur 20 A og B: Grafisk fremstilling av verdi utviklingen til Reward-to-risk timing porteføljen for perioden 01.09.2012-18.09.2017, indeksert til 100 01.09.2012 og 260 handledagers glidende standardavvik til Reward-to-risk timing porteføljene med og uten Bitcoin, for perioden 01.09.2013 - 18.09.2017.

R-to-R strategien med Bitcoin har hatt gode risikojusterte prestasjonsmål i både starten og slutten av perioden sammenlignet med R-to-R-U-BTC (Figur 21). Både Sharpe- og Omega rate har stort sett vært høyere for R-to-R-BTC, men fra rundt starten av 2015 til starten av 2016 gjør R-to-R-U-BTC det bedre eller om lag like godt som R-to-R-BTC. Dette samsvarer med funnen til Carpenter (2016).

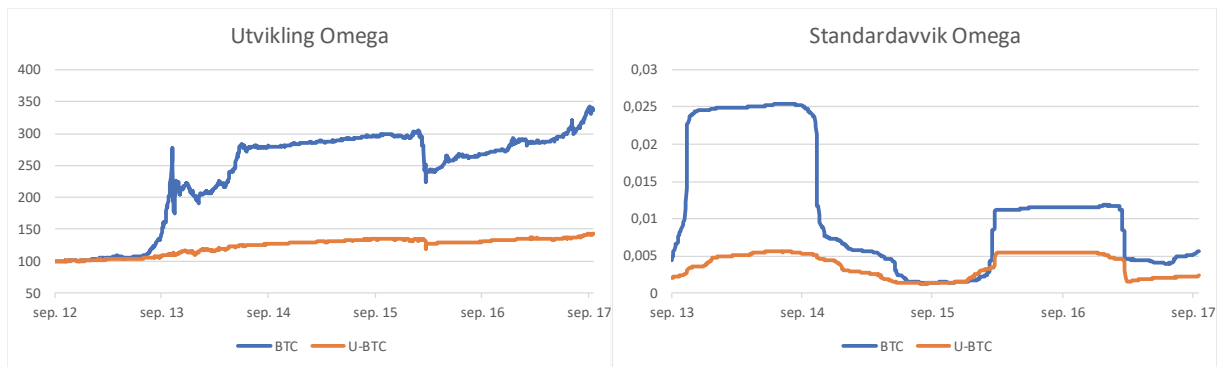


Figur 21 A og B: Grafisk fremstilling av 260 handledagers rullerende Sharpe og Omega rater til Reward-to-risk timing porteføljene med og uten Bitcoin, for perioden 01.09.2013 - 18.09.2017.

R-to-R-BTC allokerer i gjennomsnitt 7,7% Bitcoin, og har på det meste 89,8%. Dette er en strategi som velger investeringsobjektene basert på momentum, og dette har ført til store rebalanseringer. R-to-R strategien har blant de høyeste rebalanseringskostnadene av våre investeringsstrategier (Tabell 15). Porteføljen har i hele perioden sett under ett hatt høy kurtose, litt negativ skjevhet og er av strategiene som har oppnådd høyest Omega rate (Tabell 7). Når vi bare ser på delperiode 2 og 3 har den hatt positiv skjevhet (Tabell 11 og Tabell 13).

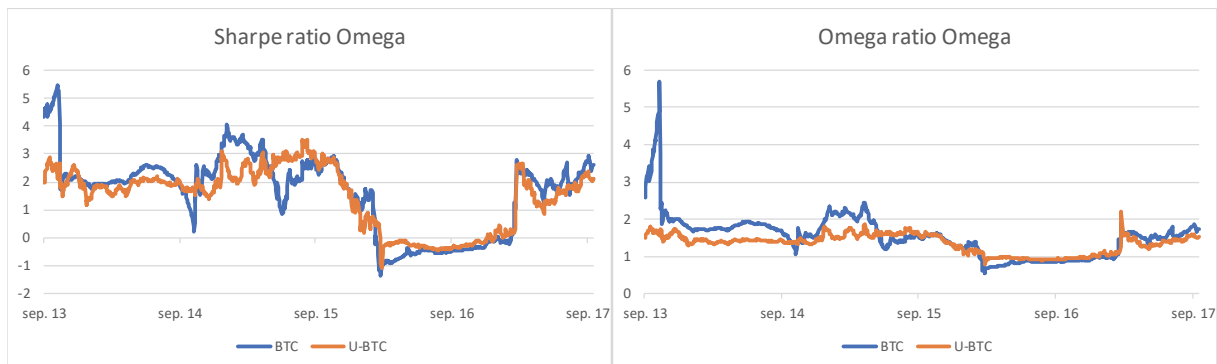
## 6.10 Omegaoptimering

Strategien har til tider store andeler i Bitcoin, og Omega strategien med Bitcoin (Omega-BTC) er den porteføljen som har størst maksimale daglige svingninger. På det meste har Omega-BTC falt 22% og steget 9,6%. Dette har gjort porteføljen svært risikabel. Det daglige standardavviket har ligget på omlag 2,5% over en lenger periode i starten (Figur 23) dette er svært høyt, og illustrerer godt den høye risikoen til porteføljen.



Figur 22 A og B: Grafisk fremstilling av verdi utviklingen til Omega optimering porteføljen for perioden 01.09.2012-18.09.2017, indeksert til 100 01.09.2012 og 260 handledagers glidende standardavvik til Omega optimering porteføljene med og uten Bitcoin, for perioden 01.09.2013 - 18.09.2017.

Den rullerende Sharpe raten har vært varierende for Omega-porteføljene (Figur 23B). I delperiodene 1 og 3 var Sharpe raten signifikant bedre for Omega-BTC (Tabell 9 og Tabell 13), og i delperiode 2 var den signifikant dårligere i forhold til Omega-U-BTC (Tabell 11). Når det gjelder Omega-rate, gjør Omega-BTC det stort sett bedre enn Omega-U-BTC (Figur 23B), og fra den deskriptive statistikken ser vi også at den var bedre for alle delperiodene (Tabell 9, Tabell 11 og Tabell 13).



Figur 23 A og B: Grafisk fremstilling av 260 handledagers rullerende Sharpe og Omega rater til Omega optimering porteføljene med og uten Bitcoin, for perioden 01.09.2013 - 18.09.2017.

Vektene i Omegaporteføljene er svært volatile, og det er store rebalanseringer; Omega-BTC har en rebalanseringskostnad på 9,4% av startverdi (Tabell 15). Dette er som forventet da, Omega optimeringsstrategien tar hensyn til både skjevhet, kurtose og høyere momenter, som er ustabile parametere i forhold til standardavvik og avkastning.

Omega-BTC har i snitt allokert 11,2% i Bitcoin, og hele 86% på det meste. Strategien har gitt høye risikomål, med et standardavvik på 20,6%, E-kurtose 106,4, og skjevhet -5,48. Man skulle intuitivt trodd at en så høy E-kurtose og så negativ skjevhet ville resultert i en lav Omega rate. Dette har ikke



vært tilfellet, da Omega-BTC er porteføljen som oppnår delt høyest Omega-rate i hele perioden, og høyest i to av delperiodene. Det kan skyldes at Omega raten også tar hensyn til høyere momenter i avkastningsfordelingen.

## 7 Robusthetsevaluering

For å analysere robustheten til resultatene vår har vi undersøkt om forandringer i optimeringsvindue påvirker resultatene. Vi har vurdert hvordan inkludering av transaksjonskostnader vil påvirke resultatene, og diskutert hvilke transaksjonskostnader Bitcoin transaksjoner bør ha i forhold til de andre investeringsobjektene. Til slutt diskuterer vi muligheten og nødvendigheten av å ilegge likviditetsskranker i optimeringene.

### 7.1 Alternative optimeringsvinduer

For å analysere resultatene for forskjellige estimeringsvinduer, har vi testet de samme modellene med 65 og 130 handledager som inndata. Disse modellene gir lignende resultater som optimeringene som baserer seg på 260 handledager.

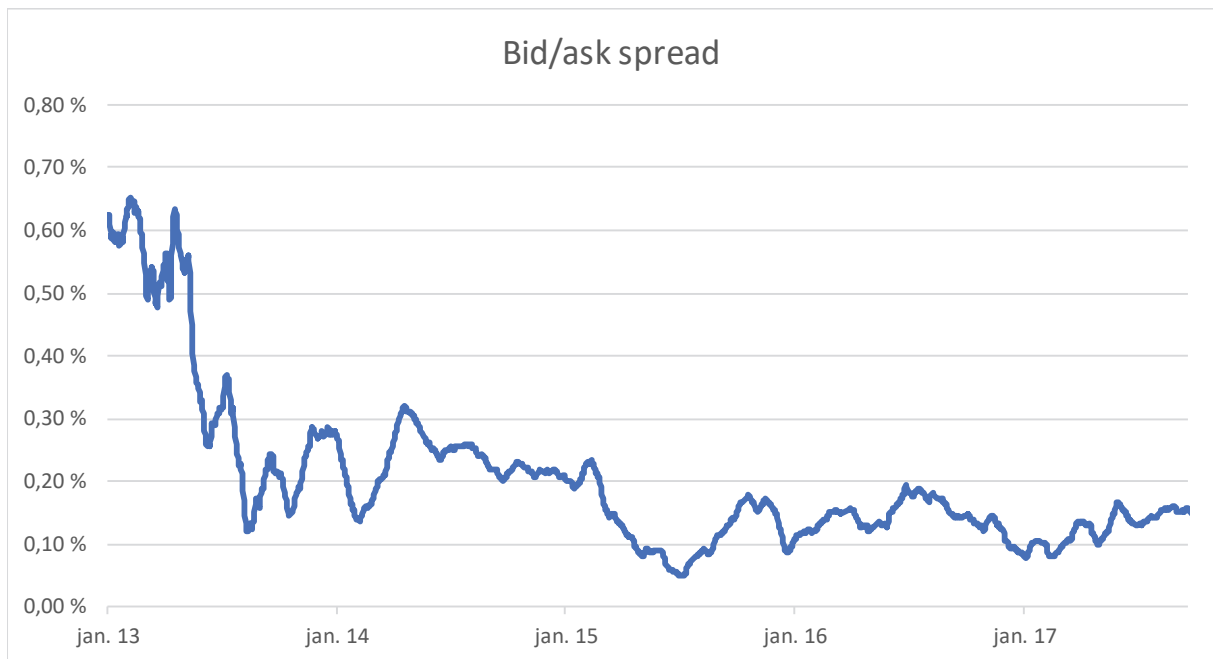
### 7.2 Transaksjonskostnader

I optimeringene våre har vi ikke inkludert transaksjonskostnaden. Dette kan ha påvirket resultatene våre til en viss grad. For å teste om utelukkning av transaksjonskostnader har favorisert Bitcoin porteføljene, har vi lagt til transaksjonskostnader og sammenlignet hvordan porteføljene uten Bitcoin har gjort det i forhold til sin motpart. Vi har regnet rebalanseringskostnaden som foreslått i DeMiguel et al. (2009)

$$RBK = V \times 30BPS \times \sum_{t=1}^T \sum_i^N (|\omega_{i,t+1} - \omega_{i,t}|) \quad (15)$$

der RBK er total rebalanseringskostnad  $\omega_{i,t+1}$  er porteføljevekten til investeringsobjekt i etter rebalansering, mens  $\omega_{i,t}$  er porteføljevekten rett før rebalansering,  $V$  er porteføljeværdien ved rebalansering. Vi har antatt en flat rebalanseringskostnad på 30 basis punkter slik som Bessler &

Wolff (2015). I starten av perioden vi har undersøkt var 30 basis punkter trolig lavt for Bitcoin. I Figur 24 ser vi at bid/ask-spreaden har falt betraktelig siden 2012, så vi mener det er en grei tilnærming.



Figur 24: Bid/ask spread for amerikanske dollar/Bitcoin i perioden 01.01.2013 - 18.09.2017, 30 dager glidendesnitt.

Vi ser av transaksjonskostnader som andel av totalavkastning i Tabell 15 at det kun er MinVar optimeringen som har høyere transaksjonskostnader for Bitcoin. Når vi justerer for dette oppnår MinVar BTC fortsatt høyere avkastning enn MinVar U-BTC, men Sharpe raten er ikke lenger signifikant bedre. For de andre optimeringsstrategiene vil de transaksjonskostnadene vi har valgt forbedre Bitcoin porteføljenes resultater i forhold til de uten.

Tabell 15: Oversikt over rebalanseringskostnadene til de forskjellige porteføljene, oppgitt som prosentandel av startverdi, som prosentandel av slutt verdi, og som prosentandel av total avkastning, for perioden 01.09.2012 - 18.09.2017, Max Sharpe (MS), Mean Variance (MV), Minimum Variance (MinVar), Risk-to-reward timing (R-to-R), Risk Parity (RP) og Omega optimering (Omega).

Rebalanseringskostnad		Som andel av start verdi	Som andel av slutt verdi	Som andel av totalavkastning
MS	BTC	5,9 %	2,4 %	4,0 %
	U-BTC	4,7 %	3,6 %	15,9 %
MV 5%	BTC	2,8 %	1,6 %	3,8 %
	U-BTC	2,8 %	1,9 %	5,7 %
MV 10%	BTC	7,4 %	2,6 %	4,0 %
	U-BTC	5,4 %	2,8 %	5,8 %
MV 15%	BTC	9,5 %	2,2 %	2,8 %
	U-BTC	7,6 %	4,0 %	8,3 %
MinVar	BTC	0,5 %	0,4 %	3,6 %
	U-BTC	0,2 %	0,2 %	1,6 %
R-to-R	BTC	8,7 %	3,1 %	4,7 %
	U-BTC	5,4 %	4,1 %	17,4 %
RP	BTC	0,3 %	0,2 %	2,5 %
	U-BTC	0,3 %	0,2 %	2,8 %
Omega	BTC	9,4 %	2,8 %	4,0 %
	U-BTC	4,9 %	3,4 %	11,5 %

I tidligere kapitler har vi diskutert transaksjonskostnader ved å se på standardavviket til vektene. Det er fordeler og ulemper med å bruke standardavvik som en approksimasjon for rebalanseringskostnader. Standardavviket tar ikke hensyn til verdien på porteføljen ved rebalanseringstidspunktet. På den andre siden veker den større rebalanseringer høyere enn små, noe som stemmer bedre med virkeligheten. Et annet problem med standardavvik i forhold til den metoden vi har brukt i dette kapitlet er at den regner avvikene fra gjennomsnittet, og ikke fra forrige rebalansering. Da de utfyller hverandre gjør vi en sammenligning, og diskuter forskjellene.

Som vi ser av Tabell 15 har max Sharpe med Bitcoin hatt en relativt lav absolutt rebalanseringskostnad i forhold til det vi forventet og fant da vi så på standardavvikene (se Tabell 16). Det er trolig to grunner til dette: For det første hadde den høyere standardavvik i de to første periodene, noe som gjør at rebalanseringene ble gjort da porteføljeverdien var lavere, og får derfor lavere absolutte rebalanseringskostnader. Den andre grunnen kan være at det er flere store rebalanseringer enn i de andre porteføljene. Dette vil slå kraftigere ut på standardavviket, enn på modellen vi har brukt for å regne rebalanseringskostnader. Vi ser det samme for Risk-to-reward optimeringen uten Bitcoin, som har den høyeste summen av standardavvikene, men av de lavere rebalanseringskostnaden ifølge metoden til DeMiguel et al. (2009) se formel: (15). Et alternativt mål man kunne sett på er standardavvikene til forandringene i porteføljevekter.

Tabell 16: Standardavvikene til porteføljevektene i perioden 01.09.2013- 18.09.2017. Sum er regnet som  $\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{\omega_i}^2}$  der  $\sigma_{\omega_i}$  er standardavviket til vektene til objekt  $i$ , Max Sharpe (MS), Mean Variance (MV), Minimum Variance (MinVar), Risk-to-reward timing (R-to-R), Risk Parity (RP) og Omega optimering (Omega).

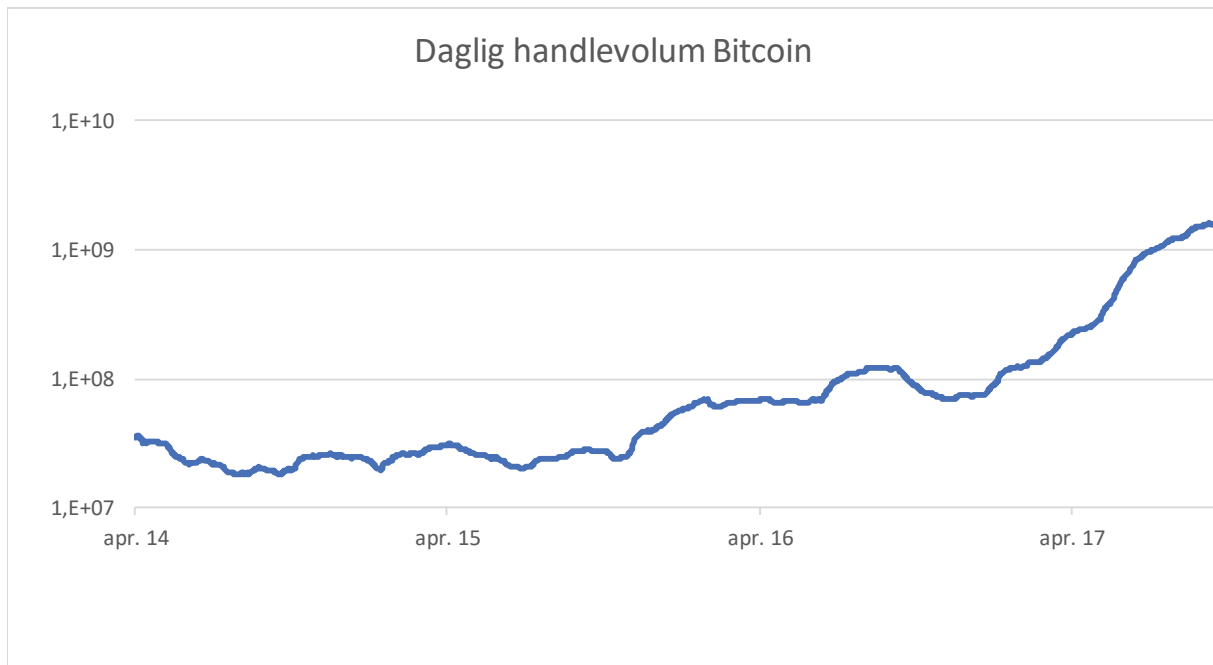
Standardavvik vekter		Bitcoin	Råvarer	Aksjer	Obligasjoner	Sum
MS	BTC	8,9 %	3,2 %	29,4 %	33,6 %	45,6 %
	U-BTC		3,6 %	31,2 %	31,8 %	44,7 %
MV 5%	BTC	2,9 %	2,5 %	12,7 %	11,6 %	17,7 %
	U-BTC		4,1 %	13,8 %	14,3 %	20,3 %
MV 10%	BTC	6,3 %	4,3 %	26,7 %	23,9 %	36,6 %
	U-BTC		6,6 %	25,9 %	25,9 %	37,2 %
MV 15%	BTC	9,8 %	2,2 %	32,4 %	27,1 %	43,4 %
	U-BTC		12,8 %	29,9 %	27,6 %	42,6 %
MinVar	BTC	0,2 %	1,0 %	1,7 %	1,5 %	2,5 %
	U-BTC		1,0 %	1,7 %	1,4 %	2,5 %
R-to-R	BTC	11,6 %	5,7 %	30,1 %	35,4 %	48,2 %
	U-BTC		6,2 %	35,3 %	36,7 %	51,3 %
RP	BTC	0,1 %	1,9 %	1,7 %	3,0 %	3,9 %
	U-BTC		1,9 %	1,7 %	3,1 %	4,0 %
Omega	BTC	13,5 %	3,2 %	24,6 %	32,6 %	43,1 %
	U-BTC		2,9 %	30,3 %	30,7 %	43,2 %

### 7.3 Handlevolum

I våre analyser har vi ikke lagt noen restriksjoner på andel Bitcoin i porteføljene med tanke på handlevolum. Dette har vi valgt med bakgrunn i det sterkt økende handlevolumet til Bitcoin siden 01.09.2012, og mener at de restriksjonene den tidligere lave likviditeten til Bitcoin har lagt vil bli mindre og mindre gjeldene i fremtiden.

Det er gjort analyser av hvordan et utvalg kryptovalutaer kan inkorporeres i en portefølje med aksjer under likviditets begrensninger. Trimborn, Li, & Härdle (2017) lanserte Liquidity Bounded Risk-return Optimization (LIBRO). I dere undersøkelse av kryptovalutamarkedet tok de utgangspunkt i handlevolumet den første dagen i hver måned fra juli 2016 til og med mars 2017 og ila skranker ut ifra LIBRO. I perioden de undersøkte var gjennomsnittlig handlevolum for Bitcoin på nevnte rebalanseringsdager omlag 125 millioner dollar, men som vi ser av Figur 25 har handlevolumet vært mye høyere den siste tiden.

Det er selvfølgelig fortsatt en lang vei opp til de mest handlede ETF-ene, som SPDR S&P 500 ETF som har omsatt for om lag 14 milliarder dollar i gjennomsnitt de siste 45 handledagene (etf.com, 2017) hentet 16.11.2017. Til sammenligning har Bitcoin omsatt for 2,63 milliarder dollar i gjennomsnitt de siste 45 handledagene (CoinMarketCap, 2017) hentet 16.11.2017.



Figur 25: 90 dagers (inkludert helg) glidende gjennomsnittlig handlevolum i Bitcoin. Målt i amerikanske dollar, logaritmisk skala. Tall fra coinmarketcap.com (CoinMarketCap, 2017)

## 8 Oppsummering og konklusjon

I denne oppgaven har vi undersøkt i hvilken grad inkludering av Bitcoin i investeringsuniverset til en portefølje, bestående av aksjer obligasjoner og råvarer, kan redusere risikoen og forbedre risikojusterte avkastningsmål. Vi har testet åtte investeringsstrategier out-of-sample med og uten Bitcoin.

Bitcoinavkastningene har hatt lave og stabile korrelasjoner med avkastningene til alle de andre investeringsobjektene vi har undersøkt i hele perioden. Korrelasjonene har ikke vært signifikante i noen av delperiodene. Dette tyder på at Bitcoin gir gode muligheter for diversifisering, og kan redusere risikoen til en portefølje bestående av aksjer, obligasjoner og råvarer. Til tross for de lave korrelasjonene i alle delperioder viser våre out-of-sample tester at Bitcoin ikke reduserer risikoen i

porteføljene som er konstruert for å oppnå lav risiko (Minimum Variance og Risk Parity). Dette tyder på at de lave korrelasjonene ikke veier opp for den høye risikoen man påtar seg ved å inkludere Bitcoin i en portefølje. Inkluderingen av Bitcoin i investeringsuniverset har signifikant redusert standardavviket til to av investeringsstrategiene (Mean Variance 5 og 10%) i delperiode 1, men har da økt E-kurtosen, og hatt høyere negativ skjevhet. Vi finner derfor at inkludering av Bitcoin i investeringsuniverset ikke reduserer risikoen til en portefølje bestående av aksjer, obligasjoner og råvarer out-of-sample. Resultatene er robuste med tanke på estimerings horisont og investeringsstrategi, og har vist seg å være konsistente i perioden september 2012 til september 2017.

Alle investeringsstrategiene oppnår signifikant høyere Sharpe rate, og høyere Omega rate ved inkludering av Bitcoin når vi ser på hele perioden under ett. Fem av strategiene (Max Sharpe, Mean Variance 5,10, 15% og Risk-to-Reward timing) har signifikant høyere Sharpe rate i alle delperiodene, og høyere Omega rate når vi har inkludert Bitcoin i investeringsuniverset. På den andre siden viser de rullerende vinduene at de til tider har lavere risikojusterte avkastningsmål. Disse periodene har vært korte, og få, og de fleste sammenfaller med Bitcoins kraftige prisfall i starten av 2014. Vi finner at inkludering av Bitcoin i investeringsuniverset i stor grad forbedrer de risikojusterte avkastningsmålene. Resultatene våre er robuste med tanke på estimeringshorisont og investeringsstrategi, og er med unntak av perioden etter fallet i 2014 konsistente for hele perioden.

En inkludering av Bitcoin i investeringsuniverset, kan gi høyere risikojusterte avkastningsmål for de investeringsstrategiene vi har undersøkt. Men for de fleste strategiene, med unntak av Minimum Variance og Risk Parity fører dette til økt risiko, enten i form av signifikant høyere standardavvik, og eller høyere kurtose og økt negativ skjevhet. Bitcoin vurderes som et mulig investeringsobjekt dersom målet er å øke risikojustertavkastning, men innebærer økt risiko. For risiko-reduksjon er Bitcoininvesteringer ikke et godt alternativ i perioden vi har undersøkt.

Funnene vår må sees i lys av Bitcoins unge alder og dermed den korte tidsperioden som er undersøkt. Vi oppfordrer til lignende out-of-sample studier i fremtiden for å undersøke om resultatene tåler tidens tann, dersom Bitcoin i større grad integreres i den tradisjonelle finansverden. Vi vil i tillegg oppfordre til å inkludere transaksjonskostnadene direkte i optimeringsmodellene, og inkludere alternative skranker for eksempel likviditetsskranker som baserer seg på Bid/Ask spread i tillegg til handlevolum.

## Referanser

- Anderson, R., Bianchi, S., & Goldberg, L. (2012). Will my risk parity strategy outperform? *Financial Analysts Journal*, 68(6), ss. 75-93.
- Bailey, D. H., & Lopez de Prado, M. (2012). The Sharpe Ratio Efficient Frontier. *Journal of Risk*, 15(2), ss. 3-44.
- Baker, M., Bradley, B., & Wurgler, J. (2011). Benchmarks as limits to arbitrage: Understanding the low volatility anomaly. *Financial Analysts Journal*, 67(1), ss. 40-54.
- Bank for International Settlements. (2015). Digital currencies. *Committee on Payments and Market Infrastructures*.
- Bessler, W., & Wolff, D. (2015). Do Commodities Add Value in Multi-Asset-Portfolios? An Out-of-Sample Analysis for Different Investment Strategies. *Journal of Banking and Finance*, 60(C), ss. 1-20.
- Best, Michael J, G., & R., R. (1991). On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Change in Asset Means: Some Analytical and Computational Results. *The Review of Financial Studies*, 4(2), 315-342.
- bitcoinity.org. (2017). *bitcoinity.org*. Hentet fra <http://data.bitcoinity.org/bitcoin/difficulty/5y?r=day&t=l>
- bitcoinity.org. (2017). *bitcoinity.org*. Hentet fra [http://data.bitcoinity.org/markets/price\\_volume/all/USD?t=lb&vu=curr](http://data.bitcoinity.org/markets/price_volume/all/USD?t=lb&vu=curr)
- Bloomberg. (2017). *Index Methodology The Bloomberg Commodity Index Family*. Hentet fra <https://www.etfsecurities.com/documents/index%20methodology%20-%20dow%20jones-ubs%20commodity%20indexes.pdf>
- Bohannon, J. (2017). *www.sciencemag.org*. Hentet fra <http://www.sciencemag.org/news/2016/03/why-criminals-cant-hide-behind-bitcoin>
- Briere, M., Oosterlinck, K., & Szafarz, A. (2015). Virtual Currency, Tangible Return: Portfolio Diversification with Bitcoin. *Journal of Asset Management*, 16(6), ss. 365-373.
- Broadie, M. (1993). Computing efficient frontiers using estimated parameters. *Annals of Operations Research*, 45(1), ss. 21-58.
- Carpenter, A. (2016). Portfolio Diversification with Bitcoin. *Journal of Undergraduate Research in Finance*, 6(1), ss. 1-27.
- Chopra, V. K., & Ziemba, W. T. (1993). The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice. *The Journal of Portfolio Management*, 19(2), ss. 6-11.
- CME Group. (2017). *www.cmegrroup.com*. Hentet fra [http://www.cmegrroup.com/media-room/press-releases/2017/10/31/cme\\_group\\_announceslaunchofbitcoinfutures.html](http://www.cmegrroup.com/media-room/press-releases/2017/10/31/cme_group_announceslaunchofbitcoinfutures.html)
- CoinMarketCap. (2017). *coinmarketcap.com*. Hentet fra <https://coinmarketcap.com/currencies/bitcoin/historical-data/?start=20130428&end=20171116>

- DeMiguel, V., Garlappi, L., & Uppal, R. (2009). Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy? *The Review of Financial Studies*, 22(5), ss. 1915-1953.
- Erb, C., Harvey, C., & Viskanta, T. (1994). Forecasting international equity correlations. *Financial analysts journal*, 50(6), ss. 32-45.
- etf.com. (2017). *etf.com*. Hentet fra <http://www.etf.com/SPY>
- European Central Bank. (2012). *Virtual currency schemes*. European Central Bank 21. ISBN 978-92-899-0862-7.
- European Central Bank. (2016). *Opinion on a proposal for a directive of the European Parliament and of the Council amending Directive (EU) 2015/849 on the prevention of the use of the financial system for the purposes of money laundering or terrorist financing and amending Directive*.
- EVRY. (2015). *Banktjenester via blockchain*. Retrieved from <https://www.evry.com/no/media/artikler/banktjenester-via-blockchain/>
- EVRY. (2015). *Blockchain: Powering the Internet of Value*. Hentet fra <https://www.evry.com/globalassets/insight/bank2020/bank-2020---blockchain-powering-the-internet-of-value---whitepaper.pdf>
- Frazzini, A., & Pedersen, L. (2014). Betting against beta. *Journal of Financial Economics*, 111(1), ss. 1-25.
- Goldfeder, S., Kalodner, H., Reisman, D., & Narayanan, A. (2017). When the cookie meets the blockchain: Privacy risks of web payments via cryptocurrencies, unpublished manuscript, Princeton University.
- Goldwasser, S., Micali, S., & Rackoff, C. (1985). The Knowledge Complexity of Interactive Proof-Systems. *Proceedings of the seventeenth annual ACM symposium on Theory of computing*, ss. 291-304.
- Harber, S., & Stornetta, W. S. (1991). How to time-stamp a digital document. *Journal of Cryptology*, 3(2), ss. 99-111.
- Haugen, R. A., & Heins, A. J. (1975). "Risk and the Rate of Return on Financial Assets: Some Old Wine in New Bottles". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 10(5), ss. 775-784.
- Haugen, R., & Baker, N. (1991). "The efficient market inefficiency of capitalization-weighted stock portfolios". *The Journal of Portfolio Management*, 17(3), ss. 35-40.
- Henry, D., & Irrera, A. (2017). *www.reuters.com*. Hentet fra <https://www.reuters.com/article/legal-us-usa-banks-conference-jpmorgan/jpmorgans-dimon-says-bitcoin-is-a-fraud-idUSKCN1BN2PN>
- Kajtazi, A., & Moro, A. (2017). Bitcoin, Portfolio Diversification and Chinese Financial Markets. *Not published, Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=3062064>*.
- Keating, C., & Shadwick, W. (2002). A universal performance measure. *Journal of performance measurement*, 6(3), ss. 59-84.
- Kirby, C., & Ostdiek, B. (2012). It's All in the Timing: Simple Active Portfolio Strategies that Outperform Naïve Diversification. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 47(2), 437-467.



- Longin, F., & Solnik, B. (1995). Is the correlation in international equity returns constant: 1960-1990? *Journal of international*, 14(1), ss. 3-26.
- Longin, F., & Solnik, B. (2001). Extreme correlation of international equity markets. *The journal of*, 56(2), ss. 649-676.
- Markowitz, H. (1952). Portefolio Selection. *Journal of Finance*, 7(1), ss. 77-91.
- Meucci, A. (2010). Quant Nugget 2: Linear vs. Compounded Returns – Common Pitfalls in Portfolio Management. *GARP Risk Professional Magazine*, 49-51.
- Nakamoto, S. (2008). Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System, white paper.
- NASDAQ. (2016). *NASDAQ Commodity Index Methodology*. Hentet fra [https://indexes.nasdaqomx.com/docs/NASDAQCommodity\\_Methodology.pdf](https://indexes.nasdaqomx.com/docs/NASDAQCommodity_Methodology.pdf).
- NASDAQ. (2017). *NASDAQ Commodity FactSheet*. Hentet fra [http://business.nasdaq.com/media/Nasdaq\\_Commodity\\_FactSheet\\_tcm5044-16476.pdf](http://business.nasdaq.com/media/Nasdaq_Commodity_FactSheet_tcm5044-16476.pdf).
- Osterrieder, J., & Lorenz, J. (2017). A Statistical Risk Assessment of Bitcoin and Its Extreme Tail Behaviour. *Annals of Financial Economics*, 12(1), ss. 21-39.
- Osterrieder, J., Lorenz, J., & Strika, M. (2016). Bitcoin and Cryptocurrencies - Not for the Faint-Hearted. *Advanced Risk & Portfolio Management Paper*, 4(1), ss. 56-94.
- Pieters, G. (2016). The Potential Impact of Decentralized Virtual Currency on Monetary Policy. *Globalization and Monetary Policy Institute 2016 Annual Report*, ss. 20-25.
- Pieters, G. C., & Vivanco, S. (2016). Financial Regulations and Price Inconsistencies Across Bitcoin Markets. *Globalization and Monetary Policy Institute Working Paper No. 293*.
- Qian, E. (2005). Risk Parity Portfolios: Efficient Portfolios Through True Diversification. *Panagora Asset Management working paper*.
- Sentralbankloven. (1985). *Lov 24. mai 1985 nr. 28 Lov om Norges Bank og pengevesenet mv*.
- Sharpe, W. F. (1966). Mutual Fund Performance. *The Journal of Business*, 39(1), ss. 119-138.
- THE EUROPEAN PARLIAMENT AND THE COUNCIL OF THE EUROPEAN UNION. (2009). *DIRECTIVE 2009/110/EC Article 2(1-2)*.
- Trimborn, S., Li, M., & Härdle, W. K. (2017). Investing with Cryptocurrencies - A Liquidity Constrained Investment Approach. *SFB 649 Discussion Papers 014*.
- Yermack, D. (2015). Is Bitcoin a real currency? An economic appraisal. I D. LEE, & K. Chuen, *Handbook of digital currency* (ss. 31-43). Academic Press.

## Appendiks

```
'Eksempel på program for å optimere modellene.
'Dette eksempelet er Omega optimeringen.

'Programmet er modifisert for de andre modellene,
'og baserer seg på samme prinsipper.
Sub mySolveBTC()

' Skru av forskjellige funksjoner for at Macroen skal gå raskere
Application.EnableCancelKey = xlDisabled
Application.ScreenUpdating = False
oldStatusBar = Application.DisplayStatusBar
Application.DisplayStatusBar = True
Application.StatusBar = "Please be patient..."

' Looper gjennom rebalanseringsdagene.
For i = 1 To 70

' Kollonne a inneholder en liste over radene det skal rebalansere på.
a = Range("A" & i)
    SolverReset

' Objektformlene som skal optimeres står I kollonne G på de radene
' som er listet I kollonne A.

' Objektformelen er avhengig av simple returns og vektene.

' Velger om den skal maksimeres eller minimeres.

' Vektene som objektformelen er avhengig av står I kollonene B til E,
' på radene listet i kollone 'A

' Velger Evolutionary Solver
    SolverOk SetCell:=Range("G" & a), _
    MaxMinVal:=1, _
    ByChange:=Range("B" & a, "E" & a), _
    Engine:=3
    ' Summen av vektene står I kollone F skal alltid være lik 1
    SolverAdd CellRef:=Range("F" & a), _
    Relation:=2, _
    FormulaText:=1
    ' Setter maxverdien for vektene til 1.
    SolverAdd CellRef:=Range("B" & a, "E" & a), _
    Relation:=1, _
    FormulaText:=1
    ' Setter minimumsverdien for vektene til 0
    SolverAdd CellRef:=Range("B" & a, "E" & a), _
    Relation:=3, _
    FormulaText:=0
    Solversolve UserFinish:=True
Next
' Skru på igjen funksjonene vi skrudde av på starten.
Application.StatusBar = False
Application.ScreenUpdating = True
End Sub
```



**Norges miljø- og biovitenskapelige universitet**  
Noregs miljø- og biovitenskapelige universitet  
Norwegian University of Life Sciences

Postboks 5003  
NO-1432 Ås  
Norway