



Norges miljø- og
biovitenskapelige
universitet

Masteroppgave 2017 30 stp
Fakultet for Realfag og Teknologi (REALTEK)

Hva kjennetegner universitetsstudenters resonnementer i statistikk?

What characterizes undergraduate students'
reasoning in statistics?

Marte Bråtalien
Lektorutdanning i realfag

Forord

Det føles som om det var i går jeg med sommerfugler i magen startet på min utdanning, men med ferdigskrevet masteroppgave markerer jeg nå avslutningen på fem flotte studieår. Det er med skrekkblandet fryd jeg gjør meg klar for å ta spranget ut i yrkeslivet, og ta i bruk og videreutvikle kunnskap og erfaringer jeg har tilegnet meg i løpet av min tid som lektorstudent. Jeg ser frem til dager fulle av ulike utfordringer og muligheter til å kombinere mine interesser for realfag og mennesker. På denne måten markerer oppgaven ikke bare slutten på en fantastisk studieperiode, men også starten på noe nytt og spennende.

Denne studien hadde ikke vært mulig uten deltakere, og de fem studentene som meldte seg frivillig fortjener derfor en stor takk. Deres entusiasme og evne til å dele tanker høyt har vært essensiell, og jeg ønsker dere alt godt videre. Takk også til foreleseren i kurset studien tok utgangspunkt i, for ditt engasjement og interesse for min studie og for gode råd og samtaler omkring både forskning, undervisning og statistikk.

Jeg vil også takke mine flotte medstudenter ved lektorutdanningen for gode diskusjoner, lunsjer og kollokvier gjennom studieperioden og spesielt i mastertiden. En spesielt stor takk går til Runa, for et godt samarbeid og mye moro i både felles kollektiv, jobb og studier. Takk også til min familie, som alltid har heiet på meg og støttet meg.

Masterarbeidet har vært intenst og utfordrende, men fremfor alt utrolig engasjerende og spennende. Tusen takk til min veileder Margrethe Naalsund for idémyldringer, konstruktive innspill, gode samtaler og uvurderlig veiledning. Din positivitet og ditt engasjement for matematikdidaktikk er smittende - du er en sann inspirasjonskilde! Jeg vil også sende en stor takk til min kjære Harald for all støtte og kjærlighet du viser. Dere er begge hverdagshelter.

Ås, mai 2017



Marte Bråtalien

Sammendrag

Statistikkfeltet oppnår en stadig økende plass og relevans i samfunnet, og dermed økt oppmerksomhet også innenfor utdanning. Likevel pekes det mot at studenter ved høyere utdanningsnivåer sliter med å lære og bruke statistikk, og kunnskap omkring deres statistiske resonnementer er derfor hensiktsmessig for å utvikle undervisning som kan hjelpe dem med å overvinne utfordringene. Lineær regresjon er et tema som krever evne til kritisk tenking og drøfting - egenskaper det kan argumenteres for at vil være nyttige i et samfunn preget av statistiske fremstillinger. Likevel finnes det få studier på studenters resonnementer omkring lineær regresjon, og studiene som er gjennomført peker mot flere misoppfatninger omkring temaet. Denne studien har derfor følgende forskningsspørsmål: *Hva kjennetegner universitetsstudenters resonnementer omkring enkel lineær regresjon i statistikk?*

Studien baseres på et rammeverk utarbeidet ved teoritriangulering av ulike syn på matematiske og statistiske resonnementer. Rammeverket adopterer sentrale elementer fra Lithner (2008) og bruker hans hovedinndeling i imitative og kreative resonnementer, men inkluderer annen matematikk- og statistikkdidaktisk teori for å tilpasse rammeverket til studiens fokus og statistikkens egenart. Imitative resonnering er i rammeverket basert på memorering av algoritmer og løsningsforslag eller tidligere erfaringer, mens kreative resonnementer kjennetegnes ved plausibilitet og statistisk forankring. Fem universitetsstudenter i et statistisk grunnkurs ved et norsk universitet dannet deltakergruppen for studien, gjennom et kvalitativt design. Datagrunnlaget for studien bestod av videopptak av individuelle høyttenkninger med hver av de fem studentene, og ble analysert ut fra rammeverket gjennom en iterativ prosess beskrevet av Powell et al. (2003). Gjennom høyttenkningen ble innsikt i deltakernes tanker underveis i løsningsprosessen oppnådd, fremfor kun kunnskap om deres endelige konklusjoner.

Resultatene av studien gjenspeiler kompleksiteten i deltakernes resonnementer, og det er vanskelig – om ikke umulig – å entydig karakterisere deres resonnementer. Funn fra studien viser at deltakerne har kreative resonnementer omkring flere konsepter, som formålet med en regresjonslinje og utvalgsstørrelsen samt utliggeres påvirkning på ulike aspekter ved modellen. Likevel viser deltakerne også imitative trekk i sine resonnementer, spesielt gjennom bruk av tidligere erfaringer fremfor en dypere statistisk forankring, og ved å anta at sammenheng impliserer årsakssammenheng. Generelt sett inneholder deres resonnementer et statistisk grunnlag, men dette grunnlaget er enkelte steder noe mangelfullt. Resultatene avdekker at dette

i stor grad er et resultat av en gjennomgående misforståelse eller forenkling av egenskapene ved minste kvadraters metode til å bety at det bør være et likt antall punkter på hver side av regresjonslinja – en strategi som preger samtlige deltakeres resonnementer.

Studien impliserer et behov for større fokus på selvstendig og kritisk drøfting i statistikkundervisningen, samt at huskereglene og forenklinger må benyttes ved stor varsomhet. Videre gir studien implikasjoner for endringer i rammeverket og for videre forskning. Det begrensede deltakerutvalget medfører at funnene ikke er representative for et større utvalg, men deres fellestrekk kan likevel gi verdifull informasjon ved å rette fokus mot elementer som forelesere og lærere bør være oppmerksom på i deres undervisning.

Abstract

Due to the field of statistics' widely recognized importance in our society, the focus on statistical subjects in education is also increasing. Still, research shows that students struggle with learning and using statistics, and knowledge about their statistical reasoning is therefore expedient in order to develop teaching that will help the students overcome these challenges. Linear regression makes a statistical topic which requires critical thinking and discussion – features that are useful in a society characterized by statistical representations. Still, there is a lack of studies focusing on students' reasoning about linear regression, and the studies available indicate that students have several misconceptions on the topic. This master thesis therefore presents the following research question: *What characterizes undergraduate students' reasoning on simple linear regression in statistics?*

The study is based on a research framework made by theory triangulation of different views on mathematical and statistical reasoning. The framework adopts central aspects from Lithner (2008) and uses his distinction of reasoning into imitative and creative reasoning, but includes other mathematical and statistical theories to adjust to the focus of the study and to emphasize the distinctiveness of statistics. The framework refers to a reasoning sequence as imitative if it is based on memorization of an algorithm or a solution to a problem, or based on previous experience. A reasoning sequence is said to be creative if it is plausible and has a statistical foundation. The study was based on responses from five undergraduate students enrolled in an introductory course in statistics at a Norwegian university, through a qualitative design. The data used to answer the research question consisted of video recordings of individual think-aloud protocol with each of the five study participants, and was analyzed through an iterative process described by Powell et al. (2003). By using think-aloud protocols, insight in the study participants' thoughts during their problem solving was gained rather than knowledge about their final conclusions alone.

The results of the study reflect the complexity of the study participants' reasoning, and it is difficult – if not impossible – to unambiguously characterize their reasoning. The findings from the study show that the study participants engaged in creative reasoning on several concepts, like the purpose of a regression line and how the sample size and outliers impact various aspects of the model. Still, the study contestants also showed signs of imitative reasoning, especially through basing their reasoning on previous experience rather than a deeper statistical foundation, and assuming that correlation implies causality. Overall, their reasoning builds on

a statistical foundation, but this foundation is somewhat inadequate on certain aspects. The results reveal that the inadequate statistical foundation to a significant extent is a result of a sweeping misconception or simplification of the concept of least squares method to mean that there should be an equal number of observations on each side of the regression line – a strategy that one and all of the study contestants implement in their reasoning.

The study implicates a need for greater focus on independent and critical discussion in statistics teaching, and that “rules of thumbs” and simplifications must be implemented with great caution. In addition, the study implicates modifications in the research framework and ideas for further studies. As a consequence of the limited number of study participants, the findings from this study are not representative to all undergraduate students’ reasoning. Nevertheless, their common features can provide valuable information by their information on elements that lecturers and teachers should take into consideration in their teaching.

Innholdsfortegnelse

FORORD.....	I
SAMMENDRAG	III
ABSTRACT	V
1 INNLEDNING	1
1.1 BAKGRUNN	1
1.2 PROBLEMSTILLING	4
1.3 OPPGAVENS STRUKTUR	5
2 ENKEL LINEÆR REGRESJON	7
2.1 HVA ER ENKEL LINEÆR REGRESJON?	7
2.2 UTFORDRINGER OG MISOPPFATNINGER.....	9
3 TEORETISK RAMMEVERK	11
3.1 KREATIVE OG IMITATIVE RESONNEMENTER.....	12
3.2 ANDRE DEFINISJONER AV MATEMATISK RESONNEMENT	14
3.3 SAMMENLIGNING AV ULIKE PERSPEKTIVER PÅ MATEMATISK RESONNEMENT	15
3.4 ANDRE DEFINISJONER AV MATEMATISK KREATIVITET	17
3.5 STATISTISK RESONNEMENT OG KREATIVITET	18
3.6 SAMMENLIGNING AV MATEMATISK OG STATISTISK RESONNEMENT.....	20
3.7 STUDIENS RAMMEVERK.....	24
4 METODE.....	29
4.1 FORSKNINGSDESIGN	29
4.2 KONTEKST OG DELTAKERE	31
4.3 OPPGAVER.....	34
4.4 HØYTENKNINGSMETODEN	39
4.5 ANALYSEPROSESSEN.....	42
4.5.1 <i>Analysemetode</i>	42
4.5.2 <i>Kvalitetskontroll</i>	45
4.6 FORSKNINGSETIKK	47
4.7 METODEKRITIKK.....	48
4.7.1 <i>Pause før datainnsamlingen</i>	48
4.7.2 <i>Høyttenkningens unaturlige kontekst</i>	49
4.7.3 <i>Interaksjon fra forskerne</i>	49
5 RESULTATER.....	51
5.1 EMMA	51
5.2 HEIDI.....	53
5.3 KAROLINE	55
5.4 SUSANNE.....	57
5.5 LINN.....	59
6 DISKUSJON.....	63
6.1 STATISTISK FORANKRING OG PLAUSIBILITET	63
6.1.1 «Like mange prikker over og under» - forholdet mellom plott og regresjonslinje	64
6.1.2 «Linja er gjennomsnittet» - en rent terminologisk eller statistisk brist?	69
6.1.3 «Det begrenser jo litt hvor nøyaktig modellen kan være» - deltakernes drøfting av utvalgsstørrelsen	71

6.2	IMITATIVE RESONNERINGSTREKK	71
6.2.1	<i>Brede muligheter, men like valg</i>	72
6.2.2	<i>Et ukritisk forhold til den oppgitte linja</i>	73
6.2.3	<i>«Kanskje det da egentlig hjelper å spise smågodt uka før eksamen?» - en umiddelbar antakelse om årsakssammenheng</i>	74
7	AVSLUTTENDE REFLEKSJONER OG IMPLIKASJONER	77
7.1	AVSLUTTENDE REFLEKSJONER	77
7.2	IMPLIKASJONER.....	79
8	REFERANSER	85
	VEDLEGG A: INFORMASJONSBREV OG SAMTYKKESKJEMA.....	1
	VEDLEGG B: KOMMUNIKASJONSSKJEMA MELLOM FORSKERNE.....	3
	VEDLEGG C: KODESKJEMA FOR HØYTENKNINGSPROTOKOLLER.....	4
	VEDLEGG D: GODKJENNING FRA NSD TIL BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER	6
	VEDLEGG E: DELTAKERNES SKRIFTLIGE ARBEID UNDER HØYTENKNINGEN	9

1 Innledning

Innledningsvis i denne mastergradsoppgaven vil jeg presentere bakgrunnen for studiens fokus, med utgangspunkt i faglig og samfunnsmessig relevans og personlig motivasjon. Videre vil jeg ta for meg problemstillingen for å konkretisere ytterligere hva formålet med min studie er. Siste del av innledningen vil brukes til å gi en oversikt over oppgavens struktur og innhold.

1.1 Bakgrunn

«The ability to take data, to be able to understand it, to process it, to extract values from it, to visualize it and to communicate it - that is going to be a hugely important skill of the next decades, not only at the professional level but even at the education level»

Med disse ordene adresserer Hal Varian (2009), sjefsøkonom for Google, behovet for statistisk kompetansebygging i yrkes- og utdanningssammenheng. Statistikk spiller en sentral rolle både for en rekke fagfelt og i samfunnet generelt (jfr. Ben-Zvi & Garfield, 2004; Garfield & Ben-Zvi, 2008; Gattuso & Ottaviani, 2011), noe den amerikanske statistikeren og lederskikkelsen innenfor statistikkdidaktikk David S. Moore (1998, s. 1254) oppsummerer: *«Statistics is a general intellectual method that applies wherever data, variation, and chance appear. It is a fundamental method because data, variation, and chance are omnipresent in modern life»*. I dag danner statistiske analyser bakgrunn for alt fra musikkjenesten Spotifys individuelle spillelister (SpotifyPress, 2015) og Googles evne til å forutsi et influensautbrudd basert på analyser av internettsøk relatert til influensasymptomer (Greenhouse, 2013), til økonomiske kalkyler, medisin og forskning. I tillegg benyttes statistiske fremstillinger i media, politikk, markedsføring og rådgivning for å øke kredibiliteten ved deres formål og påvirke mottakerne. På denne måten møter vi statistiske fremstillinger hver dag, og evnen til å kunne kritisk drøfte påstander og fremstillinger er dermed et viktig egenskap (jfr. Ben-Zvi & Garfield, 2004) både for å forstå statistikken som samfunnet vi lever i baserer seg på og for å ikke ukritisk påvirkes av ulike aktører.

Hovedtyngden av sentral litteratur omkring statistikkens rolle i utdanning kommer fra perioden rundt og rett etter årtusenskiftet. På grunn av statistikkens etablerte og anerkjente plass i samfunnet, og dermed i utdanningssystemet, økte statistikkundervisningen og antall statistikkurs betraktelig i flere land i denne perioden (Batanero & Díaz, 2010; Batanero, Godino,

Vallecillos, Green & Holmes, 1994; Ben-Zvi & Garfield, 2004; Garfield & Ben-Zvi, 2008). Likevel opplevde feltet lenge mindre oppmerksomhet enn andre matematiske emner (Batanero et al., 1994), og forskning innenfor statistikk ble fortsatt ansett som et relativt nytt fagfelt sammenlignet med andre områder innenfor utdanningsforskning rundt årtusenskiftet (Garfield & Ben-Zvi, 2007). Nyere forskning på statistikkens rolle i utdanning er vanskeligere å finne, men det er likevel ingen grunn til å tvile på statistikkens relevans verken for samfunnet eller utdanningssystemet da samfunnsutviklingen, som tidligere argumentert for, går i en retning hvor statistiske prosesser og fremstillinger spiller en sentral rolle. Forskning innenfor statistikk bør derfor fortsatt kunne anses som nødvendig og relevant.

De siste tiårene før - og perioden rundt - årtusenskiftet var det et stadig økende fokus innenfor statistikkdidaktikk på statistisk resonnering og tenkning fremfor prosedyreferdigheter (Ben-Zvi & Garfield, 2004). Dette kan ses i sammenheng med at den teknologiske utviklingen ifølge Moore (1998) førte til at statistiske prosedyrer og beregninger i større grad ble overlatt til maskiner mens statistisk tenkning og tolkning fortsatt var opp til mennesket. Dog det er snart 20 år siden David Moore argumenterte for dette har jeg ikke funnet noe som tilsier at situasjonen er annerledes i dag. Tidligere studier på statistiske resonnementer og tenking viser at studenter sliter med å gjøre statistiske drøftinger rundt viktige temaer som kan påvirke deres liv (Ben-Zvi & Garfield, 2004), og studier som fokuserer på undervisning og læring av statistikk ved høyere utdanningsnivåer viser at studenter sliter med å lære, huske og bruke statistikk (f. eks. Ben-Zvi & Garfield, 2004; Garfield & Ben-Zvi, 2007, 2008; Garfield & Gal, 1997). Majoriteten av den tidligere forskningen er over ti år gammel, og det vil være interessant å se om situasjonen fortsatt er den samme.

Med dette oppstår et behov for mer forskning, for å kartlegge hvilke kognitive prosesser som foregår når studenter står ovenfor statistiske oppgaver eller problemer. Ved et dypdykk i deltakernes *resonnementer* i møte med statistikk kan kunnskap om deres strategier, oppfatninger og utfordringer tilegnes. Dette er nyttig for å utarbeide undervisning som kan bidra til at studentene bedre kan lære og implementere statistikk, ved å peke på konkrete aspekter ved studentenes kognitive prosesser som kan øke eller hindre læringen av statistiske konsepter. Stadig økende studenttall i introduksjonskurs i statistikk (Ben-Zvi & Garfield, 2004; Garfield & Zieffler, 2009) understreker også behovet for å forstå studentenes statistiske resonnementer, for å kunne optimalisere utbyttet av kursene. Dette vil i tillegg ha en samfunnsmessig relevans: I et samfunn hvor evnen til å begrunne argumenter og kritisk tolke påstander fra statistiske fremstillinger vektlegges (Garfield & Ben-Zvi, 2008) utgjør kartlegging av ulike oppfatninger

og tankeprosesser rundt statistiske konsepter gjennom et innblikk i statistiske resonnementer nyttig informasjon.

Et viktig prinsipp for all læring er at ny kunnskap bygges på eksisterende kunnskap (Bransford, Brown & Cocking, 2000), og lineær regresjon utgjør ofte studenters første møte med grunnleggende konsepter rundt statistiske sammenhenger (Casey, 2014). Kunnskap, tilnærminger, oppfatninger og misoppfatninger tilegnet gjennom arbeid med dette statistiske temaet utgjør dermed et utgangspunkt for hvordan ny statistisk kunnskap tilegnes og bearbeides, og lineær regresjon danner et derfor et viktig grunnlag for videre statistikk. Dette medfører at forskning på studenters resonnementer omkring temaet vil være svært relevant, både for et innblikk i hvilke elementer de baserer sine strategier på og for å redusere påvirkningene eventuelle misoppfatninger vil ha på deres videre statistiske arbeid. Lineær regresjon går ut på å tilpasse en funksjon til et sett med observasjoner bestående av variabelpar, og er nyttig blant annet for å si noe om forholdet mellom de to variablene og lage forenklete modeller av det eventuelle forholdet. I dette ligger et behov for kritisk drøfting og tolkning av både data og modeller – egenskaper som også vil være nyttige for å prosessere informasjonen vi mottar i samfunnet. Dette underbygger relevansen av forståelse for hva som ligger til grunn for resonnementer omkring temaet.

Batanero et al. (1994) argumenterer for at det har vært gjennomført relativt lite forskning på forståelse av lineær regresjon sammenlignet med andre statistiske konsepter; majoriteten av forskningen har ifølge Batanero et al. (1994) vært sentrert rundt temaer som er direkte hjelpelige når vi skal ta valg, for eksempel sannsynlighet. I senere tid har det blitt gjort studier på oppfatninger og misoppfatninger omkring lineær regresjon og bivariate data (f. eks. Casey, 2014; Garfield & Ben-Zvi, 2008; Sorto, White & Lesser, 2011), men enkle google-søk viser langt flere treff på resonnering omkring for eksempel sannsynlighet, noe som kan peke mot at dette fortsatt får størst fokus. Innenfor norsk forskning har kognitive prosesser i statistikk fått lite oppmerksomhet; enkelte studier (primært masterstudier) har blitt gjort på konsepter som sannsynlighet med fokus på misoppfatninger (f. eks. Handegård, 2016; Thorsen, 2009) og begrepsforståelse (f. eks. Aga, 2008; Utstrand, 2013) men for andre statistiske konsepter og innenfor resonnering virker slik forskning fraværende. Dette var med på å påvirke valget av statistisk tema for studien, da jeg ønsker å bidra med forskning på områder som ikke tidligere har fått stort fokus. Jeg motiveres stort av at jeg ikke har funnet noe norsk forskning på resonnementer innenfor enkel lineær regresjon.

For meg var det også ønskelig å velge et statistisk tema med nær tilknytning til matematikk, for å få innsikt i hvordan og i hvilken grad studenter evner å bygge en bro mellom tidligere matematisk kunnskap og nyervervet statistisk kunnskap. Lineær regresjon har flere likheter med matematisk funksjonsdrøfting, men skiller seg også fra matematiske funksjonsegenskaper. Dette omtales nærmere i delkapittel 2.2.

1.2 Problemstilling

Muligheten til å rette min masteroppgave mot statistikk på universitetsnivå, samt den faglige og samfunnsmessige relevansen av – og egen interesse for – fordypning i resonnementer omkring statistikk og behovet for studier som tar for seg de kognitive prosessene som oppstår i arbeid med lineær regresjon, har til sammen ført til følgende forskningsspørsmål:

Hva kjennetegner universitetsstudenters resonnementer omkring enkel lineær regresjon i statistikk?

Med de utfordringene tidligere adressert angående studenter ved høyere utdanningsnivåers evne til å lære og bruke statistikk har det vært enighet om at deres ferdigheter innenfor statistisk resonnering og kritisk tenking ikke har vært tilfredsstillende (Ben-Zvi & Garfield, 2004). Dette har ført til endringer i statistikkundervisningens forløp flere steder (Ben-Zvi & Garfield, 2004), også ved norsk høyere utdanning. Ved et norsk universitet ble det høsten 2016 startet et prosjekt i et introduksjonskurs i statistikk. Tradisjonelle forelesninger ble erstattet med nettbaserte videoforelesninger, mens undervisningstiden på universitetet gikk til arbeid med statistiske oppgaver og problemer i små grupper hvor gruppesammensetningen var basert på en test som delte studentene inn i fire kognitive typer (se Brovold, 2013; Nasjonalt Senter for Realfagsrekruttering, 2013). Alle gruppene bestod av minst to ulike kognitive typer, og målet med prosjektet var å utarbeide et undervisningsopplegg som var tilpasset studentene på tvers av de kognitive typene, da tidligere forskning viste at den tradisjonelle undervisningen i høyere grad appellerte til enkelte kognitive typer (Sæbø & Brovold, 2016). Kombinasjonen av et fokus på studentenes indre prosesser og statistikk var inspirerende, og jeg var derfor svært fornøyd da det åpnet seg en mulighet for å gjøre datainnsamlingen til min masteroppgave i nettopp dette statistikkurset. Ønsket om å gjennomføre studien på universitetsnivå var basert på et engasjement for å bidra i utvikling av de didaktiske elementene ved høyere utdanninger. I

tillegg fant jeg få matematikdidaktiske mastergrader som fokuserte på studenter ved høyere utdanningsnivåer, noe som motiverte meg til å gjennomføre min studie på universitetsnivå.

1.3 Oppgavens struktur

Kapittel 2 tar for seg studiens statistiske tema, og består av en innføring i sentrale elementer og statistiske begreper innenfor enkel lineær regresjon, samt presentasjon av typiske utfordringer eller misoppfatningen innenfor temaet basert på tidligere studier.

Kapittel 3 omhandler studiens fokus på resonnementer, og drøfter sentrale definisjoner og begreper som vil bli benyttet i studien. Kapitlet avsluttes med utarbeiding av et teoretisk rammeverk for studien basert på gjennomgått relevant teori.

Studios metodevalg og gjennomføring beskrives i Kapittel 4, og omfatter teori og begrunnelser omkring forskningsdesign, deltakerutvalg, oppgaver, høyttenkning som foretrukket metode og analysearbeidet. I tillegg drøftes de etiske aspektene ved studien. Kapitlet avsluttes med metodekritikk, hvor et utvalg aspekter ved valgene som ble gjort og deres påvirkning på studien diskuteres.

Deltakernes resultater beskrives i Kapittel 5 og suppleres med en kort analyse av de enkelte deltakernes høyttenkning. Kapitlet er basert på analysearbeidet av dataene.

Kapittel 6 diskuterer resultatene opp mot rammeverk og annen teori, med den hensikt å besvare studiens problemstilling. Inndelingen av kapitlet følger det tilpassede rammeverket, for å gi et oversiktlig bilde av deltakernes resonnementer.

Avslutningsvis følger Kapittel 7, hvor avsluttende refleksjoner gjøres for å oppsummere det foregående kapitlet og besvare problemstillingen. Siste del av kapitlet tar for seg implikasjoner fra studien med tanke på statistisk undervisning, det teoretiske rammeverket og videre arbeid.

2 Enkel lineær regresjon

Forskningsspørsmålet tar utgangspunkt i temaet enkel lineær regresjon. Ifølge Casey (2014) er lineær regresjon ofte studenters første møte med grunnleggende konsepter rundt statistiske sammenhenger, og kompetanse innenfor temaet danner et viktig grunnlag for videre statistikk. Dette kapitlet har derfor som formål å presentere sentrale elementer ved enkel lineær regresjon, samt gi et innblikk typiske utfordringer eller misoppfatningen innenfor temaet.

2.1 Hva er enkel lineær regresjon?

Enkel lineær regresjon går ut på å undersøke, beskrive og modellere en eventuell sammenheng mellom to variabler. Målet er å finne *regresjonslinja*, den best tilpassede lineære funksjonen til variabeldataene, hvor en av variablene defineres som responsvariabel y og den andre som forklaringsvariabelen x (Lane et al., u.å.). Hver enkelt y -verdi fra dataene kan beskrives som en funksjon av den korresponderende x -verdien, gitt ved

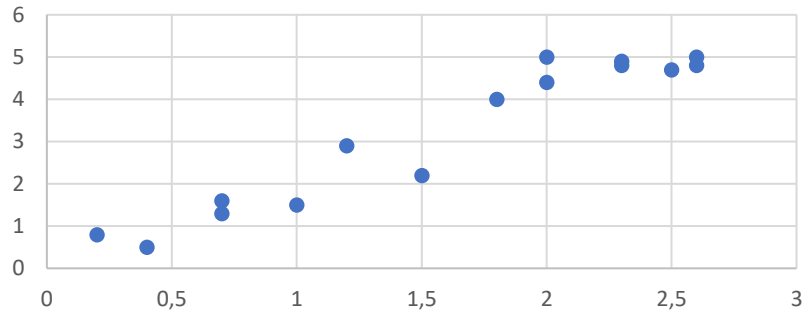
$$y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i$$

hvor α er koeffisienten som betegner funksjonens skjæringspunkt med y -aksen, β er regresjonskoeffisienten som beskriver stigningstallet og ϵ_i er «støyleddet» som forårsaker funksjonens avvik fra en lineær form (Løvås, 2004). Støyleddet antas å være normalfordelt med forventning lik null, og vi får $E(y_i|x_i) = \hat{y}_i$. Den beste gjetningen for regresjonslinja er dermed

$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i$$

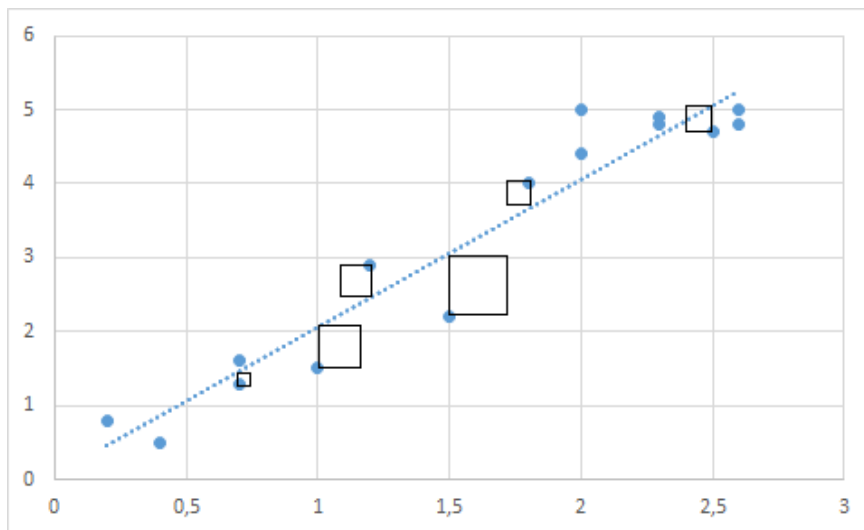
hvor \hat{y}_i , $\hat{\alpha}$ og $\hat{\beta}$ er estimerte verdier for henholdsvis y_i , α og β , og uttrykker den best tilpassede linja til de gitte variabeldataene.

Variabeldataene illustreres ofte i et spredningsplott (Løvås, 2004). Spredningsplottet består av koordinater av variabelparene (x_i, y_i) , og gir en indikasjon på hvorvidt det finnes en overordnet sammenheng mellom respons- og forklaringsvariabelen, samt styrken av forholdet mellom dem (Yale University, 1997). Plottet gir i tillegg en oversikt over eventuelle *utliggere*, punkter som ligger langt unna det tenderende mønsteret for variabelparene. Utliggere kan være resultat av feilmålinger, avvik fra trender, eller være et tegn på en dårlig tilpasset linje.



Figur 2-1 Eksempel på spredningsplott

Den mest brukte metoden for å tilpasse en regresjonslinje til gitte data er *minste kvadraters metode* (Lane et al., u.å.; Løvås, 2004; Yale University, 1997). Ved denne metoden defineres regresjonslinja som den linja som minimerer summen av arealene til kvadrater med sidelengde lik de vertikale residualene mellom hvert punkt (x_i, y_i) og den aktuelle regresjonslinja. Dette er vist i Figur 2-2. Minste kvadraters metode vil alltid føre til at absoluttverdien til summen av positive og negative residualer vil være lik, slik at den totale summen av residualene er null. Det samme gjelder imidlertid *ikke* summen av de kvadrerte avvikene over og under linja; siden avvikene først blir kvadrert og deretter addert vil ikke positive og negative kvadratavvik utjevne hverandre (Yale University, 1997).



Figur 2-2 Minste kvadraters metode, illustrasjon av kvadratavvikene mellom utvalgte punkter og regresjonslinja

I statistikk fokuseres det på tolkning av modellens gyldighet og tilpasning, samt relasjonen mellom variablene, i tillegg til selve utregningene (Garfield & Ben-Zvi, 2008). Variablernes *korrelasjon* sier noe om hvilken grad en endring i én variabel vil føre til en endring i den andre

variabelen (Yale University, 1997), og den kvadrerte verdien av korrelasjonen, R^2 , betegner regresjonsmodellens godhet (Løvås, 2004), altså hvor godt tilpasset modellen er til de gitte observasjonene. Verdien for regresjonsmodellens godhet oppgis i intervallet $[0, 1]$ og jo høyere denne verdien er, jo større andel av variasjonen i y-verdiene kan forklares av modellen. Et viktig element i statistiske drøftinger er imidlertid at en eventuell sammenheng mellom variablene ikke er det samme som årsakssammenheng (Løvås, 2004): Det kan være andre faktorer som forårsaker sammenhengen, og dette må drøftes. I tillegg må statistikkens særegenhet når det kommer til *usikkerhet* vektlegges i statistisk arbeid. Det er ytterst sjeldent at regresjonsmodellen passer perfekt til dataene, men prosessen handler om å finne de tilpasninger som gjør at modellen best mulig forklarer dem. Utliggere kan gi store utslag på regresjonsmodellen (Yale University, 1997), og det må derfor vurderes om disse skal ekskluderes fra utvalget.

2.2 utfordringer og misoppfatninger

Forskning viser at studenter har en rekke misoppfatninger når det kommer til lineær regresjon i statistikk (f. eks. Batanero et al., 1994; Ben-Zvi & Garfield, 2004; Casey, 2014; Garfield & Ben-Zvi, 2008). Garfield og Ben-Zvi (2008) viser i sin oppsummering av forskning på forståelse av lineære sammenhenger til at forhåndsoppfatningene rundt forholdet mellom de to variablene i stor grad påvirker elevenes vurderinger rundt deres sammenheng, og at de ofte feilaktig tror det er en korrelasjon mellom variabler. Dette kan sees i sammenheng med at lineære funksjoner i matematikk ofte baserer seg på eksisterende korrelasjon (Garfield & Ben-Zvi, 2008). En vanlig misoppfatning er også å feilaktig anta årsakssammenhenger mellom variablene (Garfield & Ben-Zvi, 2008), et aspekt Løvås (2004) mener utgjør en viktig del av den statistiske tolkningen. Her trekker Garfield og Ben-Zvi (2008) frem manglende evne til å drøfte plausible forklaringer for eventuelle mønstre mellom variabler, som at en tredje variabel kan skape sammenhengen fremfor en faktisk årsakssammenheng.

En utfordring ved statistisk løsning og drøfting av enkel lineær regresjon er bruken av idéer som fører til korrekte løsninger for enkelte problemer, men er ufullstendige eller upassende når overført til mer generelle situasjoner (Batanero et al., 1994). Idéene kan være basert på tidligere erfaringer eller forhåndsoppfatninger, gjerne fra matematiske temaer. Batanero et al. (1994) og Garfield og Ben-Zvi (2008) peker på en motvilje blant elever til å erstatte disse idéene, og i slike situasjoner oppstår en kognitiv hindring basert på eksisterende kunnskap heller enn mangel på kunnskap (Garfield & Ben-Zvi, 2008). Ved å ignorere motsigelsene og problemene

som oppstår grunnet den kognitive hindringen hindres også eleven fra å oppnå dypere forståelse (Garfield & Ben-Zvi, 2008), noe som kan være roten til flere misoppfatninger eller utfordringer. Ben-Zvi og Garfield (2004) mener at konteksten i flere statistiske problemer kan villedde studentene og føre til at de baserer sine svar på erfaringer eller misoppfatninger fremfor gunstige statistiske konsepter. Samtidig trekkes en oppfatning blant studenter frem om at statistiske problemer skal løses på samme måte som matematiske og at statistiske elementer som usikkerhet, drøfting av kontekst og flere gyldige svar dermed føles forvirrende (Ben-Zvi & Garfield, 2004; Garfield & Ben-Zvi, 2008).

Den amerikanske førsteamanuensis i matematikk Stephanie A. Casey trekker frem en rekke utfordringer grunnet matematiske forhåndskunnskaper. I sin studie på studenters oppfatninger omkring lineær regresjon fant hun at flere uttrykte forvirring rundt det faktum at en enkelt x -verdi kan ha flere y -verdier i et spredningsplott, da dette strider med matematiske funksjonsregler (Casey, 2014). Dette funnet så hun i sammenheng med en rekke elevers problemer med å se overordnede sammenhenger fra spredningsplottene, grunnet stort fokus på enkeltområder eller utvalgte punkter. En vanlig misoppfatning var også at spredningsplottet måtte følge en lineær form for hele det oppgitte området for at det skulle være en lineær sammenheng, samt at regresjonslinja måtte gå gjennom alle de oppgitte punktene eller være den linja som gikk gjennom flest punkter (Casey, 2014). Casey (2014) pekte også på en misoppfatning om at det skulle være like mange observasjoner på hver side av regresjonslinja, som ofte dukket opp i sammenheng med en idé om at regresjonslinja viste en gjennomsnittlig y -verdi.

Ut fra dette virker det logisk å anta at deltakernes tanker og oppfatninger i de nevnte situasjonene strider med elementer fra enkel lineær regresjon, blant annet minste kvadraters metode og definisjonen av regresjonslinja. Den tidligere forskningen på utfordringer og misoppfatninger vil bidra som bakteppe for min studie, både i utarbeiding av oppgaver og for diskusjonen av studiens funn. Et for stort fokus på tidligere forskning vil kunne bidra som «skylapper» for mitt arbeid, og medføre at resultatene ikke vil være representative for studenters overordnede statistiske resonnementer men kun på deres resonnementer rundt de utfordrende elementene. Jeg vil derfor vokte meg for å gi det for stort fokus.

3 Teoretisk rammeverk

Teori og teoretiske perspektivers rolle innenfor matematikdidaktikkfeltet har mottatt kritikk (f. eks. P. Cobb, 2007; Lester, 2005; Niss, 2006, 2007). P. Cobb (2007) stiller seg kritisk til hva han kaller en direkte bruk av teoretiske perspektiver for å utarbeide undervisningsopplegg og instruksjoner, mens Niss (2007) trekker frem hvordan perspektivene som benyttes i matematikdidaktisk teori ofte stammer fra andre fagfelt eller fokuserer på for smale områder og argumenterer videre for at «*there is no such thing as a well-established unified “theory of mathematics education” which is supported by the majority of mathematics education researchers*» (Niss, 2007, s. 1308). Fremfor å binde og begrense seg til ett teoretisk perspektiv vil være derfor være hensiktsmessig å sammenligne teorier på tvers av perspektiver, ut fra egenskaper ved fenomenet man ønsker å undersøke (P. Cobb, 2007; Lester, 2005; Niss, 2007). Lester (2005, s. 466) beskriver dette slik: «*[R]ather than adhering to one particular theoretical perspective, we act as bricoleurs by adapting ideas from a range of theoretical sources to suit our goals*». Ved en slik pragmatisk teoritilnærming, gjennom sammenligninger av ulike perspektiver og teorier, kan både forståelsen for viktige fenomener og nytten av ulike studier øke (P. Cobb, 2007).

På bakgrunn av dette er teorien til denne studien valgt av pragmatiske grunner, ut fra elementene resonnering kan bestå av og statistikkens særegenhet. Formålet med teori er å skaffe «*a structured set of lenses through which aspects or parts of the world can be approached, observed, studied, analysed or interpreted*» (Niss, 2006, s. 100), og dette skjer gjennom et utvalg av hvilke elementer som skal vektlegges i studien og hvilke som skal utelates. På denne måten skapes et *rammeverk* - et sett av ideer, konsepter, prinsipper og antakelser (Lester, 2005; Niss, 2007) - som danner basis for studiens fokus. Lester (2005) presiserer at rammeverket ikke skal virke hemmende på studien, men sammenligner det med et stillas i husbygging; stillaset (rammeverket) er ikke fokuset i seg selv, men et trygt middel som gjør det mulig å bygge på huset (studien). Rammeverket skal representere de sentrale egenskapene ved fenomenet som undersøkes, og gjøre det mulig for forskeren å skape mening ut av innsamlede data (Lester, 2005).

Gjennom teoritriangulering, hvor relevante teorier og perspektiver på matematisk og statistisk resonnering drøftes ut fra likheter, forskjeller og tilpasning til studien, er målet å adaptere deler av de gitte teoriene til utarbeidingen av et eget rammeverk for min studie. Ved å kun basere forskningen på én enkelt teori er slik triangulering ikke mulig (Lester, 2005), og kapitlet vil

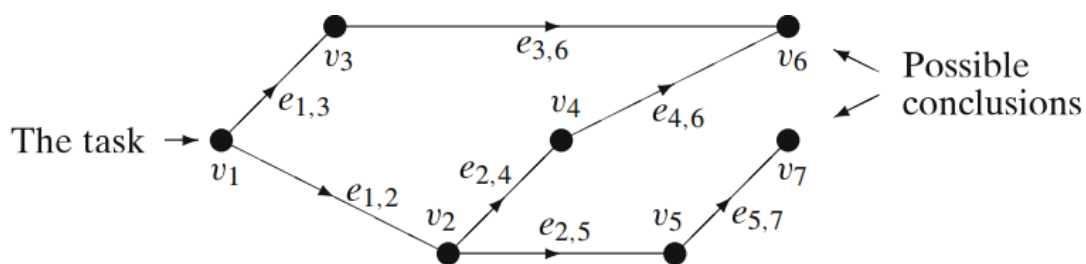
derfor ta for seg flere ulike teorier omkring resonnementer, både fra et matematisk og statistisk perspektiv. Lithner (2008) har utarbeidet et rammeverk for kjennetegn på to ulike typer matematisk resonnement, hvor han definerer en rekke relevante begreper for min studie. Jeg ønsker derfor å ta utgangspunkt i dette rammeverket og drøfte det opp mot andre relevante teorier. Til slutt vil jeg skissere mitt eget rammeverk, basert på diskutert teori.

3.1 Kreative og imitative resonnementer

Ifølge Lithner (2008) blir begrepet *raisonnement* (*reasoning*) ofte brukt i matematikken uten noen definisjon, med en antakelse om en universell enighet om betydningen. I sin artikkel definerer han begrepet som «*rekken av tanker benyttet for å danne antakelser og konklusjoner i oppgaveløsning*» (Lithner, 2008, s. 257, egen oversettelse). Resonnementer kan være tankeprosesser i seg selv, resultatet av dem eller begge deler, og er ikke nødvendigvis basert på formell logikk - de kan til og med være ukorrekte så lenge en eller annen form for fornuftig (for den som resonnerer) begrunnelse støtter dem. Videre beskriver Lithner (2008, s. 257) et matematisk resonnement som et produkt bestående av fire steg:

1. En oppgave presenteres, og blir betegnet som en *problematisk situasjon* dersom det ikke er opplagt hvordan man skal gå frem.
2. Et *strategivalg* bli gjort, og støttes ved hjelp av *prediktiv argumentasjon*: Hvorfor vil strategien løse oppgaven? Begrepet *strategi* spenner fra spesifikke prosedyrer til generelle tilnærminger og begrepet *valg* blir sett på i en vid sammenheng.
3. Strategien *implementeres*, og støttes ved hjelp av *verifiserende argumentasjon*: Hvorfor løste strategien oppgaven?
4. En *konklusjon* dannes.

Resonneringsstrukturen illustrerer han som stier i en graf, vist i Figur 3-1. Punktene v_n representerer ulike tidspunkt i resonneringen og leder til ulike strategivalg, mens strategiimplementeringen er gitt ved linjene $e_{n,p}$ hvor n og p representerer ulike tidspunkt i resonneringen. Ifølge Lithner (2008) finnes det alltid resonnementer i form av argumenter bak enhver forflytning mellom punktene, men dybden i argumentene er av ulik art.



Figur 3-1 Resonneringsstrukturen skissert som stier i en graf (Lithner, 2008, s. 258)

En grunnleggende idé i rammeverket er at resonnering ved utenatføring er imitativ, mens den motsatte typen resonnering er kreativ. Imitative resonnementer kjennetegnes ved at en algoritme eller et helt løsningsforslag blir memorert eller gjengitt, ved hjelp av utenatføring eller veiledning fra eksterne kilder. Dette medfører at strategiimplementasjonen begrenser seg til å skrive ned eller gjengi algoritmen eller løsningsforslaget, og kun slurvefeil kan hindre et tilfredsstillende svar (Lithner, 2008). De imitative resonnementene kan også være basert på forhåndsoppfatninger eller tidligere erfaringer med lignende problemer. Lithner (2008) forklarer at imitativ resonnering begrenser læringseffekten og er ustabil, da den kan være basert på overflateegenskaper ved oppgavens komponenter. Resonneringen kan dermed beskrives som overflattisk, da den mangler den nødvendige matematiske forankringen. I tillegg vil trangen til å følge en «oppskrift» ofte overstyre mer matematisk forankret resonnering, og utregningene som overlates til studenten kan gjøres selv med begrenset forståelse for prosedyrene de inkluderer (Lithner, 2008). Han påpeker likevel at imitativ resonnering som overordnet strategi kan være nyttig i enkelte situasjoner, som ved faktaspørsmål eller definisjoner.

Motsetningen til de imitative resonnementene er ifølge Lithner (2008) *kreativ resonnering*, hvor analytiske og konseptuelle tankeprosesser inkluderes i større grad og de tidligere adresserte utfordringene imitative resonnementer fører med seg reduseres. Han presiserer at selv om ordet *kreativ* ofte forbindes med noe stort og pompøst, trenger ikke kreativ resonnering å være en utfordring; definisjonen inkluderer til og med det han omtaler som elementær resonnering. Følgende kriterier må ifølge Lithner (2008, s. 266) oppfylles før et resonnement kan karakteriseres som kreativt:

1. *Evne til nyskaping*. Studenten danner en (for ham eller henne) ny resonneringssekvens, eller gjenskaper en glemt sekvens.

2. *Plausibilitet*. Det må finnes argumenter som kan støtte strategivalget og/eller -implementasjonen, og begrunne konklusjonens troverdighet.
3. *Matematisk forankring*. Argumentene må være forankret i vesentlige matematiske egenskaper ved komponentene resonnementet består av.

Kreativ resonnering kan ifølge Lithner (2008) relateres til studentenes kompetanser, og tre kompetanser er spesielt relevante for rammeverket: *Problemløsingsevner*, *resonneringsevner* og *konseptuell forståelse*. De to første kompetansene omfattes av rammeverkets fokus på resonnering i problemløsingssituasjoner, mens konseptuell forståelse knyttes til kreative resonnementer gjennom sin rolle for den matematiske forankringen. Han trekker også inn læringsmiljøets rolle, blant annet i sin henvisning til Yackel og Cobb (1996) som mener at et arguments validitet, og dermed hva som ansees som gyldig begrunnelse av et resonnement, bestemmes av sosiomatematiske normer. Forhandlinger og diskusjoner rundt disse normene fører til læringsmuligheter, mens mangel på forhandlinger omkring dette kan hindre både innsikt i de sosiomatematiske normene og videre læring (Yackel & Cobb, 1996, gjengitt i Lithner, 2008).

3.2 Andre definisjoner av matematisk resonnement

Den tidligere lederen av Mathematical Association of Amerika (MAA), Kenneth A. Ross (1998), mener at resonnementer utgjør fundamentet i matematikken: Mens annen vitenskap (*science*) verifiserer sine funn gjennom observasjoner, verifiseres matematikk gjennom logiske resonnementer. Evnen til logisk resonnering er ifølge Ross (1998) en grunnleggende ferdighet også utenfor matematikk, i tillegg til å være et av de viktigste målene i matematisk undervisning: «*[i]f reasoning ability is not developed in the student, then mathematics simply becomes a matter of following a set of procedures and mimicking examples without thought as to why they make sense*» (Ross, 1998, s. 254). Likevel påpeker han verdien av å kunne følge algoritmer, da både innøvde algoritmer og forståelse for konseptene de beskriver er nødvendig for å oppnå det han kaller «*success in mathematics*».

Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) presenterer matematisk kompetanse som en sum av fem ferdigheter, hvor én ferdighet er *adaptiv resonnering*. Dette definerer de som evnen til å tenke logisk, reflektere, forklare og forsvare sammenhenger mellom konsepter og matematiske situasjoner, i tillegg til intuitiv og induktiv resonnering basert på mønstre og analogier. Slike

resonnementer er korrekte og gyldige, og er avhengig av evne til å nøye overveie ulike alternativer og begrunne konklusjoner (Kilpatrick et al., 2001). Videre mener de at kriteriene for at resonneringsevnen skal kunne uttrykkes er at eleven har en tilstrekkelig kunnskapsbase, oppgaven er forståelig og motiverende, og konteksten er kjent og komfortabel. Også Niss et al. (2002) vektlegger resonneringskompetanse som en del av matematisk kompetanse. Resonneringskompetansen omhandler blant annet evnen til å kunne følge og drøfte beviser, og å utarbeide og gjennomføre egne resonnementer (Niss et al., 2002). Ifølge NCTMs *Common Core State Standards for Mathematics* (u.å.) innebærer matematisk resonnering evnen til å danne en sammenhengende representasjon eller beskrivelse av et problem, og består av (1) å ta i betraktning og vurdere alle oppgitte enheter og verdier, (2) å se en verdi eller enhets mening i situasjonen fremfor å kun fokusere på hvordan de kan beregnes, og (3) å kjenne til, og fleksibelt kunne benytte, ulike egenskaper ved forskjellige regneoperasjoner.

3.3 Sammenligning av ulike perspektiver på matematisk resonnement

Tabell 3-1 viser en oversikt over de ulike synene på matematisk resonnement som ble presentert i delkapittel 3.1 og 3.2.

Begrep	Beskrivelse
Imitativt resonnement (Lithner, 2008)	Memorering eller gjengivelse av algoritme eller helt løsningsforslag ved hjelp av utenatføring eller veiledning fra eksterne kilder.
Kreativt resonnement (Lithner, 2008)	Evne til nyskaping, plausibilitet og matematisk forankring.
Logisk resonnement (Ross, 1998)	Et mål i matematikken, verifiseringsmetode, bidrar til at matematikk blir mer enn å kun følge og gjengi algoritmer uten å drøfte deres mening.
Adaptivt resonnement (Kilpatrick et al., 2001)	Evne til å tenke logisk, reflektere, forklare og forsvare sammenhenger, samt intuitiv og induktiv resonnering basert på mønstre og analogier.
Resonneringskompetanse (Niss et al., 2002)	Evne til å kunne følge og drøfte beviser, og utarbeide og gjennomføre egne resonnementer
Matematisk resonnement (NCTM, u.å.)	Evne til å danne en sammenhengende representasjon av et problem gjennom å vurdere alle oppgitte verdier, se deres mening i situasjonen og fleksibelt benytte ulike egenskaper ved forskjellige regneoperasjoner.

Tabell 3-1 Oversikt over definisjoner på matematisk resonnement

Tabellen viser flere likheter mellom kreativ resonnering og de andre nevnte perspektivene på matematisk resonnement. Ross (1998) beskriver matematiske resonnementer som matematikkens verifiseringsgrunnlag, som forhindrer feltet fra å degraderes til å kun bestå av å følge og gjengi algoritmer uten å drøfte deres mening. Dette har tydelige likhetstrekk med Lithner (2008) definisjon av kreativt resonnement som utenatlæringens motpol. Både Ross (1998) og Lithner (2008) påpeker i tillegg viktigheten av å inneha kompetanse innenfor nettopp bruk av algoritmer, men presiserer at ytterligere kompetanser er nødvendige.

Lithner (2008) trekker frem tre kjennetegn på kreative resonnementer, og definisjonene gitt av Kilpatrick et al. (2001), Niss et al. (2002) og NCTM (u.å.) har alle sterke likheter med disse kjennetegnene. Beskrivelsen av adaptivt resonnement (Kilpatrick et al., 2001) viser i stor grad til plausibilitet og matematisk forankring gjennomkjennetegn som *logisk tenking og forklaring og forsvaring av sammenhenger*. Det kan også argumenteres for at for å kunne følge og drøfte beviser, og utarbeide og gjennomføre egne resonnementer, er det nødvendig med både evne til nyskaping, matematisk forankring og plausibilitet, og dermed er det likheter mellom kreative resonnementer og beskrivelsen Niss et al. (2002) gir av resonneringskompetanse. NCTMs (u.å.) beskrivelse av matematisk resonnement har også klare fellestrekk med kreativ resonnering, da det kan argumenteres for at evnen til å danne sammenhengende representasjoner og beskrivelser av problemer krever matematisk forankring, plausibilitet og evne til å benytte kunnskap på ny måte. Felles for alle beskrivelsene er også deres kontrast til imitativ resonnering, som styres av tidligere erfaringer, utenatlærte algoritmer og hele løsningsforslag.

Mens Kilpatrick et al. (2001) mener at en kjent og komfortabel kontekst er nødvendig for at resonneringen skal komme til syne, trekker Lithner (2008) frem læringsmiljøets rolle. Gjennom læringsmiljøer hvor matematiske samtaler rundt resonnering finner sted, dannes grunnlag for utvikling. Begge er dermed opptatt av omgivelsenes påvirkning på resonneringsutviklingen. Resonneringens sentrale rolle i matematikken er et tema som fremheves i flere av teoriene: Lithner (2008) relaterer elevers kreative resonnementer til deres matematiske kompetanse, i likhet med både Kilpatrick et al. (2001) og Niss et al. (2002) som begge definerer resonnering som en del av den matematiske kompetansen. Ross (1998) beskriver matematisk resonnering som et fundament i matematikken og som vitenskapsretningens verifiseringsmetode, og dette mener jeg også kan relateres til matematisk kompetanse.

Jeg har ikke lyktes i å finne store uenigheter mellom de ulike beskrivelsene. Kilpatrick et al. (2001) mener at adaptiv resonnering er korrekt, mens Lithner (2008) argumenter for at resonnering ikke nødvendigvis trenger å være korrekt (i form av å gi korrekt svar), men de

gjennomgående likhetene mellom de to teoriene peker mot at denne uenigheten kan komme av ulik bruk av begrepet *korrekt*. Rammeverket til Lithner (2008) virker dermed som et dekkende og godt rammeverk for mitt arbeid fra et matematisk perspektiv. Tabell 3-1 og påfølgende argumentasjon viser at definisjonen av kreative resonnementer i svært høy grad samsvarer med de andre definisjonene som er presentert. Til sammen gir dette trygghet på rammeverkets tyngde og gyldighet, og dets egnethet for min studie fra et matematisk perspektiv.

3.4 Andre definisjoner av matematisk kreativitet

Leikin og Pitta-Pantazi (2013) presenterer en oversikt over forskning på matematikk og kreativitet, hvor de kommer frem til at matematisk kreativitet ofte fremstilles som en egenskap beskrevet ved originalitet eller evne til nyskaping enten for subjektet selv eller for omverdenen. De trekker frem en rekke definisjoner på matematisk kreativitet, blant annet Torrance (1996, gjengitt i Leikin & Pitta-Pantazi, 2013) sin test for kreativ tenking hvor kreativitet defineres ut fra (1) *ferdigheter (fluency)*, gjennom fremdrift i idéer og bruk av grunnleggende kunnskap, (2) *fleksibilitet* ved å kunne endre idéer og veksle mellom innfallsvinkler for et problem, (3) *evne til nytenkning*, gjennom unike tenkemåter og produkter av tankeprosesser, og (4) *utdyping* gjennom evne til å beskrive, belyse og generalisere ulike idéer.

Ervynck (1991) påpeker at matematisk kreativitet ikke dannes ut av ingenting; man bruker først matematikk uten å forstå teorien bak den, før kjennskap og kompetanse innenfor algoritmetikk for beregning og løsning utvikles. Først da kan matematisk kreativitet oppnås, som han mener kjennetegnes ved frigjøring fra algoritmer. Sriraman (2009) kom gjennom sin studie, hvor han undersøkte fem matematikers tankeprosesser, frem til at matematisk kreativitet kan defineres som evnen til å produsere nyskapende eller originalt arbeid, uavhengig av nivået tankeprosessene ligger på. Haylock (1987) har sett på matematisk kreativitet hos skoleelever, og funnet to nøkkelaspekter: *Fleksibilitet* og *evne til divergent tenking*. Med *fleksibilitet* menes frigjøring fra fiksering på algoritmer og fremgangsmetoder, samt evne til å se mange nok muligheter ved en oppgave eller et problem til å kunne finne en løsning, mens *divergent tenking* betyr at mange løsninger finnes (Haylock, 1987).

Det virker dermed som om kjennetegnene Lithner (2008) gir på kreative resonnementer støttes. Ord som *nyskaping* går igjen i de ulike teoriene, og behovet for matematisk forankring og plausibilitet tydeliggjøres gjennom beskrivelser som *evne til utdyping* og *ferdigheter*. De relativt like definisjonene på hva som kjennetegner matematisk kreativitet gir rammeverket til

Lithner (2008) ekstra tyngde, og gir ytterligere trygghet i valget om å benytte elementer fra rammeverket i min studie fra et matematisk perspektiv.

3.5 Statistisk resonnement og kreativitet

En rekke statistikere har argumentert for at statistikk er en matematisk gren, men ikke et matematisk undertema (Moore & Cobb, 1997, 2000). Feltet har «*partly outgrown its mathematical theories*» (G. W. Cobb, 1992, s. 4-5), og matematikdidaktisk teori er dermed ikke dekkende for statistiske problemer (Garfield & Gal, 1999; Moore & Cobb, 1997, 2000). Statistikdidaktiske teorier omkring resonnementer fikk økt oppmerksomhet rundt årtusenskiftet, og et av hovedargumentene for dette er at den tradisjonelle tilnærmingen til statistikk har fokusert på prosedyrer og beregninger, noe som ikke bidro til økt forståelse for statistiske prosesser (Ben-Zvi & Garfield, 2004). I statistikdidaktisk litteratur dukker begrepet *statistical reasoning* ofte opp som en del av statistisk kompetanse, men ifølge Ben-Zvi og Garfield (2004) har begrepet ingen universell definisjon og statistisk resonnering og tenking ofte brukes om hverandre. Garfield og Ben-Zvi (2008) skiller imidlertid mellom statistisk resonnering og tenking ved at statistisk tenking krever høyere grad av tankeprosesser enn resonneringen. Videre beskriver de statistisk resonnering som «*the way people reason with statistical ideas and make sense of statistical information*» (Garfield & Ben-Zvi, 2008, s. 42), som utgjør de kognitive representasjonene og assosiasjonene rundt statistiske konsepter. Dette innebærer evnen til å beskrive data, forstå og forklare statistiske prosesser, og tolke statistiske resultater basert på ulike representasjoner, noe som krever underliggende konseptuell forståelse for statistiske metoder (Garfield, 2002; Garfield & Gal, 1999).

Ifølge Garfield (2002) er det ingen tydelig enighet rundt hvordan man kan utvikle elevers statistiske resonnering eller hvordan nivå og korrekthet av statistiske resonnement kan måles. Pfannkuch og Wild (2004) mener at ved resonnering rundt statistiske modeller bør en helhetlig resonnering velges foran resonnering basert på enkeltpunkter. Mens den sistnevnte resonneringen inkluderer lite eller ingen forsøk på å relatere enkeltpunktene til datasettet eller helheten, fokuserer helhetlig resonnering på mønstre, tendenser og sammenhenger i datasettet som en helhet. Pfannkuch og Wild (2004) argumenterer videre for at man kan se begge resonneringstypene dersom man studerer ulike statistiske resonnementer. Dette kan relateres til utfordringene Casey (2014) påpekte (delkapittel 2.2), hvor regresjonslinja ble dannet på grunnlag av enkeltpunkter.

Den amerikanske førsteamanuensis i matematikk Edward S. Mooney (2002) presenterer et rammeverk for statistisk resonnering blant elever på det som i Norge vil tilsvare mellomtrinnet, basert på fire nivåer: (1) *Idiosynkratisk resonnering*. Kjentetegnes ved smale resonnementer som i liten grad er relatert til de gitte dataene men heller er resultater av subjektive eller idiosynkratiske argumenter basert på erfaringer og forhåndsopfatninger. (2) *Overgangsnivået*, hvor en bevissthet oppstår rundt viktigheten av å se det større bildet i resonneringen fremfor å fokusere på enkeltelementer. Likevel mener han at denne typen resonnering ofte har for stort fokus på ett aspekt ved situasjonen eller problemet. (3) *Kvantitativ resonnering*, hvor elevene er i stand til å gjenkjenne de matematiske idéene bak problemet de står ovenfor, og blir ikke distraheret av enkeltdetaljer eller irrelevante faktorer. Likevel er de ikke alltid i stand til å implementere de matematiske idéene i løsningen av problemet. (4) *Analytisk resonnering*. Nivået kjennetegnes ved evne til å se sammenhenger mellom de ulike aspektene ved et problem, og tilpasse resonnementene for å strukturere og løse problemet.

Chervany, Benson og Iyer (1980) definerer statistisk resonnering som evnen til å gjenkjenne, gjengi og skille mellom statistiske konsepter og benytte dem i problemløsning. Chervany, Collier, Fienberg, Johnson og Neter (1977) og Chervany et al. (1980) beskriver resonnering som et produkt bestående av tre steg: (1) *Å se et gitt problem i lys av lignende problemer*, og å se sammenhenger som kan være til nytte. Dette innebærer å beskrive problemet ved hjelp av statistiske begreper og symboler eller å sette ord på hva som skal undersøkes. (2) *Planlegging og gjennomføring av passende metoder for å løse problemet*. Dette krever ferdigheter innenfor problemløsning i tillegg til matematisk kompetanse og kjennskap til ulike statistiske konsepter. (3) *Evaluering og tolkning av løsning*. Løsningen drøftes opp mot det opprinnelige problemet, og mot kjente løsninger av lignende problemer eller erfaringer.

Ifølge Gil, Ben-Zvi og Apel (2008) kommer kreativitet i statistikk, i likhet med i matematikk, til syne gjennom samspelet mellom formuleringer, løsningsforsøk, omformuleringer og til slutt endelig løsning av et problem, og adapterer de matematiske kreativitetskriteriene *ferdigheter*, *fleksibilitet* og *evne til nyskaping* til statistikken. Ferdigheter beskrives som antall ulike løsningsmetoder som blir testet, mens fleksibilitet referer til evnen til å se de statistiske problemene fra ulike vinkler og benytte tilpassede metoder (Gil et al., 2008). Evne til nyskaping karakteriseres ifølge Gil et al. (2008) utfra idéers originalitet, i alle ledd av oppgaveløsningen.

3.6 Sammenligning av matematisk og statistisk resonnement

I litteratur som ønsker å skille statistikk og matematikk fremheves forskjeller mellom de to retningene: Garfield og Gal (1997) peker på at data i matematikk sees på som tall mens de i statistikk er tall *med kontekst*, og at dette påvirker resonneringen. Moore og Cobb (1997, s. 803) beskriver forskjellen slik: «*In mathematics, context obscures structure. ... In [statistics], context provides meaning*». Gattuso og Ottaviani (2011) argumenterer for at statistisk resonnering er induktiv og inkluderer tolkning av kontekster og usikre konklusjoner, mens matematisk resonnering er deduktiv og fremmer abstraksjon og logikk ut fra definisjoner, algoritmer og aksiomer. Disse argumentene er sterkt i strid med matematiske oppfatninger som vektlegger nettopp kontekstens betydning for matematikken (f. eks. Gravemeijer & Doorman, 1999; Madison, 2008; Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Madison (2008) går så langt som å argumentere for at både matematikk- og statistikkurs på høyere utdanningsnivåer ofte er lite kontekstbaserte. Oppfatningene om et tydelig skille mellom matematisk og statistisk resonnering virker dermed noe kontroversielle. Det kan også argumenteres for at kreative matematiske resonnementer slik Lithner (2008) definerer dem vil kreve resonnering utover hva Gattuso og Ottaviani (2011) beskriver, da deres beskrivelse ikke gir stort rom for nyskaping og vil risikere lav plausibilitet.

Nettopp temaet lineær regresjon har blitt benyttet for eksemplifisering av de påståtte forskjellene mellom statistisk og matematisk resonnement (f. eks. delMas, 2004; Garfield & Ben-Zvi, 2008). Garfield og Ben-Zvi (2008) mener at de grunnleggende operasjonene er like: Regresjonslinja finnes ved hjelp av matematiske algoritmer. Men, mens den matematiske resonneringen stopper her ifølge dem, bør den statistiske resonneringen inneholde tolkning av forhold mellom variablene og evaluering av modellens tilpasning til konteksten. Dette er igjen i strid med oppfatningen om at kontekst vektlegges også i matematikk. delMas (2004) mener at elever som ved hjelp av et spredningsplott skal finne regresjonslinja kan risikere å velge ut to punkter som virker representative for plottet og bruke lineær algebra til å finne en rett linje mellom disse to punktene. Dette mener delMas (2004) er et resultat av innøvde algoritmer og erfaring innenfor matematiske problemer hvor en lineær funksjon skal finnes, og vitner om manglende matematisk og statistisk forståelse. Likheter kan trekkes mellom disse teoriene og misoppfatningene beskrevet i [delkapittel 2.2](#).

De statistikdidaktiske teoriene fremhever fagområdets egenart, og dette er en viktig faktor som ikke kan neglisjeres; statistikkfeltet må ikke reduseres til å kun omhandle de rent matematiske

operasjonene. Også eksemplene innenfor lineær regresjon fremhever at matematiske og statistiske resonnementer ikke er ekvivalenter. Likevel tydeliggjøres behovet for matematiske operasjoner - og dermed matematiske resonnementer - som en del av løsningen på et statistisk problem, og behovet for et matematisk grunnlag blir vektlagt i flere statistiske artikler (f. eks. Garfield & Gal, 1997; Gil et al., 2008; NCTM, u.å.). I tillegg har argumentene delMas (2004) presenterer om innøvde algoritmer og erfaringer store likheter med definisjonen Lithner (2008) gir av imitativ resonnering og dermed motsetningen til de ønskede kreative resonnementene.

Tabell 3-2 oppsummerer de ulike beskrivelsene av statistisk resonnement fra delkapittel 3.5, og danner grunnlag for sammenligning med matematikdidaktiske teorier. Jeg vil hovedsakelig sammenligne dem med rammeverket til Lithner (2008), da delkapittel 3.3 konkluderer med at dette rammeverket samsvarer med en rekke sentrale elementer fra ulike definisjoner på matematisk resonnement.

Begrep	Beskrivelse
Statistisk resonnement (Garfield, 2002; Garfield & Gal, 1999)	Evne til å beskrive data, forstå og forklare statistiske prosesser, og tolke statistiske resultater basert på ulike representasjoner. Krever underliggende konseptuell forståelse for statistiske metoder.
Statistisk resonnement basert på fire nivåer (Mooney, 2002)	<i>Idiosynkratisk resonnement:</i> Smale resonnementer, i liten grad relatert til gitt data. Basert på subjektive argumenter, forhåndsoppfatninger og erfaringer.
	<i>Overgangsnivået:</i> Bevissthet rundt viktigheten av å se helheten i resonneringen, men sliter med dette i selve gjennomføringen.
	<i>Kvantitativt resonnement:</i> Gjenkjenner de matematiske idéene bak problemet de står ovenfor, men ikke alltid i stand til å implementere dem i løsningen.
Statistisk resonnement som produkt av tre steg (Chervany et al., 1980; Chervany et al., 1977)	<i>Analytisk resonnement:</i> Evne til å se sammenhenger mellom ulike aspekter ved et problem og tilpasse resonnementene for å strukturere og løse det.
	1. Se et gitt problem i lys av lignende problemer, se nyttige sammenhenger. 2. Planlegging og gjennomføring av passende metoder for å løse problemet. 3. Evaluering og tolkning av løsning i lys av problemstillingen og tidligere erfaringer.

Tabell 3-2 Oversikt over definisjoner på statistisk resonnement

Flere likhetstrekk kan sees mellom de presenterte beskrivelsene av statistisk resonnement og Lithners rammeverk (2008). Mens Garfield og Gal (1999) og Garfield (2002) mener at statistiske resonnementer krever underliggende forståelse for statistiske metoder, trekker Lithner (2008) frem matematisk forankring som et kjennetegn for kreative resonnementer, og

relaterer resonnementstypen til konseptuell forståelse. Det kan også argumenteres for at de statistiske kriteriene om å kunne beskrive data og å forstå og forklare statistiske prosesser (Garfield, 2002; Garfield & Gal, 1999) vil kreve det Lithner (2008) beskriver som plausibilitet og matematisk forankring. På ett felt virker de likevel uenige: Ifølge Garfield (2002) er det ingen tydelig enighet rundt hvordan man kan utvikle elevers statistiske resonnering eller hvordan nivå og korrekthet av resonnementene kan måles. Lithner (2008) derimot, mener at kreativ resonnering kan utvikles gjennom problemløsning eller arbeid med oppgaver som tilrettelegger for denne typen resonnering. I tillegg kan det argumenteres for at Lithner (2008) nivåddifferensierer de ulike typene matematisk resonnering, da det kommer frem at kreativ resonnering krever dypere kompetanse enn hva imitativ resonnering gjør. Dette til tross for at han mener at kreativ resonnering til og med består av elementær resonnering. Jeg ønsker ikke å måle nivå, men innser at karakterisering av resonnementer vil kunne føre til en inndeling som kan relateres til nivåoppnåelse.

De tre stegene statistisk resonnement består av ifølge Chervany et al. (1977) og Chervany et al. (1980) har flere likheter med fire-steps-oppbygningen Lithner (2008) presenterer for matematiske resonnementer. I begge teoriene har strategivalg og strategiimplementering en sentral rolle. De skilles ved fremheving av konklusjonsdanning (Lithner, 2008) mot evaluering og tolkning (Chervany et al., 1980; Chervany et al., 1977), dog det ikke er noen grunn til å tro at Lithner ikke er opptatt av evaluering. Det kanskje største skillet er at Chervany et al. (1977) og Chervany et al. (1980) nevner sammenligning med lignende oppgaver som en del av både startfasen og tolkningen av løsningen til et statistisk problem. Nettopp det å fokusere på tidligere gitte oppgaver innenfor samme område er hva Lithner (2008) karakteriserer som imitative trekk, som hindrer kreativ resonnering ved at erfaring og forventninger til løsningen trumfer det matematiske grunnlaget. Jeg ser ingen grunn til at dette ikke skal være gjeldende også innenfor statistikk.

Også rammeverket Mooney (2002) presenterer for statistiske resonnementer har klare likheter med rammeverket til Lithner (2008). Både idiosynkratisk resonnering (Mooney, 2002) og imitativ resonnering (Lithner, 2008) kjennetegnes ved smale resonnementer, ofte basert på forhåndsoppfatninger og erfaringer. Overgangsnivået og kvantitativ resonnering i rammeverket til Mooney (2002) inneholder elementer fra både imitativ og kreativ resonnering i ulik grad, mens hans siste nivå i stor grad ligner hva Lithner (2008) beskriver som kreativ resonnering. Her trekkes spesielt evne til å se sammenhenger og tilpasse resonnementer frem, noe som jeg mener krever alle tre kriteriene Lithner (2008) beskriver kreativ resonnering ut fra. Selv om

Mooney (2002) beskriver statistisk resonnering som en kontinuerlig prosess over fire trinn mens Lithner (2008) presenterer to motsetninger innenfor matematisk resonnering, mener jeg at også rammeverket til Lithner (2008) legger til rette for at matematiske resonnementer kan inneholde både imitative og kreative elementer. Dette forsterker likhetene mellom de to rammeverkene. Det statistiske rammeverket til Mooney (2002) inneholder dermed flere interessante elementer for forskning på resonnementer blant studenter ved høyere utdanninger, til tross for at det er utarbeidet på grunnlag av studier rettet mot elever på lavere nivåer.

Et begrep som går igjen i en rekke teorier omkring statistisk og matematisk resonnering er *problemløsning*. Resonneringskompetanse og problemløsningskompetanse er tett knyttet til hverandre (Niss et al., 2002), og evne til problemløsning utgjør en sentral del av den totale matematiske kompetansen (Kilpatrick et al., 2001; NCTM, u.å.) Ifølge Kilpatrick et al. (2001) påvirker adaptive resonnementer og de andre matematiske delkompetanser hverandre spesielt mye i situasjoner som krever problemløsning, hvor resonneringens rolle blant annet er å forsvare og legitimere den valgte løsningsstrategien. Lithner (2008) har stort fokus på sammenhengen mellom problemløsning og matematisk resonnering, og hans rammeverk omhandler i stor grad resonnering i problemløsnings situasjoner. Også Chervany et al. (1980) og Chervany et al. (1977) sine steg for statistisk resonnering er basert på problemløsning, og vektlegger stegenes betydning for løsningsprosessen. Statistiske oppgaver gir gode muligheter for problemløsning gjennom blant annet fokus på kontekst og tolking (Gattuso & Ottaviani, 2011), og det kan trekkes flere likheter mellom statistisk og matematisk problemløsning (Gil et al., 2008). Problemløsningsbegrepet blir omtalt videre i delkapittel 4.3.

Til tross for enkelte forskjeller mellom rammeverket til Lithner (2008) og de nevnte beskrivelsene av statistisk resonnering, samt innvendingene mot å se på statistiske resonnementer i lys av matematikdidaktisk teori, mener jeg at de mange likhetene gir grunnlag for å benytte meg av sentrale elementer og definisjoner fra rammeverket. Det faktum at beskrivelsen av matematisk kreativitet, som jeg har argumentert for at i stor grad dekkes av kriteriene Lithner (2008) presenterer for kreativ resonnering, har blitt adaptert til statistikken (Gil et al., 2008) og i svært liten grad blitt endret, underbygger valget ytterligere. Jeg ser likevel behovet for å gjøre justeringer for å tilpasse meg statistikkens egenart, da det er tydelig at matematiske og statistiske resonnementer ikke er ekvivalenter.

3.7 Studiens rammeverk

For å kunne diskutere sentrale elementer ved universitetsstudenters statistiske resonneringer er det nødvendig med et rammeverk som på best mulig måte fanger opp de sentrale aspektene ved studiens fokus. En pragmatisk utvelgelse av elementer fra gjennomgått teori vil derfor danne basis for et rammeverk spesialtilpasset min studie. Rammeverket skal forsøke å tilfredsstillende følgende kriterier fremstilt av Niss (2007, s. 1297):

- Rammeverket gir et perspektiv på fenomenet som undersøkes.
- Rammeverket definerer teoretiske rammer (f.eks. konsepter, begreper, antakelser), med mål om å fremheve sentrale trekk eller elementer ved studiens problemstilling og fokus.
- Rammeverket fremhever foretrukne metoder som vil være tilpasset studiens fokus, med mål om å besvare forskningsspørsmålet og med vekt på hvordan de teoretiske rammene inkluderes.

Det siste punktet omtales i kapittel 4 som tar for seg mine metodevalg, mens de to første punktene inkluderes resten av dette kapitlet.

Både innenfor matematikk og statistikk pekes det på mangelen av en universell definisjon av resonneringsbegrepet (f. eks. Garfield, 2002; Lithner, 2008) og dette understreker behovet et tydelig rammeverk for resonneringers ulike former og kjennetegn i mitt arbeid. Jeg har valgt å benytte samme definisjon som Lithner (2008), nemlig at et resonnering er *rekken av tanker benyttet for å danne antakelser og konklusjoner i oppgaveløsning*. Jeg vil også adoptere hans syn på resonneringer som tankeprosesser i seg selv, resultater av dem eller begge deler, da en slik definisjon fremstår som dekkende for samtlige beskrivelser av resonneringer som er presentert. Dette medfører at alt deltakerne i studien gir uttrykk for under datainnsamlingen vil regnes som resonneringer, men gir også en økt risiko for at ikke alle resonneringer - i den forstand at de er tanker - vil komme frem i studien. Dette vil jeg komme tilbake til i delkapittel 4.4.

Videre velger jeg å se på resonnering som en prosess over flere trinn, i likhet med blant andre Chervany et al. (1977), Chervany et al. (1980), Lithner (2008) og NCTM (u.å.). Dette hjelper meg med tydeligere rammer for hvilke prosesser som skal være i fokus i studien. Da jeg tidligere har argumentert for at trinnene Lithner (2008) presenterer for matematisk resonnering samsvarer godt med annen teori, i tillegg til at trinnene inneholder enkle og konkrete beskrivelser, velger jeg å ta i bruk hans beskrivelse av et resonnering som en prosess over fire trinn: (1) *Presentasjon* av oppgaven; (2) *Strategivalg*; (3) *Strategiimplementering* og (4)

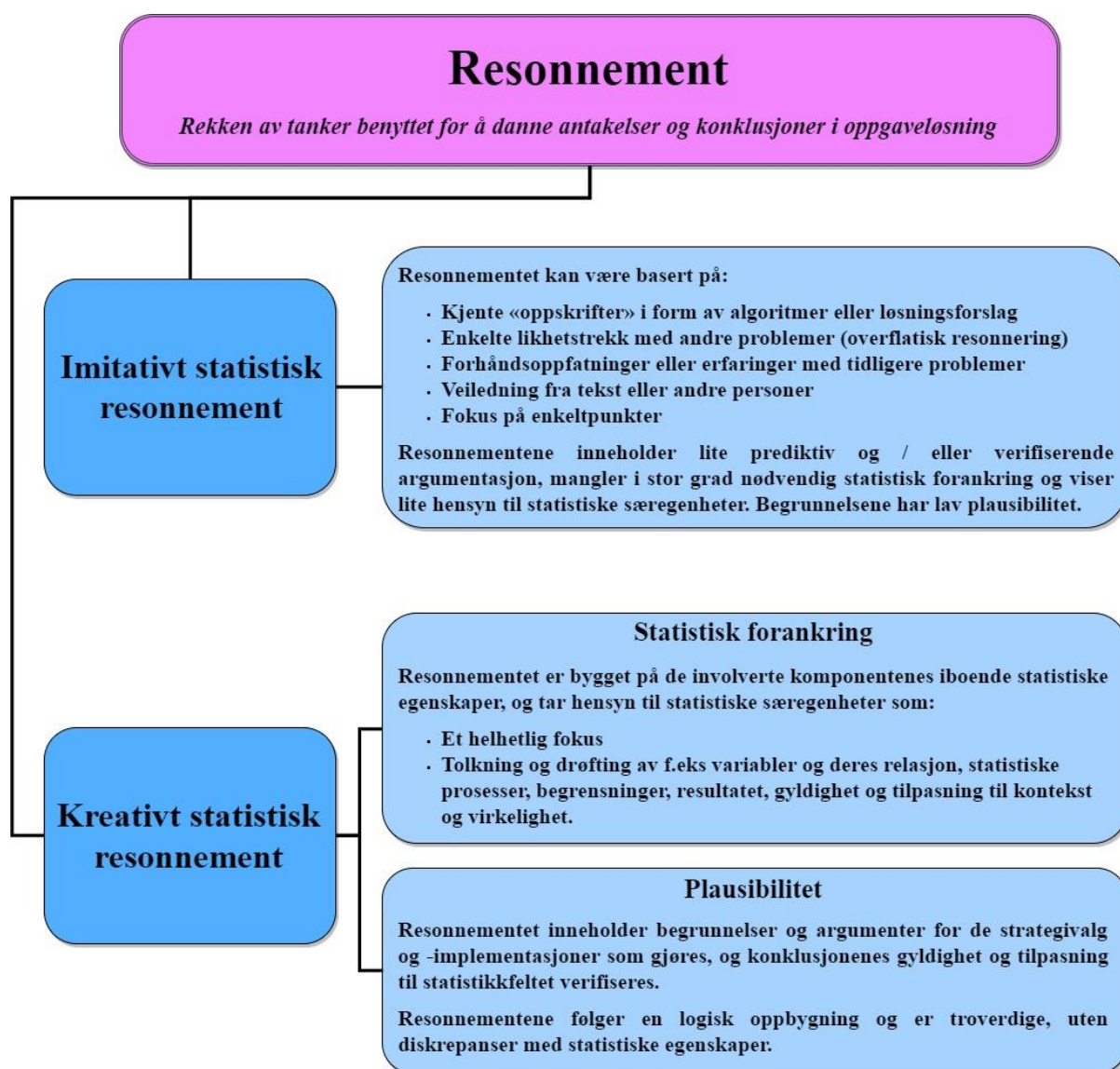
Konklusjonsdanning, med de underdefinisjoner som Lithner (2008) presenterer (delkapittel 3.1). I tillegg velger jeg å utvide *konklusjonsdanning* til å inkludere *evaluering og tolkning av løsning*, i samsvar med trinnene til Chervany et al. (1977) og Chervany et al. (1980) for statistisk resonnering.

Kanskje mest sentralt for å besvare studiens forskningsspørsmål, «*Hva kjennetegner universitetsstudenters resonnementer omkring enkel lineær regresjon i statistikk?*», er behovet for tydelige kjennetegn på ulike typer resonnementer. Da flere teorier forsøker å skille algoritmeavhengighet og forhåndsoppfatninger fra friere resonnering med dypere forankring (f. eks. Lithner, 2008; Mooney, 2002; Ross, 1998) og peker på resonneringens rolle som verifiseringsgrunnlag (f. eks. Kilpatrick et al., 2001; Lithner, 2008; Ross, 1998), har jeg i likhet med Lithner (2008) skissert to hovedgrupper innenfor resonnering:

Kreativt statistisk resonnement: Resonnementer som faller inn under denne kategorien kjennetegnes ved solid *statistisk forankring* og *plausibilitet*. Et resonnement har statistisk forankring dersom det er bygget på de involverte komponentenes iboende statistiske (og der det er hensiktsmessig også matematiske) egenskaper. Sentralt for denne kategorien er hensynet til statistikkens egenart (se Garfield, 2002; Garfield & Ben-Zvi, 2008; Gattuso & Ottaviani, 2011; Pfannkuch & Wild, 2004) gjennom elementer som et helhetlig fokus samt tolkning og drøfting av variabler og deres relasjoner, statistiske prosesser, begrensninger, resultater, gyldighet og tilpasning til kontekst og virkelighet. Disse aspektene anses altså som sentrale i dette rammeverket. Statistisk plausibilitet innebærer at deltakerne presenterer begrunnelser og argumenter for de strategivalg og -implementasjoner de inkluderer i sine resonnementer, og at de i evalueringen og tolkningen av sine løsninger kan verifisere konklusjonenes gyldighet og tilpasning til statistikkfeltet. På denne måten omhandler plausibiliteten både de prediktive og verifiserende argumentene. Plausible resonnementer følger en logisk oppbygning og er troverdige, uten diskrepanser med statistiske eller matematiske egenskaper.

En relasjon trekkes mellom (kreativ) resonnering og konseptuell forståelse (f. eks. Chervany et al., 1980; Chervany et al., 1977; Garfield, 2002; Garfield & Gal, 1999; Lithner, 2008; Ross, 1998). Studiens rammeverk adopterer derfor synet om en gjensidig avhengig sammenheng mellom kreative resonnementer og konseptuell forståelse. I dette ligger at kreative resonnementer vil kreve dypere konseptuelle forståelse enn andre resonnementer, og at kreativ resonnering bidrar med kunnskaper som utvikler den konseptuelle forståelsen for de aktuelle statistiske komponentene.

Imitativt statistisk resonnement: Denne typen resonnementer kjennetegnes ved at fokuset ligger på å følge kjente «oppskrifter» i form av algoritmer eller løsningsforslag, uten drøfting over hvordan disse er tilpasset det aktuelle problemet. Resonnementene kan være basert på tidligere erfaringer med lignende problemer (matematiske og statistiske), veiledning fra tekst eller andre personer, eller være overflatiske resonnementer basert på enkelte likhetstrekk med andre problemer eller stort fokus på enkeltpunkter. Resonneringen foregår med liten grad av prediktiv og/eller verifiserende argumentasjon, mangler i stor grad den nødvendige statistiske forankringen og viser lite hensyn til de statistiske særegenhetene. Begrunnelsene har lav plausibilitet gjennom diskrepanser med statistiske elementer, lav statistisk forankring eller fordi resonnementene ikke følger en logisk oppbygning.



Figur 3-2 Oversikt over studiens rammeverk

Figur 3-2 viser studiens tilpassede rammeverk. Målet med hovedgruppene er å inkludere sentrale aspekter fra gjennomgått teori med fokus på statistikkens særegenhet, samt å tilby tydelige resonneringstrekk som vil gjøre klassifiseringen av deltakernes resonnementer enklere. Slik teoretisk trianguleringen styrker ifølge Lester (2005) rammeverket. Jeg vil likevel være åpen for å også se etter andre kjennetegn enn dem som nå er nevnt, for å ta hensyn til variasjoner og uforutsette resonneringssekvenser. En slik tilnærming kaller Kvale og Brinkmann (2015) *abduksjon*, og brukes i situasjoner hvor man ønsker å forstå eller forklare fenomener man ikke har kjennskap til. Empiriske funn vil derfor sees i lys av rammeverket for å gi dem mening, og rammeverket vil tilpasses de empiriske funnene.

4 Metode

Sosiologen Vilhelm Aubert definerer metode som «... *en fremgangsmåte, et middel til å løse problemer og komme frem til ny kunnskap. Et hvilket som helst middel som tjener dette formålet, hører med i arsenalet av metoder*» (Everett & Furseth, 2014, s. 128). Fra denne definisjonen oppstår et behov for presisering, og i dette kapittelet vil jeg redegjøre for metodene jeg har brukt i studien. Avslutningsvis vil jeg trekke inn viktige etiske aspekter, samt komme med kritikk til mine metodevalg. Kapittelet skal også tilfredsstille det siste kriteriet Niss (2007) beskriver for et rammeverk (delkapittel 3.7). All datainnsamling ble gjort i samarbeid med en annen masterstudent med problemstilling innenfor samme tema og studentgruppe som meg, og med samme metodevalg (herfra omtalt som min *metodepartner*). Valg av deltakere og oppgaver samt selve datainnsamlingen er derfor gjort i fellesskap med metodepartneren, og jeg vil trekke inn hvordan dette påvirket data og prosessen.

4.1 Forskningsdesign

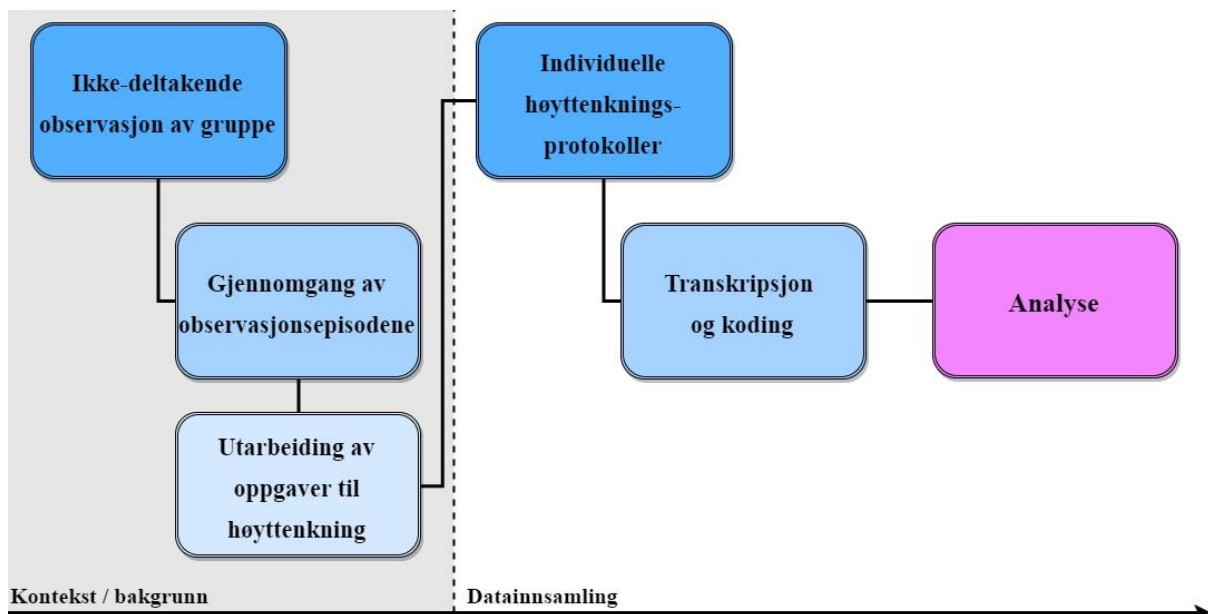
«*[O]ne's choice of methodology should be guided by the goals one has for research*» (Schoenfeld, 1985, s. 176). Målet med min studie er å få et innblikk i hva som kjennetegner universitetsstudenters resonnementer. Da kognitive prosesser er vanskelige å fange gjennom skriftlige produkter, var jeg avhengig av forskningstilnæringer som bidro til at studentene selv satt ord på sine resonnementer. Valget falt dermed på et kvalitativt design, da dette egn seg godt til å beskrive personers opplevelser og fortolkninger av situasjoner i ord (Jacobsen, 2005) og tilrettelegger for å kunne si noe om spesielle kjennetegn eller egenskaper ved et fenomen (Christoffersen & Johannesen, 2012). I kvalitative studier inkluderes et relativt lite utvalg, og detaljer og nyanser vektlegges (Jacobsen, 2005). I tillegg reduseres forskerens styring av dataene, da deltakerne kan bruke egne ord og utdype sine meninger i større grad enn ved kvantitative design (Jacobsen, 2005). Dette var viktig for meg i valget av forskningsdesign.

Jeg anså det som fordelaktig å utføre studien i et allerede eksisterende statistikkurs, for å skape en mest mulig naturlig kontekst. Tanken bak dette var å i minst mulig grad påvirke deltakernes resonnementer, samt at en kjent og naturlig kontekst er viktig for at deltakerne skal være i stand til å uttrykke sine resonneringskompetanser (Kilpatrick et al., 2001). Det var derfor naturlig å velge casestudie, hvor dypere undersøkelse av én eller noen få «caser» gjennomføres med mål om å hente inn så mye informasjon som mulig om et avgrenset fenomen (Christoffersen &

Johannesen, 2012). Forskningsdesignet er godt egnet dersom forskeren vet lite om hendelsene som vil skje i løpet av studien (Yin, 2014). I mitt tilfelle var studentenes resonnementer fenomenet jeg ønsket et dypdykk i, og med begrenset forhåndskunnskap om hvilke tanker eller argumenter som ville oppstå underveis virket casestudie som et hensiktsmessig valg.

Resonnementer er ikke et fenomen som kun oppstår i én enkelt situasjon, og for å få et bredere innblikk i resonnementene på tvers av kontekst og redegjøre for eventuelle situasjonsavhengige variasjoner var min opprinnelige plan å samle inn data ved hjelp av ulike metoder. Dette er ikke uvanlig i casestudier (Christoffersen & Johannesen, 2012). Ifølge Garfield og Gal (1999) er en av de best egnede metodene for å vurdere statistisk resonnering én-til-én kommunikasjon med studentene. Schoenfeld (1985) er enig i at individuell kommunikasjon gir tilgang til de reneste tankeprosessene, da sosiale faktorer har mindre påvirkning i en slik situasjon, men argumenterer for at strategivalg vil være enklere å observere ved å la studentene løse problemer i grupper.

Valget falt derfor opprinnelig på ikke-deltakende observasjon av en gruppe og individuelle høyttenkningsprotokoller, hvor datainnsamlingen i begge metodene ble gjort ved videoopptak. Ved observasjon studeres et utvalg i deres naturlige setting (Christoffersen & Johannesen, 2012), og metoden gir rom for detaljerte beskrivelser av deltakernes aktiviteter og prosesser. I mitt tilfelle ble en studentgruppe på fem personer filmet mens de sammen løste oppgaver tilknyttet enkel lineær regresjon. Studentene ble filmet i klasserommet de til vanlig brukte, for å gjøre situasjonen så naturlig som mulig. Høyttenkningsmetoden går ut på at deltakeren tenker høyt mens han arbeider med utvalgte oppgaver eller problemer uten forstyrrelser fra forskeren (van Someren, Barnard & Sandberg, 1994), og blir nærmere omtalt i delkapittel 4.4. Gjennom en slik metode oppnås innsikt i deltakernes tanker underveis i løsningsprosessen, fremfor kun den endelige konklusjonen. Tanken var å bruke høyttenkningen til å utdype interessante elementer fra observasjonsepisodene, da jeg anså observasjonen for å foregå i en mer naturlig kontekst. Men, grunnet ujevn muntlig aktivitet fra de ulike deltakerne i observasjonsepisodene og mangelfull argumentasjon og diskusjon rundt strategivalgene som ble gjort, fikk observasjonsdataene en svært liten rolle i studien. Høyttenkningsprotokollene blir derfor brukt for å besvare problemstillingen, mens observasjonsepisodene utgjør en del av konteksten for studien og oppgaveutformingene, samt trekkes inn i implikasjonene i delkapittel 7.2. En oversikt over fremgangen i min datainnsamling og analyse er vist i Figur 4-1.



Figur 4-1 Modell over metoder og fremgang i mitt arbeid og analyse. Elementene i grått område danner bakgrunnsinformasjon for datainnsamlingen, mens elementene i det hvite området utgjør selve datamaterialet for analysen.

4.2 Kontekst og deltakere

Da problemstillingen ikke ga andre føringer enn at studien skulle foregå i statistikk på universitetsnivå, falt valget på et statistisk grunnkurs ved et norsk universitet som ønsket å delta i studien. Ved det aktuelle grunnkurset foregikk det et pågående forskningsprosjekt hvor nettbaserte videoforelesninger ble benyttet for å introdusere studentene for nytt fagstoff, mens den tradisjonelle forelesningstiden ble brukt til samtaler og arbeid med oppgaver og problemer tilknyttet pensum. Arbeidet foregikk i grupper på fem til seks studenter, hvor sammensetningen var basert på en test som skulle karakterisere studentenes kognitive oppbygning. Resultatet fra testen var en kode bestående av fire bokstaver som skulle gi en indikator på om studentene var kontekstuelle eller digitale, ekstroverte eller introverte, intuitive eller sensoriske, og tanke- eller følelsesstyrt (Brovold, 2013). Studentene ble satt sammen i grupper på tvers av de kognitive kodene, med minst to ulike kognitive typer i hver gruppe. Gruppene vedvarte hele semesteret.

Det viktigste kriteriet da deltakerutvalget skulle gjøres, var frivillighet. For at studentene skulle få tilstrekkelig med informasjon om både min metodepartners og min studie før de eventuelt takket ja til å delta, laget vi en informasjonsfilm og et informasjonsbrev med samtykkeskjema (vedlegg A) som ble lagt ut på kursets digitale plattformer. Da deltakerutvelgelsen ble gjort var observasjonsepisodene fortsatt tiltenkt en større rolle og påvirket dermed utvelgelseskriteriene i betydelig grad. Det ble ansett som hensiktsmessig å benytte samme deltakerutvalg i både observasjonene og høyttenkningene, og i og med at studentene allerede var satt sammen i

grupper ble det valgt å spørre hele grupper om å delta i studien. Idéen bak dette var at gruppene hadde jobbet sammen en stund og derfor var trygge på hverandre, noe som kunne bidra til at det var lavere terskel for å dele tanker og diskutere ulike strategier. I tillegg bidro dette til en naturlig situasjon for deltakerne under observasjonen. Jeg presiserer igjen at dette valget ble gjort mens observasjonsepisodene fortsatt var tiltenkt en større rolle.

Deltakerutvelgelsen kan bli enklere utover i arbeidsprosessen (Johannesen, Tufte & Christoffersen, 2011), da man får større innsikt i viktige utvalgs-kriterier og gunstig deltakerstørrelse for studien. Dette ble gjeldene også i denne studien: I starten av prosessen ønsket min metodepartner og jeg å studere to ulike grupper for å redusere eventuelle påvirkninger gruppesammensetningen kunne ha på dataene. Underveis i utvelgelsesprosessen innså vi imidlertid at å observere to grupper så i dybden som vi opprinnelig ønsket og i tillegg gjennomføre høyttenkningsprotokoller med dem, ville kreve mer arbeid og tid enn rammene for studiene tillot. Det ble derfor bestemt å redusere deltakerutvalget til én gruppe.

I samråd med foreleseren i kurset ble én gruppe foreslått basert på deres muntlige aktivitet og faglige kompetanse. Disse utvalgs-kriteriene ble laget med tanke på både observasjonen og høyttenkningene. For observasjonen ble det ansett som hensiktsmessig å velge en gruppe med mye muntlig aktivitet, for å få mest mulig informasjon ut av observasjonsepisodene. Deltakerutvalget for høyttenkning bør gjøres på bakgrunn av evne til verbalisering og ønsket grad av kompetanse innenfor problemstillingen (Afflerbach & Johnston, 1984; van Someren et al., 1994), og disse to kriteriene ble derfor sentrale. Gruppen som ble foreslått var preget av mye diskusjon og prat mellom deltakerne, og antakelsen var at dette var forenelig med gode verbale ferdigheter og dermed et hensiktsmessig utvalg. Afflerbach og Johnston (1984) advarer mot en siling av deltakere dersom den påvirker utvalgets tilfeldighet, men det ble vurdert dithen at det ikke var noen sammenheng mellom deltakernes verbaliseringsferdigheter og kognitive prosesser. Med dette menes at det ble antatt at det ikke var vesentlig forskjell i den faglige kompetansen eller resonneringsevnen til deltakerne kontra de andre studentene i kurset, og dermed at utvalgs-kriteriet ikke ville utgjøre noen nevneverdig feilkilde.

Til tross for at høyttenkning ikke medfører vesentlig forstyrrelse av deltakernes tankeprosesser (Ericsson & Simon, 1980; Henry, LeBreck & Holzeimer, 1989, gjengitt i Fonteyn, Kuipers & Grobe, 1993; van Someren et al., 1994), finnes det aspekter ved metoden som tilsier at den ikke passer alle. Ved å skulle dele sine tanker høyt settes deltakerne i en posisjon hvor deres evne til å løse problemer, og alle utfordringer de møter i prosessen, blottlegges. Dette kan føre til nervøsitet og hindre gode høyttenkningsprotokoller (van Someren et al., 1994), og er en ikke-

neglisjerbar faktor. Det er derfor hensiktsmessig med deltakere som ikke lar eventuelle utfordringer prege høyttenkningen i vesentlig grad (Afflerbach & Johnston, 1984), og det ble vurdert dithen at gruppelemmenes muntlighet tilsa at de var nettopp slike deltakere. De tilfredsstilte alle den ønskede graden av kompetanse innenfor problemstillingen, som var at dette var deres første statistikkurs på universitetsnivå. Grunnet tidsbegrensninger ble det ikke gjennomført noen pilot av den fullstendige studien med deltakerne, noe som strider med hva blant andre van Someren et al. (1994) anbefaler for å kartlegge deltakernes tilpasning til høyttenkningmetoden og gjøre eventuelle endringer. En pilot av høyttenkning som metode ble gjennomført høsten 2016 som en del av forberedelsene til masteroppgaven, men med andre spørsmål og deltakere enn i selve studien. Selv om denne piloten ikke ga informasjon om deltakerne, ga den et verdifullt innblikk i høyttenkning som metode. Dette omtales nærmere i delkapittel 4.4.

Den valgte gruppen bestod av fem jenter. Dette var tilfeldig, og ble ansett for å ha liten påvirkning på studien. Med så få deltakere var målet et hensiktsmessig utvalg fremfor et representativt utvalg. Formålet og fremgangen i studiene ble gjennomgått og eventuelle spørsmål ble oppklart, før samtykkeskjemaene ble signert og studien startet. Observasjoner av de fem deltakernes gruppesamtaler resulterte i følgende beskrivelse av hver enkelt deltaker:

Emma deltar aktivt i samtaler rundt oppgavene, men deler sjeldent egne resonnementer. Hun stiller en del spørsmål til de andre deltakerne, og nikker bekreftende til det de sier. Blant de få resonnementene hun deler, viser hun både kreative og imitative tendenser. Det virker som om hun har den nødvendige statistiske forankringen for å bidra med plausible argumenter rundt enkel lineær regresjon, men hun lener seg ofte mot andre kilder (deltakere) for veiledning. Hun uttrykker selv at tanker gjerne må få vokse litt på henne, før hun føler hun «*forstår det helt*».

Heidi var kun tilstede én av tre ganger hvor gruppen ble observert. I denne episoden tar hun en passiv rolle, og hun gir ikke verbalt uttrykk for noen av sine resonnementer. Hun deltar heller ikke i samtaler rundt oppgavene de jobber med. Summen av dette gjør at jeg ikke har grunnlag for å gi en beskrivelse av Heidi ut fra observasjonsepisodene.

Karoline fremstår noe passiv i samtale rundt oppgavene gruppen skal løse, og lytter mye til hva de andre sier. Hun nikker ofte, noe som *kan* være et tegn på at hun er enig med de andres resonnementer men også et tegn på passivitet. Dette understrekes ved at hun i noen tilfeller godtar eller sier seg enig i andre deltakers resonnementer til tross for at disse er ufullstendige eller strider med statistiske egenskaper. Likevel viser hun i flere tilfeller at hun kan tolke data

de får oppgitt. Grunnet at hun lytter i mye større grad enn hun prater, er det vanskelig å danne en tydelig karakteristikk av Karolines resonnementer ut fra observasjonsepisodene.

Susanne bidrar aktivt i samtaler rundt oppgavene i observasjonsepisodene. Hun stiller en del faglige spørsmål, og formulerer også i flere tilfeller sine egne resonnementer som spørsmål. Hun viser flere plausible resonnementer og god evne til tolkning, selv om hun ved enkelte tilfeller må benytte seg av tekstbasert veiledning for å huske grunnleggende elementer som uttrykket for regresjonslinja.

Linn er i observasjonsepisodene svært aktiv i samtaler omkring oppgavene og svarer ofte på spørsmål fra de andre deltakerne. Dette gjelder både rent faglige spørsmål og tilfeller hvor de ønsker bekreftelse på at deres resonnementer og oppfatninger er riktige. Hun viser i flere tilfeller at hun evner å tilpasse et matematisk grunnlag til de statistiske situasjonene de skal tolke, og bruker plausible resonnementer til å forklare sammenhenger mellom ulike komponenter eller variabler og hvordan de påvirker modelltilpasningen. Hun evner også i flere tilfeller å drøfte tilpasningen. Spesielt er hun aktiv i temaet minste kvadratets metode.

Beskrivelsene ble utarbeidet for å skape en kontekstuell bakgrunn for studien og introdusere leseren for deltakerne, men ble ikke vektlagt i analysen. Dette med tanke på observasjonsepisodenes degraderte rolle i studien. I tillegg resulterte prosessen med å lage beskrivelser av deltakerne i en oversikt over hvilke temaer som ble diskutert i observasjonsepisodene, noe som var nyttig for utarbeidingen av oppgaver til høyttenkningen.

4.3 Oppgaver

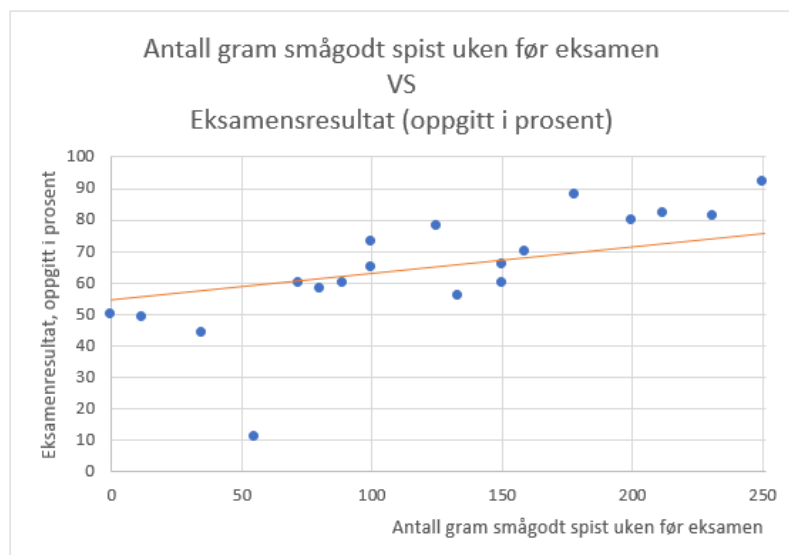
Oppgavene til observasjonsepisodene ble laget av foreleseren i kurset deltakerne fulgte, og var de samme som resten av studentene i kurset arbeidet med. Tanken bak å følge de samme oppgavene var at dette ville føre til en mer naturlig situasjon for deltakerne, slik at de tenkte minst mulig på situasjonen de var en del av. Deltakernes resonneringskompetanse kan kun komme til uttrykk dersom oppgavene de står ovenfor er forståelige, motiverende og tilpasset deres kunnskapsbase (Kilpatrick et al., 2001), og min metodepartner og jeg hadde begge stor tro på at foreleserens oppgaver ville tilfredsstille disse kravene. Målet med oppgavene var for meg å skaffe et innblikk i temaer som kunne danne grunnlag for oppgavene til høyttenkningen, og både min metodepartner og jeg var enige med foreleseren i kurset om at oppgavene han foreslo ville gi rom for interessante resonneringssekvenser og samtaler og dermed gi nyttig informasjon til vår oppgaveutarbeiding.

Da observasjonsepisodene viste at deltakerne hadde flere samtaler og resonnementer omkring minste kvadraters metode, kvadratavvik og modelltilpasninger, ble oppgaver som inkluderte disse elementene utarbeidet til høyttenkningene. I tillegg ønsket jeg at oppgavene skulle kunne avdekke hvorvidt deltakerne hadde misoppfatningene som ble omtalt i delkapittel 2.2, da dette ville hjelpe meg med å knytte mine funn til tidligere studier samt at eventuelle misoppfatninger kunne gi en indikasjon på manglende statistisk forankring og plausibilitet i resonnementene. Oppgaver eller problemer tilpasset høyttenkningsmetoden må kunne verbaliseres og være i samsvar med deltakernes kunnskapsnivå (van Someren et al., 1994), og dette var kriterier som ble vektlagt. Dersom en oppgave er for vanskelig vil det kreve ekstra bevissthet å sette ord på resonnementene og verbaliseringen vil dermed ikke forekomme samtidig med resonnementet eller i verste fall ikke forekomme, mens rutineoppgaver kan være så automatiserte at deltakeren ikke er klar over hvilke resonnementer som gjøres. I begge tilfellene øker risikoen for at deltakerne ikke verbaliserer sine tanker (van Someren et al., 1994). En utfordring ved dette er at en oppgave kan oppfattes som utfordrende for én deltaker mens den for en annen vil være rutinepreget. Dersom problemet deltakerne skal løse er for uvanlig vil resultatene ikke være særlig relevante for studien, og van Someren et al. (1994) foreslår at man rådfører seg med en ekspert på temaet høyttenkningsprotokollene skal omhandle for å sikre at oppgavene ligger på et hensiktsmessig nivå og er relevante. Oppgavene ble laget i fellesskap av min metodepartner og meg, men ble vurdert av foreleseren i faget før høyttenkningene ble gjennomført. På denne måten ble kriteriene van Someren et al. (1994) trekker frem forsøkt tilfredsstilt.

Oppgaver som legger til rette for problemløsning trekkes frem som hensiktsmessige ved høyttenkning (Afflerbach & Johnston, 1984; Fonteyn et al., 1993; van Someren et al., 1994). I slike oppgaver er løsningen ofte ikke direkte tilgjengelig, og resonneringen inkluderer dermed konstruksjon av nye løsningssekvenser og begrunnelse for disse (van Someren et al., 1994). Dette samsvarer med både evne til nyskaping og plausibilitet i rammeverket til Lithner (2008). For at oppgavene skulle være representative for både min metodepartners og min problemstilling, gi rom for frie resonnementer og kunne besvares muntlig, valgte vi å lage problemløsningsoppgaver uten konkrete fasitsvar og som ikke kunne løses raskt ved hjelp av algoritmer. Begrepet *problemløsning* er nevnt i flere av de matematikk- og statistikkdidaktiske teoriene omtalt i kapittel 3 uten noen definisjon, men både Lithner (2008) og Niss et al. (2002) benytter seg av Alan Schoenfelds definisjon av et problem som «*en oppgave som oppleves utfordrende for et individ*» (Lithner, 2008, s. 257, egen oversettelse). Hva som er et problem er altså individuelt, og det som føles som et problem for en student kan være rutineoperasjoner for

en annen. Dette kan relateres til det nevnte problemet med å tilpasse oppgavene til deltakernes kunnskapsnivå. Problemløsingens rolle både i teori og høyttenkning styrket valget av metode, og Schoenfelds definisjon ble tatt i bruk.

Høyttenkning kan være omfattende både for deltakeren og for forskerens analyseprosess, og det er derfor vanlig å begrense omfanget til noen få oppgaver (van Someren et al., 1994). Dermed er det viktig at oppgavene som velges gir rikelig med informasjon for å besvare problemstillingen. For min studie var det hensiktsmessig å velge oppgaver som gjorde det mulig å karakterisere deltakernes resonnementer ut fra rammeverket, samtidig som de ga rom for utforskning av misoppfatningene fra delkapittel 2.2. Det blir anbefalt å starte med en oppvarmingsoppgave (Ericsson & Simon, 1980, 1993; van Someren et al., 1994), både for å hjelpe deltakeren med å komme inn i tankeprosesser relatert til temaet og for å sjekke at oppgavene ligger på et passende nivå. Min metodepartner og jeg valgte å ikke inkludere en slik oppgave, men i stedet gjennomføre et rollespill foran deltakerne for å illustrere at alle tanker kunne deles høyt og vise hva som ville skje dersom deltakeren glemte å tenke høyt. Til sammen ble tre oppgaver valgt ut, som skulle dekke min metodepartners og mitt forskningsspørsmål. Kun de to første oppgavene har blitt brukt i min studie, da det var disse som ga de mest interessante og fyldige resonnementene. Jeg vil dermed bare presentere disse to oppgavene.



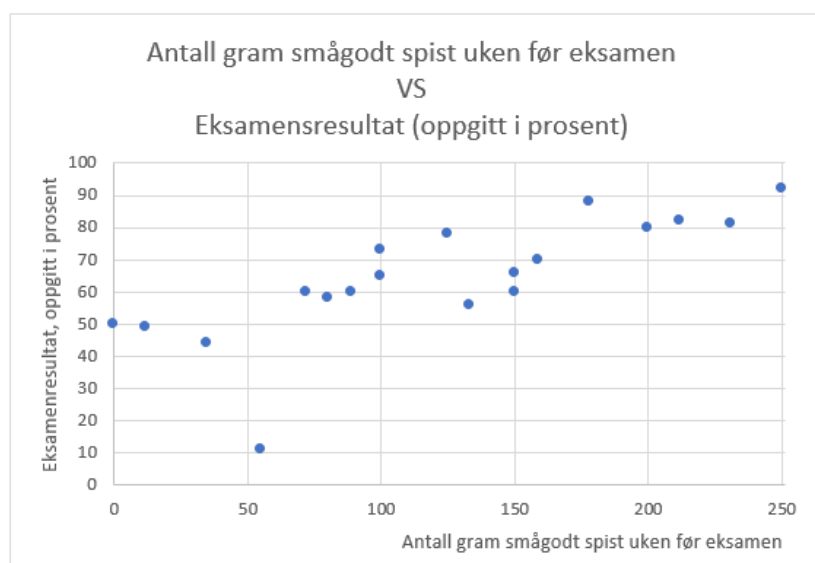
- Hva kan du si ut fra denne grafiske fremstillingen? Begrunn.

Figur 4-2 Første oppgave

Figur 4-2 viser det første problemet deltakerne drøftet i høyttenkningen. Spredningsplottet er laget på grunnlag av fiktive datapar og den oransje linja er *ikke* regresjonslinja, kun en linje plassert for å se hva deltakerne ville si om dens forhold til spredningsplottet.

Oppgavens form gjorde at det ikke fantes noen fasitsvar på problemet. Deltakerne kunne gjøre en rekke tolkninger, strategivalg og konklusjoner, og det var dermed rom for mange ulike resonnementer. Oppgaven åpnet for tanker rundt aksestørrelse og akseinformasjon, blant annet for å drøfte forskjellen mellom sammenheng og årsakssammenheng. Spredningsplottets utforming ga rom for resonnementer omkring trender, spredning og utliggere eller andre avvikende punkter, og ga også mulighet for å utforske hvorvidt deltakerne hadde et helhetlig fokus eller om de fokuserte på enkeltpunkter. Plasseringen av en linje gjennom observasjonene var ment for å avdekke resonnementer rundt forholdet mellom spredningsplottet og linja, i tillegg til generelle tanker rundt elementer som minste kvadraters metode og R^2 -verdi. Dette kunne også avdekke hvorvidt deltakerne ville komme med kritikk til den gitte linjas plassering, eller om de ville anta at den var regresjonslinja for det gitte spredningsplottet. I tillegg ga det relativt lave antallet observasjoner rom for drøftinger rundt utvalgsstørrelsens betydning. Det ble også tatt hensyn til resonnementer rundt andre faktorer, samt hvorvidt deres resonnementer var preget av et matematisk syn eller forhåndsoppfatninger og i hvilken grad de inkluderte egne tolkninger i sine resonnementer. Bruken av begrepet *grafisk fremstilling* var bevisst, for å se hvorvidt deltakerne selv ville ta i bruk annen statistisk terminologi.

- **Figuren under viser samme plott som i sted. Tegn den regresjonslinja du mener vil være best tilpasset plottet. Begrunn valget ditt.**

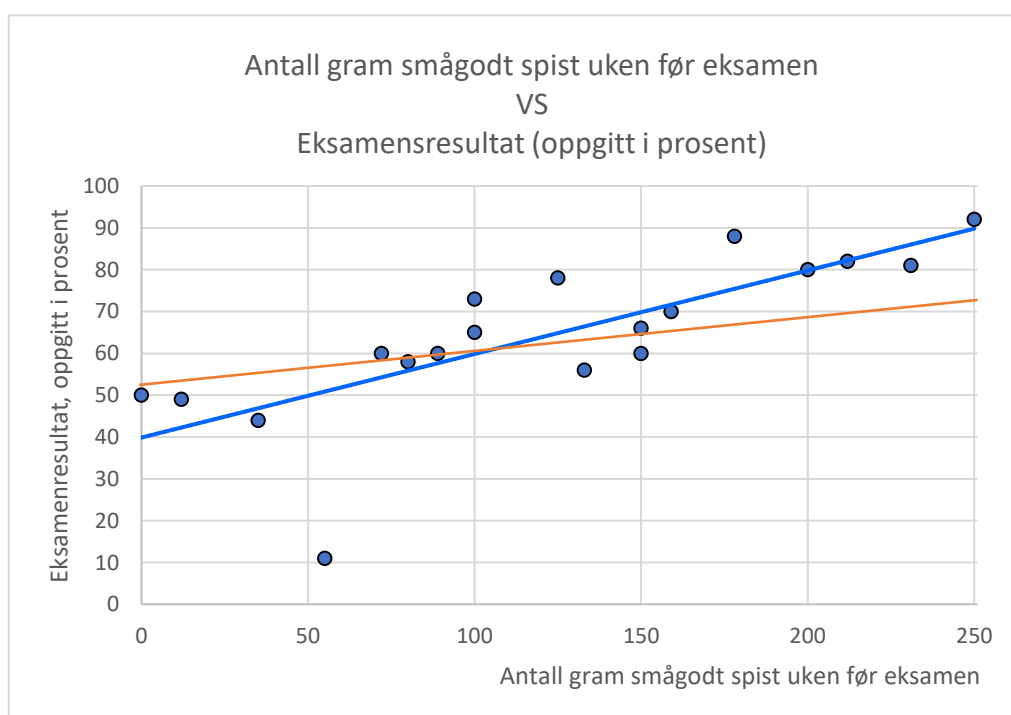


- **Hvilken informasjon får du fra denne modellen?**

Figur 4-3 Andre oppgave

Figur 4-3 viser den andre oppgaven deltakerne skulle drøfte i høyttenkningen, hvor de fikk utdelt et ark med samme spredningslott som i den første oppgaven, men uten linja. Oppgaven hadde de samme målene som den første oppgaven, men ved å selv skulle tegne plottets regresjonslinje og argumentere for valget av plassering var tanken at denne oppgaven ville gi større sannsynlighet for resonnementer omkring kriterier for regresjonslinja, slik som minste kvadraters metode, R^2 -verdi eller tanker rundt formålet med en regresjonslinje. Oppgaven kunne også avdekke hva deltakeren fokuserte på i utarbeidingen av en regresjonslinje, for eksempel deres statistiske forankring, eventuelle forhåndsoppfatninger og erfaringer eller helhetlig fokus versus fokus på enkeltpunkter. I tillegg ga oppgaven rom for andre resonnementer. Ved å spørre deltakerne hvilken informasjon modellen de nå hadde laget ga dem var målet at de skulle inkludere tolkninger, drøfting av modellusikkerhet og tanker rundt fremstillingens gyldighet. I tillegg kunne denne oppgaven åpne for en vurdering av deres selvtegnede regresjonslinje versus linja gitt i den første oppgaven.

Figur 4-4 viser den gitte linja i første oppgave (oransje) og den faktiske regresjonslinja ved minste kvadraters metode (blå). Den reelle regresjonslinja viser at det vil være en overvekt av punkter over linja. Dette er på grunn av utliggeren på undersiden av linja, som skaper et stort negativt residual. Figuren viser at avviket mellom linjene er relativt stort, og det ble derfor ansett som sannsynlig at studentene kunne resonnerer seg frem til at linja i første oppgave ikke var regresjonslinja. Deltakerne fikk ikke se denne figuren.



Figur 4-4 Forskjell mellom linja trukket i første oppgave (oransje) og regresjonslinja ved minste kvadraters metode (blå).

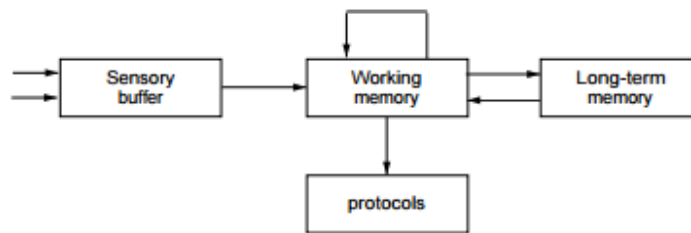
4.4 Høyttenkningsmetoden

Høyttenkning går ut på at en deltaker blir bedt om å fortelle høyt alle tanker han har mens han løser ett eller flere problemer (van Someren et al., 1994), og ofte bes deltakeren også om å løse problemet skriftlig mens han tenker høyt. Deretter analyseres høyttenkningen, med mål om å si noe om de kognitive prosessene som oppstod under oppgaveløsingen (van Someren et al., 1994). Forskeren er ansvarlig for å hyppig oppmuntre deltakeren til å sette ord på sine tanker, men metoden inneholder annet enn dette få eller ingen forstyrrelser og spørsmål (Ericsson & Simon, 1993; Fonteyn et al., 1993), da målet er at deltakeren kontinuerlig skal dele sine tanker under oppgaveløsingen uten påvirkninger (van Someren et al., 1994). En viktig presisering er at deltakerne under høyttenkningen kun skal *verbalisere* sine tanker, ikke forklare, tolke eller analysere dem - det er forskerens jobb (Ericsson & Simon, 1993).

Metoden ansees som hensiktsmessig for studier på kognitive prosesser (Ericsson & Simon, 1980, 1993; Schoenfeld, 1985; van Someren et al., 1994), og ble valgt på grunnlag av den gode tilpasningen til målet med min studie. Ikke bare gir høyttenkning direkte informasjon om deltakernes evne til å løse et problem (Ericsson & Simon, 1980), men også tilgang til de underliggende resonneringsprosessene som skjer og gode beskrivelser av kognitive prosesser som ellers bare kunne bli utforsket indirekte (Afflerbach & Johnston, 1984; Ericsson & Simon, 1980; Fonteyn et al., 1993; van Someren et al., 1994). Dermed gir høyttenkningsprotokoller mulighet til annen, og dypere, innsikt i personers resonnementer enn ved å kun studere resultatene av deres arbeid. Dette er svært relevant for å besvare min problemstilling, og underbygger valget av metoden. I tillegg ble muligheten høyttenkning gir til å kunne se på både gjengående resonneringssekvenser blant deltakerne og forskjeller mellom deltakernes ulike tankeprosesser ansett som en fordel for min studie. Også det at deltakerne i høyttenkningene kan uttrykke sine tanker med egne ord (van Someren et al., 1994) anså jeg som en fordel ved metoden, da jeg mener dette spiller en sentral rolle for grunnlaget i resonnementene.

Det å kunne se på forløpet i løsningsprosessen fremfor kun resultatet av den ville kunne gi verdifull informasjon for å besvare problemstillingen og relatere mine funn til rammeverket. Dette er informasjon jeg mener jeg ikke ville hatt ved bruk av andre metoder, da det er bevist at deltakere i retrospektive studier har en tendens til å ikke fortelle den fulle sannheten (Ericsson & Simon, 1993) eller svare ut fra de umiddelbare kognitive prosessene som oppstår, men heller ut fra ideer som i ettertid har blitt bearbeidet av deltakeren selv (van Someren et al., 1994). Ut fra dette antok jeg at høyttenkning ville gi mer usensurerte og spontane resonnementer enn for

eksempel intervjuer alene. Likevel er det enkelte begrensninger også ved høyttenkning, blant annet ved at kun den kunnskapen som til enhver tid befinner seg i arbeidsminnet vårt blir satt ord på (van Someren et al., 1994). Denne kunnskapen blir igjen påvirket av langtidsminet (*working memory*) hvor kunnskapen oppbevares, og av det sensoriske minnet (*sensory buffer*) som består av informasjonen vi til enhver tid trekker ut eller mottar fra omgivelsene.



Figur 4-5 Illustrasjon av samspillet mellom arbeidsminnet, langtidsminet og det sensoriske minnet, og hvordan dette påvirker høyttenkningen (van Someren et al., 1994, s. 20)

Samspillet er illustrert i Figur 4-5, og kan ifølge van Someren et al. (1994) beskrives i fem trinn. Først strømmer informasjon fra det sensoriske minnet til arbeidsminnet, før informasjon lagret i langtidsminet hentes over til arbeidsminnet. Så dannes ny informasjon gjennom bearbeiding av den eksisterende informasjonen i arbeidsminnet som er hentet fra de to første trinnene. Deler av informasjonen i arbeidsminnet blir så lagret i langtidsminet, mens den aktive informasjonen i arbeidsminnet blir uttrykt i høyttenkningen. Resultatet er dermed at kun de tankene som er i arbeidsminnet blir uttrykt, mens annen informasjon og kunnskap danner «bakgrunnsprosesser» for de uttrykte tankene. Dermed vil høyttenkningsmetoden ikke nødvendigvis gi et fullstendig bilde over deltakernes minner, og dermed ikke deres fullstendige kunnskap eller resonnementer.

Ved å stille spørsmål til et problem hjelper forskeren deltakeren med å forstå problemet og å huske løsninger (van Someren et al., 1994) og kan dermed påvirke deres videre prosesser. Dette må derfor unngås i høyest mulig grad. Likevel så jeg verdien av å kunne stille spørsmål for å få svar på eventuelle uklarheter eller utdype interessante resonnementer. Valget falt dermed på en kombinasjonsmetode presentert av van Someren et al. (1994), bestående av høyttenkning etterfulgt av en kort samtale. Slik kunne jeg inkludere ytterligere fordykning og oppklaring av interessante resonneringssekvenser uten å forstyrre de kognitive prosessene. Denne kombinasjonen er fordelaktig da den gir rom for oppklaring i deltakerens resonneringsstrategier (Fonteyn et al., 1993) og gir mulighet for å få mer fullstendige data om prosessene enn gjennom høyttenkning alene (van Someren et al., 1994). Umiddelbare spørsmål eller oppklaringer ble tatt underveis i høyttenkningen etter enighet mellom metodepartner og meg. På forhånd ble en

kort pilot gjennomført på en kollega, for å gi min metodepartner og meg muligheten til å øve på å lede høyttenkningene sammen. Det var viktig å ha en god dynamikk oss imellom, slik at situasjonen skulle føles mest mulig komfortabel for både deltakerne og oss selv. Både denne piloten og våre individuelle piloter høsten 2016 ga verdifull informasjon og erfaring omkring oppgaveutforming, interaksjon mellom deltaker og forsker og gangen i en høyttenkning.

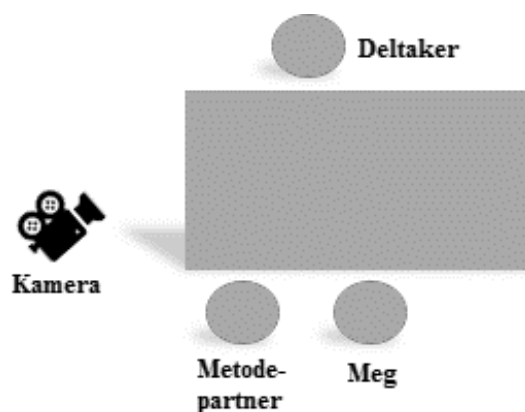
Høyttenkningen kan foregå individuelt eller i grupper med ulik størrelse, avhengig av studiens formål (Schoenfeld, 1985). Ved individuell høyttenkning kan man avdekke de reneste tankene, da de sosiale påvirkningene er minimale, men det er større sjanse for at deltakeren føler ubehag med situasjonen dersom han er alene. Ved høyttenkning i grupper kan situasjonen derimot føles mindre ubehagelig, i tillegg til at strategivalgene enklere kommer til syne gjennom diskusjoner som oppstår i gruppen. Et slikt valg øker imidlertid påvirkningen av sosiale faktorer på høyttenkningen (Schoenfeld, 1985). For å sikre at deltakerne fikk uttrykt sine resonnementer uten vesentlige påvirkninger valgte min metodepartner og jeg derfor individuell høyttenkning med hver enkelt deltaker. Jeg mener at høyttenkningen ga en god balanse mellom nødvendig struktur for å kunne sammenligne de ulike høyttenkningsprotokollene og fleksibilitet til å kunne fordype meg også i uforutsette resonnementer. Strukturen ble skapt gjennom forhåndsbestemte oppgaver, mens fleksibiliteten kom til syne ved at jeg i samtalen i etterkant av høyttenkningen kunne be deltakerne utdype enkelte resonnementer.

Deltakerne ble kontaktet via mail, og dag og tidspunkt for høyttenkningene ble avtalt med hver av dem. Gjennomføringen av hver enkelt høyttenkningsprotokoll tok et sted mellom 30 og 45 minutter inkludert samtalen på slutten, og foregikk over to dager med henholdsvis to og tre deltakere per dag. Da van Someren et al. (1994) presiserer viktigheten av en rolig og trygg atmosfære, valgte min metodepartner og jeg et sted skjernet fra innsyn, med gode stoler, og brakte med vann og skrivesaker. Vi startet med å prate med deltakeren om hverdagslige ting, som generelle studier og hva vi alle hadde gjort siden sist vi møttes, for å gjøre situasjonen mer komfortabel. Videre informerte jeg om høyttenkningens formål og ga en kort instruksjon om å dele høyt alle tanker som dukket opp mens deltakeren løste oppgavene, før min metodepartner og jeg gjennomførte et kort rollespill for å vise gangen i metoden.

Dersom deltakeren ikke hadde noen spørsmål startet høyttenkningen, og deltakeren fikk utdelt et ark med første oppgave. Siden vi var to forskere i rommet var det naturlig å diskutere hvilke spørsmål som skulle stilles både underveis i høyttenkningen og i den påfølgende samtalen, for å sikre at vi begge fikk relevante data for våre studier uten å hindre hverandres datainnsamling. For å løse dette med minst mulig forstyrrelser for deltakeren ble et kort spørsmålsskjema

utformet på forhånd (vedlegg B), og underveis i høyttenkningen pekte vi på spørsmålene vi hadde og skrev korte notater til hverandre. Som Figur 4-6 viser satt min metodepartner og jeg ved siden av hverandre slik at det var lett for oss å se hverandres notater. Ved enighet om et behov for umiddelbare oppklaringer ble spørsmål stilt etter deltakernes resonnementer omkring hver enkelt oppgave, mens de fleste spørsmål ble stilt i samtalen etter begge oppgavene var drøftet. Når deltakeren sa seg ferdig med en oppgave og eventuelle umiddelbare uklarheter var undersøkt, ble neste oppgave delt ut. Etter endt høyttenkning ble deltakernes skriftlige arbeider samlet inn og brukt i analysearbeidet sammen med høyttenkningen.

Intervjuer blir som regel tatt opp og deretter transkribert (Christoffersen & Johannesen, 2012), og van Someren et al. (1994) påpeker nytten av opptak av høyttenkninger. Vi valgte å filme høyttenkningene, slik at vi i tillegg til å kunne høre deltakernes resonnementer i etterkant også kunne se på kroppsspråk og fremgangen i deres skriftlige arbeid, for eksempel når de skulle lage en egen regresjonslinje.



Figur 4-6 Plassering under høyttenkningen

4.5 Analyseprosessen

Christoffersen og Johannesen (2012, s. 39) skriver at «[å] analysere betyr å dele noe opp i biter» for å finne et mønster i datamaterialet. For meg handlet analyseprosessen om å skaffe en oversikt over innholdet i videoopptakene av høyttenkningene gjennom en iterativ prosess bestående av gjentatte avspillinger av videoene, transkribering, systematisering i form av koding, og tolkning ut fra både det teoretiske rammeverket og empiriske funn.

4.5.1 Analysemetode

Videoopptak gir flere fordeler i analyseprosessen, blant annet ved dataenes tilgjengelighet (Powell, Francisco & Maher, 2003). For meg betydde dette at jeg kunne se opptakene gjentatte ganger, og dermed også med ulike fokus. I tillegg kunne jeg pause der det var nødvendig, og spole frem og tilbake dersom jeg ønsket å studere situasjoner nærmere. Min analysemetode var inspirert av en modell av Powell et al. (2003) for undersøkelse av matematisk tenking gjennom videoopptak, inndelt i syv sammenvevde faser i en ustrukturert, iterativ prosess:

1. Gjennomgang av videodataene
2. Beskrivelse av videodataene
3. Identifisering av kritiske situasjoner
4. Transkribering
5. Koding
6. Oppbygning av handlingsforløp
7. Komposisjon av narrativ

For å bli kjent med innholdet i datamaterialet startet jeg med å se på opptakene uten noe bestemt fokus. Dette hjalp meg med å få oversikt over hvilke temaer som ble tatt opp i de ulike videoene, hvor hver video representerte én deltaker. Bruk av videodata resulterer ofte i store mengder informasjon (Powell et al., 2003), og jeg valgte derfor å dele opptakene inn i tidsperioder etter oppgavene deltakerne jobbet med og lage en kort oversikt over hva periodene omhandlet. Dette var for å hjelpe meg med å strukturere den videre analyseprosessen. Neste del av analysen bestod av å identifisere kritiske situasjoner eller elementer. Powell et al. (2003) forteller at hva som defineres som en kritisk situasjon er avhengig av kontekst og forskningsspørsmål, og i min studie anså jeg en situasjon for å være kritisk (eller interessant) dersom den inkluderte et strategivalg, -implementasjon, konklusjon eller tolkning, i tråd med trinnene rammeverket deler et resonnement inn i. I tillegg valgte jeg å inkludere situasjoner hvor disse trinnene *ikke* forekom, da «*the most important event in a problem solving-session may be the one that is conspicuous by its absence!*» (Schoenfeld, 1985, s. 181).

Videre ble videoopptakene transkribert og kodet. Transkripsjonene skulle overføre det som ble uttrykt muntlig i videoene til tekst, mens kodingen innebar å knytte et eller flere nøkkelord til deler av transkripsjonene (Kvale & Brinkmann, 2015). På denne måten kunne jeg bryte datamaterialet ned i mindre deler og trekke ut elementer til den videre analyseprosessen. van Someren et al. (1994) presiserer at transkripsjoner bør skrives så nært virkeligheten som mulig. Jeg valgte å inkludere

...	Pause
[...]	Lengre pause (over 3 sekunder)
-	Ufullstendig ord/setning, avbrytelse av resonnement
[tekst]	Ikke-verbale faktorer (kroppsspråk, bevegelser etc.)
(tekst)	Mine kommentarer eller tilleggsopplysninger

Figur 4-7 Transkripsjonsnøkkel

dialekter, ufullstendige ord og setninger og merkelig setningsoppbygging i transkripsjonene. Figur 4-7 viser transkripsjonsnøkkelen som ble utarbeidet og benyttet for å sikre at transkripsjonene inkluderte så rik informasjon som mulig om deltakernes resonnementer.

Ifølge Powell et al. (2003) er et viktig spørsmål hvorvidt man skal fokusere på videoene eller transkripsjonene i analyseprosessen. Jeg valgte å fokusere på transkripsjonene, da jeg anså det som fordelaktig og forenklerende for analysen å ha et skriftlig grunnlag. Transkribering er en tidkrevende prosess som kan ta opptil ti ganger mer tid enn det opprinnelige datamaterialet (van Someren et al., 1994), men likevel ble deltakernes høyttenkning fra de aktuelle oppgavene transkribert i sin helhet. Dette fordi jeg synes det var enklere å kode høyttenkningen fra skriftlige protokoller, og for å forenkle arbeidet dersom kodeskjemaet eller fokuset ble endret underveis. Koding av transkripsjoner spiller en sentral rolle i analysen av høyttenkningsprotokoller (Afflerbach & Johnston, 1984; Fonteyn et al., 1993; van Someren et al., 1994), og jeg benyttet meg av et selvlaget kodeskjema (vedlegg C) inspirert av hva Fonteyn et al. (1993) kaller *script analysis*. Her bestemmer forskeren et sett av overordnede resonneringskategorier, og koder transkripsjonen etter likheter med disse kategoriene. Også Afflerbach og Johnston (1984) trekker frem viktigheten av kodeskjemaer, men viser også til Fareed (1971, gjengitt i Afflerbach & Johnston, 1984) som advarer mot å tvinge sekvenser inn i forhåndsbestemte kategorier. Jeg valgte derfor å ta høyde for uforutsette elementer, ved å inkludere kategoriene «annet» og «andre faktorer» for elementer som ikke passet inn under andre koder men som likevel var interessante. Kodeskjemaet bestod av to koder: Første kode kategoriserte hvorvidt sekvensen var kreativ, imitativ eller tilhørte «annet» (interessant faktor), mens andre kode kategoriserte sekvensen etter hvilket tema som ble inkludert i resonnementet. Dersom et tema som det ville være naturlig å ta opp i resonnementet *ikke* ble nevnt, ble det satt en x foran denne koden. En kode for et plausibelt resonnement omkring regresjonslinja *uten* at for eksempel utliggeren ble nevnt var SF_R-xEP, hvor SF stod for statistisk forankring, R for resonnement omkring regresjonslinja og xEP for manglende drøfting av enkeltpunkter med betydning.

Koding gir struktur som er hensiktsmessig for videre analyse (Fonteyn et al., 1993), og for min del bidro kodingen til å skape en oversikt over hvilke aspekter deltakerne fokuserte på i sin problemløsning, hvordan de strukturerte og tolket problemene og deres rasjonale for strategier og valg – kort sagt en overordnet beskrivelse av deres resonnementer. Elementene ble analysert ut fra rammeverket, og et kort narrativ av hver enkelt deltakers høyttenkning ble utarbeidet med fokus på deres resonnementer. Narrativene presenteres i [kapittel 5](#) som studiens resultater. Dette tilsvarer de to siste trinnene i analysemodellen til Powell et al. (2003) og tilfredsstillende målet med analyse av høyttenkning, som ifølge Fonteyn et al. (1993) er å oppnå en overordnet beskrivelse av resonneringsprosessene til deltakernes problemløsning. Beskrivelsene dannet

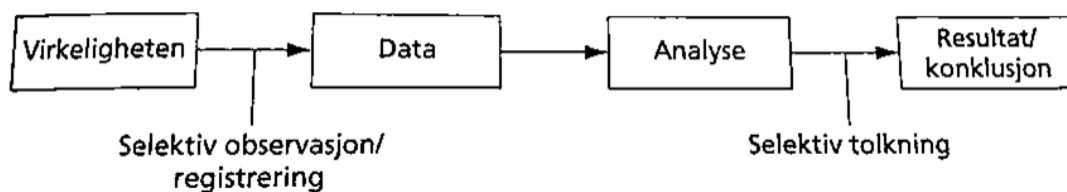
igjen grunnlag for en analyse av likheter og forskjeller i deltakernes resonnementer basert på hvilke koder som forekom oftest, og diskuteres i kapittel 6.

Afflerbach og Johnston (1984) argumenterer for at metodeunikheten ved høyttenkning krever spesielle hensyn i analyseprosessen, grunnet dataenes kvalitative og muntlige natur og variasjoner. Videre forteller de at elementer som er særegne for verbale rapporter, som tonefall, ironi, pauser og variasjoner i pratehastighet, risikerer å forsvinne i overføringen fra muntlig til skriftlig form, noe som kan påvirke tolkningene. Jeg anser dette som en aktuell utfordring, men mener at jeg gjennom utfyllende transkripsjonsskjemaer og gjentatte gjennomganger av videoopptakene har forsøkt å minimere risikoen for at disse faktorene skal påvirke mine tolkninger og konklusjoner i vesentlig grad. I tillegg har jeg vurdert det dithen at det var få situasjoner hvor deltakerens tonefall påvirket det som ble uttrykt, eller hvor ironi ble brukt.

4.5.2 Kvalitetskontroll

Gjennom å både beskrive og begrunne mine valg og metoder underveis i studien har jeg forsøkt å sikre kvaliteten i arbeidet. For casestudier trekker Yin (2014) frem fire kvalitetskontroller som forskeren bør etterstrebe: *Reliabilitet, begrepsvaliditet, intern validitet og ekstern validitet*.

Reliabiliteten til en studie handler om hvor pålitelige dataene i studien er, og omfatter hvilke data som brukes og hvordan de samles inn og bearbeides. En studies reliabilitet kan testes ved å gjenta samme undersøkelse på samme gruppe på to ulike tidspunkter eller å gjenta studien med andre forskere (Christoffersen & Johannesen, 2012). Dersom samme resultat oppnås, tyder dette på høy reliabilitet. Ifølge Ericsson og Simon (1993) og van Someren et al. (1994) er det ikke mulig å gjenskape studier med høyttenkning med samme resultat, noe som har vært roten til diskusjoner rundt metodens gyldighet (Ericsson & Simon, 1993). I mitt tilfelle var det ikke mulig å gjennomføre høyttenkningene to ganger, både av tidshensyn og fordi deltakerne ville hatt tid til å tenke over oppgavene mellom gjennomføringene. Jeg tviler også på at jeg ville oppnådd samme resultat. En gjentakelse av studien med andre forskere ville også kunne gitt andre resultater, da både datainnsamling og -bearbeiding påvirkes av forskerens fokus og forforståelse (Christoffersen & Johannesen, 2012). Johannesen et al. (2011) skriver at det ikke er uvanlig at forskere som undersøker samme fenomen kommer frem til ulike konklusjoner, og det er godt mulig at andre forskere ville gått inn i studien med andre kunnskaper enn meg og hatt et annet syn på dataene eller oppfatninger av hva som var interessante elementer, og dermed konkludert annerledes.



Figur 4-8 Prosessen fra virkelighet til konklusjon (Christoffersen & Johannesen, 2012, s. 23)

Figur 4-8 viser hvordan forforståelsen påvirker prosessen fra virkelighet til konklusjon. Jeg har likevel forsøkt å styrke studiens reliabilitet gjennom å forholde meg til sentrale teorier, legge opp til lav grad av interaksjon mellom meg og deltakerne for å unngå ledende spørsmål og påvirkninger, gjennomføre detaljerte transkripsjoner av dataene med minimal tolkning, og velge iterative analyseprosesser bestemt av dataene fremfor faste, forhåndsbestemte analyser. I motsetning til normalen ved høyttenkning som metode var det to forskere tilstede – min metodepartner og meg – noe som ga muligheten til å diskutere funn og transkripsjoner med hverandre. Dette kunne styrket reliabiliteten, men det var også en stor risiko for at vi ville påvirke hverandres studier. For å separere studiene ble det derfor valgt å ikke diskutere dataene.

Studiens validitet omfatter hvorvidt studien egner seg til å undersøke det det skal undersøke (Kvale & Brinkmann, 2015). Begrepsvaliditeten sier noe om hvorvidt det er samsvar mellom det som skal undersøkes og dataene som er samlet inn (Christoffersen & Johannesen, 2012), den interne validiteten i hvilken grad resultatene er gyldige for fenomenet som det fokuseres på, og den ytre validiteten hvorvidt studien er generaliserbar (Yin, 2014). Her mener jeg at veiledningen fra en ekspert (foreleseren) i oppgaveutarbeidingen, metodeunikheten ved høyttenkning og tilpasningene som har blitt gjort har bidratt til å bevare begrepsvaliditeten og den interne validiteten. Den eksterne validiteten av kvalitative studier i form av generalisering fra utvalg til populasjon er generelt lav, blant annet grunnet lavt deltakerutvalg (Christoffersen & Johannesen, 2012). Målet med studien har ikke vært generaliserbarhet, og studien vil derfor kun være gjeldende for de fem deltakerne den fokuserer på. Likevel mener jeg at jeg gjennom å knytte både datamaterialet, analysen og resultatene til teori har økt muligheten for at elementer fra denne studien *kan* være overførbare til andre situasjoner. Dette er hva Yin (2014) kaller *analytisk generaliserbarhet* ved at studiens resultater sammenlignes med forhåndsdefinerte teorier. Gjennomgang av resultater, diskusjon og konklusjoner med min veileder samt dialog med foreleser i grunnkurset mener jeg også har bidratt til å øke studiens validitet.

Et kriterium jeg har fokusert på er hvorvidt studien kan reproduseres, om enn uten å nå samme konklusjoner. Jeg har lagt vekt på å inkludere det teoretiske grunnlaget bak mine valg, detaljerte

beskrivelser av metodene som ble brukt og begrunnelser for alle valg. Alle oppgavene som ble brukt i studien er presentert i oppgaven, og det samme gjelder spørsmålsskjemaer, kode-skjemaer og transkripsjonsnøkkel. Disse kan dermed brukes igjen for å reprodusere studien. I tillegg inneholder resultatene beskrivelser av deltakerens strategivalg og direkte sitater fra deres høyttenkning, slik at andre kan sammenligne sine funn med de som ble gjort i denne studien. Også den sterke knytningen mellom teori, metode og resultater gjør at studien enklere kan reproduseres. Jeg mener at dette er med på å styrke studiens reliabilitet og validitet.

4.6 Forskningsetikk

All forskning som gjøres med mennesker har etiske implikasjoner (Everett & Furseth, 2014), og disse har jeg vært pliktig å tilegne meg kunnskap om og å forholde meg til. I min studie var det nødvendig å samle inn informasjon og personopplysninger om deltakerne gjennom videoopptakene, og dermed falt prosjektet inn under personvernombudets meldeplikt. Prosjektet ble derfor meldt inn til personvernombudet for forskning (NSD) og godkjent (vedlegg D). I tillegg ble studentenes samtykke til deltakelse innhentet skriftlig (vedlegg A) etter de hadde fått muntlig og skriftlig informasjon om både min metodepartners og min studie.

Christoffersen og Johannesen (2012) fremhever deltakernes rett til selvbestemmelse, og flere tiltak ble gjort for å ivareta denne. Deltakelsen i studien var frivillig, noe som ble presisert flere ganger. I tillegg fikk deltakerne på forhånd vite hva metodene datainnsamlingen skulle foregå ved gikk ut på, slik at de kunne vurdere om de var komfortable med å delta. De ble også gjort oppmerksom på at de når som helst kunne trekke seg fra studien uten negative konsekvenser, og at all innsamlet informasjon om dem ville bli slettet dersom de ikke lenger ønsket å delta i studien. Deltakerne fikk også mulighet til å lese gjennom den ferdige oppgaven og komme med eventuelle innvendinger til informasjonen som ble gitt om deres resonnementer.

Resultater og funn som inneholder personopplysninger må anonymiseres før de formidles (Christoffersen & Johannesen, 2012). I min studie fikk hver deltaker tildelt et pseudonym som ble brukt i analysearbeidet og i den ferdige oppgaven, og det var kun jeg som kjente til hvilke pseudonym som tilhørte hvilken deltaker. Alle filer som omhandlet deltakerne ble kodet slik at de ikke kunne gjenkjennes gjennom disse, og det ble innhentet godkjenning fra deltakerne til at kun tre personer kunne se opptakene av dem: Min metodepartner, min veileder og meg. I oppgaven er det ikke oppgitt hvilket studiested datainnsamlingen foregikk ved, for å ivareta

deltakernes anonymitet. Alle videoopptak og transkripsjoner oppbevares på maskiner med passordbeskyttelse, og blir slettet etter den ferdige oppgaven er levert og sensur gitt.

4.7 Metodekritikk

Valgene underveis i studien ble nøye drøftet, og det ble gjort en rekke tilpasninger for å optimalisere informasjonsutbyttet og unngå ubehag for deltakerne. I etterpåklokskapens lys er det likevel lett å se at enkelte valg og faktorer kan ha påvirket resultatene i større grad enn ønsket, eller påvirket deltakernes opplevelse. Noen av faktorene var resultater av tids- og ressursrammene for studien og dermed vanskelige å endre, mens andre var faktorer jeg kunne forhindre. I dette delkapittelet vil jeg fokusere på valg jeg mener kan ha påvirkning på studien.

4.7.1 Pause før datainnsamlingen

Observasjonene som dannet grunnlag for oppgavene til studien foregikk en stund før studiens datainnsamling. Min metodepartner og jeg trengte tid til å studere observasjonsepisodene, og i tillegg foregikk eksamensperioden for studentene rett etter observasjonene ble gjort. Det ble derfor et opphold på ca. to måneder i studien, da vi ikke ønsket at deltakelsen skulle gå på bekostning av deres eksamensforberedelser.

I ettertid ser jeg at datainnsamlingen med fordel kunne vært gjennomført kortere tid etter observasjonene. Blant annet hadde én deltaker gjennomført videre statistikkurs i nettopp regresjon i løpet av pausen, noe som kan ha påvirket hennes høytttenkningsprotokoll. van Someren et al. (1994) påpeker at oppgavene i høytttenkningen og deltakerens kunnskapsnivå må samsvare, og oppgavene i denne studien ble utarbeidet for å tilsvare et kunnskapsnivå tilsvarende grunnkurset i statistikk. En utvidelse av kunnskapsnivået gjennom ytterligere kurs *kan* ha ført til en diskrepans mellom deltakerens kunnskapsnivå og oppgavene som ble gitt, som igjen *kan* ha ført til endringer i hvilke resonnementer som ble satt ord på. Andre deltakere ga uttrykk for nervøsitet i høytttenkningssituasjonen siden de ikke hadde lest statistikk på en stund. Også dette kan ha påvirket resultatene, da et kriterium for vellykkede høytttenkningsprotokoller er at deltakerne er komfortable med situasjonen (Afflerbach & Johnston, 1984; van Someren et al., 1994). Ideelt sett burde derfor høytttenkningene blitt gjennomført kortere tid etter observasjonene. Likevel bidro pausen til et funn om at kreativ resonnering og konseptuell forståelse ikke nødvendigvis er så tett relatert som rammeverket antar, noe jeg vil komme tilbake til i delkapittel 7.2.

4.7.2 Høyttenkningens unaturlige kontekst

Viktigheten av en komfortabel kontekst presiseres av Kilpatrick et al. (2001) for at deltakernes resonneringsevne skal kunne uttrykkes, og blir også påpekt i delkapittel 4.4. Til tross for flere tiltak for å gjøre situasjonen komfortabel er enkelte deltakeres høyttenkning preget av fnising og nervøs latter, avbrytelser av egne tankerekker og mange ufullstendige setninger. Det virker derfor som om enkelte kan ha vært såpass ukomfortable med situasjonen at det kan ha gått ut over resultatene, noe en deltaker selv uttrykker: «*Også blir jeg litt stressa for det at jeg skjønner ikke dette her, og jeg burde sikkert skjønne det*». I tillegg gjorde de avbrutte resonnementene og ufullstendige setningene det vanskelig å analysere høyttenkningene, da det i flere tilfeller var uklart hvilke resonnementer som lå til grunn for løsningsprosessene.

van Someren et al. (1994) mener at ved ufullstendige høyttenkninger preget av nervøsitet eller verbaliseringsproblemer er det ikke hensiktsmessig å gjennomføre dem. Underveis ble det vurdert hvorvidt vi skulle fortsette eller avbryte høyttenkningene. Da de aktuelle deltakerne viste tegn på mindre nervøsitet etter en kort periode ble det bestemt å fullføre høyttenkningene, til tross for at de fortsatt bar preg av noe nervøsitet. Valget ble gjort for å ha et større data-grunnlag, og fordi det ble vurdert dithen at en fullføring av høyttenkningene ikke ville medføre stort ubehag for deltakerne. Det ble derimot antatt at den synkende nervøsiteten, dog fortsatt tilstede, kunne føre til at de aktuelle deltakerne ville gjennomføre høyttenkningene med større mestringsfølelse enn om de ble avsluttet av oss underveis. Valget var også i tråd med Afflerbach og Johnston (1984) sin vurdering av siling av deltakere som en feilkilde dersom det går ut over utvalgets tilfeldighet. Med et så lite utvalg var det viktig å innhente data fra samtlige. Det er likevel mulig at nervøsitet kan ha preget enkelte deltakeres gjennomføring og dermed resultater.

Jacobsen (2005) tar opp utfordringer knyttet til undersøkelseeffekten ved kvalitative forskningsdesign, som at ledende spørsmål stilles eller at deltakeren unngår å svare ærlig i frykt for å opptre «feil». Det å skulle blottlegge sine tanker og kunnskaper slik høyttenkningens metode legger opp til og i tillegg ha to personer som observerer deg i denne prosessen, kan nok føles uvant. Et tiltak som ble gjort for å gjøre det enklere for deltakerne å opptre naturlig var å starte høyttenkningene med prat om andre temaer enn statistikk. Oppgavens statistiske art gjorde det vanskelig å skjule kunnskapsmangler eller «fake» kunnskap, og jeg tror derfor ikke utfordringene Jacobsen (2005) tar opp påvirket resultatene i vesentlig grad.

4.7.3 Interaksjon fra forskerne

Det å ikke forstyrre deltakernes høyttenkning er svært viktig, da det kan påvirke deres videre prosesser (Ericsson & Simon, 1993; van Someren et al., 1994). Tiltak ble gjort for å redusere

vår påvirkning på deltakernes resonnementer, blant annet ved at de fleste spørsmål ble stilt etter de var ferdig med alle oppgavene. Dog prosessen for høyttenkningene var planlagt, og det var enighet om minst mulig interaksjon fra min metodepartner og meg underveis, ble det i etterkant tydelig for meg at interaksjonen kan ha vært større enn hva som var ideelt. Min opplevelse underveis var at min metodepartner og jeg ventet til deltakeren hadde vært stille en stund eller tydelig ga uttrykk - enten verbalt eller med kroppsspråk - for at hun var ferdig med sitt resonnement før vi eventuelt stilte spørsmål. Etter å ha sett videoopptakene av høyttenkningene ser jeg derimot at spørsmål til tider ble stilt kort tid etter deltakeren var ferdig med et resonnement. Enkelte spørsmål som ble stilt var i tillegg av en slik karakter at de kan ha påvirket deltakernes videre resonnementer. Dermed kan resultatene av høyttenkningsprotokollene til dels ha blitt påvirket av nettopp de faktorene det advares mot. Dersom våre spørsmål ikke hadde kommet så fort, kan det hende deltakerne selv hadde resonnert videre og inkludert andre elementer i disse resonnementene. Det er også en mulighet for at våre spørsmål kan ha ledet deltakerne inn på resonnementer de ellers ikke ville gjort.

Både min metodepartner og jeg uttrykte på forhånd at vi i våre piloter synes det til tider var vanskelig å ikke ta ordet når deltakerne ble stille og var ferdig med et resonnement, eller å stille spørsmål dersom deltakeren tydelig slet med oppgaven eller viste nervøsitet. Større erfaring med metoden kunne derfor vært hensiktsmessig, men det ble av tidshensyn ikke gjennomført flere piloter. Jeg anser likevel ikke den eventuelle påvirkningen vår interaksjon hadde på studien som betydelig, da studentene fikk gjennomføre sine resonnementer før de fikk et spørsmål, og ofte ga uttrykk for at de var ferdige med resonnementet. Eksempler på dette var «*Det er vel ikke noe mer å si om det?*», «*Det var vel det*», eller bare et kort, avsluttende «*ja*».

5 Resultater

Dette kapittelet omfatter studiens resultater, og er inndelt etter hver deltaker med et narrativ av deltakerens arbeid fra høyttenkningen på tvers av de to oppgavene som ble vektlagt. Elementene i narrativet er valgt på grunnlag av analysekriteriene i delkapittel 4.5. Videre følger en kort analyse av arbeidet med vekt på om deltakeren resonnerer kreativ eller imitativt ut fra kriteriene beskrevet i delkapittel 3.7. Deltakernes forsøk på å tegne regresjonslinja er gitt som vedlegg E.

5.1 Emma

Narrativ

Emmas første strategi er å se på aksene, for å få oversikt over *«hva som egentlig vises»*. Videre fokuserer hun på hvilke områder av plottet som har flest punkter og punktenes plassering i disse områdene, og kommer frem til at både plottet og linja har positiv vekst. Ut fra dette konkluderer Emma med at økt godteriinntak gir bedre eksamensresultater. Hun presiserer likevel at antall observasjoner er såpass lite at det *«begrenser litt hvor nøyaktig modellen kan være»* og dermed kan gi et ukorrekt bilde av virkeligheten: *«Det kan hende det egentlig er der (peker på plasseringen til utliggeren) det ligger, liksom, hvis man hadde sett det i et stort perspektiv»*. Når hun blir spurt om sine tanker rundt en årsakssammenheng mellom godteriinntak og eksamensresultater, reflekterer Emma rundt andre faktorer som kan bidra til sammenhengen: *«Hvis man først skal liksom sette seg ned og jobbe hardt, så fortjener man også belønning. Så hvis man jobber veldig hardt, fortjener man litt ekstra belønning. Så hvis man har jobba litt ekstra hardt da, så får man bedre resultater»*.

Linja som er trukket skal ifølge Emma vise sammenhengen. Hun trekker frem at målet er å ha en best mulig linje for de punktene man har, slik at man kan se på linja i stedet for punktene som *«går litt sånn opp og ned»*, og at linja derfor på en måte viser noe gjennomsnittlig. Emma sier hun ikke er helt sikker på hvor mange observasjoner det må være før utliggeren ikke påvirker modellen så mye, men kommer frem til at *«det vil påvirke modellen litt siden den er såpass... langt vekk fra de andre punktene da»*. Når hun blir spurt om hun kan si noe om forholdet mellom plottet og modellen, forteller Emma at hun syns det er litt for mange punkter under linja for lave x-verdier, og litt for mange punkter over linja for høye x-verdier. Hun tror derfor at en bedre modell kanskje ville hatt et litt høyere stigningstall, men antar likevel at

modellen er god *«fordi som regel når man får en sånn her utskrift, så er den på en måte gjort med riktige beregninger»*.

Emma forteller at hun vil prøve å ha like mange punkter over og under linja hun selv skal tegne. Dette vil hun gjøre fordi målet er *«å prøve å se at det skal være så likt som mulig fordelt»*. Etter å ha tegnet en linje hun tror vil passe godt, teller Emma hvor mange punkter som ligger henholdsvis over og under linja, og kommer frem til at det er litt for mange punkter på undersiden. Hun bestemmer seg derfor for å prøve igjen, og tegner en ny linje med nesten samme konstantledd, men noe lavere stigningstall. Ved spørsmål om hun kan utdype tanken om at det skal være like mange punkter over og under regresjonslinja, kommer Emma frem til at dette ikke alltid stemmer: *«Hadde det vært at på en måte den ene siden hadde veldig mange punkter langt fra, så kan man jo ikke ta like mange over og under»*. Hun argumenterer likevel for at det vil passe bra for plottet hun har fått, ved at det skal være like stor avstand til sammen til alle punkter på hver side av linja, og at de har *«tegna sånne kvadrater og sånn»* i kurset for å bestemme dette. Til tross for at hun synes linja i første oppgave ikke tilfredsstilte kravet om at plottet skulle se så likt ut som mulig på hver side av linja, antar Emma likevel at denne linja er den korrekte regresjonslinja, og kritiserer sine egne linjer ut fra dette.

Analyse

Emma viser statistisk forankring gjennom modellkritikken av utvalgsstørrelsen. Men, hennes konklusjon om at økt godteriinntak gir bedre eksamensresultatet vitner om at Emma ser på sammenhengen som en årsakssammenheng, en typisk misforståelse som viser at hun mangler noe av det statistiske grunnlaget. Likevel viser hun at hun, når hun blir ledet inn på temaet, er klar over at sammenhengen kan være et resultat av andre faktorer. Beskrivelsen av at linja skal være det best tilpassede linja for plottet viser at Emma kjenner til den statistiske bakgrunnen for en regresjonslinje, men påstanden om at linja viser noe gjennomsnittlig tyder på at en konseptuell forståelse for forholdet mellom regresjonslinja og plottet mangler. Argumentet er også lite plausibelt, da et gjennomsnitt og et estimat (som en regresjonslinje er) ikke nødvendigvis er det samme. Drøftingen av utliggerens påvirkning er derimot kreativ gjennom å være statistisk forankret, med et plausibelt argument om at utvalgsstørrelsen påvirker utliggerens betydning for modellen.

Emma viser også tegn på statistisk forankring gjennom sine argumenter om at linjas plassering ikke er ideell. Argumentene er også plausible. Idéen om at det bør være like mange punkter over og under linja kan sees på som en forenkling av *minste kvadraters metode*, som utgjør en

stor del av grunnlaget for regresjonsanalyse i statistikkundervisningen. Denne forenklingen vil være gyldig i visse tilfeller, men for plott med utliggere eller flere punkter som avviker fra et eventuelt lineært mønster vil forenklingen ikke holde mål. Dette kommer Emma selv inn på når hun blir spurt om å utdype idéen. På denne måten viser Emma både imitative trekk ved å benytte seg av en forenkling eller «oppskrift», men også kreative trekk ved evne til å drøfte punktenes plassering om linja og «oppskriftens» svakheter. Hennes konklusjon om at den første modellen er god siden hun aldri har fått en oppgave hvor den ikke var det, viser at Emma har imitative trekk i sin resonnering. Spesielt kommer dette til syne ved at hun like før har argumentert for hvorfor linja *ikke* er god, men forkaster disse argumentene til fordel for tidligere erfaringer med slike oppgaver, og at hun senere kritiserer sine egne, mer statistisk forankrede linjer, fordi de avviker fra denne første linja.

Kort oppsummert viser Emma at hun kan resonnerer kreativt ved å benytte seg av plausible forklaringer forankret i statistiske egenskaper, men at resonnementene også innehar noen imitative trekk. Spesielt kommer disse til syne ved forhåndsoppfatninger og forenklinger.

5.2 Heidi

Narrativ

Heidi forteller at hun tolker oppgaven dithen at hun skal vise om det finnes en sammenheng mellom godteriinntak og eksamensresultat. Etter å ha sett på aksene og plottet konkluderer hun: *«Men det viser jo faktisk da, at det er et lite stigningstall her tydeligvis, for det går jo (viser en skrå linje oppover med hånda). Så, jo mere godteri du spiser, jo mere.. bedre karakter får du da, tydeligvis»*. Når hun blir spurt om å si noe om forholdet mellom linja og punktene, reflekterer Heidi rundt hvorvidt smågodt i seg selv har en virkning på eksamensresultater: *«Da er det kanskje andre faktorer som spiller inn da, eller altså, ja, det er... man kan vel tenke på hvorvidt det her er, på en måte, realistisk da»*. Linja viser ifølge Heidi et slags gjennomsnitt, som hun senere utdyper som *«sånn fast stigningstall, på en måte»*. Når spurt hva hun mener linja er gjennomsnittet av, svarer Heidi at hun ser på linja som et gjennomsnitt i form av en slags μ (forventet verdi) som skal vise sammenhengen i plottet. Heidi reflekterer også, når spurt, rundt linjas plassering i forhold til plottet, og bruker avstanden mellom linja og punktene i første del av plottet som argument for at linja ikke passer så godt. I tillegg trekker hun inn antall observasjoner modellen er laget fra *«Det var jo det med at jo flere folk det var med i testen, jo bedre sikkerhet er det, jo større sannsynlighet er det for at det er riktig kanskje»*.

Hun forteller at målet når hun tegner en linje er «*en som på en måte fikk med seg mest mulig av de herre (prikkene)*», og å ha like mange prikker over og under regresjonslinja for at linja skal «*være mest mulig plassert i midten, så det blir et slags gjennomsnitt*». Dette er ifølge Heidi «*sånn man gjør med sånne linjer*», noe hun i intervjudelen kommer frem til at må være noe hun har lært i tidligere skolegang. Hun forteller at hun er usikker på om linja skal gå gjennom origo eller ikke, men bestemmer seg for å ikke tegne den gjennom origo siden den første linja heller ikke gjør det. Etter å ha tegnet en egen linje mener Heidi at denne ble for bratt, og tegner derfor en ny linje som ifølge henne er bedre tilpasset: «*Jeg fikk med meg litt flere prikker og... prikkene kom litt nærmere den herre linja. Sånn, flere på en måte nesten la seg på den. Det ble faktisk fem prikker som toucha borti linja, det var ingen som toucha borti sist gang*».

Analyse

Gjennom tolkningen av oppgaven viser Heidi at hennes fokus ligger på hvorvidt grafen viser en sammenheng, mens statistiske elementer som drøfting av linjas tilpasning til plottet, usikkerhet, utvalg og modellkritikk utelates fra tolkningen. Hennes argument om at modellen har et positivt stigningstall siden både plott og linje skrår oppover er plausibelt og har et matematisk grunnlag, men den raske konklusjonen om at mer godteri fører til bedre resultater viser brister i det statistiske grunnlaget, ved evne til tolkning og kritikk. Likevel viser Heidi at hun, med litt hjelp, er klar over at sammenhengen ikke trenger å bety at det er en årsaks-sammenheng. Heidis beskrivelse av linja som et slags gjennomsnitt, med argumentasjonen «*sånn fast stigningstall, på en måte*», viser at hun mangler forståelse for terminologien hun bruker, og en del av det statistiske grunnlaget. Spesielt gjelder dette likheten hun trekker mellom gjennomsnittsbegrepet og forventet verdi. Bruken av avviket mellom linja og første del av plottet som argument for at linjas tilpasning ikke er ideell, og omtalen av utvalgsstørrelsen og hvordan den påvirker modellens sikkerhet, har derimot statistisk forankring og er plausible i den grad at de har en logisk oppbygging.

Heidi forteller at hun ønsker en linje som går gjennom flest mulig punkter, noe som i [delkapittel 2.2](#) omtales som en typisk misforståelse. Denne idéen *kan* komme fra erfaringer i matematikk, hvor man ofte plotter inn punkter for å så tegne en graf gjennom dem. Uansett mangler resonneringen den nødvendige statistiske forankringen. I tillegg legger hun vekt på at det bør være like mange punkter på hver side, noe som strider med en del av det statistiske grunnlaget for regresjonsanalyse og kun kan ansees som en forenkling av de statistiske egenskapene. Hennes argumentasjon for linjas plassering er dermed ikke tilstrekkelig forankret i statistiske egenskaper, eller spesielt plausibelt. Det at hun trekker frem at hun fikk flere punkter på sin

egen linje viser imitative trekk, muligens basert på overflatelikheter med kjente matematiske funksjonsoppgaver, og er ikke spesielt plausibelt i denne sammenhengen. På den andre siden er argumentet om at hun med den nye linja oppnådde å ha punktene nærmere linja et plausibelt argument, da det bygger på idéen for minste kvadraters metode (selv om Heidi kun forholder seg til en forenkling).

Heidis resonnering kan tyde på at hun tar i bruk imitative metoder, ved å se etter overfladiske likheter mellom oppgaven og erfaringer hun har. Likevel viser hun kreative trekk, spesielt i kritikken av den oppgitte linja ut fra plott og utvalgsstørrelse.

5.3 Karoline

Narrativ

Karolines første tanke er at hun må se hva plottet skal vise. Etter å ha gjort dette kommer hun frem til at *«resultatet, eller de prikkene, ligger liksom rundt den rette linja, regresjonslinja»*. Ut fra dette konkluderer Karoline raskt: *«Det virker som at jo mer godteri du spiser, jo bedre gjør du det på eksamen»*. Hun uttrykker flere ganger gjennom sitt arbeid med oppgaven at det er en sammenheng mellom godteriinntak og eksamensresultat, og at økt godteriinntak vil gi bedre resultat, selv om hun synes at dette er «litt rart» og heller ville spist annen mat. Karoline forklarer hva hun tror kjennetegner en god sammenheng mellom et plott og dens regresjonslinje: *«Når du skal ha en god sammenheng, så skal det på en måte ligge på (lager en skrå linje oppover i lufta). Det skal ikke være så stor spredning da. Det skal ligge på en... så nære rett linje som mulig»*. Hun forklarer at *«det er de prikkene som lager, på en måte, linja. For at du bruker på en måte et gjennomsnitt av de, tror jeg»*, og at linja ligger høyt på y-aksen for de største x-verdiene fordi det er mange punkter der. Når spurt hva hun synes om oppgavens linje i forhold til plottet, svarer hun at den kan være grei, men at det er litt for få observasjoner: *«For når du har få observasjoner, så kan du liksom ha et så stort sprik mellom dem»*. I tillegg nevner hun utliggeren: *«Den vil jo påvirke mer jo færre det er som er med i undersøkelsen. Så da vil du få et større... hva heter det? Større feilmargin da, på plottet ditt»*.

Regresjonslinja er ifølge Karoline gjennomsnittet. Når hun blir spurt om å utdype dette forteller hun at hun ikke helt husker hvordan det er, men at hun tror det kan være *«en person som får seksti prosent riktig da, hvor mye godteri den gjennomsnittlig spiser»* Hun mener at linja skal gå *«så nærme gjennomsnittet som mulig»*, og at dette skjer ved å ha et visst antall observasjoner over og under streken og deretter tilpasse linja: *«Den skal på en måte gå mellom de*

observasjonene, så godt som mulig da». Karoline forteller at hun egentlig ikke synes den oppgitte linja var så ille, men at hun vil tegne sin linje med litt større stigningstall: «*Jeg tenkte kanskje at det var liksom flere observasjoner ganske høyt oppe, og derfor skulle den kanskje vært litt brattere opp da*». Hun er også opptatt av at det skal være like mange punkter over og under streken hun tegner, og begrunner det slik: «*De prikkene over og under streken skal på en måte kompensere på hverandre. De skal nulle hverandre ut da*» og presiserer at også enkeltpunkter over og under linja skal «nulle ut» hverandre. Under intervjudelen revurder Karoline utsagnet om å ha like mange punkter over og under linja, og bruker utliggeren som eksempel: «*Det spørres jo veldig da, for du må på en måte se på verdiene av punktene, så den.. det punktet her drar jo veldig ned (peker på utliggeren), så da må du kanskje ha litt flere over da*».

Analyse

Karolines resonnement og gjentatte uttalelser om at høyere godteriinntak gir bedre eksamensresultater og at hun ikke drøfter hvorvidt andre faktorer kan skape en slik sammenheng, til tross for at hun synes det er merkelig, kan tyde på at hun har en typisk misoppfatning om at en sammenheng vil utgjøre en årsakssammenheng. Hun resonnerer plausibelt om at punktene danner utgangspunkt for regresjonslinja, og at en god sammenheng mellom plott og linje kjennetegnes ved at punktene ligger så nære linja som mulig. Dette er forankret i statistiske egenskaper, som minste kvadraters metode, selv om Karoline ikke spesifikt nevner metoden. Argumentet om at linja har positiv stigning fordi høye y-verdier er plottet for høye x-verdier er plausibelt, da det har et matematisk grunnlag. Gjennom sine resonnementer omkring utvalgsstørrelsen viser Karoline at hun kan bruke sitt statistiske grunnlag til å komme med plausibel modellkritikk. Også argumentet om at færre observasjoner vil gi utliggeren større påvirkning på plottet er plausibelt.

Resonneringen rundt linja som et gjennomsnitt bærer preg av visse svakheter i det statistiske grunnlaget, og hennes eksempel viser at hun enten forveksler gjennomsnitt med forventet verdi eller mener at disse er ekvivalenter. Resonnementet er derfor lite plausibelt, da det har manglende statistisk forankring. Gjennomsnittsbegrepet dukker opp igjen når Karoline argumenterer for at linja skal gå «*så nærme gjennomsnittet som mulig*», et argument som er lite plausibelt, da gjennomsnittet vil være en vannrett linje. Argumentet bygger dermed på en feilaktig terminologi. Karolines resonnementer rundt plasseringen av linja, begrunnet med plottets form, er derimot både plausible og inneholder et statistisk grunnlag. Hun fokuserer på å ha like mange punkter over og under sin egen linje, og det statistiske grunnlaget er dermed basert på forenklinger. Argumentasjonen, «*De prikkene over og under streken skal på en måte*

kompensere på hverandre. De skal nulle hverandre ut da», bærer både preg av et statistisk grunnlag og av brister, hvor bristene kan ansees som konsekvenser av forenklinger. At summen av residualene til punktene over og under hverandre skal kompensere for hverandre, og dermed nulle hverandre ut, er en viktig del av minste kvadraters metode. Men, i sin presisering forklarer Karoline at hun mener et punkt over linja skal nulle ut et annet punkt under linja, altså at enkeltpunkter skal utjevne hverandre. Dette argumentet bygger på et forenklet statistisk grunnlag, og er derfor ikke plausibelt. Likevel kommer Karoline med statistisk forankrede argumenter i intervjudelen for at dette kanskje ikke likevel er tilfellet.

Karoline har en rekke kreative resonneringer omkring sammenhengen mellom plott og regresjonslinje, og benytter seg av plausible argumenter med utspring i en rekke statistiske egenskaper. Likevel inneholder enkelte resonneringer, spesielt omkring linja, misoppfatninger og feilaktig terminologi som påvirker disse resonneringenes plausibilitet.

5.4 Susanne

Narrativ

Det første Susanne gjør er å lese på aksene, før hun ser på linja som er trukket. Hun kommer innen kort tid frem til en konklusjon: *«Jo mer smågodt, jo bedre blir eksamensresultatene. Så kanskje det da egentlig hjelper å spise smågodt uka før eksamen da»*. Videre forteller Susanne at linja som er trukket *er* regresjonslinja, *«det er den best tilpassa linja til alle de forskjellige enkeltpunktene her»*. Når hun får spørsmål om sine tanker rundt modellens kontekst, blir hun mer usikker på om det egentlig er godteriet som hjelper, eller om det kan være at man spiser godteri mens man leser til eksamen. Hun mener også at det burde være flere deltakere: *«Jo flere man spør, jo mer grunnlag har man for å si noe om hvordan det faktisk er»*. Ifølge Susanne er regresjonslinja *«Den som på en måte treffer flest av punktene da. Når man ser på avstanden fra hvert eneste punkt og til linja, og da skal det liksom, da skal alle punktene... være så nærme den som mulig»*. I tillegg forteller Susanne at summen av avstandene til punktene over og under linja skal være lik, og fortsetter med *«sånn at i gjennomsnitt så er avstanden fra under og til linja og fra over og ned til linja, den skal være lik»*. Senere utdyper hun: *«Hvis det punktet ligger så langt fra linja (peker på et punkt under linja), så skal et punkt over linja ligge like langt unna. For da vil de avstandene på en måte utjevne hverandre, gå i null. Så da vil på en måte de to bli til et punkt som faktisk ligger på linja da, i stedet»*. Susanne konkluderer med at

linja er «*ikke helt bra, men sikkert grei*». Dette begrunner hun med at ikke alle punktene ligger på linja, men at linja jo treffer flere punkter.

Når Susanne skal tegne en egen linje forteller hun at hun ønsker at flest mulig punkter skal ligge på linja hun skal tegne, og at det i tillegg bør være like mange punkter over og under linja. Hun forteller at punktene helst må ha like stor avstand til linja, før hun revurderer kriteriene: «*Det kan kanskje være flere punkter over, men da må avstanden til de under være lengre da. ... Så kanskje det er flere punkter over, men de er tettere mot den linja jeg tegner. Men da er de punktene under lenger ned da, så den her er jo ganske langt ned (peker på utligger)*». Susanne kommer frem til at linja ikke trenger å gå gjennom origo, siden linja som allerede var oppgitt i den første oppgaven heller ikke gjorde det. Etter å ha tegnet en linje, teller Susanne hvor mange punkter som ligger over og under den. Hun kommer frem til at hun har flere punkter over enn under linja, men at utliggeren under ligger ganske langt unna: «*Jeg ble litt usikker på om det må være flere punkter over for å utjevne forskjellen, eller om det må være flere punkter under som utjevner den*». Hun kommer frem til at hun tidligere har sagt at det da måtte være flere over, og tegner en ny linje med litt lavere stigningstall, slik at enda flere punkter skal havne over linja. Til tross for at hun er fornøyd med egen linje, ville Susanne stolt mest på linja fra første ark: «*Det ser ut som det er en data som har laget den, og det er litt mer troverdig enn meg*». I intervjudelen begrunner Susanne ønsket om å ha så mange punkter som mulig på linja: «*Hvis linja følger hvert eneste punkt, så vet du at linja fremstiller sannheten*».

Analyse

Susanne forteller tidlig at linja i det første arket er den best tilpassede linja til plottet. Dette resonnementet kan være forankret i forhåndsoppfatninger og erfaring fra lignende oppgaver, da linja ligger relativt langt unna plasseringen regresjonslinja ville hatt og dermed ikke er den best tilpassede linja. Susanne argumenterer heller ikke for *hvorfor* linja viser forholdet mellom godteri og eksamensresultat eller hvorfor hun mener den faktisk er regresjonslinja, noe som kan peke mot at resonneringen er basert på erfaring. Videre konkluderer hun med at sammenhengen mellom godteriinntak og eksamensresultat faktisk er en årsakssammenheng. Dette resonnementet er en typisk misoppfatning som mangler konseptuell forståelse for de statistiske egenskapene ved en slik fremstilling, og dermed et statistisk grunnlag. Når hun blir spurt rett ut om konteksten, tilbyr Susanne imidlertid et plausibelt argument om at man for eksempel spiser godteri mens man leser, noe som kan ha skapt sammenhengen.

Resonneringen rundt deltakerantallet er statistisk forankret og dermed plausibel. I tillegg viser Susanne forståelse for statistikkens egenskaper gjennom plausible argumenter om at regresjonslinja er den linja hvor summen av avstanden til punkter over og under linja er lik, og at man ønsker at alle punktene skal ligge så nær linja som mulig. Disse argumentene springer ut fra sentrale egenskaper ved minste kvadraters metode. Susannes tanker omkring kriterier for linja hun skal tegne viser at hennes resonneringer ligger langs hele skalaen – fra imitativt til kreativt. Ønsket om å ha flest mulig punkter på linja, med begrunnelsen «*Hvis linja følger hvert eneste punkt, så vet du at linja fremstiller sannheten*», tar lite hensyn til punktene som *ikke* havner på linja, samt til selve konseptet med regresjon. På denne måten strider resonnementet med det statistiske grunnlaget for tilpasning av en linje til et plott, og kan komme fra tidligere erfaringer med graftegning i for eksempel matematikk og dermed være en form for imitativt resonnement. At hun argumenter for at den opprinnelige linja er greit tilpasset plottet siden den går gjennom flere punkter, viser at det er denne idéen som blir høyest prioritert i hennes drøfting. Dersom vi går ut fra at ideen om et likt antall punkter på hver side av linja er en forenkling av konseptet for minste kvadraters metode, vil dette resonnementet inneholde et visst statistisk grunnlag, men ha brister grunnet forenklingene. Argumentet om at det kanskje bør være en overvekt av punkter over linja, for å kompensere for den store avstanden til utliggeren, er derimot plausibelt og har utspring i sentrale statistiske egenskaper. I tillegg viser dette evne til statistisk drøfting. Hennes argument om at punktene over og under linja skal utjevne hverandre, og at den gjennomsnittlige avstanden over og under linja skal være lik, er resultater av forenklingen med lav plausibilitet. Dette viser igjen at det finnes mangler i det statistiske grunnlaget.

Susannes resonneringer kan tolkes som både kreative og imitative. Det kan virke som om hun har flere kreative resonneringssekvenser angående kriterier for en regresjonslinje, men at hennes resonneringer også styres av forenklinger og forhåndsoppfatninger eller erfaringer. Hennes uttalelse om at hun ville stolt på linja fra første ark fremfor sin egen, fordi denne linja var tegnet av en data, er et godt eksempel på dette.

5.5 Linn

Narrativ

Linn forklarer at hun tolker oppgaven dithen at hun skal finne ut om det er en lineær sammenheng mellom de to variablene. Hennes første konklusjon er at det er en sammenheng

mellom smågodt og eksamensresultat, og at dette skyldes andre faktorer: «*De som sitter mye og leser, de spiser mye godteri, og de gjør det også bra på eksamen*». Når hun blir spurt om hun kan utdype sine tanker om plasseringen av linja, argumenterer Linn for at denne kunne vært lagt flere steder: «*Jeg vet ikke hva som er bakgrunnen for at den er lagt der, om det er den derre minste kvadraters metode eller om den bare er en av veldig mange linjer som kan legges sånn passe mellom disse punktene*». Hun presiserer at målet med minste kvadraters metode er å «*finne linja med minst kvadratavstand til alle punktene*». Linn mener at det ser ut som utliggeren er ekskludert fra utvalget når linja ble trukket, og at linja hadde vært brattere om denne skulle blitt inkludert. I tillegg er hun opptatt av utvalget: «*Jeg tror jeg i hvert fall ville gjort flere forsøk, prøvd å samle inn mer data, for jeg kunne konkludert noe mer med om en lineær regresjon, eller, en rett linje, er god*».

Linn argumenterer for at hun bør ha like mange punkter over og under linja hun selv skal tegne: «*Det er vel for å få en slags minste kvadraters metode da*». Dette strategivalget fører til at Linns tenkte linje får en relativt bratt stigning, og når 100 % på y-aksen rundt $x = 180-190$. Dette syns Linn er litt rart, men hun vet ikke helt hva hun skal gjøre med dette: «*Har ikke øvd på akkurat det der*». Linn drøfter så sin egentegna linje mot linja i første ark: «*Den her vil jo gi et kjempestort kvadrattall (peker på utliggeren på første ark), for den avstanden er veldig stor. Her er den avstanden litt mindre (peker på egentegnet modell), men igjen så er det større avstand derfra dit enn derfra til dit (peker på avstander fra samme punkt til linja i henholdsvis egen modell og i første ark). Så det er ikke sikkert jeg oppnår noe lavere sånn kvadratsum*». Når hun blir spurt om å begrunne valgene sine, forteller Linn at hun tror det å ha like mange punkter over og under linja er det samme som minste kvadraters metode, fordi man får sånn omtrent like stor avstand til punktene Hun reflekterer også rundt hva som kjennetegner den best tilpassa linja: «*Linja er forventet y... og vi ønsker jo å ha et så lite som mulig avvik mellom vår forventning og.. eh, den observerte verdien av y. Så det er jo lurt å finne den, den linja som gir det minste avviket, fordi da er det... er liksom den forventede y-en knyttet opp mot de virkelige observasjonene da*»

Analyse

Linn starter med å resonnerer rundt hvorfor det *kan* være en sammenheng mellom godteriinntak og eksamensresultat, og hennes forslag om at man spiser godteri mens man leser og får gode resultater fordi man leser, virker troverdig. Tolkningen om at oppgaveteksten handler om hvorvidt det er en lineær sammenheng eller ikke viser at dette er Linns fokus, og kan tyde på at elementer som modellusikkerhet, variasjon og tolkning blir mindre prioritert. Hun tar i bruk de

iboende egenskapene til utvalgsstørrelsen til å argumentere for at flere deltakere burde vært med i undersøkelsen, noe som gjør dette argumentet plausibelt. I tillegg har hun kreative resonnementer rundt plassering av regresjonslinja. Hun forklarer at denne kan ha blitt plassert på flere måter, men nevner minste kvadraters metode som et forslag. Dette viser evne til å benytte seg av sentrale elementer i regresjonsanalyse. Linn benytter også et plausibelt argument om at utliggeren må ha vært utelatt når linja ble tegnet, og at den ville vært brattere om utliggeren skulle vært inkludert. Denne forklaringen baserer seg på iboende statistiske egenskaper. Hennes forklaring om at man i minste kvadraters metode leter etter linja med minst kvadratavstand til alle punktene viser forståelse for konseptet.

Linn argumenterer for at det skal være like mange punkter over og under regresjonslinja hun skal tegne. Hypotesen om at dette er en forenkling av minste kvadraters metode støttes av Linns argument: «*Det er vel for å få en slags minste kvadraters metode, da?*». Dette argumentet er basert på en forenkling som kun er gyldig i spesialtilfeller. Argumentet begrunnes med at avstanden til punktene blir omtrent like stor dersom man velger like mange punkter på hver side av linja, men denne begrunnelsen er lite plausibel da den ikke tar hensyn til utliggeren. Likevel viser Linn kreative resonnementer omkring minste kvadraters metode, da hennes beskrivelse av en best tilpasset linje er tungt forankret i iboende statistiske egenskaper. På denne måten har resonneringen et sentralt statistisk grunnlag, men mangler hensyn til plottets utforming, noe som gjør forankringen mangelfull. Strategivalget påvirker linja hun selv tegner, og hun påpeker at modellen blir merkelig men velger likevel å beholde linja. Argumentet «*Har ikke øvd på akkurat det der*» kan tyde på en imitativ tilnærming, og mangel på å ta i bruk et statistisk grunnlag. Linn viser likevel kreative trekk ved å drøfte egen linje mot linja fra første oppgave med hensyn på kvadratavstander, i henhold til konseptet for minste kvadraters metode.

Linns resonnementer er i hovedsak kreative, da de er basert på sentrale statistiske egenskaper. I selve implementeringen blir likevel det statistiske grunnlaget forenklet, noe som går ut over plausibiliteten og resultatet av hennes modell.

6 Diskusjon

I dette kapitlet vil sentrale elementer fra resultatene diskuteres, med mål om å nærme meg et svar på problemstillingen «*Hva kjennetegner universitetsstudenters resonnementer omkring enkel lineær regresjon i statistikk?*». Diskusjonskapitlet er inndelt i to delkapitler etter de to ulike hovedtypene av resonnementer rammeverket tar utgangspunkt i. I delkapittel 6.1 diskuteres resonnementenes statistiske forankring og plausibilitet, mens delkapittel 6.2 drøfter imitative resonneringstrekk. Felles for begge delkapitlene er en drøfting av mønstrene i resonnementene på tvers av deltakerne.

6.1 Statistisk forankring og plausibilitet

Resonnementenes statistiske forankring er drøftet ut fra deltakernes bruk av vesentlige statistiske egenskaper og antakelser tilhørende enkel lineær regresjon, samt statistiske særegenheter. For resonnementenes plausibilitet er det lagt vekt på om argumentene deltakerne benytter seg av har en logisk oppbygning og statistisk troverdighet. Med dette oppstår en sammenheng mellom den statistiske forankringen og resonnementets plausibilitet. Dette gjelder argumenter i alle ledd av resonneringen, fra de første strategivalg til begrunnelse av konklusjon.

Et sentralt spørsmål som påvirker diskusjonen er *hvem* resonnementet skal være plausibelt for. Fra kapittel 3 kan dette tolkes på ulike måter: Kilpatrick et al. (2001) forklarer at adaptiv resonnering er *korrekt*, og med dette kan man tolke at resonnementet må være plausibelt for hvem som helst, altså i tråd med et korrekt statistisk grunnlag. Også Ross (1998) kan tolkes som at et resonnements plausibilitet bestemmes av samsvaret med et korrekt statistisk grunnlag, ved at han mener matematikken verifiseres gjennom logisk resonnering. Garfield (2002) skriver derimot at det ikke finnes noen tydelig enighet rundt hvordan statistiske resonnementers korrekthet kan måles, og Lithner (2008) nevner ingenting i sine kriterier for kreative resonnementers plausibilitet om hvem resonnementet skal være plausibelt for. Det nærmeste han tilbyr et svar er uttalelsen om at «*the stronger the logical value, the more plausible it is*» (Lithner, 2008, s. 266). Han forklarer dog innledningsvis at et resonnement ikke nødvendigvis trenger å være korrekt, så lenge det gir mening for den som resonnerer. I tillegg henviser han til Yackel og Cobb (1996, gjengitt i Lithner, 2008), som sier at et arguments gyldighet bestemmes av sosiomatematiske normer. Jeg tolker dette som at resonnementenes plausibilitet til dels bestemmes av mottakerne de presenteres for.

Dermed dukker et nytt problem opp: Hvem er mottakerne i høyttenkningen? Er det deltakeren, ved at han forteller tankene sine høyt til seg selv, eller er forskerne mottakere? Dette vil ha stor påvirkning på drøftingen av resonnementenes plausibilitet. Jeg har havnet på at deltakeren selv er mottaker, men at en drøfting ut fra de faktiske statistiske egenskaper ved enkel lineær regresjon også er nødvendig for å kunne si noe om resonnementenes troverdighet. Jeg vil derfor se på plausibiliteten ut fra samsvar med elementene ved enkel lineær regresjon beskrevet i kapittel 2, men der det er hensiktsmessig også kommentere dem i lys av deltakernes egne oppfatninger av de statistiske egenskapene de forankrer resonnementene i.

6.1.1 «Like mange prikker over og under» - forholdet mellom plott og regresjonslinje

Deltakerne deler flere resonnementer omkring forholdet mellom et plott og dets regresjonslinje som jeg vil karakterisere som kreative, ut fra deres statistiske forankring og plausibilitet. Samtlige deltakere forteller at regresjonslinjas funksjon er å best mulig forklare plottet, og det finnes flere eksempler på plausible argumenter: Både Emma og Heidi forklarer at linja skal vise den overordnede sammenhengen i plottet, selv om punktene «går litt sånn opp og ned», mens Karoline underbygger en påstand om at punktene i plottet bestemmer regresjonslinja ved å vise til at linja ligger høyt på y-aksen for de største x-verdiene fordi det er mange punkter høyt oppe på y-aksen for disse x-verdiene. Resonnementene omkring regresjonslinjas funksjon er forankret i sentrale statistiske egenskaper ved enkel lineær regresjon beskrevet i kapittel 2, som at målet ved regresjonsanalyse er å bestemme en linje som er best mulig tilpasset alle punktene i plottet, altså plottet som en helhet. På denne måten tilfredsstiller deres resonnementer kriteriene fremstilt av Pfannkuch og Wild (2004), hvor helhetlig resonnering trekkes frem. Casey (2014) beskriver for høyt fokus på enkeltpunkter som en typisk misoppfatning, men analysen av høyttenkingsprotokollene tyder på at deltakerne ikke viser tegn på et slikt fokus. Argumentene de bruker springer ut fra de statistiske egenskapene, og er logiske og troverdige både for deltakerne selv og fra et rent statistisk perspektiv.

Analysen av høyttenkingsprotokollene avdekker noen svært interessante resonnementer omkring *kriterier* for regresjonslinja, og disse kommer spesielt til syne når deltakerne skal lage et eget forslag til linje. Samtlige deltakeres innledende strategivalg går ut på at det bør være like mange punkter på hver side av linja de tegner. Emma presiserer at dette er fordi målet er «å prøve å se at det skal være så likt som mulig fordelt», mens både Heidi og Karolines argumentasjon går ut på at linja er et slags gjennomsnitt, og at det å ha like mange punkter på hver side er en måte å sikre dette på. Bruken av gjennomsnittsbegrepet vil diskuteres i underkapittel 6.1.2. Karoline argumenterer videre for strategivalget med at det gir den best

tilpassa linja fordi punktene over og under regresjonslinja skal kompensere for hverandre eller «nulle ut» hverandre, mens Susanne forklarer at hun valgte strategien fordi hun mener den gjennomsnittlige avstanden til punktene på hver side av linja skal være lik.

Casey (2014) anser idéen om at det skal være like mange punkter over og under en regresjonslinje som en vanlig misoppfatning. Resonnementene avviker fra det statistiske grunnlaget i kapittel 2, noe som svekker deres troverdighet, og det kan tyde på at den underliggende konseptuelle forståelsen for de statistiske metodene som statistiske resonnementer må bygges på (Garfield, 2002; Garfield & Gal, 1999) ikke er tilstede. Jeg vil likevel argumentere for at de til en viss grad har tilknytning til sentrale statistiske egenskaper: En del av argumentene de bruker, blant annet Karolines forklaring om at to punkter nuller hverandre ut og Susannes idé om at den gjennomsnittlige avstanden til punktene på hver side av linja skal være lik, har likheter med egenskaper for minste kvadraters metode - et sentralt grunnlag for regresjonsanalyse. Linn forteller rett ut at hun mener strategien er en form for minste kvadraters metode, men annet enn dette og en bisetning fra Emma om at hun i kurset har «regnet på kvadrater og sånn», er det ingen deltakere som eksplisitt nevner minste kvadrater, verken som strategi, ønsket informasjon eller argument. Dette trenger likevel ikke bety at metoden ikke var en del av deres resonnement: I delkapittel 4.4 påpekes det at kun tankene som er aktive der og da som verbaliseres, mens det alltid vil være elementer av deltakerens tankeprosesser som ikke kommer til uttrykk gjennom høyttenkningen. Dette gjelder mye av kunnskapen som er lagret i langtidshukommelsen (van Someren et al., 1994) og dermed resonnementene som bygger på den. Altså er det en mulighet for at minste kvadraters metode utgjør slik kunnskap.

En rekke andre resonnementer deltakerne benytter seg av, både i tilknytning til å ha like mange punkter på hver side av linja og i andre situasjoner under høyttenkningen, underbygger tolkningen om at strategien springer ut fra egenskaper ved minste kvadraters metode. Både Emma og Susanne svarer at den samlede avstanden mellom linja og alle punktene over den skal være lik den samlede avstanden mellom linja og alle punktene under den, noe som er en av egenskapene ved minste kvadraters metode. Også Karolines argument om at punktene over og under linja skal «nulle ut» hverandre har utspring i samme egenskap ved metoden. Men, Karoline og Susanne mener at dette betyr at et enkelt punkt over linja skal nulle ut et annet punkt under linja, altså at enkeltpunkter skal utjevne hverandre. I dette argumentet er egenskapen at summen av positive og negative residualer skal være lik «forenklet» til at det skal være like mange punkter på hver side og at avstanden mellom et punkt over og et punkt under linja skal være cirka likt, og i denne forenklingen mistes en del av grunnlaget fra minste

kvadraters metode. Susanne mener også at den gjennomsnittlige avstanden til punktene over og under linja skal være lik. Dette resonnementet er ikke logisk fra et statistisk ståsted, men vil være troverdig for Susanne siden det vil stemme dersom det hadde vært korrekt at det er like mange punkter over og under linja. God kjennskap til statistiske konsepter er nødvendig i planleggingen av statistiske løsninger (Chervany et al., 1980; Chervany et al., 1977), og det kan argumenteres for at de nevnte resonnementene viser mangel på nettopp dette.

Ideen om å ha like mange punkter på hver side av regresjonslinja kan altså ansees som en slags forenkling av prinsippene for minste kvadraters metode. Metoden innebærer at summen av de henholdsvis positive og negative residualene til regresjonslinja er lik, men dette betyr ikke at det må være like mange punkter på hver side av regresjonslinja. Bruken av forenklingen bidrar dermed til at argumentenes plausibilitet svekkes, da deres statistiske grunnlag ikke er gyldig. Dette medfører igjen at argumentene virker lite troverdige, ut fra et rent statistisk perspektiv. Men, et interessant fenomen oppstår: I og med at alle deltakerne, i individuelle høyttenkninger, forteller at regresjonslinja bør ha like mange punkter på hver side ville dette blitt ansett som et plausibelt resonnement dem imellom. I og med at Lithner (2008) beskriver et arguments gyldighet som bestemt av sosiomatematiske faktorer, vil det med stor sannsynlighet bli godtatt av en mottakergruppe bestående av deltakerne.

Deltakerne kommer med flere plausible argumenter forankret i egenskaper ved minste kvadraters metode, men knytter disse til idéen om å ha like mange punkter på hver side av regresjonslinja. Dette medfører at resonnementenes plausibilitet varierer, og at den konseptuelle forståelsen for de statistiske elementenes iboende egenskaper fremstår som noe mangelfull. Ifølge Casey (2014) er lineær regresjon ofte studenters første møte med de fundamentale konseptene rundt statistiske sammenhenger, og forståelse for temaet danner et viktig grunnlag for videre statistikk. Det er derfor et interessant funn at deltakernes konseptuelle forståelse for minste kvadraters metode er i så stor grad påvirket av lite plausible forenklinger. Batanero et al. (1994) trekker frem hvordan studenter forsøker å benytte seg av spesielle ideer som ikke er gyldige for generelle statistiske problemer, og hvordan ønsket om å benytte disse ideene fører til en kognitiv hindring. Det virker som om strategien om et likt antall punkter på hver side av linja kan være en slik idé, uten at jeg med sikkerhet kan si at deltakerne har opplevd at denne strategien før har ført til korrekte løsninger. De kognitive hindringene fører til utfordringer i studentenes forståelse for de statistiske konseptene (Garfield & Ben-Zvi, 2008), og dette kan være en forklaring til den begrensede forståelsen deltakerne viser for minste kvadraters metode. En sammenheng kan trekkes mellom konseptuell forståelse og resonnering (jfr. Garfield, 2002;

Garfield & Gal, 1999; Lithner, 2008; Ross, 1998), og Lithner (2008) knytter konseptuell forståelse til den statistiske forankringen. Dermed er konseptuell forståelse med å bestemme et resonnements kreativitet, og med mangelfull konseptuell forståelse kan det argumenteres for at resonnementene basert på «forenklingene» av minste kvadraters metode ikke kan defineres som kreative.

I tillegg til strategien om å ha et likt antall punkter på hver side av regresjonslinja, argumenterer to av deltakerne for at linja de tegner også skal gå gjennom flest mulig punkter. Heidi kommer ikke med noen konkret forklaring til hvorfor hun ønsker dette, men inkluderer idéen i sin drøfting av egentegnet linje: «*Det ble faktisk fem prikker som toucha borti linja, det var ingen som toucha borti sist gang*». Også Susanne drøfter sin linje, og linja i første oppgave, ut fra hvor mange punkter de treffer. Hun begrunnet valget slik: «*Hvis linja følger hvert eneste punkt, så vet du at linja fremstiller sannheten*». Dette kan ved første tanke virke logisk, men disse resonnementene avviker fra sentrale statistiske egenskaper som minste kvadraters metode og modellusikkerhet i tillegg til selve konseptet ved estimering. En linje som går gjennom flest mulig punkter kan ha store residualer til andre punkter, og dermed ikke være linja med minst samlet kvadratverdi av residualene. Dette gjør resonnementene mindre troverdige og logiske fra et statistisk perspektiv. Casey (2014) trekker frem det å tro at regresjonslinja går gjennom flest mulig punkter som en vanlig misoppfatning innenfor enkel lineær regresjon. Hun mener dette kan komme fra matematiske erfaringer med lineære funksjoner, hvor man ofte trekker en linje gjennom punkter. En mulig forklaring er dermed at resonnementene er basert på overflatiske likheter med kjente matematiske lineære funksjonsoppgaver. Slike resonnement, basert på erfaringer og overflateegenskaper, klassifiseres ifølge Lithner (2008) som imitative.

Så, hvordan påvirker de nevnte resonnementene deltakernes strategiimplementering og drøftinger? I arbeidet med den første oppgaven kommer flere av deltakerne med kritikk til plasseringen av linja: Både Emma og Karoline kritiserer overvekten av punkter henholdsvis under linja for lave x-verdier og over linja for høyere x-verdier, og argumenterer ut fra dette for at regresjonslinja bør ha et høyere stigningstall. Resonnementene samsvarer godt med kriteriene for minste kvadraters metode, og fremstår som logiske og troverdige. Linn drøfter hva som kan være bakgrunnen for plasseringen, og kommer i tillegg med et plausibelt argument om at utliggeren kan ha blitt ekskludert fra utvalget når regresjonslinja ble tegnet, og at linja skulle hatt et høyere stigningstall dersom utliggeren var inkludert. Dette resonnementet er plausibelt fordi det bygger på sentrale egenskaper ved de statistiske komponentene som er involvert, og har en logisk oppbygning. Felles for deltakerne i den andre oppgaven er at de ønsker at linja de

selv tegner skal representere plottet best mulig, og at de i høy grad fokuserer på idéen om en lik fordeling av punkter på hver side av linja for å oppnå dette. For de fleste deltakerne består dermed implementasjon- og konklusjonssekvensene av å tegne en linje, telle antall punkter over og under linja, for så å enten revidere linja eller si seg fornøyd med den. Enkelte deltakere argumenterer for at regresjonslinja må ta hensyn til utliggeren, som vil skape et stort residual, men har likevel hovedfokus på å trekke en linje med likt antall punkter på hver side.

Lithner (2008) argumenterer for at trangen til å følge en «oppskrift» i imitative resonnementer ofte overstyrer mer matematisk forankret resonnering, og på denne måten kan det at idéen om et likt antall punkter over og under linja overstyrer hensynet til utliggerens store residual tyde på at resonnementene kan ha imitative trekk. Deltakernes resonnementer kan også relateres til nivå tre i de fire nivåene Mooney (2002) presenterer for statistiske resonnementer. Nivåene er omtalt i delkapittel 3.5, og det tredje nivået kjennetegnes ved evne til å gjenkjenne matematiske idéer bak et problem men i enkelte tilfeller manglende evne til å implementere disse idéene i den statistiske løsningen. Her viser flere av deltakerne at de vet de skal ta hensyn til utliggeren for å minimere den totale kvadratsummen av residualene, men er ikke i stand til å inkludere dette i løsningen.

Susanne er den eneste som på eget initiativ kritiserer idéen om å plassere linja slik at det er like mange punkter over og under den: *«Det kan kanskje være flere punkter over, men da må avstanden til de under være lengre da. ... Så kanskje det er flere punkter over, men de er tettere mot den linja jeg tegner»*. Dette resonnementet er dypt forankret i egenskaper ved minste kvadraters metode ved at Susanne tar hensyn til at utliggeren skaper et høyt negativt residual. Resonnementet er dermed statistisk plausibelt. Flere av deltakerne kommer med lignende resonnementer når de blir spurt spesifikt om å utdype hvorfor de mener det bør være like mange punkter på hver side av regresjonslinja. Dette kan være en implikasjon på at den nødvendige kunnskapen omkring de statistiske komponentene er tilstede, men at deltakerne lar andre faktorer spille større rolle i resonnementene. Gil et al. (2008) argumenterer for at statistisk kreativitet kommer til syne gjennom et samspill av formuleringer, midlertidige løsninger, omformuleringer og nye, endelige løsninger. Høyttkningsprotokollene viser at deltakerne formulerer sin tolkning av kriterier for regresjonslinja, men omformulerer disse når de får spørsmål omkring dem. På denne måten kan det argumenteres for de viser kreative trekk når de får litt hjelp. Det er usikkerhet rundt hvor «forenklingen» om at det bør være et likt antall punkter på hver side av linja kommer fra, men to av deltakerne forklarer at dette er noe de kan ha lært i løpet av tidligere skolegang.

6.1.2 «Linja er gjennomsnittet» - en rent terminologisk eller statistisk brist?

Et begrep som går igjen i deltakernes resonnementer rundt regresjonslinja er *gjennomsnitt*. Akkurat hva de mener med begrepet, og begrunnelsene de kommer med, er noe individuelt, men det kan se ut som om bruken springer ut av samme grunnlag. Emma mener at fordi man kan se på regresjonslinja i stedet for punktene (som ikke ligger på en rett linje), så viser regresjonslinja noe gjennomsnittlig, mens Karoline mener at linja er et slags gjennomsnitt fordi man bruker gjennomsnittet av punktene for å lage den. Også Susannes resonnementer bygger på dette, ved at hun mener at «*i gjennomsnitt så vil alle punktene på en måte ligge på linja*» når man har like mange punkter på hver side av linja med like stor avstand til den. Heidi danner en sammenheng mellom strategien om et likt antall punkter på hver side av linja og bruken av gjennomsnittsbegrepet ved å si at strategien fører til at regresjonslinja vil «*være mest mulig plassert i midten, så det blir et slags gjennomsnitt*», hvor enkeltpunktene i plottet representerer avvik fra gjennomsnittet eller linja.

Resonnementene tyder på at en dyp konseptuell forståelse for forholdet mellom regresjonslinja og plottet mangler. Fra forklaringene kan det tolkes at begrepet *gjennomsnitt* kommer fra at det vil være punkter både over og under linja, og at linja plasseres mellom disse punktene. Også Casey (2014) argumenterer i sin studie for at det kan være en sammenheng mellom disse to resonnementene: «*This method [Å søke en linje med like mange punkter på hver side av linja] was common for those students who viewed the line as an average or where you expect the relationship between the variables to be. It corresponds to the calculation of the median, a univariate measure of center these students knew*» Casey (2014, s. 4). Dersom man anser regresjonslinja som en rekke av sammenhengende punkter, kan deltakerne argumenter tolkes dithen at det å ha like mange punkter på hver side av linja, og en lik avstand fra linja til disse punktene, fører til at regresjonslinja i seg selv er dannet av en rekke punkter som utgjør midtverdiene mellom punkter henholdsvis over og under linja. Men, det finnes en rekke brister mellom et slikt resonnement og det statistiske grunnlaget. Det faktiske gjennomsnittet av *alle* punktene i spredningsplottet vil være en vertikal linje, noe mønsteret i det aktuelle spredningsplottet indikerer at ikke vil være tilfellet for regresjonslinja. Det er derfor lite plausibelt at regresjonslinja representerer et gjennomsnitt.

Heidis beskrivelse av regresjonslinja som et slags gjennomsnitt med «*sånn fast stigningstall, på en måte*», kan tyde på at hun med *gjennomsnitt* ser for seg at regresjonslinja viser en gjennomsnittlig øking i eksamensresultat ved økt godteriinntak, bestemt av punktene i plottet. Dette underbygges av Heidis påstand i intervjudelen om at linja er et gjennomsnitt i form av en

slags forventet verdi. Her trekker hun altså likheter mellom at regresjonslinja er et estimat og at den er et gjennomsnitt. Karoline bruker lignende resonnementer når hun skal forklare hvorfor hun bruker begrepet: «*En person som får seksti prosent riktig da (på eksamen), hvor mye godteri den gjennomsnittlig spiser*». En slik tolkning av regresjonslinja vitner om brister med forståelsen for de statistiske egenskapene, da et estimat (som linja faktisk er) og et gjennomsnitt ikke er det samme. Dette gjør resonnementene lite troverdige og bryter med den matematiske kompetansen og kjennskapen til statistiske konsepter som Chervany et al. (1977) trekker frem.

Det er grunnlag for å tro at disse resonnementene kan være preget av overflatiske likheter med tidligere statistisk og matematisk erfaring, og at de dermed kan være til dels imitative. Samtidig bærer deltakernes høyttenkninger gjennomgående preg av en noe enkel terminologi. Observasjonene, punktene i spredningsplottet, refereres til som «de prikkene», regresjonslinja som «den linja» eller bare «den der», og enkelte deltakere viser usikkerhet rundt hva en *modell* er i statistikk. Muntlig kommunikasjon i matematikkundervisningen krever at studentene tar i bruk språket og bidrar dermed til å utvikle matematiske begreper (Olafsen & Maugesten, 2009), og i dette tilfellet har hele statistikkurset deltakerne har vært en del av vært lagt opp med ukentlige diskusjoner i grupper og dermed mye muntlig kommunikasjon. Videoopptak av observasjonsepisodene viser også at deltakerne benyttet seg av en rekke statistiske terminologier i deres samtaler og diskusjoner, blant annet *spredningsplott*, *regresjonslinje* og *modell*. Det er derfor interessant at terminologien er preget av et såpass lite statistisk språk i høyttenkningene. En forklaring kan være at terminologien ikke har blitt benyttet etter kursets slutt, og dermed ikke er tilstede under studentenes tankeprosesser. En annen forklaring kan være at terminologien er tilstede men ikke blir verbalisert, jfr van Someren et al. (1994).

Det er vanskelig å konkludere med hvorvidt bruken av gjennomsnittsbegrepet er en rent terminologisk glipp eller et resultat av manglende statistisk grunnlag. Flere av deltakerne revurderte bruken av begrepet under intervjudelen, når de fikk konkrete spørsmål om *hva* linja var et gjennomsnitt av. Det kan derfor tenkes at begrepet kan ha blitt brukt uten noen refleksjon rundt dets mening. Da statistiske resonnementer innebærer evnen til å ta i bruk statistisk terminologi (Chervany et al., 1980) må det uansett kunne argumenteres for at den utbredte bruken av begrepet *gjennomsnitt* for å forklare regresjonslinja, samt den gjennomgående forenklete terminologien, ikke viser en nødvendig statistisk forankring, og at resonnementene omkring regresjonslinja som et gjennomsnitt dermed er lite plausible.

6.1.3 «Det begrenser jo litt hvor nøyaktig modellen kan være» - deltakernes drøfting av utvalgsstørrelsen

Et viktig aspekt ved den statistiske forankringen er evnen til modellkritikk og drøfting av usikkerhet i konklusjoner (Garfield & Ben-Zvi, 2008; Gattuso & Ottaviani, 2011), og disse elementene utgjør en del av rammeverket (delkapittel 3.7). En sekvens i samtlige deltakernes resonnementer i studien var plausibel kritikk av utvalgsstørrelsen i oppgaven, altså hvor mange observasjoner spredningsplottet bestod av. Emma forteller at det lave antallet observasjoner kan gi et dårlig syn på virkeligheten, og at det kan hende at utliggeren representerer den faktiske sammenhengen. Både Heidi og Susanne argumenterer for at høyere utvalgsstørrelse gir bedre grunnlag for å si noe om sammenhengene, mens Karoline forteller at sjansen for store forskjeller mellom observasjonene øker når man har få observasjoner. Drøftingen av utvalgsstørrelsen blir i høyttenkningene ofte relatert til hvor stor betydning enkeltpunkter, for eksempel utliggeren, har for regresjonslinja. Emma kommer frem til at utliggerens store avvik samt den lave utvalgsstørrelsen gjør at utliggeren vil påvirke modellen «*litt*», og ifølge Karoline vil utliggeren påvirke modellen mer jo færre observasjoner man har.

Deltakernes resonnementer inneholder altså et kritisk syn på antallet observasjoner modellen baserer seg på. Argumentene de bruker er troverdige, og viser at de er i stand til å peke på usikkerhetsmomenter ved det de får fremstilt. Resonnementene viser både at deltakerne innehar et statistisk grunnlag angående elementer som påvirker modellens usikkerhet, og at de kan drøfte en individuell modell ut fra kriteriene. På denne måten tilfredsstiller de kriterier som Garfield og Ben-Zvi (2008) og Gattuso og Ottaviani (2011) trekker frem som viktige for det statistiske grunnlaget i et resonnement, og som har fått plass i mitt rammeverk. Jeg vil derfor anse dette som kreative resonnementer ut fra rammeverket.

6.2 Imitative resonneringstrekk

Diskusjonskapittelet har så langt tatt for seg resonnementenes statistiske forankring og plausibilitet, samt mangler eller utfordringer ved dem, med fokus på de resonnementer deltakerne ga muntlig uttrykk for. Dette delkapittelet vil fokusere på mønstrene ved selve oppbyggingen og utviklingen av resonnementene. Jeg vil ta utgangspunkt i de fire stegene rammeverket deler et resonnement inn i, og i tillegg diskutere andre vesentlige faktorer.

6.2.1 Brede muligheter, men like valg

Høyttkningsprotokollens første oppgave og legger opp til et bredt spekter av strategivalg og -implementasjoner, og dermed en rekke resonnementer. Likevel gjør deltakerne svært like strategivalg: Deres første resonnement består av å se på aksetitlene, vurdere plottets og/eller linjas form, og deretter konkludere med at det er en positiv sammenheng mellom godteriinntak uka før eksamen og eksamensresultatet. Samtlige mener det er en positiv sammenheng mellom godteriinntaket og eksamensresultat, og begrunner det med at enten linja, plottet eller begge har en positiv vekst. Etter at deltakerne gjennomfører deres første resonnement og konkluderer med at det er en sammenheng mellom de to variablene, må de stilles spørsmål om statistiske faktorer som korrelasjon, forholdet mellom plott og linje og modellusikkerhet, før de drøfter slike elementer. Statistiske resonnementer omkring enkel lineær regresjon bør inneholde tolkninger av forholdet mellom variablene (Garfield & Ben-Zvi, 2008) og drøfting av modelltilpasningen til konteksten (Garfield & Ben-Zvi, 2008; Gattuso & Ottaviani, 2011), og det er derfor interessant at deltakernes primærresonnementer ikke inneholder dette.

To av deltakerne forteller eksplisitt at de tolker oppgaven dithen at de skal vurdere om det finnes en sammenheng mellom godteriinntaket og eksamensresultat, men ut fra de resterende deltakernes gjennomføring av oppgaven kan det virke som om samtlige deltakere tolker oppgaven på denne måten. At en så åpen oppgave blir tolket så smalt av alle deltakerne, og at samtlige velger å se på akser, plott og linje, og så konkludere, peker på at det finnes imitative trekk i deres resonnementsoppbygging. Med dette mener jeg at argumentene i resonnementene ikke nødvendigvis er imitative, men at de vesentlige likhetene i selve oppbyggingen av resonnementene tyder på at studentene *kan* ha lært en bestemt fremgangsmåte – en slags «oppskrift» – for statistiske problemer og oppgaver tilknyttet enkel lineær regresjon. Dette vil likevel være vanskelig å drøfte videre uten dypere kjennskap til undervisningsforløpet og oppgavene i statistikkurset studentene fulgte.

I delkapittel 3.6 tas forskjellene mellom statistiske og strengt matematiske resonnementer opp, og Moore og Cobb (2000, s. 623) argumenterer for at «*Statistics ... values mathematical understanding as a means to an end, not as an end in itself*» mens Garfield og Ben-Zvi (2008) mener statistisk resonnering innenfor enkel lineær regresjon er mer omfattende enn å se på kun de matematiske egenskapene. Deltakernes primære resonnement i den første oppgaven kan ansees som matematisk styrt, basert på gjennomføringen. Deres fokus ligger på de matematiske aspektene ved modellen – aksene, plottets form og linjas stigningstall – fremfor aspekter blant annet Garfield og Ben-Zvi (2008) og Gattuso og Ottaviani (2011) omtaler som særegne for

statistikkfeltet. Et slikt fokus kan være et resultat av tidligere erfaringer med modeller og grafer i matematikk. Dersom dette er tilfellet, at studentene valgte en matematisk innfallsvinkel til oppgaven fordi den grafiske fremstillingen lignet på kjente fremstillinger i matematikk, vil resonnementets oppbygging kunne ansees som imitativt ut fra rammeverket og definisjonen gitt av Lithner (2008). Det må likevel trekkes frem at en rekke statistisk forankrede resonnementer kom frem når deltakerne ble ledet inn i det statistiske feltet av forskerne. Et viktig aspekt i denne drøftingen er også at den i høy grad baserer seg på de tanker og valg deltakerne ga uttrykk for. Som tidligere omtalt kan jeg ikke med sikkerhet si at elementer som ikke ble nevnt ikke var en del av deltakernes ikke-verbaliserte resonnementer, og det er derfor en mulighet for at deltakerne kunne gjort andre resonnementer som ville tatt større hensyn til statistikkens egenart.

6.2.2 Et ukritisk forhold til den oppgitte linja

Som tidligere omtalt er linja i første oppgave *ikke* regresjonslinja til plottet, men en linje tegnet for å gi deltakerne rom til å drøfte forholdet mellom et utvalg av observasjoner og formen til dens tilhørende regresjonslinje. Flere av deltakerne stiller seg kritiske til linjas tilpasning til plottet, men likevel ser det ut som om en del av dem mener at linja likevel faktisk er den best tilpassa linja til det aktuelle plottet. Emma forteller at hun tror en bedre modell vil ha et høyere stigningstall enn linja som er trukket, fordi det for den oppgitte linja havner en del punkter under linja for lave x-verdier og en del punkter over linja for høye x-verdier. Dette er et plausibelt resonnement som passer godt med realiteten vist i Figur 3-4 (s. 38). Likevel antar Emma at modellen er god slik den er, og svarer at hun heller tror den oppgitte linja er regresjonslinja enn sin egen linje «*Fordi som regel når man får en sånn her utskrift, så er den på en måte gjort med riktige beregninger*». Som et resultat av dette kritiserer hun sin egen linje (vedlegg E), som er nærmere den faktiske regresjonslinja, fordi den ikke ligner på linja trukket i første oppgave. Også Susanne stoler mer på linja i første oppgave enn sin egen, til tross for at hun i sin egen linje har tatt hensyn til det store residualet mellom linja og utliggeren (vedlegg E) og er svært fornøyd med egen plassering. Hun har dog et annet argument: «*Det ser ut som det er en data som har laget den, og det er litt mer troverdig enn meg*».

I begge disse resonnementene forkastes viktige statistiske elementer som modellkritikk og drøfting av modelltilpasninger (Garfield & Ben-Zvi, 2008; Gattuso & Ottaviani, 2011) til fordel for en tilfeldig linje. Lithner (2008) beskriver en del av imitativ resonnering som det å la forhåndsoppfatninger og tidligere erfaringer stå i veien for mer forankrede resonnementer. Gjennom å forkaste egne linjer, hvor plasseringen er bestemt ut fra statistisk forankrede og plausible resonnementer, til fordel for den allerede oppgitte linja, vises derfor tegn på imitative

resonnementer. Oppfatningen om at denne linja er den best tilpassede linja har lav plausibilitet, da plasseringen strider med det statistiske grunnlaget for en regresjonslinje. Det kan derfor argumenteres for at denne oppfatningen er en forhåndsoppfatning basert på erfaring, noe både Susanne og Emmas argumenter underbygger.

Susanne starter med å fortelle at linja *er* regresjonslinja. Dette til tross for at hun kan fortelle at regresjonslinja er den linja som har lavest sum av avstander til punktene, og at denne linja har en del punkter som ligger litt unna. Heidi forklarer at hun mener avstanden mellom linja og de første punktene på plottet gjør at linja ikke er så godt tilpasset plottet som den burde være. Likevel velger de begge å se på linja denne linja når de skal bestemme om deres egne linjer skal gå gjennom origo eller ikke. Dette tyder på imitative trekk i resonneringen, ved at de velger å kopiere egenskaper fra modellen i første oppgave, fremfor å benytte seg av et statistisk grunnlag ved å for eksempel se på mønsteret i plottet eller fokusere på minste kvadraters metode. Lithner (2008) kaller dette familiær resonnering, ved at et problem løses ved å se på overfladiske likheter mellom dette problemet og et lignende problem med kjent løsning. Spesielt interessant er det at de velger å kopiere egenskaper fra en modell de like før har kritisert og argumentert for at ikke er best mulig tilpasset observasjonene.

6.2.3 «Kanskje det da egentlig hjelper å spise smågodt uka før eksamen?» - en umiddelbar antakelse om årsakssammenheng

Som nevnt følger deltakerne det samme primærresonnementet i den første oppgaven. De når også samme konklusjon om en positiv sammenheng mellom godteriinntak og eksamensresultat. Fire av de fem deltakerne gjør så det Garfield og Ben-Zvi (2008) beskriver som en vanlig misoppfatning ved å anta at en sammenheng er det samme som en årsakssammenheng. Det å kunne skille mellom sammenheng og årsakssammenheng utgjør en viktig del av statistisk tolkning (Løvås, 2004), noe rammeverket plasserer under statistisk forankring. Garfield og Ben-Zvi (2008) trekker også frem tolkning og drøfting av forholdet mellom variablene som sentralt for statistiske resonnering, noe deltakernes konklusjon peker mot at ikke ble vektlagt. Resonnementene vil derfor kunne kalles overfladiske ved at solid forankring og drøfting ikke foreligger (Kilpatrick et al., 2001), og dermed imitative ifølge rammeverket og Lithner (2008)

Det skal likevel nevnes at samtlige, når de blir spurt hva de syns om sammenhengen, åpner opp for at det kan være andre faktorer som ligger bak. De fleste deltakerne ser for seg at eksamensforberedelser kan være en felles faktor for de to variablene, og Emma forklarer: «*Hvis man først skal liksom sette seg ned og jobbe hardt, så fortjener man også belønning. Så hvis man jobber veldig hardt, fortjener man litt ekstra belønning. Så hvis man har jobba litt ekstra*

hardt da, så får man bedre resultater». Med litt hjelp er de altså i stand til å drøfte hvorvidt sammenhengen i modellen virker plausibel, og andre bakenforliggende faktorer som eventuelt kan føre til en sammenheng. Dette viser evne til modellkritikk og tolkning – viktige elementer i den statistiske forankringen (Garfield & Ben-Zvi, 2008; Gattuso & Ottaviani, 2011) – når de får litt drahjelp. Slik kan det argumenteres for at deltakerne kan vise kreative resonnementer ved litt hjelp, dersom man fokuserer på statistisk kreativitet slik Gil et al. (2008) mener den kommer til syne gjennom et samspill av formuleringer, midlertidige løsninger, omformuleringer og nye, endelige løsninger.

7 Avsluttende refleksjoner og implikasjoner

I dette kapitlet vil funnene som ble drøftet i diskusjonskapitlet sammenfattes, for å forsøke å besvare problemstillingen gitt i delkapittel 1.2: «Hva kjennetegner universitetsstudenters resonnementer omkring enkel lineær regresjon i statistikk?». I tillegg vil studiens ulike implikasjoner for statistisk undervisning, rammeverket og videre forskning diskuteres.

7.1 Avsluttende refleksjoner

Til tross for særegenhetene i hver enkelt deltakers resonnementer, viser høyttenkningsprotokollene fellestrekk i deres tanker og argumenter omkring en regresjonslinje. Deltakerne viser kreative resonnementer omkring en regresjonslinjes formål, da de kan argumentere på ulike måter for at dette vil være linja som er best tilpasset observasjonene som en helhet, og at den skal fremstille en utvikling eller trend beskrevet av observasjonene. Dette tilfredsstillende et fokus på helhetlig resonnering, og er i tråd rammeverkets kriterier for kreativ resonnering gjennom solid forankring i de statistiske egenskapene ved en regresjonslinjes formål. Argumentenes forankring medfører også at resonnementene kan ansees som plausible ved at de er troverdige, støtter valgene deltakerne tar og følger en logisk oppbygging.

Samtlige deltakere var i stand til å kritisk drøfte både ulike påvirkninger et lavt utvalg ville medføre for modellens troverdighet og utvalgsstørrelsens påvirkninger på ulike avvik i observasjonsdataene. Rammeverket plasserer evne til modellkritikk under statistisk forankring, og drøftingene var forankret i egenskaper ved de involverte komponentene og dermed troverdige og logiske. Statistikkdidaktisk teori trekker frem viktigheten av modellkritikk for statistiske resonnementer, gjennom fokus på statistiske konsepter, tolkning og usikre konklusjoner. Jeg vil dermed konkludere med at dette var et kreativt trekk ved deltakernes resonnementer.

Deltakernes resonnementer bar likevel preg av noen imitative trekk, spesielt gjennom hyppig forankring i – og bruk av – forhåndsoppfatninger eller matematiske erfaringer i resonnementsekvenser. Dette kom til syne gjennom deres primære resonnementsoppbygging i den første oppgaven, som i liten grad inkluderte resonnementer omkring sentrale elementer for å ta hensyn til statistikkens egenart, slik som drøfting av usikkerhet og tolkninger av forholdet mellom variablene og av modelltilpasningen ut fra konteksten. I tillegg kom de imitative trekkene frem gjennom manglende kritikk til fremstillingene de fikk. Slike resonnementer har blitt

karakterisert som overfladiske, ved at en dypere forankring og drøfting ikke foreligger. Både Lithner (2008) og Ross (1998) påpeker at imitative resonnementer i form av å følge en bestemt algoritme eller prosedyre kan være fordelaktige dersom de hjelper studentene med å løse et problem, men i dette tilfeller utgjør de imitative resonnementene snarere et hinder for deltakernes løsninger.

Det likevel mest fremtredende funnet i denne studien var samtlige deltakernes strategivalg om å plassere sin egen linje med like mange punkter over som under den, og hvordan de relaterte dette til egenskapene for minste kvadraters metode. Denne strategien ansees som en typisk misoppfatning, og bryter med sentrale egenskaper ved enkel lineær regresjon. Spesielt interessant var det at deltakerne begrunnet strategien med argumenter tilknyttet minste kvadraters metode. Disse argumentene har svært solid statistisk forankring, men deltakernes adaptivering av kriteriene for å begrunne sin strategi inkluderte elementer som ikke har statistisk eller matematisk gyldighet, og som dermed har lav plausibilitet. Ut fra dette virker det som om deltakerne har kunnskaper om de statistiske komponentene for regresjonslinja, men at adaptiveringen av disse til deres «forenkling» om et likt antall punkter på hver side av linja fører til at komponentenes iboende egenskaper ikke lenger tilfredsstilles. Det kan derfor argumenteres for at resonnementene mangler underliggende konseptuell forståelse for de statistiske metodene, et kriterium som i rammeverket relateres til kreativ resonnering. Ved å kalle idéen om et likt antall punkter på hver side av linja for en «oppskrift» kan resonnementene ansees som imitative i den grad at ønsket om å følge oppskriften overgår de mer statistisk forankrede resonnementene. Funnet fra studien stiller seg bak teorier fra en tidligere studie om en sammenheng mellom strategien om et likt antall punkter på hver side av regresjonslinja en idé om at regresjonslinja viser en gjennomsnittlig y -verdi. Flere av deltakerne i min studie argumenterte for at linja var et gjennomsnitt av et slag, i tillegg til å argumentere for et likt antall punkter på hver side av linja. I tillegg ble det avdekket av enkelte trakk likheter mellom linja som et gjennomsnitt og linja som et estimat. Dette viser mangel på konseptuell forståelse for elementer som gjennomsnitt, estimat og regresjon.

Resultatene av studiene gjenspeiler kompleksiteten i deltakernes resonnementer, og det er vanskelig – om ikke umulig – å komme med en entydig konklusjon omkring hvorvidt resonnementene er kreative eller imitative. Funnet viser at deltakerne i stor grad viser kreative resonnementer omkring en regresjonslinjes formål og utvalgsstørrelsens påvirkning på ulike aspekter ved modellen, mens de har mer imitative resonnementer omkring forholdet mellom sammenheng og årsakssammenheng, samt bruker erfaringer fremfor argumenter med dypere

statistisk forankring enkelte steder. Generelt sett inneholder deres resonnementer et statistisk grunnlag, men dette grunnlaget er enkelte steder noe mangelfullt. Resultatene avdekker at den mangelfulle forankringen i stor grad er et resultat av en gjennomgående misforståelse eller forenkling av egenskapene ved minste kvadraters metode, hvor det å ha et likt antall punkter på hver side av regresjonslinja utgjør strategivalget. For enkelte deltakere kan denne sees i sammenheng med en oppfatning av regresjonslinja som et gjennomsnitt. Forenklingenes diskrepans med sentrale statistiske egenskaper påvirker resonnementenes plausibilitet, da deres matematiske og statistiske troverdighet og logikk svekkes. Likevel ville resonnementene blitt ansett som plausible deltakerne imellom, da de ofte har de samme svakhetene i den statistiske forankringen.

7.2 Implikasjoner

Innledningsvis i oppgaven ble mangelen på studier som tar for seg studenters tanker omkring enkel lineær regresjon nevnt, mens det økte fokuset på statistikdidaktiske studier og teori ble presentert i [delkapittel 3.5](#). Jeg mener at denne studien bidrar med å trekke frem elementer ved universitetsstudenters resonnementer omkring temaet, og dermed er et nyttig bidrag innenfor et lite utforsket område i et stadig voksende felt. Casey (2014, s. 4) skriver at «*Knowledge of students' conceptions of the line of best fit is needed so that teachers can anticipate what ideas students typically come to the learning of this topic with and plan their instruction accordingly*». Her mener jeg at studien trekker frem interessante faktorer og gir informasjon som kan vektlegges i utviklingen av statistikkundervisning omkring enkel lineær regresjon. Med så få deltakere som denne studien har hatt, kan ikke resultatene fra studien antas å være representative for et større utvalg, men deres fellestrekk kan likevel gi verdifull informasjon ved å rette fokus mot elementer som forelesere og lærere bør være oppmerksom på i deres undervisning.

Et overraskende funn var deltakernes relativt ukritiske forhold til fremstillingenes troverdighet og gyldighet. Ikke bare godtok de i flere tilfeller det de fikk presentert – de valgte også å stole på fremstillingene til tross for at de kunne komme med viktig og plausibel kritikk til dem. Det er i dag stort fokus på evne til kritisk tolkning av statistiske fremstillinger, blant annet på fremstillinger gitt i media og markedsføring, men studien kan tyde på at dette ikke er en kvalitet deltakerne har utviklet gjennom kurset. Viktigheten av å kunne komme med modellkritikk og drøfte modellens gyldighet og troverdighet trekkes også frem i statistikdidaktisk teori (Garfield

& Ben-Zvi, 2008; Gattuso & Ottaviani, 2011), og studien viser dermed at det kan være et behov for større fokus på selvstendig og kritisk tenking i statistikkundervisningen. Dette kan for eksempel løses ved en større andel oppgaver hvor studentene øves i kritisk refleksjon, og får erfaring i å vurdere fremstillingers troverdighet. Gjennom økt erfaring kan evnen til å være kritisk og stole på egne resonnementer videreutvikles, og dermed bidra til kreativ statistisk resonnering. Et kritisk blikk på statistiske fremstillinger vil ikke bare være hensiktsmessig for statistikkundervisningen, men også være nyttig i et samfunn hvor statistikkfeltet får en stadig mer etablert plass. Det må likevel nevnes at deltakerne, til tross for å tidlig konkludere med en årsakssammenheng mellom godteriinntak og eksamensresultat, uttalte at de selv ikke ville spist mer godteri for å øke karakterene sine. På denne måten viser de noe evne til kritisk sans også i sine ukritiske resonnementer.

Studier som fokuserer på undervisning og læring av statistikk på universitetsnivå viser at studenter sliter med å lære, huske og bruke statistikk (Ben-Zvi & Garfield, 2004; Garfield & Ben-Zvi, 2007, 2008; Garfield & Gal, 1997). Denne studien underbygger til dels at disse funnene også er gjeldende for enkel lineær regresjon, i form av at en dypt statistisk forankring erstattes med forenklinger eller mer overfladiske «oppskrifter» eller «huskereglene». Spesielt fremtredende i studien var tanken om at kriteriene tilhørende minste kvadraters metode ble tilfredsstillende ved å plassere regresjonslinja med et likt antall punkter over og under den, med en strategiimplementasjon som innebar å telle punkter frem til deltakerne var fornøyde. Opphavet til denne «huskereglene» er ukjent, men studien impliserer at slike elementer enklere huskes enn den statistiske forankringen og prinsippene bak dem. Presentasjon og bruk av slike forenklinger i statistikkundervisningen bør derfor gjøres med stor varsomhet, og rammene for når forenklingene er gyldige må tydeliggjøres og tillegges stor vekt dersom «huskereglene» skal implementeres i undervisningen. Det samme gjelder en tydeliggjøring av forskjellen mellom et gjennomsnitt og et estimat, da både denne studien og studien til Casey (2014) peker på en mulig sammenheng mellom tanken om regresjonslinja som et gjennomsnitt og idéen om et likt antall punkter på hver side av regresjonslinja.

I oppgaven kommer det frem at observasjonsepisodene fikk en langt mindre rolle i studien enn først tiltenkt. Lithner (2008) trekker frem at et resonnement skal bestå av både prediktiv og verifiserende argumentasjon, og refererer i sitt rammeverk til Yackel og Cobb (1996, gjengitt i Lithner, 2008), som sier at et arguments gyldighet bestemmes av sosiomatematiske normer. Videre forklarer han at diskusjon rundt disse normene gir mulighet for utvikling og læring. Observasjonsepisodene viser at deltakerne i liten grad utfordret hverandres resonnementer, men

ofte ukritisk godtok idéer og innspill uten verken prediktiv eller verifiserende argumentasjon. Dette kan ha gått på bekostning av deltakernes resonnementsutvikling, og det kan derfor argumenteres for at flere rammer for gruppediskusjonene er nødvendig for å sikre at studentenes resonnementer blir utfordret og utviklet. Det faktum at alle gruppemedlemmene ifølge den kognitive klassifiseringen de gjennomgikk var ekstroverte, men at samtalene i stor grad ble styrt av enkeltmedlemmer, peker mot at gruppestørrelsen og -sammensetningen bør revurderes. I denne studien tydet det på en sammenheng mellom passivitet og stillhet i observasjons-episodene og usikkerhet rundt de statistiske elementene i høyttenkningsprotokollene, men studiens begrensninger gjør igjen at funnene ikke kan antas representative. Dersom det likevel, ved et større utvalg, skulle være en slik sammenheng som studien viser, bør det vurderes å dele studentene inn i mindre grupper.

Funn fra studien viser også at det er en diskrepans mellom fokuset i deltakernes resonnementer fra observasjonsepisodene og høyttenkningsprotokollene, noe som både kan ha påvirkning på rammeverket denne studien er bygd på og stille spørsmålsteget ved et element i som går igjen i både matematikk- og statistikkdidaktiske teorier omkring resonnering. Både matematikk- og statistikkdidaktiske teorier peker på en relasjon mellom konseptuell forståelse og resonnering, og studiens rammeverk har på grunnlag av dette argumentert for en sammenheng mellom kreativ resonnering og konseptuell forståelse (delkapittel 3.7). Funn fra studien peker imidlertid mot at det kanskje ikke er en like sterk sammenheng mellom disse som først antatt.

I observasjonsepisodene var resonnering rundt minste kvadraters metode svært sentralt. Flere deltakere engasjerte seg i samtaler omkring sammenhenger mellom funksjonsuttrykket for regresjonslinja, koeffisientestimatene og kvadratavviket, og i tillegg omhandlet flere diskusjoner og samtaler ulike faktorerens påvirkning på kvadratavviket, formålet med minste kvadraters metode og hvorfor denne metoden ga en best tilpasset linje til de gitte observasjonene. Resonnementene som ble delt i disse samtalene var statistisk forankret og plausible, da de sprang ut fra egenskaper ved minste kvadraters metode og fulgte en logisk oppbygning. Det kan derfor argumenteres for at resonnementene omkring metoden var kreative, ut fra rammeverket. Følgelig ble det antatt at deltakerne innehadde en konseptuell forståelse for metoden og for prinsippene ved regresjonsanalysen. Likevel peker funn fra høyttenkningen mot at kreative resonnementer ikke nødvendigvis er et resultat av konseptuell forståelse: Til tross for det store fokuset i observasjonsepisodene, nevnte kun to deltakere eksplisitt minste kvadraters metode i sine høyttenkningsprotokoller, og deltakernes resonnementer omkring det å ha like mange punkter på hver side av linja peker på en mangelfull forståelse for metodens

prinsipper og kriterier. Dette kan være et resultat av at kunnskap delvis var glemt etter to måneders pause mellom observasjonsepisodene og høyttenkingsprotokollene, men jeg stiller spørsmålstegn ved at den konseptuelle forståelsen skal forsvinne på så kort tid. Studien impliserer dermed at det ikke nødvendigvis må være en så tett sammenheng mellom kreative resonnementer og konseptuell forståelse som først antatt. Resultater fra én enkelt (og begrenset) studie er ikke nok til å si at teoriene ikke er korrekte, men utgjør et interessant funn som kan utforskes videre ved bruk av flere studier.

Et annet spørsmål som dukket opp, var *hvem* resonnementet skulle være plausibelt for. Plausibilitet spiller en sentral rolle for resonnementers kreativitet ifølge Lithner (2008), men det nevnes ikke for hvem resonnementet skal være plausibelt. Lithner (2008, s. 266) skriver at «*The stronger the logical value, the more plausible it [resonnementet] is*», men heller ingenting om hvem det skal være logisk for. I min studie hadde dette stor påvirkning på klassifiseringen av resonnementene, og det ble derfor bestemt å se på plausibiliteten både ut fra samsvar med de statistiske elementene ved enkel lineær regresjon og fra deltakernes ståsted og forankring. I flere tilfeller dukket det opp resonnementer som ut fra manglende samsvar med statistiske egenskaper ikke ville blitt sett på som plausible, men som deltakeren seg imellom ville ansett som troverdige grunnet felles misoppfatninger eller forenklinger i det statistiske utgangspunktet. Jeg mener derfor at en presisering av hvem et resonnement skal være plausibelt for ville styrket Lithners rammeverk.

Grunnet rammer for både tidsbruk og arbeidsmengde måtte studien foregå innenfor ett tema og med bestemte rammer for forskningsspørsmålet. Arbeidet med masteroppgaven har derfor resultert i flere idéer til videre studier. Blant annet ville det vært svært spennende å ta et ytterligere dypdykk i forholdet mellom resonnementene som kommer til syne i gruppesituasjoner og individuelt. Er det noen tydelige sammenhenger eller forskjeller, og hvordan påvirker egentlig den sosiale konteksten resonnementene? Her er det jo både muligheter for rike diskusjoner og mediering, men konteksten kan også fungere som en arena for utvikling av delte misoppfatninger. For å kunne besvare slike spørsmål vil det være nødvendig å se på et større antall grupper enn hva min studie tillot, og å følge disse over en lengre periode.

Studien har også tatt opp noen gjennomgående statistiske misoppfatninger eller forenklinger blant deltakerne, og et interessant spørsmål er hvor og hvordan slike idéer oppstår og utvikler seg. Er de et resultat av forhåndsoppfatninger, diskusjoner blant studentene, eller kanskje springer de ut av undervisningsopplegget? Her vil det være svært interessant å se på forholdet mellom undervisningen som blir gitt, undervisningsmetodene som blir brukt og de ulike

misoppfatningene. For å få et dypere innblikk i misoppfatningenes utvikling vil det være nødvendig å følge flere grupper over en lengre periode. To av deltakerne i studien nevner at idéene jeg har karakterisert som misoppfatninger eller forenklinger *kan* ha vært noe de har lært i tidligere skolegang, og det vil derfor også være svært interessant å se nærmere på undervisningen ved videregående skoler. Studien viser i tillegg til misoppfatningene at deltakerne tar i bruk en del matematiske forhåndsoppfatninger i sine resonnementer, og det kan være interessant å se i hvilken grad undervisningen i den videregående skolen bidrar til disse forhåndsoppfatningene, misoppfatningene og forenklingene. En slik studie vil også være interessant i den grad at den kan bidra til en utvikling av læreplanene for de aktuelle matematikkursene.

8 Referanser

- Afflerbach, P., & Johnston, P. (1984). On the use of verbal reports in reading research. *Journal of Reading behavior*, 16(4), 307-322.
- Aga, L. (2008). *Begreper i sannsynlighet og statistikk på første trinn i videregående skole: En studie av elevers respons på oppgaver om utvalgte begreper*. Masteravhandling, UiA.
- Batanero, C., & Díaz, C. (2010). Training teachers to teach statistics: What can we learn from research? *Statistique et enseignement*, 1(1), 5-20.
- Batanero, C., Godino, J. D., Vallecillos, A., Green, D. R., & Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547.
- Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). Statistical Literacy, Reasoning and Thinking: Goals, Definitions and Challenges. I: D. Ben-Zvi & J. Garfield (Red.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (s. 3-15). Dordrech: Kluwer Academic Publishers.
- Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (2000). *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School* (Expanded Edition). (s. 10-12). Washington D. C.: National Academy Press.
- Brovold, H. (2013). *Invariants drøftet i et nevropsykologisk perspektiv med spesiell referanse til realfaglig kognisjon - "Fire veier inn i matematikken"*. Doktogradsavhandling, NTNU, på oppdrag fra Nasjonal Senter for Realfagsrekruttering.
- Casey, S. A. (2014). Teachers' knowledge of students' conceptions and their development when learning linear regression. I: K. Makar, B. de Sousa & R. Gould (Red.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014)* (s. 1-6). Voorburg, Nederland: International Statistical Institute.
- Chervany, N. L., Benson, P. G., & Iyer, R. K. (1980). The Planning Stage in Statistical Reasoning. *The American Statistician*, 34(4), 222-226.
- Chervany, N. L., Collier, R. O., Fienberg, S. E., Johnson, P. E., & Neter, J. (1977). A Framework for the Development of Measurement Instruments for Evaluating the Introductory Statistics Course. *The American Statistician*, 31(1), 17-23.
- Christoffersen, L., & Johannesen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forlag.
- Cobb, G. W. (1992). Teaching Statistics. I: L. A. Steen (Red.), *Heeding the Call for Change - Suggestions for Curricular Action* (s. 3-34). USA: The Mathematical Association of America.
- Cobb, P. (2007). Putting philosophy to work. I: F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (s. 3-38). USA: Information Age Publishing.
- delMas, R. C. (2004). A Comparison of Mathematical And Statistical Reasoning. I: D. Ben-Zvi & J. Garfield (Red.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (s. 79-96). Dordrech: Kluwer Academic Publishers.
- Ericsson, K. A., & Simon, H. A. (1980). Verbal Reports as Data. *Psychological Review*, 87(3), 215-251.
- Ericsson, K. A., & Simon, H. A. (1993). Protocol Analysis, 1-12. Cambridge, MA: MIT press.
- Ervynck, G. (1991). Mathematical Creativity. I: D. Tall (Red.), *Advanced Mathematical Thinking* (s. 42-43). Dordrecht: Springer Netherlands.

- Everett, E. L., & Furseth, I. (2014). *Masteroppgaven: Hvordan begynne - og fullføre* (2. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.
- Fonteyn, M. E., Kuipers, B., & Grobe, S. J. (1993). A Description of Think Aloud Method and Protocol Analysis. *Qualitative Health Research*, 3(4), 430-441.
- Garfield, J. (2002). The Challenge of Developing Statistical Reasoning. *Journal of Statistics Education*, 10(3), 58-69.
- Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2007). How Students Learn Statistics Revisited: A Current Review of Research on Teaching and Learning Statistics. *International Statistical Review*, 75(3), 372-396.
- Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). Developing Students' Statistical Reasoning: Connecting Research and Teaching Practice. *Springer* (s. 2-55, 390-418)
- Garfield, J., & Gal, I. (1997). Curricular Goals and Assessment Challenges in Statistics Education. I: J. Garfield & I. Gal (Red.), *The Assessment Challenge in Statistics Education* (s. 1-13). Amsterdam: IOS Press.
- Garfield, J., & Gal, I. (1999). Teaching and Assessing Statistical Reasoning. I: L. Stiff (Red.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (s. 207-219). National Council Teachers of Mathematics 1999 Yearbook.
- Garfield, J., & Zieffler, A. S. (2009). Modeling the Growth of Students' Covariational Reasoning During an Introductory Statistics Course. *Statistics Education Research Journal*, 8, 7-32.
- Gattuso, L., & Ottaviani, M. G. (2011). Complementing Mathematical Thinking and Statistical Thinking in School Mathematics. I: C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Red.), *Teaching Statistics in School Mathematics - Challenges for Teaching and Teacher Education* (s. 121-132). Springer Netherlands.
- Gil, E., Ben-Zvi, D., & Apel, N. (2008). Creativity in learning to reason informally about statistical inference in primary school *Proceedings of The 5th International Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (s. 125-135). Haifa, Israel. Hentet fra <http://cmeg-5.edu.haifa.ac.il/Part%20%20-%20RR2-Cmeg5%20proceedings.pdf>.
- Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context Problems in Realistic Mathematics Education: A Calculus Course as an Example. *Educational Studies in Mathematics*, 39(1), 111-129.
- Greenhouse, J. B. (2013). Statistical Thinking: The Bedrock of Data Science. *The Huffington Post* (Innlegg fra American Statistical Association). Hentet fra http://www.huffingtonpost.com/american-statistical-association/statistical-thinking-the-bedrock-of-data-science_b_3651121.html
- Handegård, T. (2016). *Oppfatninger og misoppfatninger i sannsyn: Ein mixed methods-studie av elevar på vidaregåande trinn – yrkesfagleg retning*. Masteravhandling, UiB.
- Haylock, D. W. (1987). A Framework for Assessing Mathematical Creativity in Schoolchildren. *Educational Studies in Mathematics*, 18(1), 59-74.
- Jacobsen, D. I. (2005). Hvordan gjennomføre undersøkelser? : Innføring i samfunnsvitenskapelig metode (2. utg.). (s. 125-138). Kristiansand: Høyskoleforlaget.
- Johannesen, A., Tufte, P. A., & Christoffersen, L. (2011). Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode (4. utg.). (s. 103-116). Oslo: Abstrakt forlag.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics (s. 115-135) Washington, DC: National Academics Press.
- Kvale, S., & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.). (s. 225-238, 276). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.
- Lane, D. M., Scott, D., Hebl, M., Guerra, R., Osherson, D., & Zimmer, H. (u.å.). *Online Statistics Education: A Multimedia Course of Study* (s. 461-486).

- Leikin, R., & Pitta-Pantazi, D. (2013). Creativity and mathematics education: The state of the art. *ZDM Mathematics Education*, 45(2), 159-166.
- Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *ZDM*, 37(6), 457-467.
- Lithner, J. (2008). A Research Framework for Creative and Imitative Reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 255-276.
- Løvås, G. G. (2004). Statistikk for universiteter og høyskoler (2. utg). (s. 266-276). Oslo: Universitetsforlaget.
- Madison, B. L. (2008). Planning a Conversation about Quantitative Literacy and Teacher Education. I: B. L. Madison & L. A. Steen (Red.), *Calculation vs. Context: Quantitative Literacy and Its Implications in Teacher Education* (s. 3-10). USA: The Mathematical Association of America (Incorporated).
- Mooney, E. S. (2002). A Framework for Characterizing Middle School Students' Statistical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 4(1), 23-63.
- Moore, D. S. (1998). Statistics Among the Liberal Arts. *Journal of the American Statistical Association*, 93(444), 1253-1259.
- Moore, D. S., & Cobb, G. W. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching. *The American Mathematical Monthly*, 104(9), 801-823.
- Moore, D. S., & Cobb, G. W. (2000). Statistics and Mathematics: Tension and Cooperation. *Mathematical Association of America*, 107(7), 615-630.
- Nasjonalt Senter for Realfagsrekruttering. (2013). *4 veier inn i matematikken*. Kort presentasjon av konklusjon i H. Brovolds doktorgradsavhandling "Invarians drøftet i et nevropsykologisk perspektiv med spesiell referanse til realfaglig kognisjon - fire veier inn i matematikken". Hentet fra <http://www.realfagsrekruttering.no/wp-content/uploads/2013/10/4-veier-inn-i-matematikken.pdf>
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (u.å.). *Common Core State Standards for Mathematics*, (s. 6-8). Hentet fra http://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Common_Core_State_Standards/Math_Standards.pdf.
- Niss, M. (2006). The concept and role of theory in mathematics education. *Relating practice and research in mathematics education. Proceedings of Norma*, 5, 97-110.
- Niss, M. (2007). Reflections on the state of and trends in research on mathematics teaching and learning. I: F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 1293-1312). USA: Information Age Publishing.
- Niss, M., Jensen, T. H., Andersen, T. B., Andersen, R. W., Christoffersen, T., Damgaard, S., . . . Nissen, K. (2002). Kompetencer og matematiklæring - Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark. *18*, 54-56. Hentet fra <http://www.gymnasieforskning.dk/wp-content/uploads/2013/10/Kompetencer-og-matematikl%C3%A6ring1.pdf>
- Olafsen, A. R., & Maugesten, M. (2009). Matematikdidaktikk i klasserommet (s. 72-79). Oslo: Universitetsforlaget.
- Pfannkuch, M., & Wild, C. (2004). Towards an Understanding of Statistical Thinking. I: D. Ben-Zvi & J. Garfield (Red.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (s. 17-46). Dordrech: Kluwer Academic Publishers.
- Powell, A. B., Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The journal of mathematical behavior*, 22(4), 405-435.
- Ross, K. A. (1998). Doing and Proving: The Place of Algorithms and Proofs in School Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 105(3), 252-255.

- Schoenfeld, A. H. (1985). Making sense of “out loud” problem-solving protocols. *The Journal of Mathematical Behavior*, 4(2), 171-191.
- Sorto, M. A., White, A., & Lesser, L. M. (2011). Understanding student attempts to find a line of fit. *Teaching Statistics*, 33(2), 49-52.
- SpotifyPress. (2015). Introducing Discover Weekly: Your ultimate personalised playlist. Hentet 01.10 2016 fra <https://press.spotify.com/it/2015/07/20/introducing-discover-weekly-your-ultimate-personalised-playlist/>
- Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM Mathematics Education*, 41(1-2), 13-27.
- Sæbø, S., & Brovold, H. (2016). Undervisning må tilpasses intelligens. *Forskning.no : nettavis med nyheter fra norsk og internasjonal forskning*. Hentet fra <http://forskning.no/meninger/kronikk/2016/03/ulik-intelligens-trenger-ulik-undervisning>
- Thorsen, T. (2009). *Misoppfatninger til sannsynlighet: En undersøkelse med diagnostiske oppgaver blant elever i ungdomsskolen*. Masteravhandling, UiO.
- Utstrand, M. (2013). *Det som e i midten! En kasusstudie om hvordan elever uttrykker forståelse for gjennomsnitt median og typetall*. Masteravhandling, NTNU.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. I: *Encyclopedia of mathematics education* (s. 521-525). Springer.
- van Someren, M. W., Barnard, Y. F., & Sandberg, J. A. C. (1994). The think aloud method: A practical approach to modelling cognitive processes (s. 1-139). London: Academic Press.
- Varian, H. (2009). Hal Varian explains why statisticians will be the sexiest job in the next decade [videoklipp]. Hentet 01.10 2016 fra <https://www.youtube.com/watch?v=pi472Mi3VLw>
- Yale University. (1997). Linear Regression. Hentet fra <http://www.stat.yale.edu/Courses/1997-98/101/linreg.htm>
- Yin, R. K. (2014). *Case study research : Design and methods* (5. utg.) (s. 3-19, 40-49). Los Angeles, California: SAGE.

Vedlegg A: Informasjonsbrev og samtykkeskjema

Samtykke om deltakelse i forskningsprosjekt tilknyttet STAT100

Dette brevet er en forespørsel til deg som student i STAT100 om ditt samtykke til deltakelse i et forskningsprosjekt i forbindelse med to mastergradsoppgaver i matematikdidaktikk.

Mastergrad 1 har prosjektittel «Vurdering som læring: Hvordan kan problemløsning bidra til studenters forståelse av statistikk?», og har som mål å evaluere studenters forståelse av statistikk ved å observere studentene mens de arbeider med problemløsende oppgaver.

Mastergrad 2 har prosjektittel «Studenters diskusjoner i statistikk – Hva kjennetegner deres resonnementer?». Målet med denne oppgaven er en dypere forståelse for hva som ligger bak studenters strategivalg og argumenter når de løser og diskuterer statistikkoppgaver i grupper.

Det vil dannes grupper med frivillige studenter, og all deltakelse vil foregå i den normale kollokvietiden. Gruppene vil bestå av 5 personer, som får utdelt forhåndsvalgte oppgaver tilknyttet et tema innenfor pensum i STAT100. Vi ønsker å observere, samt gjøre lyd- og videoopptak, av gruppearbeidet innenfor en kortere tidsperiode. I tillegg ønsker vi å gjennomføre intervjuer med enkeltmedlemmer av gruppen i etterkant. Intervjuene vil ikke være en «test» av statistikkunnskap, men være formet som enkelte oppgaver og samtaler rundt oppgaveløsning.

Vi er interessert i hvordan studenter tenker når de skal løse statistiske oppgaver, og hvordan dette kommer frem i muntlige og skriftlige situasjoner. Vi er spesielt interessert i hvilke argumenter studentene bruker når de diskuterer statistikk, og hva de tenker rundt eget læring i slike situasjoner. Vi er *ikke* interessert i å studere enkeltprestasjoner og hvorvidt dere svarer «riktig» eller «galt» på oppgavene. Hensikten er å lage en oversikt over hvordan studentene *resonnerer* (tenker, argumenterer) når de løser statistiske oppgaver, og hvilke oppgaver studentene (og mastergradsstudent) mener bidrar til læring. Dette er områder det finnes lite norsk forskning innenfor.

All informasjon som blir samlet inn vil bli lagret på hjemmeområdet til hver av de to mastergradsstudentene som er med i prosjektet, samt veileder. Foreleser i STA100 vil *ikke* ha tilgang til datamaterialet. Kun de tre overnevnte har innsyn i det datamaterialet som er samlet inn, og du kan be om at det skal slettes om du måtte ønske det. Ved prosjektets slutt, 15.05.17, vil alt datamateriale slettes. Dette vil si at video- og lydopptak vil bli slettet, og kun relevant og anonymisert informasjon vil bli brukt i masteroppgavene.

Det er frivillig å delta i forskningsstudien og du kan når som helst trekke deg fra studien uten å begrunne dette nærmere. Dersom du velger å trekke deg fra studien vil datamateriale og personopplysninger som omhandler deg ikke bli brukt i masteroppgavene, og slettet ved prosjektets slutt. Vår rolle som forskere innebærer at vi er underlagt strenge etiske regler for hvordan datamaterialet kan brukes. Materialet vil bli behandlet konfidensielt, og vil kun benyttes til forskningsformål. Alle deltakere vil bli anonymisert, og vil ikke kunne gjenkjennes i masteroppgavene. Det vil i masteroppgavene bli opplyst om at utvalget er basert på deltakelse

i grunnkurs i statistikk (STAT100). Andre bakgrunnsopplysninger vil ikke bli nevnt. Prosjektet er meldt inn til NSD (Norsk senter for forskningsdata).

Alle deltakerne gis anledning til å lese og godkjenne innsamlet informasjon som ønskes brukt i masteroppgavene, samt de ferdige produktene før publisering.

Vi håper du vil gi oss den nødvendige tillatelse ved å undertegne og returnere svararket (side 2). For nærmere spørsmål kan du kontakte Marte Bråtalen (marte.bratalien@nmbu.no / 97486637) eller Runa R. Haglund (runa.risnes.haglund@nmbu.no / 47347475)

Vennlig hilsen

Marte Bråtalen, Runa R. Haglund og Margethe Naalsund (veileder).

Samtykkeerklæring

Jeg har lest informasjonen om forskningsprosjektet tilknyttet to mastergradsoppgaver i matematikdidaktikk. Jeg er kjent med at den frivillige deltakelsen i forskningsprosjektet innebærer dokumentasjon ved hjelp av videoopptak, lydopptak, intervjuer, og innsamling av studentenes arbeidsprodukter.

Vennligst kryss av:

1) Jeg ønsker å delta i forskningsprosjektet:

- Ja, jeg samtykker
- Nei, jeg samtykker ikke

2) Jeg ønsker å delta på intervjuer:

- Ja, jeg samtykker
- Nei, jeg samtykker ikke

Underskrift: _____

Sted: _____ Dato: _____

Vedlegg B: Kommunikasjonsskjema mellom forskerne

Disse spørsmålene ansees som relevante dersom deltakeren ikke er i stand til å resonnerer omkring oppgavene på egenhånd, og i intervjusituasjonen etter høyttenkningen. **PEK** på det spørsmålet du ønsker å stille under høyttenkningen, eller skriv et eget. Spørsmål underveis i høyttenkningen stilles kun dersom begge forskerne er enige om at dette er hensiktsmessig.

- Hva ser du?
- Hva tenker du når du ser på (...) ?
- Hvilken informasjon får du / gir (...) deg?
- Hva gjør at du velger å si dette?
- Kan du begrunne (...) ?
- Hva kan fortelle oss om modellen er god?
- Hva kunne bidratt til at du kunne si mer om modellen?
- Hva kunne (...) gitt deg?
- Hva kunne du sagt da?

NESTE OPPGAVE

SPISSET SPØRSMÅL

EKSTA SPØRSMÅL TIL INTERVJUDEL:

- Hva var det første du tenkte da du så oppgaven? (Hvis det er uklart)
- Kunne du løst denne oppgaven på en annen måte?
- Evt oppklarende spm (Hva tenkte du da du....., se spørsmålene over)
- I hvilke situasjoner ser du for deg at du kan bruke dette?

Vedlegg C: Kodeskjema for høyttenkningsprotokoller

FØRSTE KODE: Koding etter rammeverkkriterier.

Kreativ resonnering	SF – statistisk forankring P – plausibilitet
Imitativ resonnering	OR – overfladisk resonnering AR – algoritmisk resonnering MR – memorert resonnering
Andre faktorer	SV – strategivalg SI - strategiimplementering K - konklusjonsdanning IF – interessant faktor (elementer som ikke passer til andre koder)

Kode etter forekomst / ikke-forekomst av de ulike karakteriseringene i rammeverket. Kombinere kodene, sette x foran ved ikke-forekomst. Mål: Karakterisere resonnementene ut fra rammeverket, se på likheter og forskjeller mellom studentene. Eksempel: OR-xSF betyr overfladisk resonnement med manglende statistisk forankring.

RAMMEVERKKRITERIER

Kreativ resonnering	SF	Forankret i de involverte komponentenes iboende matematiske og statistiske egenskaper. Kan tolke modellen og relatere den til reelle situasjoner. Kan se modellens begrensninger og tilpasning til virkeligheten. Eksempler i lin. reg: <ul style="list-style-type: none"> • Terminologi, begrepsforståelse (koeffisient, stigningstall, regresjonslinje, modell, kvadrert, parameter, estimat, spredningsplott, varians, standardavvik, minste kvadrater) • Kvadrering alltid positiv (MKM-verdi, R^2) • Stign.talls fortegn bestemmer retning (regr.linja) • Koordinatsystem (akser må ha lik avstand, akseintervall bestemmer hvordan modellen ser ut) • Varians og standardavvik til parametere / modeller • Avvik mellom matematiske «normer» og statistisk egenart (modell må ikke gjennom alle eller flest punkter) • MKM – avvik mellom estimat og reell verdi • Gyldighetsområde og ekstrapolasjon • Usikkerhet • Fra graf til virkelighet – hva sier grafen?
	P	Begrunnelser og argumenter for strategivalg og -implementasjon som begrunner konklusjonens troverdighet. Her kan det være veldig mye forskjellig, f.eks. argumenter som følger en logisk oppbygging og kan være både prediktiv (hvorfor vil denne strategien være nyttig for å løse oppgaven?) og verifiserende (hvorfor løste denne strategien oppgaven?)
Imitativ resonnering	MR	Husker/ gjengir helt svar og løsningstrinn (eller deler av dem), ofte uten å inneha nødvendig statistisk kunnskap og plausible forklaringer.

(mangler ofte verifiserende argumentasjon: Hvorfor løste strategien oppgaven?)	AR	Husker/ gjengir løsningsalgoritme , ofte uten å inneha nødvendig statistisk kunnskap og plausible forklaringer. <ul style="list-style-type: none"> • Strategivalg gjøres fordi oppgaven ligner kjent oppgave med kjent løsningsalgoritme. Ikke matematisk / statistisk forankret. • Algoritme velges fra et sett med algoritmer, på grunnlag av overfladiske likheter mellom algoritme og oppgave. Eliminasjonsmetoden brukes dersom denne algoritmen ikke gir forventet svar. • Veiledet av tekst eller annen person. Tekst: Finne overfladiske likheter mellom oppgave og eksempel, definisjon, teorem, regel e.l. Person: Annen person gjør alle problematiske strategivalg, uten prediktiv argumentasjon.
	OR	Resonnering uten prediktiv / verifiserende argumentasjon, forklaringer uten matematisk /statistisk forankring og plausibilitet etc.

ANDRE KODE: Koding etter forekomst/ikke-forekomst av resonnering rundt ulike elementer i oppgavene

Kode forekomst/ikke-forekomst og analysere ut fra hva oppgavene legger til rette for resonneringer rundt. Hvilke elementer fokuserer studentene på når de skal diskutere og løse oppgavene /problemene? Kombinere kodene, sette x foran ikke-forekomst. Mål: Karakterisere studentenes fokusområder når de resonnerer rundt lineær regresjon, og se på eventuelle likheter og forskjeller. Eksempel: F-xMKM betyr at studenten prater om forholdet mellom plott og linje, men uten å prate om minste kvadraters metode eller k-verdi.

Elementer de kan prate om:

KODE	Første oppgave	Andre oppgave
A	Akser	
P	Plottets «mønster» og spredning	Plottets «mønster» og spredning
EP	Utligger, andre enkeltpunkter	Utligger, andre enkeltpunkter
MKM	Minste kvadraters metode, K-verdi/SSE	Minste kvadraters metode, K-verdi/SSE
R ²	R ² -verdi	R ² -verdi
R	Definisjon av regresjonslinja, uttrykk, beskrivelse, kritikk.	Definisjon av regresjonslinja, uttrykk, beskrivelse, kritikk.
F	Forhold mellom plott og linje	Forhold mellom plott og linje
S	Sammenheng, årsakssammenheng eller andre forklaringer på sammenheng	
U	Utvalg (antall)	
T	Tolkninger	Tolkninger
FO	Forhåndsopfatning	Forhåndsopfatning
TE	Terminologi	Terminologi
IF	Andre faktorer	Andre faktorer

Vedlegg D: Godkjenning fra NSD til behandling av personopplysninger



Margrethe Naalsund
Institutt for matematiske realfag og teknologi Norges miljø- og
biovitenskapelige universitet
Postboks 5003
1432 ÅS

Vår dato: 19.12.2016

Vår ref: 50582 / 3 / AGL

Deres dato:

Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 14.10.2016.
Meldingen gjelder prosjektet:

50582 *Vurdering som læring: Hvordan kan problemløsning i grupper bidra til forståelse i statistikk? og Studenters diskusjoner i statistikk - Hva kjennetegner deres resonnementer?*

Behandlingsansvarlig *Norges miljø- og biovitenskapelige universitet, ved institusjonens øverste leder*

Daglig ansvarlig *Margrethe Naalsund*

Student *Marte Bråtalen*

Personvernombudet har vurdert prosjektet, og finner at behandlingen av personopplysninger vil være regulert av § 7-27 i personopplysningsforskriften. Personvernombudet tilrår at prosjektet gjennomføres.

Personvernombudets tilråding forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, <http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html>. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, <http://pvo.nsd.no/prosjekt>.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 15.05.2017, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Katrine Utaaker Segadal

Audun Løvlie

Kontaktperson: Audun Løvlie tlf: 55 58 23 07

Vedlegg: Prosjektvurdering

Kopi: Marte Bråtalen marte.bratalien@nmbu.no

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.



Prosjektvurdering - Kommentar

Prosjektnr: 50582

Prosjektet gjennomføres av to studenter: Marte Bråtalien og Runa Haglund.

Formålet er å evaluere et grunnkurs i statistikk ved NMBU, hvor det testes en ny undervisningsmetode.

Utvalget informeres skriftlig og muntlig om prosjektet og samtykker til deltakelse. Informasjonsskriv og samtykkeerklæring er noe mangelfullt utformet. Vi ber derfor om at følgende tilføyes:

- Hvorvidt deltakerne i prosjektet vil kunne gjenkjennes i materoppgavene og/eller i redigerte filmopptak.
- Dato for prosjektslutt
- Hva som skjer med personopplysningene om den enkelte om man velger å trekke seg fra prosjektet

Revidert informasjonsskriv skal sendes til personvernombudet@nsd.no før utvalget kontaktes.

Det behandles sensitive personopplysninger om etnisk bakgrunn og/eller politisk/filosofisk/religiøs oppfatning.

Personvernombudet legger til grunn at studenene etterfølger Norges miljø- og biovitenskapelige universitet sine regler for datasikkerhet. Dersom personopplysninger skal lagres på privat pc/mobile enheter, bør opplysningene krypteres tilstrekkelig.

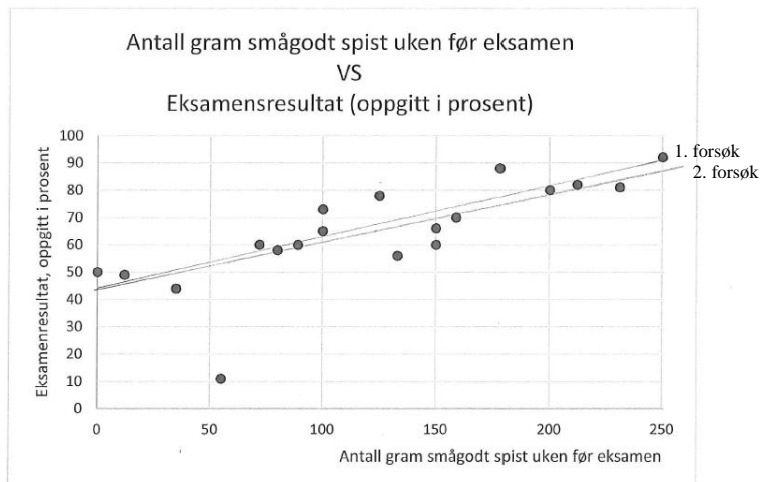
Det oppgis i meldeskjema at personopplysninger skal publiseres, dette er i strid med det som står i informasjonsskrivet. Personvernombudet legger til grunn at det foreligger eksplisitt samtykke fra den enkelte til dette og at informasjonsskrivet revideres om det skal publiseres personopplysninger. Vi anbefaler at deltakerne gis anledning til å lese igjennom egne opplysninger og godkjenne disse før publisering.

Forventet prosjektslutt er 15.05.2017. Ifølge prosjektmeldingen skal innsamlede opplysninger da anonymiseres. Anonymisering innebærer å bearbeide datamaterialet slik at ingen enkeltpersoner kan gjenkjennes. Det gjøres ved å:

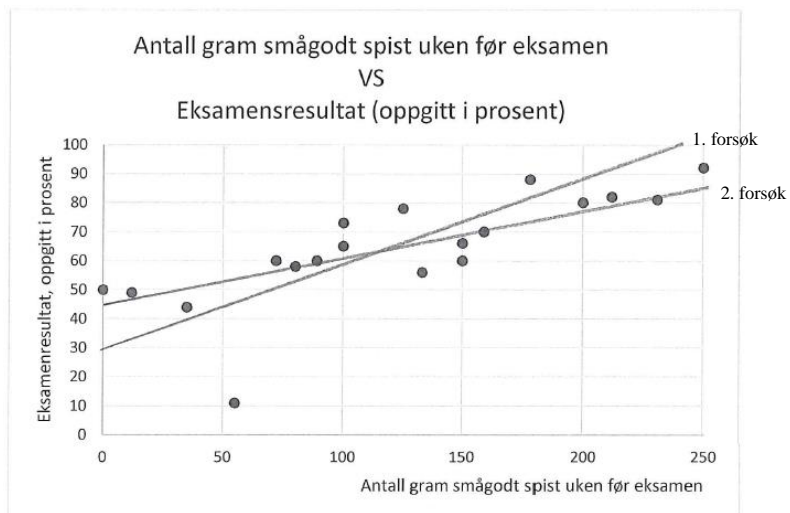
- slette direkte personopplysninger (som navn/koblingsnøkkel)
- slette/omskrive indirekte personopplysninger (identifiserende sammenstilling av bakgrunnsopplysninger somf.eks. bosted/arbeidssted, alder og kjønn) - slette digitale lyd-/bilde- og videoopptak

Vedlegg E: Deltakernes skriftlige arbeid under høyttenkningen

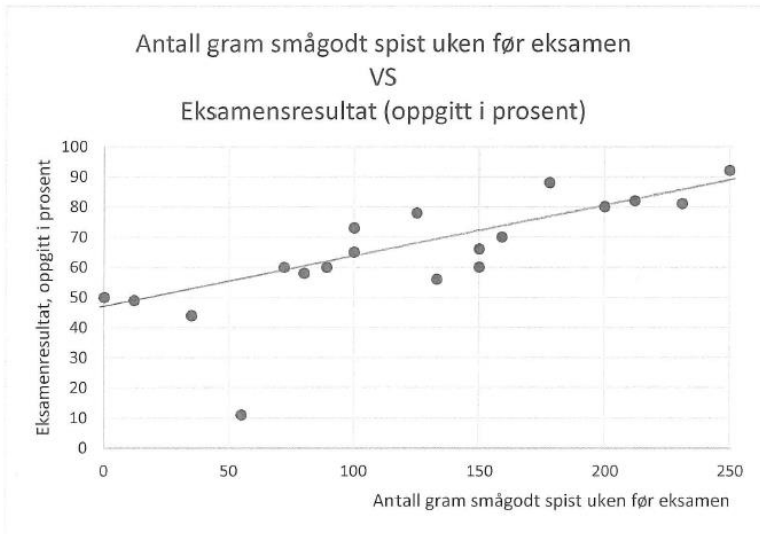
Emma



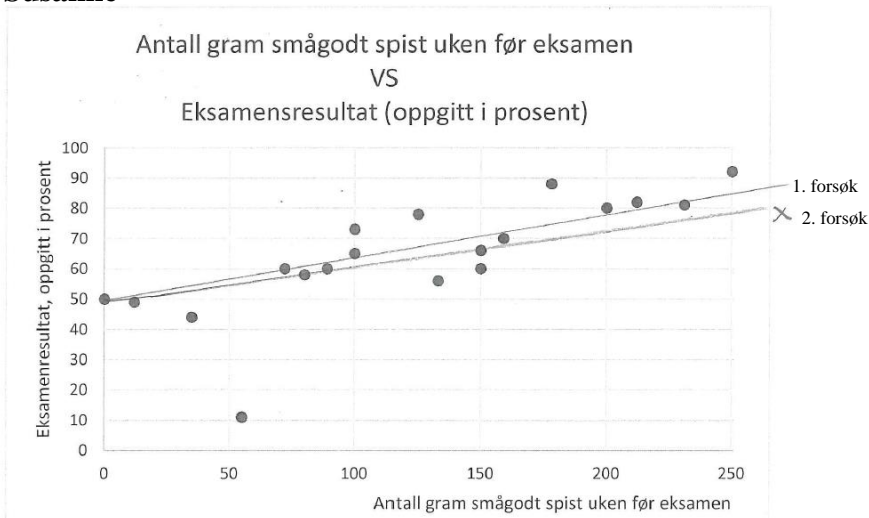
Heidi



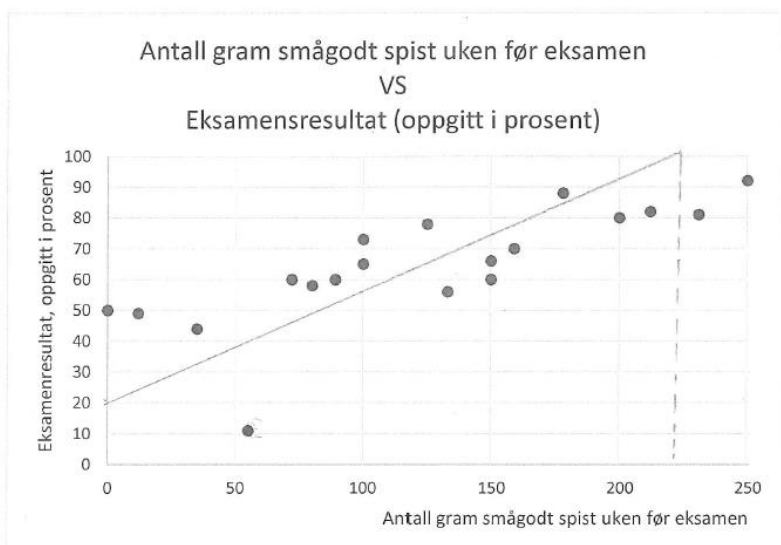
Karoline



Susanne



Linn





Norges miljø- og biovitenskapelig universitet
Noregs miljø- og biovitenskapelige universitet
Norwegian University of Life Sciences

Postboks 5003
NO-1432 Ås
Norway