Norges miljø- og biovitenskapelige universitet

Masteroppgave 2017 30 stp.
Fakultet for realfag og teknologi

Elevers metakognisjon og matematiske resonnement i løsning av algebraproblemer

Students' metacognition and mathematical reasoning in algebra problem solving

Ingrid Kay
Lektorutdanning i realfag

FORORD

I august 2012 begynte jeg på lektorutdanningen i realfag på NMBU, Norges miljø- og biovitenskapelige universitet. I løpet av fem læringsrike år har jeg studert matematikk og kjemi og samtidig tilegnet meg en bred realfaglig kompetanse. Min interesse for matematikkdidaktikk ble vekket gjennom året med praktisk pedagogisk utdanning, noe som har ledet meg til å skrive denne masteroppgaven.

Å skrive denne masteroppgaven har vært en givende og læringsrik prosess, men ikke desto mindre krevende. Den har gitt meg muligheten til å fordype meg i et spennende felt og vært en arena for å utvikle mine reflekterende evner. Denne lærdommen vil jeg ta med meg når jeg nå skal ut i arbeidslivet som lærer. Jeg vil dermed takke alle som har gjort det mulig for meg å komme i mål med denne oppgaven.

Først vil jeg takke elevene som deltok i denne studien, for deres betydningsfulle bidrag og for at jeg fikk låne av deres tid i en hektisk skolehverdag.

Jeg vil takke min familie som alltid har stilt opp for meg. Spesielt vil jeg takke mine foreldre, Kari og Asle, som har inspirert og oppmuntret meg til å ta en god utdannelse og for gode råd på veien. En stor takk til min samboer, Fredrik, som alltid har trodd på meg og som har støttet meg gjennom alle opp- og nedturene.

Den største takken går til min veileder, Margrethe Naalsund, og min biveileder, Ellen Kristine Solbrekke Hansen. Takk for gode samtaler, innspill og konstruktiv kritikk. Deres faglige støtte har vært uvurderlig!

NMBU, Ås, mai 2017

Ingrid Kay

SAMMENDRAG

Algebra er et problemområde for mange norske elever, og elevene får sjelden mulighet til å øve på problemløsing. Matematikkundervisningen er lagt opp på en slik måte at elever bruker utenatlæring og kopierer fremgangsmåter, i stedet for at de selv må overvåke og ta ansvar for problemløsingsprosessen. De blir dermed ikke vant til å forsvare og argumentere for løsning sin. Med denne studien ønsket jeg å finne ut hvilken sammenheng det er mellom elevers metakognitive reguleringsferdigheter og deres matematiske resonnement i løsning av problemer som omhandler variabler, og hva denne sammenhengen har å si for problemløsing.

Jeg har valgt en *mixed method* studie, som kan betegnes som en *participiant-selection variant.* Det vil si at metoden består av en kvantitativ del og en kvalitativ del, men at hovedvekten er lagt på den kvalitative delen. Den kvantitative delen bestod av en diagnostisk test som inneholdt variabelproblemer, og et spørreskjema som hadde som hensikt å gi et innblikk i elevenes metakognitive reguleringsferdigheter mens de gjennomførte variabelproblemene. 42 1T-elever på en norsk videregående skole deltok på testen. Den kvalitative delen bestod av høyttenkningsmetoden. Høyttenkningsmetoden ble utført ved at to elever, valgt ut i fra at de løste variabelproblemene riktig og rapporterte om gode metakognitive reguleringsferdigheter i spørreskjemaet, gjennomførte variabelproblemer mens de uttrykte sine tanker verbalt. På den måten fikk jeg et unikt innblikk i problemløsingsprosessen. Høyttenkningsdelen ble tatt opp ved bruk av videokamera og de sentrale delene av videoen ble transkribert.

Analyse og diskusjon av resultatene viste at elevenes første resonnementssekvenser i variabelproblemløsingen var imitative, ved at de brukte memorerte regler og algoritmer. Det var først etter at elevene brukte metakognitive reguleringsferdigheter, at resonnementssekvensene kunne betegnes som kreative og de klarte å løse problemene. Kreativ resonnering kjennetegnes blant annet ved at elevenes argumenter er forankret matematisk. Sammenhengen mellom elevenes metakognitive reguleringsferdigheter og kreative resonnement viste seg i tillegg i elevenes fleksible tilnærming til problemene. De metakognitive reguleringsferdighetene drev problemløsingsprosessen fremover, og kreativitet innebærer det å tenke nye veier. Funnene i denne studien belyser hvor viktig elevenes metakognitive reguleringsferdigheter og kreative resonnement er for problemløsing. Og dermed hvor viktig det er at lærere fokuserer på å utvikle disse ferdighetene hos elevene.

ABSTRACT

Algebra is a problem area for many Norwegian students, and the students rarely get the opportunity to practice problem-solving. The mathematics education is structured in a such way that students practice rote learning and copy procedures instead of having to monitor and take responsibility for the problem-solving process. They are not used to defending and arguing for their answer. With this study, I wanted to determine the connection between the students' metacognitive regulation skills and their mathematical reasoning in solving problems concerning variables, and what this connection means for problem-solving.

I have chosen a mixed method study, which can be termed a participant-selection variant. That is, the method consists of a quantitative part and a qualitative part, but the main emphasis is placed on the qualitative part. The quantitative part consisted of a diagnostic test which contained problems concerning variables, and a questionnaire that aimed to provide insight into the students' metacognitive regulation skills while carrying out these problems. 42 1T-students from a Norwegian high school completed the test. The qualitative part consisted of the think aloud method. Two students, which had given the correct answer to the problems in the diagnostic test and reported good metacognitive regulation skills in the questionnaire, expressed their thoughts verbally as they completed problems concerning variables. In this way, I got a unique insight into the problem-solving process. The think aloud process was recorded using a video camera and the central parts of the video were transcribed.

Analysis and discussion of the results showed that the students' first reasoning sequences in the problem-solving were imitative, as they used memorized rules and algorithms. It was only after the students used metacognitive regulation skills that the reasoning sequences could be termed creative and they were able to solve the problems. Creative reasoning can be recognized when the students' arguments are mathematically founded. The connection between the students' metacognitive skills and creative reasoning also appeared in the students' flexible approach to the problems. The metacognitive regulation skills kept the problem-solving process moving forward, and creativity involves a flexible thinking process. The findings of this study reveal the importance of metacognition regulation skills and creative reasoning in solving mathematical problems. And in this regard, the importance of teachers’ focus on developing these skills in students’ problem solving process.

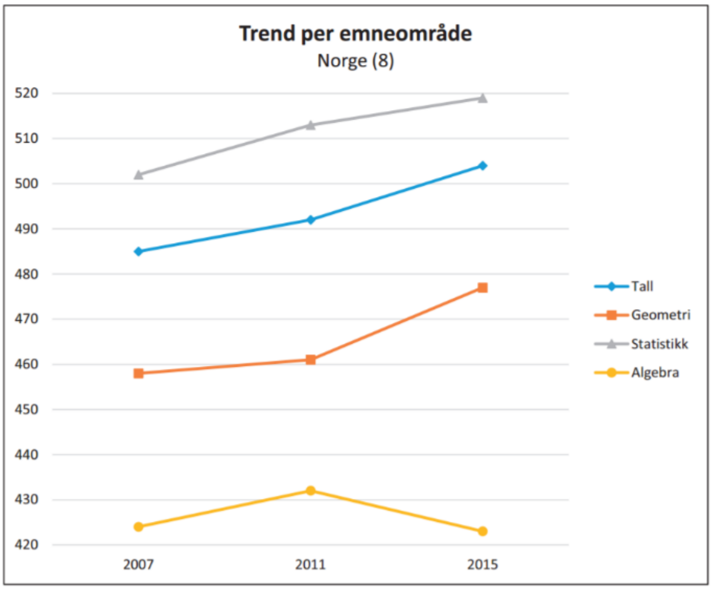
INNHOLDSFORTEGNELSE

1. INNLEDNING

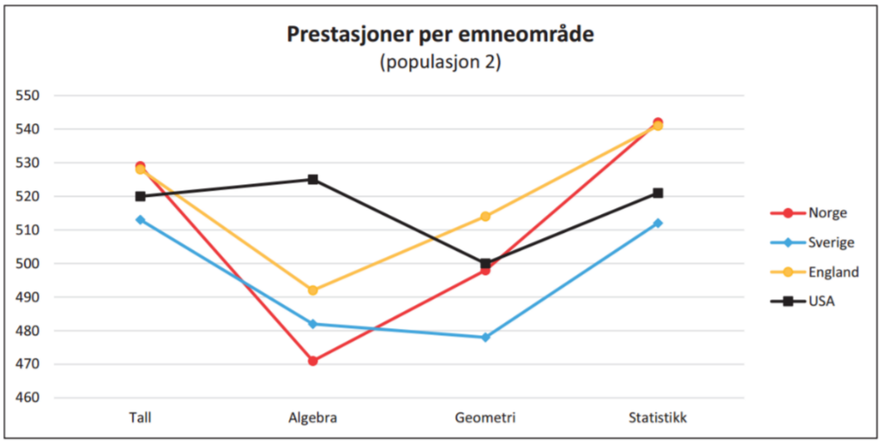
1.1 Bakgrunn og motivasjon

Norske elever har prestert relativt svakt i matematikk i undersøkelser som TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) og PISA (Programme for International Student Assessment). TIMSS er en internasjonal studie som måler kunnskaper og ferdigheter i matematikk og naturfag i skolen. Dette har tidligere blitt gjort på 4. og 8. trinn, men på grunn av norske elevers lave snittalder i forhold til de andre deltakerlandene, ble i 2015 også elever på 5. og 9. trinn undersøkt (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016). I tillegg gjøres en undersøkelse av elever som velger full fordypning i matematikk eller fysikk på videregående skole, denne kalles TIMSS Advanced (Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010). PISA er en internasjonal undersøkelse som studerer 15-åringers kompetanser i lesning, matematikk og naturfag (Kjærnsli & Jensen, 2016). Både TIMSS og PISA er utarbeidet for å fremskaffe veldokumenterte forskningsresultater, som gjør at man kan sammenligne utviklingen i norsk skole over tid, samt at man kan sammenligne norsk skole med skolen i de andre deltakerlandene. I rapportene fra PISA undersøkelsen i 2012 og TIMSS undersøkelsen i 2011, kom det frem at norske elever ikke gjorde det så godt som ønskelig i matematikk (Grønmo et al., 2012). Noe som også var gjeldene i de tidligere rapportene. Nylig ble det lagt frem en rapport fra TIMSS undersøkelsen i 2015, som har fått navnet: «Vi kan lykkes i realfag». Rapporten viser at arbeidet som har blitt lagt ned i matematikkundervisningen gir resultater, og det er fremgang i elevenes matematikkprestasjoner. Elevene på barneskolen presterer godt i matematikk i forhold til de andre nordiske landene og plasserer seg i toppsjiktet i Europa. Elevene på ungdomsskolen viser også fremgang, men presterer middels i et europeisk perspektiv (Bergem et al., 2016). Resultatene fra PISA undersøkelsen i 2015 bekrefter en fremgang i norske elevers matematikkprestasjoner (Kjærnsli & Jensen, 2016).

Det som i tidligere TIMSS rapporter og også i TIMSS rapporten fra 2016, peker seg ut som et problemområde for norske elever både i grunnskolen og i videregående skole, er emneområdet algebra (Bergem et al., 2016; Grønmo et al., 2012). Selv om resultatene fra TIMSS 2015 viser fremgang i matematikk, har prestasjonene i algebra gått ned fra undersøkelsen i 2011 (se **figur 1**). Elevenes dårlige prestasjoner i algebra på ungdomstrinnet, trekker snittet for Norges generelle prestasjoner i matematikk kraftig ned (Bergem et al., 2016).



Figur 1: Norske elever på ungdomstrinnets trender per emneområde i matematikk i TIMSS undersøkelsene fra 2007, 2011 og 2015. Algebra peker seg ut som et problemområde, og prestasjonene i algebra har gått ned fra 2011 til 2015. Hentet fra Bergem et al. (2016, s. 41).



Figur 2: Norges prestasjoner i emneområder i matematikk for populasjon 2 (8. og 9. trinn) sammenlignet med Norges referanseland (Sverige, England og USA). Hentet fra Bergem et al. (2016, s. 36).

I **figur 2** kan man se at norske elever på ungdomsskolen i 2015, presterte svakere i algebra enn i de andre emneområdene i matematikk. Og dessuten var prestasjonene deres i algebra svakere enn referanselandenes prestasjoner. Det viser seg at norske elever spesielt har vanskeligheter med å mestre bokstavuttrykk og variabler (Grønmo et al., 2010). Det er urovekkende at resultatene for emneområdet algebra er så lavt. I matematikk er det viktig å ha grunnleggende ferdigheter og forståelse innenfor algebra, i tillegg til aritmetikk (Grønmo et al., 2012). I algebra kommer ofte misoppfatninger av at elever tilegner seg erfaringer fra aritmetikk som de ønsker å generalisere til alle situasjoner (Brekke, Grønmo & Rosén, 2000).

Det er mange elever som sliter med algebra også på høyere nivåer i utdanningen (Gray, Loud & Sokolowski, 2009; Grønmo et al., 2010). For at elever skal kunne mestre å studere matematikk på universitetsnivå, er det svært viktig at elever forstår variabelbegrepet, fordi det er mange andre områder som bygger på denne forståelsen (Gray et al., 2009). Elever vil få problemer i algebra, dersom de ikke har god begrepsforståelse for den grunnleggende aritmetikken.

Det er altså viktig at elevene får en dypere forståelse for algebra. Det blir lagt stor vekt på dybdelæring og forståelse i Stortingsmeldingen «Fag – Fordypning – Forståelse – En fornyelse av Kunnskapsløftet». I meldingen står det at dybdelæring betyr «(…) at elevene gradvis og over tid utvikler sin forståelse av begreper og sammenhenger innenfor et fag. Overflatelæring, som legger vekt på innlæring av faktakunnskap uten at kunnskapen settes i sammenheng, står i kontrast til dybdelæring» (Meld. St. 28 (2015-2016), 2016, s. 14). Dette kan settes i sammenheng med den svenske matematikkdidaktikeren Johan Lithners rammeverk om kreativt og imitativt resonnement i matematikk som presenteres i **kapittel 2.3.2**. For at dybdelæring skal kunne skje i matematikk, argumenterer Lithner (2008) for at elevene må mestre et kreativt resonnement.

I Stortingsmeldingen blir det dessuten lagt vekt på at vurderingspraksisen i skolen må endres. Vurderingspraksisen må tilrettelegges slik at den kan støtte opp under en opplæring som skal legge større vekt på dybdelæring og systematisk progresjon (Meld. St. 28 (2015-2016), 2016). Det må altså legges vekt på vurderingsformer som fremmer læring. Med innføringen av Kunnskapsløftet i 2006 ble det satt fokus på underveisvurdering i Norge. Underveisvurdering kan deles inn i vurdering *for* læring og vurdering *som* læring (Olafsen & Maugesten, 2015). Vurdering *for* læring vil si at læreren bruker informasjon om elever til å endre sin undervisning. Dette er med på å tilpasse opplæringen til den enkelte klasse, og den enkelte elev i klassen. Vurdering *som* læring betyr at man bruker vurdering i en prosess for å utvikle elevers metakognitive kompetanse (Olafsen & Maugesten, 2015). Det vil si at man gjør elevene bevisste på sine roller i forhold til blant annet egenvurdering og læring (Wølner, 2013). Underveisvurdering er dessuten lovfestet i forskriften til opplæringsloven (2009). Der kommer det frem at underveisvurderingen skal gis løpende i opplæringen som en rettledning til elevene, den skal fremme læring og gi grunnlag for tilpasset opplæring. Elevene har krav på gode tilbakemeldinger, og det skal legges til rette for at elevene skal gjøre egenvurdering. Ved egenvurdering kan elevene få innsikt i egen læring og forståelse (Olafsen & Maugesten, 2015). I Ludvigsensutvalgets første rapport blir denne kompetansen, metakognisjon, vektlagt. Der kommer det frem at: «(...) elevenes aktive deltakelse i og refleksjon over egne læringsprosesser fremmer læring» (NOU 2014:7, 2014, s. 11).

Norske elever viser fremgang i matematikk, men i emneområdet algebra har vi altså fortsatt en vei å gå. Mange elever ser på algebra som et isolert system med symbolmanipulasjoner og regler, og klarer dermed ikke å se sammenhengene innenfor emnet eller til de andre delene av læreplanen (Brekke et al., 2000). I TIMSS rapporten fra 2016 trekkes det frem at norske klasseromstudier viser at det i liten grad brukes tid på å jobbe med kognitivt krevende oppgaver og problemstillinger i matematikken. Det elevene bruker mest tid på, er i stedet å løse oppgaver som ligner eksempler gitt i bøkene (Bergem et al., 2016). Rapporten fra TIMSS Advanced viser at norske elever ligger langt under det internasjonale gjennomsnittet når det kommer til det å kunne diskutere resonnementene sine, diskutere strategier for problemløsing og velge egne fremgangsmåter for å løse sammensatte problemer (Grønmo et al., 2010). Elevene får altså i liten grad øvd sine resonnerende og metakognitive ferdigheter. I rapporten står det: «Det kan derfor synes som om to av de viktigste læringsstrategiene som framheves når det gjelder utvikling av matematisk forståelse, nemlig trening av ferdigheter og diskusjon rundt begreper og løsningsmetoder, begge er mindre brukt i norsk skole enn i mange andre land» (Grønmo et al., 2010, s. 153). For at elever skal oppnå dybdelæring og få bedre resultater i algebra, må denne trenden endres. Norske elever må få muligheten til å bli gode problemløsere, og elevenes resonnerende- og metakognitive ferdigheter er sentrale for problemløsing (Garofalo & Lester, 1985; Lithner, 2008). Ved at elevene får tenke selv i problemløsingsprosessen, i stedet for å imitere eksempler fra boka, får de øvd sitt matematiske resonnement (Lithner, 2008) (se **kapittel 2.3**). I en slik selvstendig problemløsingsprosess er det viktig at elevene besitter gode metakognitive ferdigheter, for blant annet å kunne overvåke arbeidet sitt, og stille seg kritisk og reflekterende til løsningsmetoder og sin egen fremgangsmåte (Garofalo & Lester, 1985) (se **kapittel 2.2**).

1.2 Problemstilling

Elevers metakognitive reguleringsferdigheter og matematisk resonnement i forhold til problemløsing og elevers prestasjoner i matematikk, har lenge vært et tema for forskning. Av den grunn er det rikelig med informasjon om temaene hver for seg, men det ikke skrevet mye om sammenhengen mellom elevenes metakognitive reguleringsferdigheter og matematisk resonnement i forhold til problemløsing med variabler. Dette har motivert meg til å studere nettopp denne sammenhengen. Mitt forskningsspørsmål er derfor:

«Hvilken sammenheng er det mellom elevers metakognitive reguleringsferdigheter og deres matematiske resonnement i løsning av variabelproblemer, og hva har denne sammenhengen å si for problemløsing?»

I denne studien ønsker jeg altså å studere hvilken sammenheng det er mellom elevenes metakognitive ferdigheter og elevers matematiske resonnement i variabelproblemløsing. Er det slik at hvis eleven viser gode metakognitive reguleringsferdigheter kan han eller hun da mestre et kreativt resonnement? Og hva har denne sammenhengen og si for problemløsing? Hvis det viser seg at det er en slik sammenheng, vil det kunne belyse viktigheten av å legge opp matematikkundervisningen på en måte som fremmer elevens utvikling av metakognitive reguleringsferdigheter og matematisk resonnement. Grunnen til at jeg ønsker å se på dette i forhold til problemløsing med variabler, er at algebra og spesielt variabler som sagt er et problemområde for mange norske elever (Grønmo et al., 2010).

2. TEORI

I dette kapittelet er det teoretiske grunnlaget for mitt forskningsspørsmål presentert. Det har jeg gjort ved å utdype de ulike begrepene i forskningsspørsmålet. I **kapittel 2.1** er algebra og variabelbegrepet presentert. **Kapittel 2.2** omhandler metakognisjon i matematikken og hvilken effekt metakognisjon har på løsning av problemoppgaver. Her er også rammeverket for problemløsing og rammeverket som ble brukt for å karakterisere elevenes metakognitive reguleringsferdigheter i problemløsingsprosessen presentert. Avslutningsvis, i **kapittel 2.3**, presenteres hva som ligger i begrepet matematisk resonnement og hvilket rammeverk jeg benyttet for å karakterisere elevers resonnering.

2.1 <u>Algebra og variabler</u>

Som nevnt i **kapittel 1.1**, er algebra og spesielt bokstavuttrykk og variabler et problemområde for mange norske elever (Bergem et al., 2016; Grønmo et al., 2010). Kieran (2007, s. 707) definerer algebra som «(...) a tool for manipulating symbols and for solving problems (...)». Det å skulle gå fra tall og regneoperasjoner til å benytte seg av bokstaver og symboler for generalisert tallregning kan være krevende for elever. «Variabelbegrepet inneholder to ulike aspekter. Det første aspektet er oppfatningen om at noe varierer – i motsetning til det å være konstant. Dette aspektet er velkjent for de fleste elever når variabelbegrepet introduseres i skolen (...). Det andre aspektet er måten en bruker bokstaver på til å representere generaliserte tall i matematikk» (Brekke et al., 2000, s. 9). Det andre aspektet kan man ikke regne med at elever har gjort seg noen erfaringer med når de møter algebra i skolen. Det første aspektet er velkjent, fordi elever har for eksempel erfart at hvis de kjøper en sjokolade i butikken til 8 kr, *varierer* det de må betale med antall sjokolader de kjøper (Brekke et al., 2000). Dette er altså en del av hverdagsspråket til elevene. Det siste aspektet går derimot ut på at i en rekke talluttrykk kan en størrelse variere, mens en annen forblir konstant. Den variable størrelsen erstattes da av et symbol, gjerne en bokstav, som gjør at man kan samle alle talluttrykkene i ett eneste uttrykk. Et eksempel på dette er at $2 \cdot 1 + 1,\ 2 \cdot 2 + 1,\ 2 \cdot 3 + 1 \ldots$ kan erstattes av $2x + 1$ (Brekke et al., 2000). Dette er mest sannsynlig ikke en del av hverdagsspråket til elevene, og man kan derfor ikke forvente at elevene har noe kjennskap til slik bruk av variabler når de møter den i skolen. Det kommer an på den enkelte lærer hvor tidlig elever møter algebra i skolen, men enkel regning med bokstaver og symboler er en del av kompetansemålene etter 7. årstrinn.

Elevers første møte med algebra, bygger på det de lærer de første årene på grunnskolen, da de legger merke til regelmessighet i tall. Elevens konseptuelle forståelse eller begrepsforståelse av algebra bygger altså på deres forståelse av aritmetikk (Brekke et al., 2000). Noen mener at når elevene skal utvikle denne forståelsen for algebra og variabler går de gjennom tre stadier; retorisk algebra, synkopert algebra og symbolsk algebra. Disse stadiene er også kronologisk i et historisk perspektiv ut i fra når de ble tatt i bruk (Brekke et al., 2000). Retorisk algebra vil si at en bruker vanlig språk i stedet for symboler eller spesielle tegn. Dette arbeider elevene med allerede fra de første årene i grunnskolen. Synkopert algebra vil si at man bruker bokstaver for ukjente størrelser, mens symbolsk algebra vil si at man bruker bokstaver til å representere gitte, ukjente størrelser. Det er først på dette stadiet at det er mulig å uttrykke generelle løsninger og angi ukjente og variable størrelser (Brekke et al., 2000).

Küchemann (1981) har studert hvilke oppfatninger elever har av bokstaver i matematikk. Han delte elevers forståelse av variabler inn i fire nivåer, som er basert på de seks ulike måtene elevene brukte variablene på. De fire forståelsesnivåene deles inn etter oppgavers vanskelighetsgrad, og man kan si noe om elevenes forståelse av variabler ut i fra om de mestrer oppgavene. Før jeg presenterer de, vil jeg trekke frem de seks ulike måtene elever bruker bokstaver på i matematikk.

<u>1. Å finne verdien til en bokstav.</u>

Her trenger elevene kun å finne verdien til en bokstav dirkete fra en ukjent størrelse. Et eksempel kan være: «Hva kan du si om a hvis $a + 5 = 8$?» (Brekke et al., 2000, s. 10).

<u>2. Bokstaver som ikke trengs brukes.</u>

I denne kategorien kan elevene løse oppgaven uten at de vet noe om bokstavens verdi. Et eksempel kan være: «Hvis $e + f = 8$, så er $e + f + g =$…» (Brekke et al., 2000, s. 10).

<u>3. Bokstaver som blir brukt som objekt.</u>

Bokstaver blir ofte brukt som en forkortelse for et objekt, som a for appelsiner og b for bananer. Et eksempel på en slik oppgave kan være: «$3a + 5b + 2a = \ldots$» (Brekke et al., 2000, s. 11).

De tre kategoriene ovenfor beskriver alle måter å unngå generalisert aritmetikk på, ved ikke å bruke bokstaver som ukjent størrelse. Dette gjelder ikke for de neste kategoriene (Brekke et al., 2000).

<u>4. Bokstaver som en spesifikk ukjent størrelse.</u>

Elevene kan betrakte bokstaven som en spesifikk ukjent størrelse og utføre regneoperasjoner på dette. Som i eksempelet ovenfor: «Hvis $e + f = 8$, så er $e + f + g = \ldots$» (Brekke et al., 2000, s. 11). Svaret vil være «$8 + g$», og g er en spesifikk ukjent størrelse.

<u>5. Bokstav som et generelt tall</u>

I motsetning til å bruke et tall som en spesifikk, men ukjent størrelse, vil bokstaven i denne kategorien representere et generelt tall. Bokstaven kan altså stå for flere ulike verdier. Et eksempel kan være: «Hva kan du si om c hvis $c + d = 10$ og c er mindre enn d?» (Brekke et al., 2000, s. 11).

<u>6. Bokstav som en variabel</u>

I denne siste kategorien blir bokstav brukt som en variabel. «Variabler er redskap til å uttrykke generaliseringer i matematikk» (Brekke et al., 2000, s. 11). Et eksempel på en slik oppgave kan være: «Hva er størst av $2n$ og $n + 2$?».

Küchemann (1981) deler altså forståelse inn i fire nivåer etter oppgavers vanskelighetsgrad. I kategoriene ovenfor kan man gi ulike oppgaver med forskjellig vanskelighetsgrad, og på den måten få et innblikk i elevenes forståelse av variabler. I det *første nivået* har oppgavene en enkel form og kan løses ved å bruke bokstaven som objekt, regne ut bokstavens spesifikke verdi eller at man slipper å finne bokstavens verdi. Det første eksempelet ovenfor er et eksempel på en slik oppgave. I det *andre nivået* har oppgavene økt kompleksitet, men man trenger fortsatt bare å bruke bokstaven som objekt eller finne bokstavens verdi. Det tredje eksempelet ovenfor er et eksempel på en oppgave på dette nivået. I det *tredje nivået* har oppgavene en enkel form og man bruker bokstavene som spesifikke ukjente eller generaliserte tall. Det andre eksempelet ovenfor er et eksempel på en slik oppgave. I det *fjerde nivået* har oppgavene en kompleks struktur hvor man behandler bokstavene som variabler i en funksjonell sammenheng. Det siste eksempelet ovenfor er et eksempel på en slik oppgave.

Stacey og MacGregor (2000) skiller mellom aritmetisk tenkning og algebraisk tenkning. Aritmetisk tenkning vil si at elevene har en operasjonell tilnærming til oppgavene. Dette kan sees i sammenheng med Küchemann (1981) første og andre forståelsesnivå. Algebraisk tenkning er derimot det som gjør at eleven mestrer å se variabler, uttrykk og likninger som strukturerer av generelle representasjoner. Elevene trenger ikke å finne numeriske referanser for variablene for å kunne jobbe med dem som representasjoner av generaliserte tall eller mengder som samvarierer (Stacey & MacGregor, 2000). Dette kan settes i sammenheng med Küchemann (1981) tredje og fjerde forståelsesnivå.

Ut i fra elevers løsning på variabeloppgaver, kan man se om de tenker aritmetisk eller algebraisk. Gray et al. (2009) som studerte kalkuluselevers tolkning av variabler, skilte studentenes skrevne svar etter om de var løst *aritmetisk, algebraisk* eller *transisjonal.* Transisjonal vil si et sted imellom de to andre kategoriene. At en oppgave er løst aritmetisk vil si at eleven viser en operasjonell tilnærming til oppgaven. Det inkluderer løsninger hvor for eksempel eleven gir variabelen en bestemt verdi eller substituerer inn tall for variabelen uten videre analyse. Svarene til elevene kan kategoriseres som algebraisk når de viser at variablene er brukt for å representere generaliserte uttrykk og funksjonsrelasjoner. I tillegg kan svaret kategoriseres som algebraisk hvis eleven reflekterer et strukturelt perspektiv i løsningen av oppgaven. Svaret kategoriseres som transisjonal når løsningen inkluderer bevis på at eleven tenker på at variabler kan ha mer enn en verdi, men løsningen er mangelfull eller ikke fult generalisert (Gray et al., 2009).

2.2 Metakognisjon i matematikk

Suksessfulle elever er de som er klar over når de handler strategisk og når de ikke gjør det. For bare når læring gjøres bevisst, kan den være effektiv (Ozsoy, 2011). I løpet av de siste tiårene har interessen for metakognisjon i utdanningsforskning eskalert, og den har hovedsakelig vært inspirert av John H. Flavells arbeid på metahukommelse på 1970-tallet (Stillman & Mevarech, 2010). Metakognisjon har ofte blitt enkelt forklart ved at det er en persons tenkning om sine egne tanker. Flavell (1979) var den første til å referere til metakognisjonens to funksjoner, den overvåkende og den regulerende. Den overvåkende funksjonen referer til hva en person vet om kognisjon, mens med den regulerende funksjonen menes personens bruk av denne kunnskapen for å kontrollere kognisjonen (Efklides, 2001).

Med metakognisjon menes altså individets bevissthet om sin egen tankeprosess og hans eller hennes evne til å kontrollere denne prosessen (Flavell, 1979; Ozsoy, 2011).

I litteraturen strides det mellom om det finnes to eller tre komponenter av metakognisjon. Noen deler det i to, metakognitiv kunnskap og metakognitiv regulering, mens andre i tre, og tar med metakognitiv tro i tillegg (Desoete, Roeyers & Buysse, 2001). Metakognitiv kunnskap er kunnskap vi henter fra hukommelsen og omhandler hva personen vet eller tror om seg selv eller andre som kognitive vesener, deres relasjon med varierende kognitive oppgaver, mål og handlinger, så vel som opplevelsene de hadde i forhold til dem (Efklides, 2006). I matematikken refererer dette til matematiske prosesser og teknikker som elever har, og elevenes ideer rundt matematikk (Ozsoy, 2011).

Metakognitiv kunnskap blir ofte kategorisert i forhold til om det involverer person-, oppgave- eller strategikunnskap (Flavell, 1979). Personkategorien inneholder hva en vet eller tror om seg selv eller andre som kognitive vesener. Innenfor matematikk vil dette si en vurdering av ens egne evner og begrensninger med hensyn til matematikk generelt, og også med hensyn til bestemte matematiske emner eller oppgaver. Slik kunnskap omfatter også ens oppfatninger om matematisk evne, forholdet mellom ytelse i matematikk og ytelse på andre områder, og effektene av affektive variabler som motivasjon, angst og utholdenhet (Garofalo & Lester, 1985). Dette kalles også for deklarativ metakognitiv kunnskap (Desoete et al., 2001). Metakognitiv kunnskap som innlemmes i oppgavekategorien inkluderer kunnskap om omfanget av og krav til oppgaver, og kunnskap om faktorer og forhold som gjør noen oppgaver mer krevende enn andre (Garofalo & Lester, 1985). Denne kategorien kalles også for prosedural metakognitiv kunnskap (Desoete et al., 2001). Strategikategorien omhandler kunnskap om generelle og spesifikke kognitive strategier, i tillegg til bevissthet på deres potensielle nyttighet for å tilnærme seg og løse enkelte oppgaver. I matematikk inkluderer dette naturligvis algoritmer og heuristikker (Garofalo & Lester, 1985). Heuristikker er fremgangsmåter som en problemløser kan ta i bruk for å øke sjansen til å løse problemer (Schoenfeld, 1985). Det metakognitive aspektet ligger i å vite hvor og når de ulike strategiene kan brukes. Å bruke utenatlæring som strategi, selv om det involverer kognisjon, involverer ikke metakognisjon (Garofalo & Lester, 1985).

Metakognitiv regulering vil si alle valg og strategiske aktiviteter som man involverer seg i mens man jobber seg gjennom en kognitiv oppgave eller problem (Garofalo & Lester, 1985). Av den grunn er det metakognitiv regulering som er mest aktuell for denne oppgaven. Metakognitiv regulering er evnen til å bruke sin metakognitive kunnskap til å regulere og kontrollere kognitive prosesser, det kan også kalles metakognitiv kontroll (Ozsoy, 2011). Eksempler på slike aktiviteter inkluderer det å velge informasjonen som trengs for å forstå en oppgave eller et problem, planlegge fremgangsmåten og velge gode strategier for å utføre planene. Det inkluderer også det å kunne overvåke utførelsen mens strategiene testes, evaluere utfallet av strategiene og planene, og om nødvending, forkaste planer og strategier som ikke fører frem til løsningen. Å besitte slike metakognitive reguleringsferdigheter er svært viktig for elevers prestasjoner i matematikk, og spesielt i problemløsing (Garofalo & Lester, 1985).

Det fokuseres gjerne på fire metakognitive reguleringsferdigheter; prediksjon, planlegge, overvåke og evaluere (Ozsoy, 2011). Prediksjon kan forklares som evnen som gjør at eleven kan forutse vanskelighetsgraden til en oppgave og deretter hvilken innsats de må legge ned i oppgaven (Desoete, 2008). Prediksjon gjør også at eleven kan koble oppgaver sammen, og se hvilke løsningsstrategier de kan bruke. Planleggingsferdigheter gjør at eleven på forhånd tenker over når, hvordan og hvorfor de skal agere for å oppnå deres formål gjennom en sekvens av delmål som leder til oppgavens svar (Desoete, 2008). Overvåkningsferdigheter kan beskrives som selvreguleringskontroll av brukte kognitive evner mens en oppgave utføres, for å identifisere problemer og modifisere planer. Mens evnen til å evaluere kan beskrives som refleksjonen etter noe har skjedd, hvor eleven ser på hva de gjorde og om dette ledet til et ønsket resultat eller ikke (Desoete, 2008).

Flere legger også vekt på den affektive siden ved metakognisjon, metakognitiv tro. Dette handler om hvilke verdier og oppfatninger elever tar med seg når de skal gjøre matematikk, og hvordan det påvirker måten man gjør matematikk på (Schoenfeld, 1987). Ifølge Flavell (1979, s. 906) er metakognitive opplevelser: «any conscious cognitive or affective experiences that accompany and pertain to any intellectual enterprise». Metakognitive opplevelser defineres som bevisstheten og følelsene som kommer når et individ møter en oppgave og prosesserer informasjonen oppgaven gir (Efklides, 2001).

Metakognisjon

Metakognitiv kunnskap

- Deklarativ kunnskap
- Prosedural kunnskap
- Strategisk kunnskap

Metakognitiv regulering

- Prediksjon
- Planlegge
- Overvåke
- Evaluere

Metakognitiv tro

Figur 3: Komponentene av metakognisjon. Oversatt og hentet fra Desoete et al. (2001).

Metakognisjon er altså et omfattende begrep, og i denne oppgaven må jeg begrense hva jeg ønsker å studere. I og med at det er prosessen i løsning av variabelproblemer jeg ønsker å studere, vil jeg se på elevenes metakognitive reguleringsferdigheter. For forskningsspørsmålet i denne oppgaven, er ikke elevens metakognitive kunnskap og metakognitive tro like relevant. Jeg ser derfor bort i fra dette. Jeg vil bruke Garofalo og Lester (1985) sin definisjon av metakognitiv regulering, og se på alle valg og strategiske aktiviteter som eleven involverer seg i, mens han eller hun jobber seg gjennom oppgaver. Spesifikt i problemløsingen vil jeg se etter metakognitive reguleringsferdigheter, altså elevens evner til prediksjon, planlegge, overvåke og evaluere prosessen (Desoete, 2008).

2.2.1 Problemløsing og metakognisjon

Utdanningsforskere har lenge ønsket at elever skal bli bedre problemløsere. De metakognitive reguleringsferdighetene beskrevet ovenfor korresponderer med modeller av problemløsing (Garofalo & Lester, 1985). I 1945 skrev George Pólya førsteutgaven av boken «How to solve it», som har blitt en av verdens mest suksessrike matematikkbøker, og har blitt utgitt i mange utgaver. I boken formulerte han et rammeverk over fasene i problemløsing. Den første fasen er at man må forstå problemet. Den andre fasen er at man må utarbeide en plan for løsningen. Den tredje er å utføre planen, og den fjerde er å se tilbake og sjekke at løsningen er riktig (Pólya, 1971).

En problemløsingsoppgave er ikke nødvendigvis det samme for alle mennesker. NCTM (2000) (National Council of Teachers of Mathematics) definerer en problemløsingsoppgave som en oppgave hvor løsningsmetoden ikke er kjent for problemløseren fra før. Mens Schoenfeld (1985) påpeker at løsningsmetoden må ikke bare være ukjent, men oppgaven må også være utfordrende for den aktuelle problemløseren. Ut i fra disse definisjonene kan man si at en oppgave enten er en problemoppgave eller så er den det ikke. Oppgaver som ikke er problemløsingsoppgaver kan kalles rutineoppgaver (Lithner, 2008, 2015). Som nevnt i innledningen er det altså rutineoppgaver som dominerer i matematikkundervisningen i Norge, mens problemløsingsoppgaver hvor løsningsmetoden er ukjent for eleven sjeldnere blir vektlagt. Jeg velger, som Lithner (2008), å bruke Schoenfeld (1985) sin definisjon av en problemløsingsoppgave. Variabelproblemene som er brukt i dette studiet vil altså kunne innlemmes under denne definisjonen (se **kapittel 3.2.1 og 3.4.1**).

Pólya (1971) sitt rammeverk over fremgangsmåten i problemoppgaver omhandlet metakognisjon bare implisitt, og Schoenfeld (1985) har videreutviklet rammeverket. Han trekker frem seks faser i problemløsingsprosessen; lese oppgaven, analysere, utforske, planlegge, implementere og verifisere. Det er spesielt i overgangene mellom disse fasene at vi gjør metakognitive avgjørelser. Problemløsingsprosessen er altså fasene en problemløser kan følge oppgaveløsingen fra han eller hun leser oppgaven, til en fullverdig løsning på problemet er gitt. Problemløsingsadferd er de valg og beslutninger problemløseren foretar seg i denne problemløsingsprosessen. Schoenfeld (1985) skiller mellom to typer problemløsingsadferd; taktisk *(tactical)* og overvåkning *(managerial).* Med taktiske beslutninger mener han det eleven iverksetter, som algoritmer og heuristikker. Ved overvåkningsbeslutninger inkluderer han å velge perspektiver og rammer for et problem, velge hvilke retninger en løsning skal ta, avgjøre om en løsningsstrategi som allerede er iverksatt burde avsluttes, avgjøre hva som skal tas med videre fra de forlatte strategiene, overvåke de taktiske gjennomføringene og så videre. Dette omhandler de metakognitive avgjørelsene. Overvåkningsferdigheten er av ytterst viktighet for problemløsing, men det er ofte slike ferdigheter elever mangler (Garofalo & Lester, 1985).

Det Pólya (1971) ikke la vekt på ved problemløsing, som Schoenfeld (1985), Garofalo og Lester (1985) og flere med dem, har lagt vekt på i ettertid, er altså de metakognitive aspektene. Flere studier som omhandler metakognitive aspekter ved problemløsing (f. eks.

Biryukov, 2004; Sengul & Katranci, 2012) bekrefter at elever som har gode metakognitive reguleringsferdigheter er bedre problemløsere.

2.3 Matematisk resonnement

Et sentralt ønske for matematikkutdannelsen er at elever skal få en dypere forståelse for matematikken og at de skal bli problemløsere, men etter 30 år med reformer og forskning er det fortsatt utenatlæring de fleste praktiserer (Lithner, 2008). Dette er en av grunnene bak lærevansker i matematikk. Til og med det å følge rutineprosedyrer kan bli vanskelig med utenatlæring, elevene følger reglene «(...) like robots with poor memories (...)» (Hiebert, 2003, s. 12), uten at de forstår det de gjør.

«One of the most important goals of mathematics courses is to teach students logical reasoning» skriver Ross (1998, s. 253), tidligere leder av Mathematical Association of America (MAA). MAA er det største faglige samfunnet som fokuserer på grunnutdanningen i matematikk. Å kunne resonnere er en fundamental evne i livet, og ikke bare nødvending for å bli god i matematikk. Resonnering er selve fundamentet i matematikken, i og med at den verifiseres gjennom logisk resonnering. Hvis elever ikke har utviklet evnen til å resonnere, blir matematikken gjennomført ved å følge et sett med prosedyrer og imiterte eksempler uten noen tanke om hvorfor den gir mening (Ross, 1998).

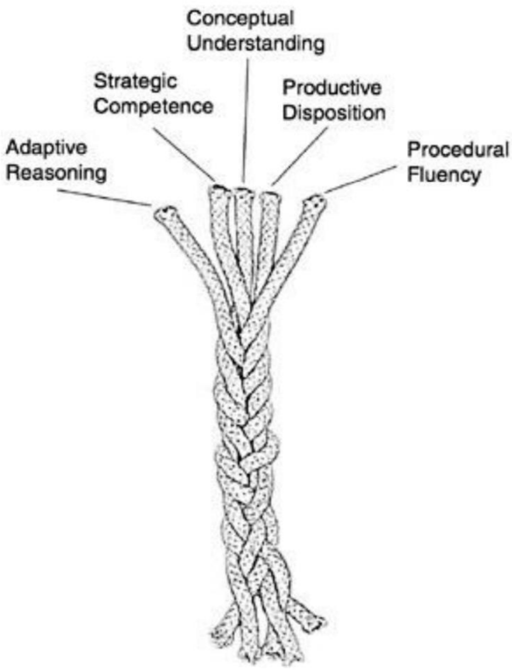
I «Principles and Standards for School Mathematics» presenterer NCTM (2000) fem innholdsstandarder og fem prosesstandarder i matematikk. De fem innholdsstandardene er tall og operasjoner, algebra, geometri, dataanalyse og sannsynlighet, og måling. Disse akkompagneres av de fem prosesstandardene; problemløsing, se sammenhenger, kommunikasjon, representasjoner, og nettopp resonnering og bevis (Lithner, 2015). NCTM (2000) definerer resonnering som et fundamentalt aspekt ved matematikken. Mennesker som resonnerer og tenker analytisk, kan oppfatte mønstre, strukturer og regelmessigheter i både den virkelige verden og i matematiske situasjoner. De kan spørre seg selv om dette er tilfeldig eller om de oppstår for en grunn. De kan lage og utforske matematiske sammenhenger, og de kan utvikle og evaluere matematiske argumenter og bevis (NCTM, 2000).

Resonnering har blitt brukt av mange utdanningsforskere i litteraturen uten å bli definert, fordi man tenker at det er en universal enighet av ordets betydning (Yackel & Hanna, 2003). Jeg vil bruke Lithner (2008) sin definisjon av begrepet. Han definerer resonnering som tankerekken som brukes for å produsere argumenter og trekke konklusjoner i oppgaveløsing. Denne tankerekken må ikke nødvendigvis være logisk, den kan til og med være feil, men den må være begrunnet av noe som den som resonnerer ser på som fornuftig.

I **kapittel 2.2.1** forklarte jeg at metakognitive reguleringsferdigheter spesielt er viktig i løsning av problemoppgaver, men det er også evnen til å kunne resonnere (Lithner, 2015). I problemløsing er det to typer argumentasjon som står sentralt. Et argument i denne forstand vil si de delene av resonneringen som har som hensikt å overbevise seg selv eller noen andre at resonnementet er troverdig (Lithner, 2006). Lithner (2008) har et argumentasjonsfokus i sitt rammeverk relatert til fasene av problemløsing formulert av Pólya (1971) og utdypet av Schoenfeld (1985). Fasene er altså å lese oppgaven, analysere, utforske, planlegge, gjennomføre og verifisere svaret. Analysen, utforskningen og planleggingen kan støttes av prediktive argumenter, det går altså ut på å argumentere for hvorfor en valgt strategi vil løse oppgaven. Gjennomførelsen og beviset kan støttes av verifiserende argumenter, det vil altså si at man må argumentere for hvorfor valgt strategi løste oppgaven. Lithner (2008) trekker dessuten frem at gjennomførelsen har et metakognitivt argument med tanke på hvorfor strategien ledet frem, eventuelt hvorfor den må revurderes.

2.3.1 Adaptiv resonnering

I følge Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) er matematisk kompetanse et vidt begrep. Det er ingen enkel, kortfattet måte det kan forklares på, og de utrykker: «Reconizing that no term captures completely all aspects of expertise, competence, knowledge, and facility in mathematics, we have chosen mathematical proficiency to capture what we believe is necessary for anyone to learn mathematics successfully» (Kilpatrick et al., 2001, s. 116). Denne matematiske kompetansen (*mathematical proficiency*) deler de inn i fem delkompetanser, *conseptual understanding, procedural fluency, strategic competence, productive disposition* og *adaptive reasoning.*



Figur 4: De fem delkompetansene som er likeverdige og innvevd i hverandre og til sammen utgjør matematisk kompetanse. Hentet fra Kilpatrick et al. (2001, s. 117).

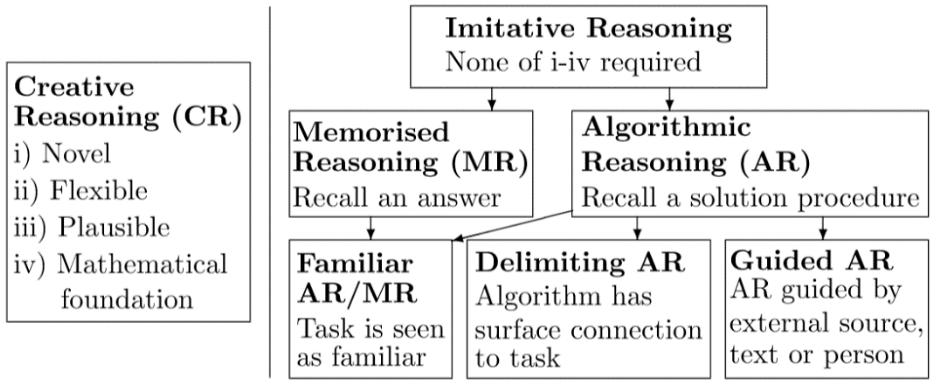
De fem delkompetansene er likeverdige og innvevd i hverandre, og alle spiller en like stor rolle i utviklingen av en helhetlig matematisk kompetanse (Kilpatrick et al., 2001). Konseptuell forståelse (*conseptual understanding*) er forståelse av matematiske begreper, operasjoner og relasjoner. Prosedyreferdigheter (*procedural fluency*) er evnen til å utøve prosedyrer fleksibelt, nøyaktig, effektivt og hensiktsmessig. Strategisk kompetanse (*strategic competence*) er evnen til å formulere, representere og løse matematiske problemer. Produktiv holdning (*productive disposition*) vil si at man har tilbøyelighet til å se matematikk som noe fornuftig og nyttig, koblet sammen med ens tro på at matematikk er verdt å jobbe med. Til slutt trekker de frem adaptiv resonnering (*adaptive reasoning*), det er ferdigheten for logisk tenkning, refleksjon, forklaring og begrunnelse (Kilpatrick et al., 2001).

Av de fem delkompetansene, er det adaptiv resonnering jeg vil trekke frem. Ved å gå nærmere inn på dette vil jeg samtidig kunne forklare hvordan resonnering er viktig for en matematisk kompetanse og forståelse. Adaptiv resonnering er evnen til å tenke logisk rundt konseptuelle sammenhenger, og se om metodevalget fører frem til riktig svar. «Such reasoning is correct and valid, stems from careful consideration of alternatives, and includes knowledge of how to justify the conclusions. In mathematics, adaptive reasoning is the glue that holds everything together, the lodestar that guides learning» (Kilpatrick et al., 2001, s. 129). Innenfor adaptiv resonnering er det viktig at elever kan forsvare og argumentere for løsningsmetoden sin. For at elever skal bli gode til dette, må de få muligheten til å øve. Kilpatrick et al. (2001) argumenterer for at elever kan trenes i dette allerede fra de er små. Matematikkundervisningen burde dessuten presenteres på en slik måte at det blir klart for elevene at det forventes at de skal forklare og argumentere for løsningene sine. Hvis elevene blir gode til dette vil de kunne være fleksible i strategivalget sitt, de kan bruke adaptiv resonnering til å se om en prosedyre leder frem, og de kan forbedre sin begrepsforståelse (Kilpatrick et al., 2001).

Kilpatrick et al. (2001) mener at man kan måle elevers kompetanse i adaptiv resonnering, og da gjerne i sammenheng med andre delkompetanser i matematikk. De trekker frem to ulike måter. Den første går ut på å be elever resonnere rundt tall og tallenes egenskaper, dette utfordrer i tillegg deres begrepsforståelse. Et eksempel på dette er å be elever estimere summen av $\frac{12}{13}$ og $\frac{7}{8}$, med valgmulighetene 1, 2, 19 og 21 (Kilpatrick et al., 2001, s. 139). Ved å legge merke til at brøkene hver for seg er mindre enn 1, ser man at 19 og 21 er urimelige svar. Likevel svarte 55% av de 13 år gamle elevene i deres studie et av disse alternativene. Den andre måten man kan måle elevenes kompetanse i adaptiv resonnering går ut på å få elever til å begrunne og forsvare løsningene sine (Kilpatrick et al., 2001).

2.3.2 Imitativ og kreativ resonnering

For å karakterisere elevenes resonnement vil jeg bruke Lithner (2008) sitt rammeverk over imitativt og kreativt resonnement. En elev resonnerer imitativt når han eller hun husker et svar eller en fremgangsmåte og kopierer denne. Eleven bruker altså memorerte regler og formler, som kan være hensiktsmessig hvis eleven vet hvordan algoritmen løser oppgaven og hvorfor han eller hun bruker nettopp denne algoritmen. Problemet viser seg hvis denne formen for resonnering blir brukt til å løse problemoppgaver hvor eleven er usikker. Imitativ resonnering eller utenatlæring krever ikke at eleven har en dypere forståelse av matematikken. Kreativ resonnering må derimot være nyskapende, plausibel og matematisk forankret (Lithner, 2008). Denne formen for resonnering ligger altså tett opp til det Kilpatrick et al. (2001) kaller adaptiv resonnering. Den vanligste formen for resonnering er imitativ og Lithner (2008) har kommet frem til at dette er en av hovedgrunnene til at mange elever mislykkes med matematikken.



Figur 5: Oversikt over resonneringstyper. Hentet fra Lithner (2006, s. 5).

I **figur 5** ser man de ulike typene resonnering som rammeverket omfatter. Disse kategoriene og underkategoriene er bygget på empiri. Grunnen til at imitativ resonnering er mye mer omfattende enn kreativ resonnering, er ikke at den er mer omfattende i seg selv, men det kommer av at de empiriske dataene omhandler mest imitativ resonnering. Kreativt resonnement er nokså sjelden i det ordinære klasserommet (Lithner, 2006).

Imitativ resonnering

Imitativ resonnering mangler originalitet. Elever som resonnerer imitativt, forsøker å kopiere memorerte fremgangsmåter eller løsningsstrategier de kan finne andre steder. Lithner (2008) kaller denne formen for resonnering for overfladisk på grunn av at den ikke bygger på iboende matematiske egenskaper. Lithner (2008) bruker et eksempel for å illustrere hvordan et argument kan være forankret enten i overfladiske eller iboende matematiske egenskaper, som er nesten likt det Kilpatrick et al. (2001) bruker for å måle elevers kompetanse i adaptiv resonnering (se **kapittel 2.3.1**). Eksempelet Lithner bruker er at elevene skal forklare hvilken brøk som er størst av $\frac{9}{15}$ og $\frac{2}{3}$. Størrelsene av tallene (9, 15, 2, 3) er overflate egenskaper som ikke er tilstrekkelig nok til å løse oppgaven (argumentet ville vært at siden 9 og 15 er større enn 2 og 3, må $\frac{9}{15}$ være større enn $\frac{2}{3}$), mens kvotienten er et iboende argument, som ville løst oppgaven. Egenskapene har blitt delt i iboende og overfladiske fordi en av grunnene bak elevers vansker i matematikk har vist seg å være at de forankrer deres argumenter i overflatiske egenskaper (Lithner, 2008).

Imitativ resonnering kan deles i underkategoriene memorert resonnering og algoritmisk resonnering (se **figur 5**). Memorert resonnering vil si at elever velger en strategi ved at han eller hun husker hele løsningen (Lithner, 2008). Strategien gjennomføres kun ved at den skrives ned. Slik erindring er delvis nødvending i all oppgaveløsing, men som en helhetlig strategi er den kun nyttig når det kommer til noen få oppgaver. For eksempel når det blir spurt etter fakta, definisjoner eller bevisføringer. En annen type memorert resonnering, er den som bygger på erfaringer. Et eksempel på dette er at elevene mener at stigningstallet til en graf ikke kan være 6, fordi det alltid før har vært mindre tall som -1 og 2 (Lithner, 2008).

Skoleoppgaver er gjerne utformet på en måte som gjør at det er mer beleilig å huske en algoritme, ikke hele svaret eller løsningen. Lithner (2008) referer til Brousseau (1997, s. 129) når han definerer en algoritme: «An algorithm is a finite sequence of executable instructions which allows one to find a definite result for a given class of problems». Ross (1998) definerer en algoritme som en prosedyre som involverer forhåndsbestemte steg som leder til et spesifikt svar. Algoritmisk resonnering går ut på at eleven husker en løsningsalgoritme. De videre resonneringssekvensene i gjennomførelsen er trivielle for den som resonnerer (Lithner, 2008). Algoritmen tar seg av de sekvensene av oppgaven hvor det er rom for tolkning, finne ny informasjon eller ta meningsfulle avgjørelser, altså alle de delene som er konseptuelt vanskelige for eleven, og bare de enkle delene står igjen til eleven. Velger man riktig algoritme, er det stor sannsynlighet for at man finner det riktige svaret raskt, og bare «slurvefeil» kan gjøre at man mislykkes. Dette er algoritmenes styrke, men når det kommer til læringsutbytte av å løse en oppgave, blir det begrenset (Lithner, 2015).

Den største utfordringen i algoritmisk resonnering (AR) er å finne en passende algoritme. Det finnes tre vanlige måter å finne en algoritme på. De har Lithner (2008) kalt for kjent AR, avgrenset AR og guidet AR (se **figur 5**). Det er vanlig at elever bruker kjent AR. Grunnen for å velge denne strategien er at oppgavetypen er kjent. Den kan løses av den kjente korresponderende algoritmen. Det eneste eleven må gjøre er å iverksette algoritmen. Argumentet som overbeviser den som resonnerer til å velge denne strategien, er ofte basert på erfaringer med at en oppgave med spesiell type tekst, graf eller symbolske egenskaper, kan løses med den bestemte algoritmen.

I avgrenset AR er ikke oppgavetypen kjent for den som resonnerer. En algoritme blir valgt fra et sett som er avgrenset av den som resonnerer, ved algoritmens overflaterelasjon til oppgaven. Den som resonnerer velger altså en algoritme ut i fra det han eller hun tror passer til å løse oppgaven, og utfallet er ikke gitt. Det verifiserende argumentet er basert på overflatebetraktinger som er knyttet til det som den som resonnerer forventer av det forespurte svaret eller løsningen. Dersom ikke gjennomførelsen fører frem til en rimelig konklusjon, blir algoritmen forkastet uten videre evaluering, og en ny blir valgt fra det avgrensende settet av algoritmer som eleven kjenner (Lithner, 2008).

Guidet AR blir brukt når kjent AR og avgrenset AR ikke fungerer. Det finnes to typer guidet AR, tekst-guidet AR og person-guidet AR. I tekst-guidet AR går strategien ut på å identifisere likheter mellom oppgaven og et eksempel, et teorem, en definisjon, en regel eller en tekstet kilde, i for eksempel matematikkboken. Algoritmen blir brukt uten verifiserende argumentasjon. Som beskrevet i innledningen, er denne formen for resonnering mye brukt i matematikkundervisningen i Norge. I person-guidet AR blir alle strategivalgene som er problematisk for den som resonnerer gjort av en guide, gjerne en lærer, som ikke gir noe rom for prediktiv argumentasjon. Strategiens gjennomførelse følger veiledningen, og det som gjenstår for eleven utføres uten verifiserende argumentasjon (Lithner, 2008).

Kreativ resonnering

I følge Haylock (1997) har det ikke vært noen ensartet definisjon på *kreativitet* som er generelt akseptert eller brukt i forskning. Hovedsakelig er det to måter begrepet blir brukt på. På den ene siden omhandler det en spesiell type tenkning eller mental funksjon, dette kalles ofte for divergent tenkning. På den andre siden blir kreativitet brukt om produkter som av en grunn blir oppfattet som kreative, for eksempel kunst. Når man skal se på kreativitet i skolematematikken er det den første beskrivelsen som passer best. Haylock (1997) beskriver at man kan se på kreativitet som evnen til å få ideer som er nyskapende og evnen til unngå fiksering og å være fleksibel i fremgangsmåter og løsningsmetoder.

Lithner (2008) bruker den samme beskrivelsen om kreativitet i matematikken som Haylock (1997). For at resonneringen skal kunne oppfattes som kreativ må den oppfylle følgende kriterier; den må være nyskapende, plausibel og matematisk forankret. At resonneringen er nyskapende vil si at den er ny for eleven selv, den må altså ikke være ny for forskeren eller det matematiske samfunnet (Lithner, 2006). Resonneringen er plausibel hvis den er støttet av argumenter som forklarer valg av strategi (prediktiv argumentasjon) og/eller begrunnelse for hvorfor et svar er sant (verifiserende argumentasjon) (Lithner, 2008). Det er også viktig at disse argumentene er forankret i matematikken, det vil altså si at de er forankret i iboende matematiske egenskaper, og ikke i overfladiske egenskaper (Lithner, 2015).

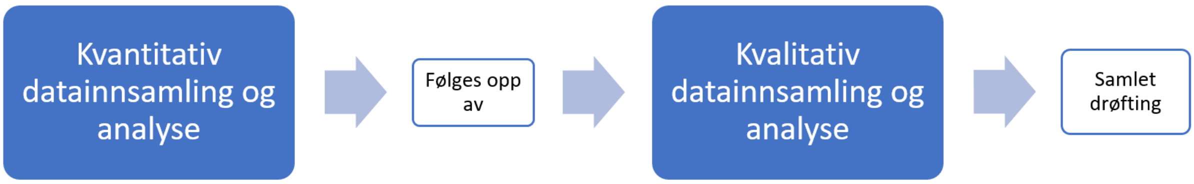
Lithner (2008) sier altså at et kreativt resonnement må være:

1. Nyskapende. En ny resonnementssekvens blir opprettet, eller en glemt blir gjenskapt. Å imitere et svar eller en løsningsprosedyre kan ikke ses på som nyskapende.
2. Plausibelt. Argumenter som støtter strategivalget og/eller strategiimplementeringen forklarer hvorfor konklusjonene er sanne eller plausible. Vage intuisjoner og gjetninger gjelder ikke.
3. Matematisk forankret. Argumentene er forankret i de iboende matematiske egenskapene. Resonneringen må altså ha et matematisk grunnlag.

Lithner (2008) påpeker dessuten at kreativitet i problemløsing er basert på en tankeprosess som er fleksibel, og eleven blir dermed ikke hindret i å løse oppgaven ved å være fiksert på en fremgangsmåte, men kan bruke flere tilnærminger til oppgaven. Et kreativt resonnement må ikke nødvendigvis være vanskelig å utføre, definisjonen omhandler også elementær resonnering. Likevel viser en rekke studier at kreativt resonnement blir i mye mindre grad brukt, enn algoritmisk resonnement (Lithner, 2008).

3. METODE

I denne studien ønsker jeg å undersøke sammenhengen mellom elevers metakognisjon og deres matematiske resonnement i løsning av variabelproblemer. Metodevalget er i all hovedsak tatt med bakgrunn i forskningsspørsmålet mitt, men det er også basert på en del praktiske forhold. For å besvare forskningsspørsmålet, har jeg valgt en tilnærming som kan karakteriseres som en *mixed method*. At det er en mixed method vil si at jeg har samlet inn både kvantitativ og kvalitativ data, der hensikten er at denne kombinasjonen vil gi en større innsikt og en mer nyansert forståelse, enn hvis jeg kun hadde samlet inn en type data (Creswell, 2014). Creswell (2014) definerer tre ulike hoved mixed methods design som avhenger av rekkefølgen på den kvalitative og kvantitative datainnsamlingen og analysen. E*xplanatory sequential mixed method* (se **figur 6**) er designet hvor forskeren først utfører en kvantitativ datainnsamling og analyse. Deretter vil analysen av resultatet føre til, og følges opp av, en kvalitativ datainnsamling og ny analyse. Tilslutt utføres en samlet drøfting. Det er dette designet jeg har valgt for å besvare forskningsspørsmålet mitt.



Figur 6: Explanatory sequential mixed method. Oversatt og hentet fra (Creswell, 2014, s. 220).

Forskningsmetoden jeg har valgt for å samle inn de kvantitative dataene er en kartleggingstest som består av to deler (se **vedlegg 1**). Den ene delen er en diagnostisk test som inneholder variabelproblemer. Den andre delen er et spørreskjema som ga innblikk i elevenes metakognisjon under løsningen av variabelproblemene. Ut i fra resultatene og analysen av denne kartleggingstesten, valgte jeg ut to elever til en kvalitativ del hvor jeg benyttet høyttenkningsmetoden. Høyttenkningsmetoden går ut på la eleven verbalisere tankene sine, mens han eller hun utfører et utvalg oppgaver (van Someren, Barnard & Sandberg, 1994). Denne metoden ga meg et unikt innblikk i prosessen i problemløsingen, i motsetning til hva jeg kunne fått av kun elevenes skrevne svar. I dette kapittelet vil jeg beskrive metoden og begrunne metodevalget. Jeg vil presentere teori og drøfte metoden i lys av denne. Dette vil jeg gjøre i en kronologisk rekkefølge, der jeg først presenterer den kvantitative delen og deretter den kvalitative delen.

3.1 Mixed method

Det finnes fordeler og ulemper ved enhver forskingsdesign. Ved kvantitativ forskning kan man standardisere informasjonen slik at man kan ha et stort antall informanter, men forskningen kan få et overfladisk preg. Det vil ikke være mulig å få frem de individuelle variasjonene (Jacobsen, 2005). Ved en kvalitativ studie derimot, kan man vektlegge mer detaljer og få et bedre innblikk i tankene til den enkelte elev. Men på grunn av omfattende data, må man gjerne velge få informanter og man kan få et generaliseringsproblem (Jacobsen, 2005). Ved å velge en mixed method, kan jeg forminske ulempene fra hver metode. «Mixed methods reasech provides strengths that offset the weakness of both quantitative and qualitative research» (Creswell & Plano Clark, 2011, s. 12). Ved å bruke en mixed method kan jeg benytte begge typer data for å besvare forskningsspørsmålet mitt. Kartleggingstesten gir meg en oversikt over informantgruppen, mens høyttenkningsmetoden vil gi meg et dypere innblikk i sammenhengen mellom elevenes metakognisjon og matematiske resonnement i problemløsingen.

En mixed method har altså den fordelen at den forminsker ulempene fra rene kvalitative og kvantitative studier, men jeg som forsker må være bevisst på at metoden kan være krevende. Jeg må ha evner og innsikt i både kvantitativ forskning, kvalitativ forskning og mixed method forskning. Det krever dessuten tid og ressurser å samle inn og analysere data i flere omganger (Creswell & Plano Clark, 2011). For å begrense arbeidsmengden med hensyn til mangel av tid ved en 30 studiepoengs masteroppgave, har jeg derfor valgt en variant av explanatory sequential design som kalles *participiant-selection variant.* Det vil si at den kvantitative delen er med på å besvare forskningsspørsmålet mitt, men blir hovedsakelig brukt til å velge deltagere til den kvalitative delen. Jeg går altså ikke grundig inn i en kvantitativ analyse av kartleggingstesten, og hovedfokuset ligger derfor på den kvalitative delen når forskningsspørsmålet skal besvares.

En mixed method kan være fiksert og/eller fremvoksende (Creswell & Plano Clark, 2011). At den er fiksert vil si at bruken av de kvantitative og kvalitative metodene er bestemt og planlagt på forhånd. At metoden vokser frem vil si at bruken av mixed method ble aktuell underveis i prosessen, hvor man tillegger en kvalitativ eller kvantitativ del hvis man ser at det er behov for det. En mixed method må ikke nødvendigvis være enten fiksert eller fremvoksende, men ofte er den et sted imellom hvor begge aspekter er tilstedeværende (Creswell & Plano Clark, 2011). Min studie er et sted imellom fiksert og fremvoksende. Den er fiksert ved at jeg hadde planlagt på forhånd at jeg ønsket å først samle inn kvantitative data, for deretter å bruke informasjonen fra analysen av disse dataene til å velge deltagere til en kvalitativ datainnsamlingsdel. Men selv om dette var forhåndsbestemt, har noen valg i forhold til, begrunnelser for og gjennomføringen av den kvalitative delen vokst frem underveis.

3.2 Kartleggingstesten

Kartleggingstesten bestod av en diagnostisk test i algebra og et spørreskjema for å kartlegge elevenes metakognitive reguleringsferdigheter. Den diagnostiske testen ble utarbeidet og gjennomført i samarbeid med min medstudent, Elin Brandsnes Vårtun. Hennes masteroppgave omhandler i likhet med min, algebraproblematikken i skolen og elevers matematiske resonnement. Dermed falt det naturlig å samarbeide om den diagnostiske testen. Vi har forskjellig vinkling på oppgavene våre, og dermed er det en oppgave i den diagnostiske testen jeg har sett bort ifra.

Kartleggingstesten ble gjennomført i to 1T-matematikklasser på en videregående skole i Østlandsområdet. Klassene ble valgt på bakgrunn av tilgjengelighet. Det vil si at jeg fikk kontakt med en skole i nærområdet og at de sa seg villig til å delta i studien (se **vedlegg 2**). Valget kunne tas på denne måten fordi forskningsspørsmålet ikke spesifiserer hvilken type skole eller hvilken type elever som skulle studeres. Likevel synes jeg det var interessant å velge 1T-elever fordi 1T er det første steget i en eventuell matematisk fordypning. Og det er som sagt viktig at elevene har en grunnleggende forståelse for variabler for å kunne studere matematikk på høyere nivåer (Gray et al., 2009). I og med at navnene til elevene som deltar i kartleggingstesten ble samlet inn, og elevene som ble plukket ut til høyttenkningsmetoden skulle filmes, ble studiet meldt til NSD (Norsk senter for forskningsdata). All forskning som gjøres med mennesker må ivareta etiske prinsipper (Christoffersen & Johannessen, 2012). Det er krav om informert samtykke, informanten har rett til selvbestemmelse og forskeren må respektere informantens privatliv. Det vil si at informanten skal til enhver tid i prosessen og uten begrunnelse kunne trekke seg fra studien, og han eller hun skal kunne være sikre på at forskeren ivaretar konfidensialitet og at deltakeren dermed ikke kan identifiseres (Christoffersen & Johannessen, 2012). Før elevene gjennomførte kartleggingstesten ble et informasjonsskriv og en samtykkeerklæring delt ut i klassene (se **vedlegg 3**). Det ble presisert både skriftlig og muntlig at det var frivillig å delta og at elevene når som helst kunne trekke seg fra studien. De tilsammen 42 elevene som deltok på kartleggingstesten skrev under på samtykkeerklæringen. Ingen av elevene har i senere tid ønsket å trekke seg. Elevene som er med i denne masteroppgaven er anonymisert og kun nevnt med fiktive navn. Kartleggingstesten ble gjennomført parallelt i de to klassene, ved at Elin var til stede i den ene klassen og jeg i den andre. Elevene fikk 15 minutter på å utføre den diagnostiske testen, og først etter denne var gjennomført, delte vi ut spørreskjemaet.

3.2.1 Diagnostisk test

Oppgavene i testen er såkalte diagnostiske oppgaver. Det vil si at de kan avdekke elevers misoppfatninger og at de ikke kan løses hvis elevene har feilaktige ideer knyttet til begrepet (Brekke, 2002). Denne studien dreier seg først og fremst om å kartlegge elevenes matematiske resonnement ved løsning av variabeloppgaver, i tillegg til metakognitive reguleringsferdigheter, og ikke deres misoppfatninger og forståelse av variabler. Men i og med at jeg ikke får direkte innblikk i elevens resonnement fra kun deres skrevne svar, er en slik diagnostisk test likevel aktuell. Det er fordi adaptiv resonnering er en del av en helhetlig matematisk kompetanse (Kilpatrick et al., 2001) (se **kapittel 2.3.1**), og det kan indikere at elever med en god forståelse for variabler også kan ha gode resonnerende evner, og motsatt.

Oppgavene i den diagnostiske testen er hentet fra Chelsea Diagnostic Mathematics Test (Hart, Brown, Kerslake, Küchemann & Ruddock, 1985), og er siden gjenbrukt og belyst godt i litteraturen (f. eks. Gray et al., 2009). Chelsea Diagnostic Mathematics Test ble utarbeidet som et diagnostisk instrument for å fastslå elevers forståelsesnivå og for å identifisere forekomsten av feil. En av de ti testene i serien omhandler algebra. Denne testen ble lagd for elever i ungdomsskolealder, men Hart et al. (1985) påpeker at den også kan brukes på eldre elever.

For at vi skulle forstyrre elevenes undervisning minst mulig, men samtidig få nok data, valgte vi ut to oppgaver til testen. Den første oppgaven ser jeg bort i fra, men oppgave 2 består av to deloppgaver. I og med at disse oppgavene er hentet fra Chelsea Diagnostic Mathematics Test og valgt i samråd med veileder og en doktorgradsstipendiat som nylig har undervist i matematikk på en videregående skole, vil jeg påstå at vanskelighetsgraden er passende i forhold til elevenes ferdigheter. Disse oppgavene, samt oppgavene som ble benyttet i høyttenkningsdelen (se **kapittel 3.4.1**), er dessuten brukt i Gray et al. (2009) sin forskning på kalkulusstudenters bruk og tolkning av variabler. Kalkulus er det første matematikkurset på universitetsnivå, så studentene i dette studiet var altså ferdig med den videregående opplæringen eller tilsvarende. Selv om oppgavene opprinnelig ble utarbeidet for å teste ungdomsskoleelever, viser resultatene fra Gray et al. (2009) sin forskning at oppgavene også kan brukes på eldre elever.

Gray et al. (2009) har skilt elevenes svar i tre kategorier; aritmetisk, transisjonal og algebraisk (se **kapittel 2.1**).

Beskrivelse av oppgavene:

Oppgave 2a: Hvis $a = b + 3$ *, hva skjer med a hvis b øker med 2? Forklar svaret ditt.*
Riktig svar: «a øker med 2».

I denne oppgaven samvarierer to variabler i et additivt funksjonsforhold. En algebraisk respons på denne oppgaven vil indikere at en kvantifiserbar forandring i a er et resultat av en forandring i b i funksjonsforholdet. Svar som kategoriseres som algebraisk er altså: «a øker med 2» (Gray et al., 2009). Elevresponsene kan kategoriseres som transisjonal hvis svaret indikerer at eleven gjenkjenner at det er en forbindelse mellom økningen av verdien til b og økningen av verdien til a, men ikke klarer å spesifisere størrelsen på denne økningen. Elevresponsene som reflekterer aritmetisk tenkning, er responser hvor elevene gjør en beregning med tallet 2 (Gray et al., 2009). Typiske svar kan være $a = b + 5$ eller $a = 5$. For en oversikt og flere eksempler på elevresponser i de ulike kategoriene, se **tabell 1**.

Oppgave 2b: Hvis $f = 3g + 1$ *, hva skjer med f hvis g øker med 2? Forklar svaret ditt.*
Riktig svar: «f øker med 6».

I oppgave 2a samvarierer to variabler i et additivt funksjonsforhold, mens i oppgave 2b er dette funksjonsforholdet i tillegg multiplikativt (Gray et al., 2009). Dette gjør at vanskelighetsgraden er større i oppgave 2b. Selv om oppgaven er nokså lik, er det langt færre elever som gir algebraiske responser enn i oppgave 2a, som det fremkommer i **tabell 2**. Den algebraiske responsen på denne oppgaven er: «*f* øker med 6». Gray et al. (2009) påpeker at det i mange elevresponser ble testet for ulike verdier av g, og ut i fra det konkludert med at f øker med 6. Denne systematiske testingen med ulike verdier, indikerer at elevene har gjenkjent funksjonsforholdet til variablene. Det å kunne generalisere resultatet for å produsere svaret, blir vurdert som en indikasjon på algebraisk tenkning. Elevresponsene ble på samme måte som for oppgave 2a kategorisert som transisjonal hvis elevene fastslo at *f* økte, men ikke nevnte hva *f* økte med. Tilslutt, elevresponsene kategoriseres som aritmetisk hvis eleven fastslo at f økte med 2, doblet seg, eller økte med noe annet. I tillegg, som for oppgave 2a, ble responsene kategorisert som aritmetisk hvis eleven har gjort beregninger med tallet 2 (Gray et al., 2009).

Tabell 1: Eksempler på responser på oppgave 2a og 2b som kan indikere algebraisk, transisjonal eller aritmetisk tenkning. Oversatt og hentet fra Gray et al. (2009, s. 67).

	Algebraisk	**Transisjonal**	**Aritmetisk**
Oppgave 2a **Hvis $a = b + 3$,** **hva skjer med *a*** **hvis *b* øker med 2?** **Forklar svaret ditt.**	*a* øker med 2.	*a* øker.	*b + 5* (*b* + 2) + 3 2*b* + 3 *a = 5* *a* + 2
Oppgave 2b **Hvis $f = 3g + 1$,** **hva skjer med *f*** **hvis *g* øker med 2?** **Forklar svaret ditt.**	*f* øker med 6.	*f øker*.	Øker med 2,7 eller et annet tall. *f* dobles. *f* = 7 *f* = 5g + 1 *f* = 6g + 1

I 1976 ble Chelsea Diagnostic Mathematics Test gjennomført på ungdomstrinnet (Hart et al., 1985). Tabellen under viser hvor mange prosent av elevene i hvert alderstrinn som besvarte oppgave 2a og 2b riktig. I tillegg viser tabellen hvor mange prosent av kalkulus elevene i Gray et al. (2009) sin studie som fikk riktig svar. Disse resultatene vil bli satt i sammenheng med resultatene fra den diagnostiske testen i de to 1T-klassene.

Tabell 2: Elevers riktige svar på oppgave 2a og 2b oppgitt i prosent. Oversatt og hentet fra Hart et al. (1985) og Gray et al. (2009).

Alder	**Antall elever**	**Oppgave 2a**	**Oppgave 2b**
12 - 13 år	1128	9 %	3 %
13 - 14 år	961	21 %	7 %
14 - 15 år	741	26 %	13 %
Kalkulus 1 (over 18 år)	174	67 %	30 %

3.2.2 Spørreskjema

Ut i fra elevresponsene på oppgave 2a og 2b kunne jeg se hvordan elevene har løst oppgavene, altså deres skrevne svar. I tillegg ville jeg vite noe om deres metakognitive reguleringsferdigheter. Det finnes ulike måter å karakterisere metakognisjon, og Desoete (2008) påpeker at man kan benytte spørreskjemaer, høyttenkningsmetoden eller systematisk observere elevens oppførsel. I og med at jeg skulle karakterisere metakognisjon til to hele klasser, valgte jeg å bruke et spørreskjema. Spørreskjemaet jeg benyttet er utarbeidet av Biryukov (2004) og gjenbrukt av blant annet Sengul og Katranci (2012). Dette spørreskjema ble delt ut til elevene umiddelbart etter de hadde utført problemløsingsoppgaver, og hadde som formål å karakterisere elevenes metakognitive adferd mens de utførte oppgavene. Biryukov (2004) har latt seg inspirere av Fortunato, Hecht, Tittle og Alvarez (1991) som lagde et spørreskjema med samme formål, men med flere utsagn. Utsagnene i spørreskjemaet er basert på blant annet Schoenfeld (1985) sitt arbeid med metakognisjon.

Spørreskjemaet som ble delt ut til elevene i de to klassene, er oversatt til norsk og tilpasset slik at elevene skal forstå utsagnene (se **vedlegg 1**). At spørreskjemaet er tilpasset, vil si at språket er forenklet slik at 1T-elever skal ha grunnlag for å forstå det. For eksempel er det ikke sikkert at 1T-elever vet hva det vil si å løse en oppgave skjematisk. For hvert utsagn ble elevene bedt om å krysse av for en av de tre kategoriene: «Ja» - Ja, jeg gjorde dette, «Nei» - Nei, jeg gjorde ikke dette, eller «Usikker» - Jeg er usikker på om jeg gjorde dette. Utsagn 1 til utsagn 7 og utsagn 14 er alle påstander som omhandler det elevene gjorde før oppgaven ble utført, altså prediktive- og planleggingsferdigheter. De resterende utsagnene omhandler det eleven gjorde underveis i og etter løsningsprosessen, altså de metakognitive reguleringsferdighetene som omhandler overvåkning og evaluering (se **kapittel 2.2**).

Fortunato et al. (1991) påpeker at et slikt spørreskjema, hvor elevene selv skal rapportere om sin metakognitive adferd, er kun hensiktsmessig hvis oppgaven kan karakteriseres som en problemløsingsoppgave. For at en oppgave skal kunne karakteriseres som en problemløsingsoppgave må løsningsmetoden være ukjent og oppgaven må være vanskelig for den aktuelle problemløseren. En rutineoppgave er motsetningen til en problemløsingsoppgave (Schoenfeld, 1985) (se **kapittel 2.2.1**). Fortunato et al. (1991) påpeker at elever som utfører det som for han eller hun kan karakteriseres som en rutineoppgave, er mindre oppmerksom på sine kognitive prosesser og mindre engasjert i prosessen, enn elever som utfører problemløsingsoppgaver. Elever som blir bedt om å besvare et slikt spørreskjema til en oppgave, som for han eller hun kan karakteriseres som en rutineoppgave, kan derfor ha vanskeligheter med å besvare utsagnene.

3.2.3 Analyse av kartleggingstesten

Den diagnostiske testen ble analysert og kategorisert som aritmetisk, transisjonal eller algebraisk ut i fra kriteriene beskrevet i **kapittel 3.2.1**. Innenfor hver kategori ble deretter elevresponsene videre delt inn i hvordan de hadde svart på oppgaven (se **tabell 1**). Denne analysen ble gjort i samarbeid med Elin og utført i Excel.

For å analysere spørreskjemaet brukte jeg det samme Excel arket. Spørreskjemaet ble analysert utsagn for utsagn, og satt i sammenheng med elevresponsene fra den diagnostiske testen inspirert av Biryukov (2004) og Sengul og Katranci (2012) sine studier. For hvert utsagn, ble det innenfor hver av de tre svarkategoriene, «Ja», «Nei» og «Usikker», sjekket hvor mange elever som var blitt kategorisert som algebraisk, transisjonal eller aritmetisk. I resultatdelen er de mest interessante analysesituasjonene trukket frem. Situasjonene har blitt vurdert som interessante hvis de kan si noe om de metakognitive reguleringsferdighetene til elevene som har løst oppgavene algebraisk som en gruppe, i forhold til de som ikke har gjort det.

3.2.4 Hvorfor participiant-selection variant?

Som nevnt i **kapittel 3.1** kan min mixed method karakteriseres som participiant-selection variant. Det vil altså si at den kvantitative delen vil være med på å besvare forskningsspørsmålet mitt, men er først og fremst med for å velge ut deltakere til den kvalitative delen. En av grunnene til dette er at jeg ikke direkte kan karakterisere elevenes resonnement fra den diagnostiske testen, hvor jeg kun få se elevenes skrevne svar (se **kapittel 3.2.1**). En annen grunn er at det kan være problematisk å bruke spørreskjemaet for å kartlegge elevenes metakognisjon. Som beskrevet i **kapittel 3.2.2**, påpeker Fortunato et al. (1991) at oppgavene som benyttes til spørreskjemaet må kunne karakteriseres som problemløsingsoppgaver. Det er vanskelig å si om oppgavene for de enkelte elevene kan karakteriseres som dette. Hvis oppgavene for enkelte elever ble løst rent rutinemessig, er det vanskelig for disse elevene å besvare spørreskjemaet. Som beskrevet i **kapittel 3.1** er valget om å bruke en participiant-selection variant tatt på bakgrunn av kort prosjekttid, men det er altså flere andre faktorer som har spilt inn.

3.3 Deltakere til høyttenkningsmetoden

Min mixed method er et sted mellom fremvoksende og fiksert. Metoden er fiksert fordi jeg på forhånd hadde bestemt meg for at jeg skulle ha en kvantitativ del og en kvalitativ del. Den er fremvoksende fordi en del valg i forhold til, begrunnelser for og gjennomføringen av den kvalitative delen har vokst frem underveis. Hvilke elever som skulle velges til høyttenkningsmetoden er et eksempel på dette. Noen kriterier hadde jeg bestemt på forhånd, som at elevene skulle vise gode metakognitive reguleringsferdigheter og at de skulle ha løst oppgave 2a og 2b algebraisk. Men nøyaktig hvilken begrunnelse var ikke bestemt før etter analysen av kartleggingstesten var gjennomført.

Når man skal velge deltakere til høyttenkningsmetoden er det spesielt to egenskaper van Someren et al. (1994) peker ut som viktige: grad av kompetanse og verbaliseringsferdigheter. Personer med høy grad av kompetanse eller «eksperter» har vansker med å verbalisere tankene sine når de utfører oppgaver som for dem er rutine, de ser at «det bare må være sånn». Eksperter vil kanskje skjule dette for forskeren ved at han eller hun tillegger seg en mer rasjonell resonnering enn nødvending. Det kan også hende eksperten vil skjule at han eller hun ikke forstår oppgaven, fordi det vil hjelpe forskeren med å unngå rotete detaljer. Hvis deltakeren er en person med høy grad av kompetanse, burde derfor han eller hun informeres om at det er viktigere at det som uttrykkes er naturlig, enn at det er forståelig for forskeren (van Someren et al., 1994).

Det er store forskjeller i hvor lett ulike mennesker klarer å verbalisere tankene sine, derfor vil høyttenkningsprotokollene være ulik fra person til person. Det ferdig transkriberte materiale fra en høyttenkningsmetode kalles en høyttenkningsprotokoll. van Someren et al. (1994) mener det er rimelig å anta at evnen til å verbalisere tankene sine ikke har sammenheng med evnen til å løse oppgaver, det beste er derfor å velge personer med gode verbaliseringsferdigheter. For å finne ut om elever har gode verbaliseringsferdigheter er det best å gjennomføre en pilotstudie. Det kan også være hensiktsmessig å la elevene varme seg opp på en enkel oppgave, fordi de fleste personer ikke vil ha noe problem med å uttrykke tankene sine høyt med litt øvelse (Ericsson & Simon, 1984/1993). Hvis man har en slik oppvarmingsoppgave, vil forskeren dessuten kunne gi instruksjoner på den, i stedet for på oppgaven som skal inn i protokollen.

Jeg har valgt å studere få elever i høyttenkningsdelen, og heller gå i dybden enn i bredden. Denne delen vil gi meg som forsker en mulighet til å gå grundig inn i hvilken sammenheng det er mellom elevenes metakognitive reguleringsferdigheter og matematisk resonnement i variabelproblemløsing. Men dette fører samtidig til at jeg ikke kan velge stor variasjon i informantgruppen. Jeg har dermed valgt å studere elever som viser gode metakognitive reguleringsferdigheter og har besvart oppgave 2a og 2b algebraisk. Jeg har valgt de som viser gode ferdigheter, fordi det er viktig at begge disse ferdighetene skulle være fremtredende i høyttenkningsprotokollene. På denne måten sikret jeg at jeg best mulig skulle få et innblikk i sammenhengen mellom elevenes metakognitive reguleringsferdigheter og deres matematiske resonnement.

Etter kartleggingstesten var analysert, var det særlig to elever som skilte seg ut. Begge elevene hadde løst oppgave 2a og 2b algebraisk. Men det som var spesielt interessant, var at av elevene som hadde løst begge oppgavene algebraisk, var det kun disse to som hadde svart «Ja» på utsagn 9: *«Da jeg løste oppgaven fant jeg en feil jeg hadde gjort og rettet den»*. Begge beskrev videre feilen de hadde funnet, og den hadde ført til at begge løste oppgave 2b algebraisk. Dette inngår i metakognitiv reguleringsferdigheter, og er svært viktig i problemløsing (se **kapittel 2.2.1**). Dessuten svarte begge «Ja» på flere av de andre utsagnene, og av den grunn kan det tyde på at disse elevene besitter gode metakognitive reguleringsferdigheter.

Det er som sagt to egenskaper man skal ta spesielt hensyn til når man velger deltagere til høyttenkningsmetoden; grad av kompetanse og verbaliseringsferdigheter. For å forsikre meg om disse elevenes verbaliseringsferdigheter, tok jeg kontakt med elevens lærer, og det viste seg at begge jentene var muntlig aktive i matematikkundervisningen og ikke hadde noen spesielle verbaliseringsvansker. Begge elevene svarer algebraisk på oppgave 2a og 2b, og dessuten påpeker deres lærer at de også ellers viser høy grad av kompetanse i matematikk. De to jentene vil i resultatdelen bli omtalt med fiktive navn; Tuva og Siri.

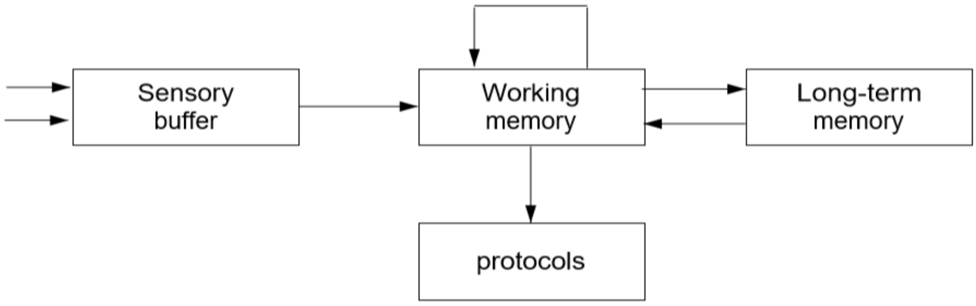
3.4 <u>Høyttenkningsmetoden</u>

Høyttenkningsmetoden er en metode der deltakerne uttrykker alle sine tanker verbalt mens de utfører en oppgave (Charters, 2003). Jeg ønsker å benytte denne metoden til å karakterisere sammenhengen mellom elevenes metakognitive reguleringsferdigheter og deres matematiske resonnement ved variabelproblemløsing. Ved å bruke denne metoden kan jeg få et unikt innblikk i elevers kognitive prosesser, i motsetning til hva jeg kan få av kun elevenes skrevne svar (van Someren et al., 1994). Som Lithner (2015), skriver van Someren et al. (1994) at oppgaveløsing tar form av trinnvise resonnerende steg, og ved høyttenkningsmetoden får vi et innblikk i denne prosessen. Dataene man får ut fra høyttenkningsmetoden består av observasjoner og verbale rapporteringer. Man observerer elevenes adferd mens de utfører oppgaven, på denne måten kan man for eksempel se om eleven brukte hjelpemidler underveis, om han eller hun nølte eller skiftet strategi (van Someren et al., 1994). Slike hendelser kommer ikke frem av elevens skrevne svar. I og med at utvalget av mulige observasjoner blir svært mange og den er avhengig av observatøren, kan man kalle observasjonsformen for ustrukturert (Christoffersen & Johannessen, 2012).

Den beste metoden for å bevare og sikre seg at man får med seg alt under en høyttenkningssekvens, er å bruke videoopptak (van Someren et al., 1994). Det fikk jeg erfare under en pilotstudie høsten 2016 da jeg testet metoden uten lyd- eller videoopptak. Det er ikke lett å skrive ned ord for ord hva eleven sier. Når det er de verbale rapporteringene som skal brukes som data, er ikke forskerens notater en sikker nok kilde. Ved videoopptak registreres derimot alt som blir sagt, og forskeren kan gå tilbake og se sekvensen flere ganger.

At elever tenker høyt mens de løser oppgaver, vil si at de fortsetter å snakke høyt uansett hvilke tanker som kommer frem. Ulikt andre teknikker for å samle inn verbal data, blir det ikke gjort noen avbrytelser eller gitt noen forslagsgivende spørsmål. Jeg som forsker skal la elevene løse problemene på egenhånd, og skal kun bryte inn for å minne eleven på å fortsette og tenke høyt hvis hun blir stille over en lengre periode. Dette kan bidra til at eleven føler at hun sitter alene og snakker til seg selv, og det kan dermed bli mer naturlig for eleven å tenke høyt. At eleven føler seg trygg i settingen, er svært viktig for at verbaliseringen skal gå så lett som mulig (van Someren et al., 1994).

Elevene oppmuntres til å si sine nåværende tanker, og for å unngå tolkninger og forklaringer på hva de gjør, må elevenes konsentrasjon rettes mot oppgaven (van Someren et al., 1994). I prinsipp forstyrrer ikke denne metoden tankeprosessen i stor grad. Eleven løser en oppgave mens verbaliseringen skjer nesten ubevisst. Dataene som samles inn blir derfor direkte og det er ingen forsinkelser, men høyttenkningsprotokoller er ikke nødvendigvis komplette av den grunn. Det er fordi elever bare verbaliserer deler av tankene sine. van Someren et al. (1994) har laget en modell som viser hvordan verbale rapporteringer blir til ut i fra menneskers kognitive system:



Figur 7: «Memory model». Boksen til høyre står for langtidshukommelsen, her er kunnskap lagret mer eller mindre konstant. Boksen til venstre er den informasjonen vi til enhver tid tar til oss fra omgivelsene våre. Både kunnskapen fra langtidshukommelsen og informasjonen fra omgivelsene våre bearbeides i arbeidsminnet vårt. Og det er informasjonen som er i arbeidsminnet som kan rapporteres verbalt. Hentet fra van Someren et al. (1994, s. 20).

Modellen i **figur 7** skjer i fem prosesser (van Someren et al., 1994, s. 19):

1. Oppfatning: Informasjonen strømmer kontinuerlig fra det rundt oss og inn i arbeidsminnet.
2. Innhentning: Informasjon hentes fra langtidshukommelsen inn i arbeidsminnet. Den er fortsatt lagret i langtidshukommelsen, men aktiviseres i arbeidsminnet.
3. Konstruksjon: Ny kunnskap blir konstruert i arbeidsminnet fra bearbeiding av informasjonen fra omgivelsene og langtidshukommelsen.
4. Lagring: Lagrer eventuelt ny kunnskap fra arbeidsminnet i langtidshukommelsen.
5. Verbalisering: Informasjonen som er aktiv i arbeidsminnet blir uttrykt som ord.

Det er altså informasjonen som er i arbeidsminnet som blir verbalisert. Det gjør at jeg som forsker ikke vil få et fullstendig innblikk i elevens tanker, i og med at underforliggende deler som ligger i langtidshukommelsen ikke blir verbalisert (van Someren et al., 1994). Det er bare oppdaget informasjon som går inn i arbeidsminnet. Arbeidsminnet har dessuten begrenset kapasitet, tankene er der bare kort tid og kan forsvinne når nye tankemønstre oppstår (Charters, 2003).

3.4.1 Valg av oppgaver

Når man skal benytte høyttenkningsmetoden, må man velge oppgaver som gjør at forstyrrende effekter av høyttenkningsmetoden blir så små som mulig (van Someren et al., 1994). Det vil si at oppgavene må kunne uttrykkes verbalt. Oppgavene må ikke være for enkle, fordi da kan eleven løse den nesten automatisk uten å tenke seg om. Blir oppgavene for enkle ser elevene da at svaret bare må være sånn, og det vil da være vanskelig å verbalisere tankeprosessen. Oppgaven må heller ikke være for vanskelig, Ericsson og Simon (1984/1993) skriver at krevende oppgaver skaper en høy kognitiv belastning og forstyrrer verbaliseringen. Er oppgavene for krevende fortrenger andre prosesser enn verbal informasjon ut av arbeidsminnet. Av den grunn er en oppgave som kan verbaliseres og er middels vanskelig for målgruppen, en trolig passende oppgave for høyttenkningsmetoden. En oppgave som kan deles i mindre enheter, slik at arbeidsminnet ikke overbelastes er dessuten å foretrekke (Charters, 2003).

Da jeg skulle velge oppgaver til høyttenkningsmetoden var det i tillegg tre kriterier oppgavene måtte oppfylle for at jeg kunne besvare mitt forskningsspørsmål. De måtte for det første passe inn i definisjonen av en problemoppgave. For det andre måtte de gjøre det mulig å karakterisere elevenes metakognisjon. Og for det tredje måtte oppgavene være av en slik karakter at jeg kunne skille mellom om eleven resonnerte imitativt eller kreativt.

At en oppgave betegnes som en problemløsingsoppgave, vil si at løsningsmetoden må være ukjent og oppgaven må være vanskelig for den aktuelle problemløseren (Schoenfeld, 1985) (se **kapittel 2.2.1**). Det er altså slike oppgaver jeg ville ha med til høyttenkningsdelen. Hvis oppgavene, i motsetning til å være en problemløsingsoppgave, er en rutineoppgave for eleven, kan høyttenkningsprotokollen bli ufullstendig. Det er som sagt vanskelig for elever å verbalisere tankeprosessen hvis de ser svaret nesten automatisk.

At oppgaven er en problemløsingsoppgave for eleven, vil i tillegg muliggjøre å karakterisere deres metakognitive reguleringsferdigheter (Garofalo & Lester, 1985). Som sagt, vil rutineoppgaver kreve få metakognitive avgjørelser fra eleven, og det vil bli vanskelig eller umulig å si noe om hans eller hennes reguleringsferdigheter.

Problemoppgavene må gjøre det mulig å skille elevenes resonnering i kreativ og imitativ. Lithner (2008) påpeker at tre kriterier må være oppfylt for at et resonnement kan karakteriseres som kreativt. Det må være nyskapende, plausibelt og matematisk forankret (se **kapittel 2.3.2**). Lithner (2008) påpeker at det ikke nødvendigvis må være vanskelig å utføre kreativt resonnement, definisjonen omhandler også elementær resonnering. Imitativ resonnering er resonnering som bygger på at eleven gjenskaper memorerte regler og prosedyrer. De videre strategiimplementeringene vil være trivielle for den som resonnerer, og selv den minste feil kan hindre eleven i å finne svaret. Resonneringen vil da være basert på overfladiske og ikke iboende matematiske egenskaper (Lithner, 2008).

Høyttenkningsmetoden kan bli for omfattende med hensyn til elevene, hvis man velger for mange oppgaver, og det er derfor vanlig å kun bruke et lite sett med oppgaver (van Someren et al., 1994). Som nevnt tidligere har jeg valgt å bruke diagnostiske variabelproblemer som er blitt brukt i Gray et al. (2009) sin forskning (se **kapittel 3.2.1**). De tre oppgavene har jeg valgt ut i samråd med veileder. Den ene oppgaven hadde jeg i tillegg testet ut i pilotstudien, og jeg visste dermed at den fungerte godt til gjeldene formål. Av de tre oppgavene som ble gjennomført, var det en av oppgavene som kan karakteriseres som en rutineoppgave for elevene. Denne oppgaven er derfor ikke tatt med i høyttenkningsprotokollen, for som sagt er det vanskelig å verbalisere tankeprosessen når eleven løser oppgaven uten å måtte tenke seg om. Det er dermed to oppgaver som ble med i høyttenkningsprotokollen, de vil for ordenhets skyld bli kalt oppgave 3 og 4.

Beskrivelse av oppgavene

Oppgave 3: Hvilken er størst, 2n eller n+2? Forklar svaret ditt.

Riktig svar: Det avhenger. $n < 2 \Rightarrow n + 2\ størst, n = 2 \Rightarrow 2n = n + 2, n > 2 \Rightarrow 2n\ størst.$

Oppgave 3 testet jeg i pilotstudien og er et eksempel på en oppgave der en bokstav blir brukt som en variabel. I denne oppgaven må eleven se at svaret avhenger av et andregradsforhold mellom $2n$ og $n + 2$, som er størrelsen til n. Resultatene fra blant andre Küchemann (1981) og Gray et al. (2009) viser at elever ofte svarer at $2n$ er størst, fordi de er vant til at multiplikasjon gir større tall enn addisjon. Disse elevene sjekket heller ikke om svaret deres var rett ved å sette inn ulike verdier for n.

Oppgave 4: Hvis likningen $(x + 1)^3 + x = 349$ *er sann når* $x = 6$*, hvilken verdi må* x *ha for at likningen* $(5x + 1)^3 + 5x = 349$ *skal være sann? Forklar svaret ditt.*
Riktig svar: 6/5 eller 1,2.

Det er kun en variabel som er brukt i oppgave 4. I begge likningene blir denne variabelen brukt som en spesifikt ukjent, men den har ulik verdi i de to likningene. For å løse denne oppgaven er det nødvending å se den strukturelle likheten mellom de to likningene, og sammenlikne verdien av variabelen i den ene likningen med verdien i den andre (Gray et al., 2009). Det er først i matematikkurene R1 og S2 at elevene møter likninger av tredje grad, så 1T elevene har ingen forutsetninger og ikke lært algoritmene for å løse den andre likningen, uten å se den strukturelle likheten til den første likningen.

Oppgave 3 og 4 kan mest sannsynlig karakteriseres som problemløsingsoppgave for elevene. For det første er ikke løsningsmetoden kjent for elevene fra før. Og for det andre er begge oppgavene er på det Küchemann (1981) beskriver som det fjerde og øverste forståelsesnivået av variabler (se **kapittel 2.1**). På dette nivået har oppgavene en kompleks struktur hvor man behandler bokstavene som variabler i en funksjonell sammenheng. Det var derfor rimelig å anta at oppgavene ville være vanskelige nok for elevene, og at det ville være mulig å karakterisere elevenes metakognitive reguleringsferdigheter og matematiske resonnement ut i elevens løsning av problemene.

Tabell 3 viser hvor mange elever som har fått riktig svar oppgitt i prosent på oppgave 3 og 4 (Gray et al., 2009; Hart et al., 1985). Tallene viser at det er et fåtall elever, selv av de som studerer matematikk på universitetsnivå, som har svart korrekt på disse oppgavene.

Tabell 3: Elevers riktige svar på oppgave 3 og 4 oppgitt i prosent. Oversatt og hentet fra Hart et al. (1985) og Gray et al. (2009).

Alder	Antall elever	Oppgave 3	Oppgave 4
12 - 13 år	1128	4 %	4 %
13 - 14 år	961	6 %	12 %
14 - 15 år	741	10 %	16 %
Kalkulus 1 (over 18 år)	174	15 %	27 %

3.4.2 Gjennomføring

Tid og sted for gjennomføringen av høyttenkningsmetoden ble avtalt med de to elevene, og vi kom frem til at det skulle skje på et grupperom på deres videregående skole. Jeg hentet elevene en og en ut av klasserommet, og før vi startet snakket vi om andre ting enn datainnsamlingen for å skape en mindre formell stemning. Elevene hadde allerede samtykket til å være med i studien og var på forhånd informert om at det ville bli tatt opp video. De var også informert om at de ikke behøvde å forberede seg på forhånd eller ha med hjelpemidler. Da vi kom på grupperommet, før vi startet selve høyttenkningssekvensen, påminnet jeg elevene på nytt at de ville bli anonymisert i studien slik at de ikke ville bli personlig gjenkjent. Jeg gjentok dessuten prosedyren i høyttenkningsmetoden og poengterte at det ikke var rett svar som er det essensielle, men heller hvordan de kom frem til svaret. Jeg påpekte derfor at det mest vesentlige ved høyttenkningsmetoden er at de verbaliserer alle sine tanker, og at de ville bli påminnet om å tenke høyt hvis de stoppet å snakke. Deretter startet jeg videoopptakeren.

For at høyttenkningsprotokollen skal bli så vellykket som mulig er det viktig at elevene føler seg komfortabel og trygg i situasjonen (van Someren et al., 1994). Det er også viktig at elevene får mulighet til å øve seg på å tenke høyt. Av det grunn løste elevene først oppgave 2b fra den diagnostiske testen før de startet på oppgavene som skulle inn i protokollen. Dette var en oppgave de kjente fra før, men likevel bemerket jeg meg at det var viktig at elevene fikk muligheten til å øve seg. På denne oppgaven kunne jeg da komme med korrigeringer og elevene ble mer sikker på hva høyttenkningsmetoden innebar.

Etter dette delte jeg ut den første oppgaven som skulle inn i høyttenkningsprotokollen. Eleven jobbet først med denne uten innblanding fra meg til hun kom frem til en løsning. Deretter stilte jeg oppfølgingsspørsmål for å utfylle høyttenkningsdelen. Etter dette delte jeg ut oppgave 4 og vi gjentok den samme prosedyren som for oppgave 3. Tilslutt gjennomførte elevene den siste oppgaven, som begge løste umiddelbart, og dermed ikke er med i protokollen.

3.4.3 <u>Analyse</u>

For å analysere videodata, brukte jeg Powell, Francisco og Maher (2003) sin modell for å studere elevers utvikling av matematiske ideer og resonnement ved bruk av videoobservasjon. Modellen er som følger:

1. Se oppmerksomt gjennom videodataene
2. Beskriv videodataene objektivt.
3. Identifiser kritiske øyeblikk.
4. Transkribere.
5. Kode.
6. Konstruere en tidslinje.
7. Lage en beskrivende historie.

Powell et al. (2003) påpeker at denne modellen ikke nødvendigvis må følges trinnvis, men at flere trinn i prosessen kan slås sammen i en visning av videoen. Denne modellen omfatter dessuten observasjon av samtaler mellom flere parter i et klasserom, mens jeg kun forholder meg til en persons verbaliserte tanker av gangen. De fire første punktene slo jeg derfor sammen i en videovisning. Det ferdig transkriberte materiale fra en høyttenkningsmetode kalles en høyttenkningsprotokoll. Det er viktig at transkriberingen er så detaljert som mulig, fordi alt kan påvirke hvordan eleven løser problemet (van Someren et al., 1994). Powell et al. (2003) påpeker at prosessen skal ende i en beskrivende historie eller et sammendrag der de kritiske øyeblikkene er fremtredende. De kritiske øyeblikkene vil i denne sammenheng være de øyeblikkene hvor elevenes metakognitive reguleringsferdigheter og matematiske resonnement kan beskrives. Det er disse sammendragene jeg vil presentere i resultatdelen, hvor jeg presenterer oppgave for oppgave, for hver av elevene.

Jeg har brukt Schoenfeld (1985) sitt rammeverk over problemløsing (se **kapittel 2.2.1**). Han trekker frem seks faser i problemløsingsprosessen; lese oppgaven, analysere, utforske, planlegge, implementere og verifisere. Han påpeker at det er i overgangen mellom disse fasene, elevene gjerne tar metakognitive avgjørelser. I analysedelen er ikke nødvendigvis alle disse fasene nevnt, men analysedelen ble utført kronologisk i henhold til rammeverket, ved at jeg tok for meg trinnene i problemløsingsprosessen og analyserte elevens resonnement og metakognitive reguleringsferdigheter parallelt.

Metakognitive reguleringsferdigheter kan deles i prediksjon, planlegging, overvåkning og evaluering (Desoete, 2008) (se **kapittel 2.2**). I **tabell 4** er det presentert noen elementer innenfor hver metakognitiv reguleringsferdighet som Desoete (2008) undersøkte da hun analyserte høyttenkningsprotokoller. For å karakterisere elevenes metakognitive reguleringsferdigheter fra protokollene, har jeg undersøkt om elevene har utført noen av aktivitetene beskrevet i **tabell 4**. Elevene må ikke nødvendigvis foreta seg alle aktivitetene for å inneha gode metakognitive reguleringsferdigheter. Noen av punktene passer ikke like godt til alle typer problemer. Men at elevene utfører flere av aktivitetene i tabellen, gir en indikasjon på at de har gode metakognitive reguleringsferdigheter.

For å kunne karakterisere elevenes matematiske resonnement fra høyttenkningsprotokollen, har jeg som sagt brukt Lithner (2008) sitt rammeverk over imitativ og kreativ resonnering. Jeg har valgt å fokusere på imitativt resonnement på samme måte som beskrevet i **kapittel 2.3.2**. Men i analysearbeidet har jeg har sett bort ifra noe i Lithner (2008) sin beskrivelse av kreativt resonnement. Jeg har begrenset definisjonen til å kun omfatte om resonnementet er plausibelt og matematisk forankret, og sett bort ifra om resonnementet er nyskapende. Det er fordi det vil være vanskelig for meg å vurdere om resonnementet er nytt for elevene, i og med at jeg ikke kjente dem fra før. At resonnementet er plausibelt vil si at det må inneholde argumenter som støtter strategivalget og/eller strategiimplementeringen og forklarer hvorfor konklusjonene er troverdige (Lithner, 2008). At resonnementet er matematisk forankret vil si at disse argumentene er forankret i iboende og ikke overfladiske matematiske egenskaper (Lithner, 2008).

Tabell 4: Ulike aktiviteter eleven kan foreta seg som indikerer at de bruker sine metakognitive reguleringsferdigheter innenfor de fire kategoriene; prediksjon, planlegging, overvåkning og evaluering (Desoete, 2008, s. 196).

Metakognitive reguleringsferdigheter	**Elementer i høyttenkningsprotokollen**
Prediksjon	• Leser oppgaven og prøver å forstå den. • Understreker viktige ord. • Velger relevant informasjon. • Leser oppgaven på nytt for å forstå den bedre. • Lager en tegning/modell. • Setter sammen informasjonen. • Skriver ned hva det blir spurt etter. • Skriver ned det som allerede er kjent. • Reflekterer. • Estimerer mulig utfall. • Annen oppførsel som peker i retning av forutsigelse.
Planlegging	• Velger relevante data. • Velger de nødvendige utregningene. • Velger de relevante trinnene i utførelsen. • Velger relevant materiale. • Tar seg tid til å utforme en handlingsplan. • Annen atferd som peker i retning av planlegging.
Overvåkning	• Holder seg til planen. • Gjør riktige utregninger. • Gjør systematiske aktiviteter. • Gjør notater knyttet til oppgaven. • Ryddig notater av problemløsingens trinn. • Glemmer ikke trinnene. • Ryddig sekvenstrinn. • Opptrer i henhold til planen. • Overvåker problemløsingsprosessen. • Forkaster planer som ikke fører frem. • Sjekker beregninger. • Sjekker om svaret er riktig. • Skiver ned svaret. • Sjekker resultatet. • Reflekterer rundt det presise svaret. • Annen atferd som peker i retning av overvåking.
Evaluering	• Fullstendig oversikt over svaret. • Reflektere over svaret. • Reflektere over hva som gikk bra og hvordan oppgavene ble løst. • Trekker en konklusjon med henvisning til oppgaven. • Knytter til fremtidige problemer. • Knytter til andre problemer. • Annen atferd som peker i retning av evaluering.

3.5 Studiens kvalitet

«Folk kan oppleve samme hendelse på forskjellige måter, og slik er det også med forskning. Forskere kan ha forskjellige forhåndsoppfatninger om samme fenomen og kan følgelig ha forskjellig tilnærming eller fokus (...)» (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 22). Det er viktig at jeg som forsker er klar over at alle valg og fortolkninger jeg har tatt underveis har påvirket utfallet av studien. Jeg har derfor prøvd å begrunne alle metodevalgene mine og vært så transparent som mulig, slik at studiens etterprøvbarhet kan økes.

Reliabilitet vil si hvor pålitelige dataene som er samlet inn er, og knytter seg til nøyaktigheten til dataene (Christoffersen & Johannessen, 2012). Den diagnostiske testen ble rettet i samarbeid med min medstudent, og ved å kunne diskutere de ulike løsningene med hverandre, ble vi mer sikker på hvilken kategori vi skulle plassere de ulike besvarelsene i. Underveis i studien har jeg dessuten kunne rådføre meg med mine veiledere om valgene som er tatt. Dette har vært med på å øke studiens relabilitet.

Validitet dreier seg om relasjonen mellom fenomenet som er undersøkt og studiens data. Altså om dataene er gode representasjoner for fenomenet (Christoffersen & Johannessen, 2012). Høyttenkningsmetoden er en uvanlig situasjon for elevene, og ikke noe de er kjent med fra før. Dette kan ha preget problemløsingsprosessen til jentene. Sosial ønskverdighet kan for eksempel forekomme ved at informanten svarer det han eller hun mener er sosialt akseptert (van Someren et al., 1994). I problemløsingsprosessen kan det for eksempel hende at Tuva og Siri var redd for å vise at de ikke kunne forsvare løsningsmetoden sin. Men i og med at problemene var matematiske, vil det være vanskelig å skjule mangel av kunnskap. Det er derfor rimelig å anta at høyttenkningssekvensene ikke i stor grad var preget av sosial ønskverdighet.

Noe annet ved høyttenkningsmetoden som kan ha påvirket studiens validitet, er at jeg som forsker kan ha påvirket deltakeren til å svare i en bestemt retning. Ved å gi hint kan forskeren påvirke elevens tankeprosess, og hvis disse hintene blir for store, vil de påvirke resultatene i betydelig grad (van Someren et al., 1994). Dette var jeg vært bevisst på under høyttenkningsdelen, og jeg prøvde dermed å la elevene arbeide uten min innblanding i så stor grad som mulig. For at jeg skulle få tilgang til elevenes tankeprosess i problemløsingen, var det også viktig at eleven følte seg trygg. Jeg valgte derfor å gå frem som beskrevet i **kapittel 3.4.2,** ved blant annet og snakke om andre ting før vi startet, for å skape en uformell stemning.

4. RESULTATER

I dette kapittelet presenteres studiens resultater i samme rekkefølge som datainnsamlingen ble gjennomført. Det vil si at i **kapittel 4.1** er resultatene fra kartleggingstesten presentert, mens i **kapittel 4.2** er resultatene fra høyttenkningsdelen presentert. Elevresponsene på den diagnostiske testen er kategorisert ut i fra om de kan karakteriseres som algebraisk, transisjonal eller aritmetisk som beskrevet i **kapittel 3.2.1**. De mest interessante resultatene fra spørreskjemaet er presentert i sammenheng med resultatene fra den diagnostiske testen som beskrevet i **kapittel 3.2.3**. Videoopptakene fra høyttenkningsdelen er presentert som et sammendrag for hver oppgave og deretter analysert. Analysearbeidet ble gjennomført som beskrevet i **kapittel 3.4.3**, og elevenes resonnement og metakognitive reguleringsferdigheter er karakterisert.

4.1 Kartleggingstest

4.1.1 Diagnostisk test

Oppgave 2a

Hvis $a = b + 3$ *, hva skjer med a hvis b øker med 2? Forklar svaret ditt.*

Riktig svar: «a øker med 2».

Tabell 5: Antall og prosentvis fordeling av elevresponsene kategorisert som algebraisk, transisjonal og aritmetisk på oppgave 2a.

	Algebraisk	Transisjonal	Aritmetisk
Antall elever	30	1	11
Prosent	72 %	2 %	26 %

På oppgave 2a kan 72 % av elevens løsninger kategoriseres som algebraisk. Av disse elevene var det tolv som lagde en form for tabell hvor de systematisk satte inn ulike verdier for b. En elev skrev at a øker, og svaret ble derfor kategorisert som transisjonal. 26 % av løsningene kan reflektere aritmetisk tenkning. Av disse elleve, var det tre elever som substituerer inn 2 og gir svaret $a = 5$. En elev så ikke på a som en variabel, men holdt a konstant, og svarte $a = b + 1$. Disse løsningene og de resterende sju elevene hadde ulike svar som indikerte at de brukte 2 til å gjøre en beregning, i stedet for å se at en økning med 2 i den ene variabelen ville gi en tilsvarende økning i den andre. Svarene kunne for eksempel se slik ut $2a = 2b + 5$ eller $a = 2b + 3$.

Oppgave 2b

Hvis $f = 3g + 1$ *, hva skjer med f hvis g øker med 2? Forklar svaret ditt.*

Riktig svar: «f øker med 6».

Tabell 6: Antall og prosentvis fordeling av elevresponsene kategorisert som algebraisk, transisjonal og aritmetisk på oppgave 2b.

	Algebraisk	**Transisjonal**	**Aritmetisk**
Antall elever	17	7	18
Prosent	40 %	17 %	43 %

Selv om denne oppgaven er nokså lik oppgave 2a, er resultantene forskjellig. 40 % av elevresponsene kan kategoriseres som algebraisk. De 17 elevene som klarte denne oppgaven, klarte også oppgave 2a, og det var altså ingen som kun løste oppgave 2b. Av disse 17 elevene, var det ti elever som systematisk testet ulike verdier for g, og klarte å generalisere dette resultatet til at *f* øker med 6 hver gang g øker med 2. De resterende sju elevresponsene som reflekterer algebraisk tenkning forankret svaret sitt med en likning. De satt $f = 3(g + 2) + 1 \Rightarrow f = 3g + 6 + 1$, og sammenlignet dette med verdien til *f* i oppgaveteksten. Noen skrev ikke likningen direkte, men uttrykte den samme algebraiske tenkningen med tekst og matematiske uttrykksforklaringer.

17 % av responsene på denne oppgaven kan kategoriseres som transisjonale, ved at elevene fastslo at *f* øker, men ikke med hvor mye. 43 % kategoriseres som aritmetisk. Tre av disse 18 elevene, testet med ulike verdier av *g*, men klarte ikke å generalisere svaret sitt til at *f* øker med 6 når g øker med 2. Fire av elevene sier at *f* øker med 2 når g øker med 2. De resterende elevene gir svar som i likhet med oppgave 2a, indikerte at de gjorde beregninger med 2, i stedet for å se på forholdet mellom de to variablene. Tre elever substituerte inn 2 for g og fikk svaret $f = 7$. En elev så på *f* som en konstant, og ga svaret $f = 3g - 1$. Dette er den samme eleven som så på *a* som en konstant i oppgave 2a. Sju elever gjorde andre operasjonelle beregninger med 2 som ga svar som $f = 5g + 1$, $f = 6g + 1$ og $2f = 5g + 3$. To av disse sju elevene svarer også *f* øker med 2.

Analyse

Ved å sammenlikne resultatene på oppgave 2a og 2b fra **tabell 5** og **tabell 6**, med resultatene fra den samme oppgaven i Gray et al. (2009) og Hart et al. (1985) sine studier presentert i

tabell 2 (side 28), kan man se at denne klassen skårer relativt høyt i forhold til alderen. På begge oppgavene er det tilnærmet lik prosentvis andel, til og med høyere, som svarer algebraisk i de to 1T klassene i forhold til studentene som tok Kalkulus 1 på universitetsnivå. Henholdsvis 72 % mot 67 % for oppgave 2a, og 40 % mot 30 % for oppgave 2b. Elevene i 1T-klassene har dessuten langt bedre resultater enn elevene som var et år yngre (14-15 år), hvor kun 26 % fikk til oppgave 2a og 13 % oppgave 2b. Selv om elevene i klassen plasserer seg nokså høyt i denne sammenlikningen, er det fortsatt mange av elevene som har besvart oppgave 2a og 2b ved kun å bruke symbolmanipulasjoner og regler. Dette kan tyde på at de ikke har forståelsen som ligger til grunn for bruken av variablene i en slik funksjonell sammenheng.

Det var 13 elever som ble karakterisert som algebraisk i oppgave 2a, men transisjonale eller aritmetiske i oppgave 2b. Det gjelder henholdsvis seks og sju responser. Man kan spørre seg om disse elevenes responser til oppgave 2a egentlig burde bli karakterisert som algebraisk, eller om de får riktig svar kun på grunn av oppgavens art. Fire av de sju elevene som karakteriseres som aritmetiske begrunner svaret sitt i oppgave 2a med at: «*det er en likning og derfor må det skje det samme på begge sider av likhetstegnet*». Når de overfører den samme fremgangsmåten til oppgave 2b, svarer de feilaktig at *f* øker med 2, med samme begrunnelse som i oppgave 2a. Det samme gjelder for en av elevresponsene som karakteriseres som transisjonal i oppgave 2b, men denne eleven sier «*f* øker» og ikke at «*f* øker med 2». To elevresponser, en som kategoriseres som aritmetisk og en som transisjonal i oppgave 2b, blir kategorisert som algebraisk i 2a, men elevene substituerte inn 2 for *b* og svaret ble riktig på grunn av oppgavens karakter. Da de gjorde det samme i oppgave 2b, ble svaret naturligvis feil. Disse elevene forstod mest sannsynlig ikke hva oppgave 2a egentlig spurte etter, men de fikk riktig svar på grunn av oppgavens art.

Selv om man ikke får et helhetlig innblikk i elevenes matematiske resonnement ut i fra deres skrevne svar, ser man resonnementene likevel relativt godt. For å få et relativt godt innblikk, er det nødvending å be elevene forklare fremgangsmåten sin. Av elevresponsene kan man se at elevene mest sannsynlig har skrevet mer enn det de ville gjort hvis de løste oppgavene på egenhånd uten denne oppfordringen.

I analysen av spørreskjemaet har jeg valgt å fokusere på hvordan elevene løste oppgave 2b, og sett bort i fra 2a. Grunnen til dette er som sagt at noen av elevene feilaktig kan ha blitt kategorisert som algebraisk på oppgave 2a, i og med at man kan se at løsningsmetoden deres har vært aritmetisk på oppgave 2b. Det var dessuten ingen elever som fikk til oppgave 2b, som ikke fikk til oppgave 2a. Til høyttenkningsmetoden var det da de 17 elevene som ble kategorisert som algebraisk på oppgave 2b som jeg kunne velge blant.

4.1.2 Spørreskjema

Spørreskjemaet besvarte elevene ut i fra hvordan de løste oppgave 2a og oppgave 2b. Resultatene er presentert i **tabell 7**. Etter å ha sett elevenes resultater fra den diagnostiske testen opp mot hva de har krysset av for utsagnene i spørreskjemaet, ønsket jeg å trekke frem interessante situasjoner. Alle utsagnene vil derfor ikke bli nevnt. Grunnen til dette er ikke nødvendigvis at disse utsagnene ikke er betydningsfulle for metakognitiv reguleringsadferd, men at analysen av utsagnene ikke ga noen betydningsfulle bidrag som kunne brukes til å besvare mitt forskningsspørsmål.

Analyse

Utsagn 2: «Jeg passet på at jeg forstod hva det ble spurt etter i oppgaven», representerer metakognitiv reguleringsadferd når det kommer til det å lese og forstå oppgaven, altså prediktiv adferd. De fleste elevene, 81 %, svarte «Ja» på dette utsagnet. De to som svarte «Nei» har ikke løst noen av oppgavene algebraisk, men det er 19 som svarte «Ja», uten at de har fått til oppgave 2b. Disse elevene rapporter altså at de passet på at de forstod hva det ble spurt etter i oppgaven, men kom likevel ikke frem til rett svar. Dette utsagnet ligger tett opp til utsagn 14: «Jeg tenkte på om det var noe av informasjonen, gitt i oppgaven, som trengte spesiell oppmerksomhet», som også inngår i prediktiv metakognitiv adferd. Av de 17 elevene som fikk til begge oppgavene, var det kun fem elever som svarte «Ja» på denne påstanden. At det var en så liten andel, kan ha noe med at ikke denne oppgaven kan defineres som en problemløsingsoppgave for alle disse elevene. Det er vanskelig for elevene og rapportere om metakognitiv adferd hvis oppgaven spørreskjemaet er tilknyttet, er en rutineoppgave for de aktuelle elevene (Fortunato et al., 1991) (se **kapittel 3.2.2**). Av de 25 elevene som ikke løste oppgave 2b algebraisk, var det hele 10 elever som svarte «Ja» på utsagn 14. Disse elevene rapporterte det de la spesielt merke til ved oppgaven som: *«Jeg så på oppgaveteksten nøye for å være sikker at jeg forsto informasjonen og oppfattet den riktig»* og *«Når g og b skulle øke med 2».* Altså det som ikke trengte spesiell oppmerksomhet. Elevene som derimot løste oppgaven algebraisk og svarte «Ja» på utsagn 14, rapporterte derimot for eksempel: *«At det* *sto 3g i oppgaven i stedet for bare g, og at det var bare g som skulle økes, ikke hele 3g».* Altså det som faktisk trengte spesiell oppmerksomhet i oppgaven.

Tabell 7: Resultatene fra spørreskjemaet. Oppgitt i antall og prosent som har avkrysset «Ja», «Nei» eller «Usikker».

Utsagn	**JA**	**NEI**	**Usikker**
1. Jeg leste oppgaven mer enn en gang.	38	3	1
	91 %	7 %	2 %
2. Jeg passet på at jeg forstod hva det ble spurt etter i oppgaven.	34	2	6
	81 %	5 %	14 %
3. Jeg vurderte hvor mye tid jeg trengte for å løse oppgaven.	3	32	7
	7 %	76 %	17 %
4. Jeg løste oppgaven med en fremgangsmåte jeg kunne fra før.	16	7	19
	38 %	17 %	45 %
5. Jeg prøvde å huske om jeg tidligere hadde jobbet med en lignende oppgave.	28	9	15
	67 %	21 %	12 %
6. Jeg lagde en strategi for å løse oppgaven.	9	22	11
	22 %	52 %	26 %
7. Jeg visste hvordan jeg skulle begynne for å løse oppgaven.	21	14	7
	50 %	33 %	17 %
8. Da jeg løste oppgaven møtte jeg på en utfordring.	16	19	7
	38 %	45 %	17 %
9. Da jeg løste oppgaven fant jeg en feil jeg hadde gjort og rettet den.	11	27	4
	26 %	64 %	10 %
10. Jeg tenkte på hvordan jeg gikk frem for å løse oppgaven.	30	5	7
	71 %	12 %	17 %
11. Jeg prøvde ulike strategier for å løse oppgaven.	16	19	7
	38 %	45 %	17 %
12. Jeg spurte meg selv om svaret mitt ga mening.	36	5	1
	86 %	12 %	2 %
13. Jeg undersøkte at mine beregninger var riktige.	29	5	8
	69 %	12 %	19 %
14. Jeg tenkte på om det var noe av informasjonen, gitt i oppgaven, som trengte spesiell oppmerksomhet.	15	15	12
	36 %	36 %	28 %

Det å lage en strategi for å løse en oppgave, inngår i metakognitiv reguleringsadferd når det kommer til det å planlegge fremgangsmåten. På utsagn 6: «Jeg lagde en strategi for å løse oppgaven», er det ni elever som svarer «Ja», der kun en av disse ikke løste noen av oppgavene algebraisk. I og med at oppgave 2b er den med høyest vanskelighetsgrad, er denne den mest interessante. En strategi for å løse denne oppgaven, er å systematisk sette inn ulike verdier for g, for deretter å se hvor mye *f* øker med, når *g* øker med 2. Med denne strategien var det ti elever som ble kategorisert som algebraisk, mens kun tre som aritmetisk. Det er altså flere elever som har lagd en strategi, men som ikke har rapportert at de har gjort det. Dette kan igjen indikere at oppgavene kan beskrives som en rutineoppgave for flere av elevene, i og med at det er vanskelig å rapportere om nesten automatiske hendelser.

Av de 17 som løste begge oppgavene algebraisk, svarer nesten alle «Ja» på utsagnene 1, 2, 4, 7, 10, 12 og 13. Dette tilsier at disse elevene har brukt metakognitive reguleringsferdigheter, og det kan ha hjulpet dem i problemløsingen. For eksempel utsagn 10: «Jeg tenkte på hvordan jeg gikk frem for å løse oppgaven», som omhandler det å overvåke prosessen fram mot svaret. Av de 17 elevene som løste begge oppgavene algebraisk, var det kun en elev som svarer «Nei». Og utsagn 13: «Jeg undersøkte at mine beregninger var riktige», inngår også i metakognitiv overvåkningsadferd. Ingen elever som løste begge oppgavene algebraisk, svarte «Nei» på dette utsagnet. Det var ikke like mange av elevene som var kategorisert som algebraisk på oppgave 2b som svarte «Ja» på de andre utsagnene. Det betyr ikke nødvendigvis at de ikke brukte metakognitive reguleringsferdigheter. At for eksempel mange av disse elevene svarte «Nei» på utsagn 9, tilsier kun at elevene ikke fant en feil de hadde gjort og rettet den. Hvis elevene ikke gjorde noen feil, kunne de heller ikke finne den.

Det var 19 elever som svarte «Nei» på utsagn 8: «Da jeg løste oppgaven møtte jeg på en utfordring». Selv om dette er en forholdsvis høy andel, var det hele 13 av disse elevene som løste begge oppgavene algebraisk. Tre elever løste bare den første oppgaven, og tre løste ingen. Ved videre analyse av disse seks elevresponsene, kan man se at de bruker samme fremgangsmåte i a og b. Av den grunn kan det være de trodde deres løsning var rett, og de derfor rapporterer at de ikke møtte på noen utfordringer.

Utsagn 9: «Da jeg løste oppgaven fant jeg en feil jeg hadde gjort og rettet den», inngår i metakognitiv reguleringsadferd når det kommer til det å overvåke prosessen. Responsen på denne påstanden ble avgjørende for utvelgelse av deltakere til høyttenkningsdelen, som beskrevet i **kapittel 3.3**. Det var to elever som begge løste oppgave 2a og 2b algebraisk, og rapporterte hvilken feil de hadde funnet og rettet. Av deres besvarelse på den diagnostiske testen kan man se at dette førte til at de løste oppgaven algebraisk.

Det er altså ikke klare sammenhenger mellom at alle som har løst oppgave 2a og 2b algebraisk, har svart på en spesiell måte på spørreskjemaet. Men man kan likevel se fellestrekk og indikasjoner som viser at det er viktig å besitte gode metakognitive reguleringsferdigheter for å løse oppgavene.

4.2 Høyttenkningsmetoden

Oppgavene Tuva og Siri gjennomførte og som inngikk i høyttenkningsprotokollen:

Oppgave 3: Hvilken er størst, $2n$ *eller* $n + 2$*? Forklar svaret ditt.*
Riktig svar: Det avhenger. $n < 2 \Rightarrow n + 2\ størst, n = 2 \Rightarrow 2n = n + 2, n > 2 \Rightarrow 2n\ størst.$

Oppgave 4: Hvis likningen $(x + 1)^3 + x = 349$ *er sann når* $x = 6$*, hvilken verdi må* x *ha for at likningen* $(5x + 1)^3 + 5x = 349$ *skal være sann? Forklar svaret ditt.*
Riktig svar: $6/5$ *eller 1,2.*

4.2.1 Tuva

Oppgave 3

Sammendrag

Det første Tuva sier etter å ha lest oppgaveteksten er at: *«*$2n$ *må være størst fordi det er gange».* Hun nøler litt og sier at det ikke alltid er riktig, og påpeker at hvis n er 1 så er $n + 2$ størst. Hun argumenterer for dette ved å sette inn $n = 1$ i uttrykkene, og forklarer at $n + 2$ vil da bli 3, mens $2n$ blir 2.

Videre sier hun: *«(...) hvis* n *er større enn* 2*, så er den (peker på* $2n$*) større. Fordi det er gange, ikke sant».* Hun skriver på arket: *«Dersom* $n < 2$*, er* $n + 2$ *størst»* og *«Dersom* $n > 2$*, er* $2n$ *størst».* Hun blir stille en stund før hun spør seg selv: *«Blir det riktig da?».* For å se om det er riktig setter hun inn verdiene $n = 1$ og $n = 2{,}5$ i uttrykkene, og ser at påstanden hennes stemmer.

Hun tenker videre på om dette også stemmer for negative tall. Før det tester hun $n = 0$ og ser at påstanden hennes stemmer. Hun påpeker med det samme at dette vil også gjelde for negative tall, og sier: *«Den (peker på $n + 2$) blir fortsatt størst på negative tall. Fordi hvis jeg ganger med noe minus, så blir det minus, siden da får jeg et positivt og et negativt ledd der. Men der (peker på $n + 2$) får jeg også et negativt tall, men(...)»*. Hun forklarer dette med å sette inn $n = -2$ og sier: *«Altså hvis det er $-2 + 2$ så får jeg også null. Men hvis jeg ganger -2 med 2 får jeg -4»*. Hun fastslår igjen at påstanden hennes er riktig.

Etter dette virker det som hun føler seg ferdig. Jeg spør derfor om det er noe mer hun vil tilføye, om det er et senario hun ikke har sagt noe om. Da bryter hun ut: *«n kan også være 2. Da er de det samme. Så $2n = 2 + n$ når $n = 2$»*.

Analyse

Etter å ha lest oppgaveteksten er Tuvas umiddelbare svar på dette problemet at: *«$2n$ må være størst fordi det er gange»*. Her resonnerer hun ut i fra tidligere erfaringer, at multiplikasjon gir større svar enn addisjon og resonnementet kan derfor karakteriseres som imitativt, i form av kjent memorert resonnering. Selv om Tuva sier dette, er ikke resten av resonnementet hennes imitativt. Hun forkaster raskt denne løsningsstrategien, noe som tyder på metakognitiv overvåkningsadferd, og legger en ny plan. Hun påpeker at hvis n er 1 så er $n + 2$ størst. Dette støtter hun med verifiserende argumenter, ved at hun setter inn $n = 1$ i uttrykkene og argumentet er dermed matematisk forankret.

Hun sier videre: *«(...) hvis n er større enn 2, så er den (peker på $2n$) større. Fordi det er gange, ikke sant»*. Argumentet hennes er matematiske forankret i iboende matematiske egenskaper, ved at hun vet at $2n$ vil blir større enn $n + 2$ når n er større enn 2, fordi multiplikasjonsuttrykket vil vokse fortere enn addisjonsuttrykket når man setter inn tall for $n < 2$.

Nå skriver Tuva svaret sitt ned på papiret, og overvåkningsadferden hennes blir igjen synlig når hun spør seg selv: *«Blir dette riktig da?»*. Hun sjekker om svaret hennes er riktig ved å sette inn $n = 1$ og $n = 2{,}5$. Hun lager seg en plan for hvordan hun kan sjekke svaret sitt og velger de relevante dataene som trengs, altså metakognitiv planleggingsadferd. Videre tester hun svaret sitt når $n = 0$ og med negative tall trinnvis og på en ryddig måte.

Før hun tester for negative tall påpeker hun: *«Den (peker på $n + 2$) blir fortsatt størst på negative tall. Fordi hvis jeg ganger med noe minus, så blir det minus, siden da får jeg et positivt og et negativt ledd der. Men der (peker på $n + 2$) får jeg også et negativt tall, men(...)»*. Her bruker hun prediktive argumenter i resonnementssekvensen som er forankret i matematiske egenskaper, ved at hun påpeker at multiplikasjon av to negative tall vil gi et negativt tall, og at derfor vil $n + 2$ bli større enn $2n$ hvis n er et negativt tall. Deretter viser hennes metakognitive overvåkningsferdigheter seg, ved at hun sjekker at påstanden er riktig ved å sette inn $n = -2$ i uttrykkene. Hun bruker dermed et verifiserende argument som er matematisk forankret.

Etter det første umiddelbare svaret hennes, inneholder hennes videre resonnement viktige aspekter for kreativt resonnement. Gjennom hele problemløsingsprosessen foretar hun seg også flere handlinger som tyder på gode metakognitive reguleringsferdigheter innenfor hver av de fire kategoriene. Hun overvåker, evaluerer og reflekterer underveis i prosessen og til slutt ender hun opp med en fullstendig oversikt over svaret sitt.

Oppgave 4

Sammendrag

Tuva starter med å lese den litt lange oppgaveteksten høyt. Hun sier: *«Jeg pleier alltid å skrive opp tallene på nytt»*, og gjør nettopp dette. Videre setter hun inn $x = 6$ i den første likningen. Hun nøler en stund og sier: *«Jeg tror egentlig at denne løses på en måte jeg ikke husker, men jeg skal prøve»*. Hun skriver opp den andre likningen og sier at hun vil løse likningen uten å koble den sammen med den første, men hun påpeker at hun ikke er sikker på om dette går an.

Hun sier at $(5x + 1)^3$ er det samme som $(5x + 1)(5x + 1)(5x + 1)$ og skriver dette på arket under likningen, og tar med de andre leddene. Deretter ganger hun de to første parentesene og påpeker at hun etterpå vil: *«Gange inn den siste»*. Hun sier: *«Da blir det $25x^2 + 10x + 1$ fordi det er første kvadratsetning»*. Da hun skal gange med den siste parentesen, gjør hun en feil som hun ikke oppdager der og da. Hun skriver at $25x^2$ ganger $5x$ blir $100x^3$. Resten av utregningene blir riktige, men midt i påpeker hun: *«Jeg tror ikke det her går»*. Hun sier det er fordi det er en tredjegradslikning og at hun da ikke har noen formel for å løse den opp. Men så kommer hun på at hun vil prøve å faktorisere, og fortsetter utregningen. Da jeg spør om utregningen hennes er riktig, ser hun feilen: *«Det blir* $125x^3$*. Det er sånn typisk feil»*. Deretter fortsetter hun utregningen på arket, og ender da opp med: «$125x^3 + 75x^2 + 20x + 1 = 349$». Hun sier da at hun flytter 1 over fordi den ikke har noen x på seg, og sier det da blir 348, siden den blir negativ. Videre faktoriserer hun og setter $5x$ utenfor parentesen. Etter det er gjort, sier hun at hun tror hun har rota seg bort.

Hun leser oppgaveteksten en gang til, og påpeker at hun ser en likhet mellom de to likningene, og begynner å skrive ned opplysningene på nytt. Hun sier samtidig som hun skriver på arket: *«Der er det* $5x$ *… Åja, da må det være det som … fordi …* x *er lik 6 der, så den blir* $(6 + 1)^3 + 6 = 349$*. Mens her er det* $(5x + 1)^3 + 5x = 349$*. Så det må da bli det som 5 må ganges med for å få* $6.6/5.1{,}2$*. Så for at* $(5x + 1)^3 + 5x = 349$ *må* $x = 1{,}2$». For å bevise svaret sitt setter hun inn $x = 5/6$ i den andre likningen, og viser at den da blir lik den første og derfor må være sann.

Analyse

Tuva viser prediksjonsferdigheter ved at hun skriver opp det som allerede er kjent fra oppgaveteksten. Hennes nølende adferd i den utforskende delen av problemløsingsprosessen tyder på at hun ikke er sikker på om løsningsstrategien hennes vil føre frem, noe hun selv også påpeker. Hun lager likevel en plan hun følger relativt langt. Denne handlingsplanen går ut på at hun vil løse likningen for seg selv med tillærte algoritmer, uten å bruke resten av informasjonen i oppgaveteksten.

Planen hennes leder henne et stykke på vei med resonnementssekvenser som kan kategoriseres som algoritmisk. Hun uttrykker for eksempel at hun flytter 1 over på den andre siden av likhetstegnet fordi den ikke har noen x på seg og bytter fortegn. Hun utdypet ikke dette noe videre, men dette er et typisk imitativt resonnement som er bygget på overfladiske kunnskaper. Det er mulig hun egentlig forstår det, men det kan virke som hun tror hun flytter uttrykket over likhetstegnet i stedet for å gjøre den samme operasjonen på begge sider. Underveis i løsningsprosessen, gjør hun dessuten en beregningsfeil, hun ikke selv oppdager før jeg påpeker om utregningene hennes er riktige. Ved en imitativ overfladisk tilnærming, kan som nevnt tidligere, selv den minste feil føre til at eleven ikke finner korrekt svar. På denne aktuelle oppgaven, ville ikke løsningsmetoden hennes ført frem uansett, i og med at hun ikke har kjennskap til algoritmene for å løse en tredjegradslikning og ikke har tilgang til kalkulator eller andre hjelpemidler.

Selv om Tuva følger denne planen relativt langt, gir hun seg ikke når hun ser at den ikke fører frem. Hun forkaster derimot planen, og leser oppgaveteksten på nytt. Dette inngår i metakognitiv reguleringsferdigheter innen overvåknings- og prediksjonskategorien. Denne gangen er hun bestemt på å bruke all informasjon gitt i oppgaveteksten, og gjenkjenner likheten mellom de to likningene. Hun utarbeider altså en ny plan og velger relevante data. Hun sier: «*Der er det* $5x$ *… Åja, da må det være det som … fordi …* x *er lik 6 der, så den blir* $(6+1)^3+6=349$*. Mens her er det* $(5x+1)^3+5x=349$*. Så det må da bli det som 5 må ganges med for å få 6 (…)»*. Her er det prediktive argument hennes matematisk forankret ved at hun ser den strukturelle likheten mellom de to likningene, og resonnementet kan dermed betegnes som kreativt. Hun sier at x må være $6/5$ som er 1,2. Dette støtter hun med verifiserende argumenter, ved å sette $x=6/5$ inn i den likningen, og ser at den blir lik den første. Det at hun sjekker at svaret hennes blir riktig viser igjen hennes overvåkningsferdigheter. Hun skaffer seg også en fullstendig oversikt over svaret og trekker konklusjoner med henvisninger til oppgaveteksten, og viser dermed gode evalueringsferdigheter.

4.2.2 Siri

Oppgave 3

Sammendrag

Siri starter med å lese oppgaveteksten høyt, og uttrykker med det samme at det er $2n$ som må være størst, og argumenterer: *«for det er 2 ganger n»*. Hun nøler litt og sier videre: *«Men det kan hende hvis* n *er 1 eller noe sånt, så blir jo … Ja det kommer an på».* Videre setter hun inn ulike tall for n: «*For hvis* $n=1$ *så blir* $2n$ *bare 2, mens* $n+2$ *blir 3. Men hvis* n *er 2 blir* $2n$ *4, mens* $n+2$ *blir også 4. Men hvis* $n=3$ *blir* $2n$*, det blir 6, også blir* $n+2$*,* $3+2$*, det er 5»*. Ut i fra dette påstår hun: *«Så når det er 1, så er* $n+2$ *størst. Mens når* n *er 2 er det likt. Og når* n *er 3 og oppover så er det* $2n$ *som er størst»*. Hun har fortsatt ikke skrevet noe på papiret, og sier hun aldri har vært så god på det hun kaller forklareoppgaver. Hun starter å skrive: *«For at* $2n$ *skal være størst, så må* n *være større enn 2»*. Hun kommer på at hun ikke har tatt med desimaltall. Hun prøver med $n=0{,}5$, og sier: *«2 ganger* $0{,}5$*, det er jo 1. Men* $0{,}5+2$*, da er* *det* $2{,}5$. *Så da er fortsatt* $2n$ *mindre»*. Videre uttrykker hun at for at $2n$ skal være større enn $n+2$, så må n være større enn 2. Og motsatt, for at $n+2$ skal være større enn $2n$, så må n være mindre enn 2.

Analyse

Av samme begrunnelse som for Tuva, kan Siris første resonneringssekvens karakteriseres som imitativ. Men også hun forkaster kjapt denne løsningen som sitt endelige svar, noe som kan tyde på tilstedeværelse av hennes metakognitive reguleringsferdigheter i form av overvåkning. Siri lager en ny plan. Hun setter inn ulike verdier for n i utrykkene, $n=1$, $n=2$ og $n=3$. Ut i fra resultatet hun får påstår hun: *«Så når det er 1, så er* $n+2$ *størst. Mens når* n *er 2 er det likt. Og når* n *er 3 og oppover så er det* $2n$ *som er størst»*. Hun bruker verifiserende argumenter som er matematisk forankret, men likevel er ikke svaret hennes helt korrekt. Hun har begrenset svaret sitt til å omhandle heltall, og sier at $2n$ er størst når n er 3 og oppover, i stedet for når n større enn 2. Men da hun skal formulere et skrevet svar på papiret, som inngår i metakognitiv reguleringsferdigheter i form av å overvåke prosessen, oppdager hun at hun ikke har sagt noe om desimaltall. Hun sjekker videre om påstanden hennes vil gjelde for desimaltall ved å sette inn 0,5 for n: *«2 ganger* $0{,}5$, *det er jo 1. Men* $0{,}5+2$, *da er det* $2{,}5$. *Så da er fortsatt* $2n$ *mindre»*. Hun blir dermed sikker i sin konklusjon. Hennes resonnementssekvenser inneholder aspekter som gjør at det kan karakteriseres som kreativt. De er plausible og matematisk forankret, ved at hun har verifiserende argumenter som støtter konklusjonene og disse argumentene er forankret matematisk i variablenes egenskaper.

<u>Oppgave 4</u>

Sammendrag

Etter Siri har lest oppgaveteksten høyt, er hun litt nølende og sier: *«Dette er også en sånn oppgave jeg ikke har vært så mye borti»*. Hun påpeker ordet *sann*, og sier de eneste gangene hun kan huske at det er har vært snakk om at en likning er sann, så har det ofte vært i andregradsfunksjoner. Men hun påpeker at dette er en tredjegradsfunksjon.

Hun fortsetter: *«Ja, jeg kan bare prøve å sette inn 6 i den første (likningen) å se om jeg blir noe klokere»*. Hun gjør dette og da hun skal regne sammen $7 \cdot 7 \cdot 7$, tar hun først $7 \cdot 7$ i hodet, og sier dette blir 49. Da hun skal regne ut $49 \cdot 7$ gjør hun dette på papiret, og får 343. Hun sier at det første likningen er sann, i og med at $343 + 6 = 349$.

Hun er litt usikker hva hun skal gjøre med den neste likningen, og sier: *«De spør om hvilken verdi x skal ha i neste likning for at den også skal være sann. Og begge har det (349) som svar. Så det kan ikke være det samme»*. Hun nøler litt før hun sier hun vil løse den andre likningen som hun vil løse enhver likning. Etter hun har skrevet opp likningen og gjort de første utregningene, sier hun at hun ikke har løst en tredjegradslikning før, og er usikker på fremgangsmåten.

Hun leser oppgaveteksten på nytt og uttrykker: *«Ja, jeg kan jo egentlig dele alt på 5, eller fjerne femtallet eller noe sånt (...) det er jo egentlig en lik likning bare at det er 5 før x (...) da må jeg kanskje dele 6 på 5 da. Eller blir det feil kanskje. For at når $x + 1$, så er x 6, men under så står det egentlig bare 5 ganger (...)»*. Videre sier hun at hun vil prøve det, og setter $x = 6/5$ inn i den andre likningen. Hun sier: *«Hvis $x = 6/5$, så blir det inni likningen $5 \cdot 6/5$, og da kan man stryke, og det blir lik 6»*. Hun ser da at hun sitter igjen med den samme som hun regnet ut i starten, og derfor er den andre likningen sann når $x = 6/5$. Hun gir uttrykk for at det er viktig å lese oppgaveteksten nøye i fremtiden.

Analyse

Siri starter med å referere til at hun ikke har sett en slik oppgave før, og understreker ordet *sann* i oppgaveteksten. Det å understreke betydningsfulle ord inngår i metakognitiv reguleringsferdigheter når det kommer til prediksjon. Hun nøler i starten, og gir uttrykk for at hun ikke vet hvilken handlingsplan som vil føre frem til riktig svar. I den utforskende fasen av problemløsingsprosessen prøver hun seg heller frem ved å sette inn $x = 6$ i den første likningen. I denne prosessen bruker hun imitativ memorert resonnering for den lille gangetabellen, og hun husker løsningsalgoritmen for å multiplisere tall som er større.

Siri gjenkjenner den strukturelle likheten mellom de to likningene, men planen hennes blir likevel å teste en imitativ algoritmisk tilnærming. Hun vil løse den andre likningen som hun løser enhver likning, men etter noen trinn i prosessen forkaster hun planen da hun ser at den ikke fører frem. Til nå har hennes resonnering vært preget av memorert kunnskap og algoritmer. Det at hun forkaster planen som ikke fører frem er en viktig metakognitiv reguleringsferdighet i form av å overvåke prosessen.

Siri gir seg ikke, men leser oppgaveteksten på nytt. Nå velger hun relevante data og setter informasjonen i oppgaveteksten sammen. Dette er viktige aspekter som inngår i metakognitiv reguleringsferdigheter i form av prediksjon og planlegging. Denne gangen er de prediktive argumentene hun kommer med forankret matematisk ved at hun referer til den strukturelle likheten mellom likningene. Dette tyder derfor på at resonnementet hennes kan karakteriseres som kreativt. Hun bruker verifiserende argumenter ved å sjekke at svaret sitt er korrekt ved å sette $x = 6/5$ inn i likningen, og ser at den da blir lik som den første. Dette er en viktig overvåkningsferdighet og på denne måten skaffer hun seg en fullstendig oversikt over svaret sitt og trekker konklusjoner med henvisning til oppgaveteksten. Hun uttrykker: *«hvis* $x = 6/5$*, så blir det inni likningen* $5 \cdot 6/5$*, og da kan man stryke, og det blir lik 6».* Det kan hende Siri egentlig vet at man ikke «stryker» 5 over og under brøkstreken, men at man forkorter brøken ved å dele på 5 over og under brøkstreken. Akkurat denne resonneringssekvensen kan karakteriseres som imitativ, men er likevel pålitelig ved at eleven gjenkjenner oppgaven, og vet nøyaktig hvordan den skal løses og hvorfor den valgte algoritmen er hensiktsmessig.

5. DISKUSJON

Forskningsspørsmålet til denne studien er som nevnt: *«Hvilken sammenheng er det mellom elevers metakognitive reguleringsferdigheter og deres matematiske resonnement i løsning av variabelproblemer, og hva har denne sammenhengen å si for problemløsing?»*. I dette kapitelet vil jeg drøfte mine funn i lys av teorien presentert i **kapittel 2**. Forskningsspørsmålet vil bli besvart i form av tre delkapitler. I og med at jeg har brukt en mixed method som kan karakteriseres som participiant-selection variant (se **kapittel 3.1**), er hovedvekten lagt på funnene fra høyttenkningsmetoden. **Kapittel 5.1** og **kapittel 5.2** omhandler derfor funn gjort i Tuva og Siris høyttenkningsprotokoller, mens i **kapittel 5.3** er funn fra kartleggingstesten trukket inn i tillegg.

5.1 <u>Elevenes umiddelbare resonnement er imitativt</u>

Et gjennomgående funn i alle de fire delene av høyttenkningsprotokollene, er at både Siri og Tuvas første resonneringssekvenser er imitative og algoritmiske. På oppgave 3 var begge jentenes umiddelbare respons at $2n$ måtte være størst på grunn av gangetegnet. Dette er som sagt en form for imitativ memorert resonnering som bygger på erfaringer (Lithner, 2008). Jentenes erfaring tilsier at multiplikasjon gir større tall enn addisjon.

Oppgave 4 er av en slik art at 1T elever ikke kan løse den uten at all informasjon gitt i oppgaveteksten blir brukt. Likevel vil begge jentene løse den andre likningen for seg selv, uten å ta hensyn til opplysningene gitt om den første likningen. Jentene påpeker at de er usikre på om løsningsmetoden deres vil føre frem, men starter å løse tredjegradslikningen med de løsningsalgoritmene de kjenner til i sammenheng med likninger. I og med at oppgavetypen ikke er kjent for jentene, er algoritmene de velger basert på algoritmens overflaterelasjon til oppgaven. De velger seg algoritmer de tror vil løse oppgaven, uten at de vet utfallet på forhånd. Særlig Tuva følger denne planen langt, og da den første algoritmen ikke fører frem, velger hun seg en ny algoritme som også har en overflaterelasjon til oppgaven, nemlig faktorisering. Jentenes første resonneringssekvenser kan dermed betegnes som det Lithner (2008) karakteriserer som avgrenset algoritmisk resonnement.

Det kan virke som jentene først og fremst vil bruke memorerte regler og prosedyrer for å løse oppgavene. Deres umiddelbare reaksjon når de møter en ny oppgave er imitativ, og de prøver å finne formelen som passer til oppgaven. Som Lithner (2008) påpeker kan dette ha noe å gjøre med læringsmiljøet til jentene. Lærebøker og skoleoppgaver er utformet på en slik måte at elevene skal finne den passende algoritmen, og da de kommer frem til svaret kan elevene gå videre uten å argumentere eller tenke over om det gir mening (Ross, 1998). I og med at de ikke får trening i å løse problemoppgaver, blir resonneringen deres overfladisk og imitativ. Elevene jakter ikke den beste og enkleste måten å løse en oppgave på, men det mest plausible innenfor deres kompetanse; å finne algoritmen (Lithner, 2008).

I **tabell 3** (side 37) kan man se at det kun er en liten andel elever som løser oppgave 3 og 4 korrekt. Det kan være elevene som ikke får korrekt svar, sier seg ferdig med oppgaven uten å reflektere videre over hva de har svart. Schoenfeld (1985) skiller mellom taktisk og overvåkende problemløsingsadferd (se **kapittel 2.2.1**). Elevenes taktiske beslutninger innebærer det eleven iverksetter, som algoritmer og heuristikker, mens overvåkende problemløsingsadferd vil si elevenes metakognitive avgjørelser. Det er den taktiske problemløsingsadferden som først dominerer hos Tuva og Siri, og deres første responser er dermed imitative. Garofalo og Lester (1985) påpeker at elever ofte mangler overvåkende metakognitive reguleringsferdigheter, som er svært viktig ved løsning av problemoppgaver.

5.2 Metakognisjon kan bidra til kreativt resonnement

Et viktig aspekt ved metakognitive reguleringsferdigheter er det å kunne forkaste planer og strategier som ikke fører frem (Desoete, 2008; Garofalo & Lester, 1985). På oppgave 3 forkaster begge jentene raskt deres umiddelbare imitative tilnærming, og legger en ny plan for å løse oppgaven. Begge jentene motbeviser deres første påstand om at $2n$ er størst, ved å sette inn en verdi som gjør at dette ikke stemmer. Gjennom hele høyttenkningsprosessen er det viktig å huske på at det vil være deler av deltakerens tankeprosesser som ikke blir verbalisert. **Figur 7** (side 34) viser at det bare er informasjon som kontinuerlig er i arbeidsminnet som kan komme til uttrykk. De underforliggende delene som ligger i langtidsminnet og de kognitive prosessene knyttet til disse, vil derfor ikke jeg som forsker få et fullstendig innblikk i. Akkurat hvilke tanker som gjorde at jentene så at deres første påstand ikke stemte, kommer ikke fram av høyttenkningsprotokollene, men at dette faktisk skjedde indikerer likevel metakognitiv overvåkningsadferd.

Ved at jentene forkaster den gamle planen og utarbeider en ny, innledes resonnementssekvenser som inneholder viktige aspekter av kreativt resonnement. Som beskrevet i analysedelene er de neste resonneringssekvensene både plausible og matematisk forankret i variablenes egenskaper. Jentenes metakognitive reguleringsferdigheter er dessuten gjennomgående, ved at de spør seg selv om svaret gir mening og tester for ulike tall, både positive, negative og desimaltall. Det at for eksempel Siri kommer på at hun vil teste for desimaltall, gjør at hun endrer svaret sitt til at vippepunktet der $2n$ blir større enn $n + 2$ er i $n = 2$ og ikke i $n = 3$.

På oppgave 4 forkaster også jentene planen som ikke fører frem, og utarbeider en ny. Deres metakognitive overvåknings- og evalueringsferdigheter kommer til syne, da de evaluerer handlingene sine, og klarer å se at løsningen ikke vil føre frem. De viser også gode prediksjonsferdigheter, ved at de går tilbake og leser oppgaveteksten på nytt, for så å se helheten i oppgaven og den strukturelle likheten mellom de to likningene. Jentenes videre resonneringssekvenser kan betegnes som kreative, ved at de bruker prediktive og verifiserende argumenter som er matematisk forankret. For eksempel er Siris prediktive argumenterer forankret matematisk ved at hun refererer til den strukturelle likheten mellom likningene. Og det verifiserende argumentet blir forankret matematisk ved at hun sjekker at svaret blir riktig da hun setter $x = 6/5$ inn i likningen, og ser at den blir lik den første likningen.

Av høyttenkningsprotokollene kommer det altså frem en interessant sammenheng mellom jentenes metakognitive reguleringsferdigheter og deres matematiske resonnement. Da de metakognitive reguleringsferdighetene inntrer, innleder dette kreative resonnmentssekvenser som gjør at jentene i tillegg løser oppgavene riktig og algebraisk. For at et resonnement skal kunne betegnes som kreativt er det viktig at det er støttet av argumenter. Lithner (2008) beskriver hvordan Schoenfeld (1985) seks faser av problemløsingsprosessen kan støttes av prediktive og verifiserende argumenter (se **kapittel 2.2**), og hvordan gjennomførelsen av oppgaven i tillegg må ha et metakognitivt argument. Av oppgave 3 kommer dette frem i både Tuva og Siris problemløsing ved at de drives fremover av å teste om påstandene deres er riktige. Dette er en metakognitiv reguleringsferdighet fordi de setter prøve på svaret sitt, og dermed overvåker prosessen. Samtidig gjør dette at argumentene deres blir forankret i iboende matematiske egenskaper. I oppgave 4 kan man se det samme, jentene setter prøve på svaret sitt og argumenterer og reflekterer rundt hvorfor svaret er riktig.

Høyttenkningsprotokollene viser i tillegg at det er en sammenheng mellom metakognisjon og kreativt resonnement, ved jentenes fleksible tilnærming til oppgavene. Kreativitet i problemløsing er basert på en tankeprosess som er fleksibel, og som ikke er hindret av å være fiksert på en fremgangsmåte (Haylock, 1997; Lithner, 2008). Jentene er ikke fiksert på en løsningsmetode, men klarer å finne og iverksette nye metoder for å løse oppgaven. Sammenhengen til de metakognitive ferdighetene blir synliggjort ved at denne fleksible tilnærmingen blir drevet fremover av jentenes metakognitive avgjørelser. På oppgave 3 spør for eksempel Tuva seg selv: *«Blir dette riktig da?»*, som innleder en prosess hvor hun tenker i nye baner. Et annet eksempel er fra Siris protokoll på oppgave 4, da hun går tilbake for å lese oppgaveteksten på nytt og velger de relevante data som gjør at hun starter en helt ny løsningsmetode. Kreativitet innebærer altså det å tenke nye veier. Oppgavene Tuva og Siri skulle løse i høyttenkningsdelen er oppgaver som ikke er typiske for jentene fra matematikkundervisningen, noe de selv også påpeker. Det viser seg at jentenes metakognitive reguleringsferdigheter er essensielle for å kunne tenke nye veier, og dermed få løst oppgavene.

Lithner (2008) beskriver overfladiske kunnskaper når det kommer til å skulle argumentere og resonnere i matematikken. Han kaller imitativ resonnering for overfladisk fordi den ikke krever iboende kunnskaper. Lithner (2008), Kilpatrick et al. (2001) og flere skriver om hvordan overfladiske kunnskaper ligger til grunn for lærevansker og mangel på forståelse i matematikk (se **kapittel 2.2**). Likevel påpeker Lithner (2008) at imitativt resonnement kan være pålitelig og hensiktsmessig, og dermed et viktig aspekt ved læring av matematikk. Noen oppgavetyper lar seg ikke løses uten innlærte algoritmer og regler, og dessuten er det hensiktsmessig og tidsbesparende å resonnere imitativt hvis eleven har forståelse for det som ligger til grunn for algoritmen. Selv om jeg har påpekt at Tuva og Siris resonnementssekvenser inneholder viktige aspekter ved et kreativt resonnement etter de har brukt metakognitive reguleringsferdigheter, kan man samtidig karakterisere visse av sekvensene som imitative. For eksempel bruker Siri en innlært algoritme da hun skal bevise svaret sitt på oppgave 4. Hun sier: *«Hvis $x = 6/5$, så blir det inni likningen* $5 \cdot 6/5$*, og da kan man stryke, og det blir lik 6»*. Dette er en pugget løsningsalgoritme for å forkorte brøker, men Siri har mest sannsynlig forståelsen som ligger til grunn for algoritmen. Det er da både tidsbesparende og hensiktsmessig å bruke den.

Til forskjell er de innledende imitative resonneringssekvensene til Tuva og Siri lite hensiktsmessige. Når imitativ resonnering blir brukt på en oppgave som kan karakteriseres som en problemløsingsoppgave for den aktuelle eleven viser ulempene ved imitativ og overfladisk resonnering seg svært godt. Den minste feil gjør at algoritmen ikke fører frem til korrekt svar (Lithner, 2008). Dette kommer spesielt frem i Tuvas imitative løsningsforsøk av oppgave 4. Selv om hennes algoritmiske tilnærming uansett ikke ville ført frem, i og med at hun ikke kunne den riktige algoritmen, eksemplifiserer dette at den minste regnefeil gjør at svaret ville blitt ukorrekt. Tuva sier at $25x^2$ ganger $5x$ blir $100x^3$. Så selv om algoritmen hadde vært riktig, ville en slik feil uoppdaget gjort at løsningen ikke førte frem til rett svar. For at slike feil skal bli oppdaget, er det viktig at elever besitter gode metakognitive reguleringsferdigheter. De må overvåke løsningsfremgangen sin og kunne evaluere svaret sitt, ved for eksempel og sette prøve på det.

5.3 Elever med gode metakognitive og resonnerende ferdigheter er bedre problemløsere

Resultatene fra høyttenkningsdelen viser altså at det er sammenhenger mellom elevers metakognisjon og hvordan de resonnerer. Som beskrevet i **kapittel 3.2.4**, er en av hovedgrunnene til at jeg har valgt en participant-selection variant at oppgave 2a og 2b mest sannsynlig ikke kan beskrives som en problemløsingsoppgave for alle de 42 elevene som deltok. Av den grunn kan det ha vært vanskelig for disse elevene å besvare utsagnene i spørreskjemaet, i og med at elever ikke er like oppmerksomme når de utfører rutineoppgaver (Fortunato et al., 1991). Likevel kan man se de samme tendensene i resultatene for kartleggingstesten. Funnene trukket frem i analysedelen av spørreskjemaet (se **kapittel 4.1.2**) viser at elevene som har besvart oppgave 2b algebraisk rapporterer om gode metakognitive reguleringsferdigheter. For eksempel gir disse elevene oppmerksomhet til de opplysningene i oppgaveteksten som er viktige for å løse oppgaven. Mens elevene som løser oppgaven aritmetisk, og dermed ikke får den til, rapporterer om at de ikke har gitt de samme opplysningene oppmerksomhet.

Selv om man ikke får et direkte innblikk i elevens resonnement kun fra deres skrevne svar, får man en indikasjon på deres forståelse for variabler. Oppgave 2b er på det Küchemann (1981) beskriver som det høyeste forståelsesnivået innen algebra (se **kapittel 2.1**), og det kan dermed tyde på at elever som får til denne oppgaven har en god forståelse for variabler. I og med at adaptiv resonnering er en viktig del av en helhetlig matematisk kompetanse (Kilpatrick et al., 2001), kan man tenke seg at elever som får til oppgave 2b besitter gode resonneringsferdigheter. Av den grunn kan man derfor tekke paralleller til at det er en sammenheng mellom elevens metakognitive reguleringsferdigheter og deres resonnerende evner også fra kartleggingstesten.

Algebra er komplekst, men mange elever ser på det som et isolert system med symbolmanipulasjoner og regler (Brekke et al., 2000). Dette viser også resultatene fra kartleggingstesten, mange elever klarer ikke å løse oppgavene der variablene blir brukt for å uttrykke generaliseringer. I oppgave 2b samvarierer to variabler i et adaptivt og multiplikativt funksjonsforhold, men et flertall elever bruker likevel aritmetiske regler for å løse oppgaven. At elevene resonnerer aritmetisk i stedet for algebraisk, gjør at de ikke klarer å løse problemløsingsoppgaver i algebra (Stacey & MacGregor, 2000).

Lithner (2008) og Kilpatrick et al. (2001) beskriver elevenes resonnerende evner som viktige egenskaper ved problemløsing. Elevene må kunne forsvare og argumentere for løsningsmetodene sine. Det samme gjelder metakognitive reguleringsferdigheter. Gode problemløsere må kunne velge informasjonen som trengs for å forstå en oppgave eller et problem, planlegge fremgangsmåten, velge gode strategier for å utføre planene og overvåke utførelsen mens strategiene testes. De må dessuten kunne evaluere utfallet av strategiene og planene, og om nødvending, forkaste planer og strategier som ikke fører frem til løsningen (Garofalo & Lester, 1985). Oppgavene brukt i høyttenkningsdelen er oppgaver som kan karakteriseres som problemløsingsoppgaver for Tuva og Siri, og er begge på det øverste forståelsesnivået av variabler (Küchemann, 1981). Jentene løste først oppgaven etter de hadde brukt sentrale metakognitive reguleringsferdigheter, og kunne utføre resonneringssekvenser som inneholder viktige aspekter av et kreativt resonnement. Disse resultatene viser dermed hvor viktig det er for elevene å besitte gode metakognitive- og resonnerende ferdigheter for å være gode problemløsere.

6. AVSLUTTENDE REFLEKSJON

Dette kapittelet omhandler mine avsluttende refleksjoner rundt studien. I **kapittel 6.1** er studiens implikasjoner presentert og jeg har samtidig tatt for meg hvordan jeg vil gå frem ved videre forskning. Tilslutt, i **kapittel 6.2**, er studiens konklusjon presentert.

6.1 Implikasjoner og veien videre

Som nevnt i innledningen, har elevers metakognitive ferdigheter og matematiske resonnement i forhold til problemløsing og elevers prestasjoner i matematikk, lenge vært et tema for forskning. Studiene er ikke nødvendigvis rettet mot variabler, men variabler generelt har det blitt gjort mye forskning på. Av den grunn er det rikelig med informasjon om temaene hver for seg, men det ikke skrevet mye om sammenhengen mellom metakognitive reguleringsferdigheter og matematisk resonnement for løsning av variabelproblemer. Min forskning vil ikke dekke dette «hullet» i det matematikkdidaktiske forskningsfeltet, men den er et bidrag på veien til opplysning rundt dette temaet.

Funnene gjort i min studie kan ikke generaliseres til å gjelde alle elever i Norge. Til det er det for få deltakere, og jeg har dessuten valgt to nokså like deltakere til høyttenkningsdelen. Jentene valgt ut til høyttenkningsdelen viste begge at de kunne mestre en oppgave på Küchemann (1981) fjerde forståelsesnivå i algebra, i tillegg til at de rapporterte om gode metakognitive reguleringsferdigheter gjennom spørreskjemaet. Ved å velge disse jentene, har betydningen av det å besitte gode resonnerende ferdigheter og metakognitive reguleringsevner for å kunne løse problemoppgaver med variabler blitt belyst.

Som tidligere nevnt, har tiden vært den begrensende faktoren for denne studien. Hadde jeg hatt bedre tid, ville jeg hatt muligheten til å ha en pilotstudie for kartleggingstesten, slik som jeg hadde for høyttenkningsdelen. Hadde jeg hatt en pilotstudie for kartleggingstesten, ville jeg kunne gjort de nødvendige endringene som kunne ført til at den ville gitt meg flere interessante situasjoner å diskutere. Hadde jeg valgt på nytt nå, ville jeg for eksempel byttet ut oppgave 2a og 2b, til en oppgave som mer sikkert kan karakteriseres som en problemløsingsoppgave for alle elevene som gjennomførte testen. En tekstoppgave kan være mer aktuell og benytte til dette formålet. Dessuten ville jeg modifisert spørreskjemaet og hatt færre spørsmål. Hadde jeg hatt bedre tid kunne jeg også foretatt en mer grundig kvantitativ analyse av kartleggingstesten, og jeg kunne dessuten økt antall deltakere til høyttenkningsdelen. Da kunne jeg i tillegg valgt ut elever som ikke viste like gode metakognitive reguleringsferdigheter, og dermed fått et sammenlikningsgrunnlag. Dette i sin helhet kunne gjort at jeg kunne besvart forskningsspørsmålet mer nyansert.

Som beskrevet i innledningen viser rapporten fra TIMSS undersøkelsen i 2015, at algebra fremdeles er et problemområde for norske elever (Bergem et al., 2016). Elever ser på algebra som et isolert sett med regler og prosedyrer, og klarer ikke å se sammenhengen innenfor emne eller trekke paralleller til andre deler av læreplanen (Brekke et al., 2000). Dette er kanskje ikke så merkelig i og med at norske elever bruker store deler av matematikkundervisningen til å kopiere fremgangsmåter fra eksempler i boka (Bergem et al., 2016). For at dybdelærings skal skje i algebra må klasseromspraksisen endres. Lithner (2008) påpeker at elever lærer det de får muligheten til å lære. I dag er stort sett matematikkundervisningen lagt opp slik at elever skal lære seg regler og algoritmer. De gjennomfører oppgaver uten å måtte forsvare og argumentere for løsningsstrategiene sine. Da de kommer frem til et svar, spør de læreren om svaret er riktig eller ser etter i fasiten uten videre evaluering og analyse. Undervisningen må heller legges opp slik at elevene selv må ta ansvar for problemløsingsprosessen. Med støtte fra læreren, må de få muligheten til å stole på seg selv, og kunne overvåke sine handlinger (Garofalo & Lester, 1985). De må få muligheten til å øve og bli vant til at de skal argumentere og forklare løsningene sine (Kilpatrick et al., 2001). Lærere kan hjelpe elever til å tenke metakognitivt ved å organisere klasserommet interaktivt med samarbeidsoppgaver. Ved å innføre underveisvurdering, der elevene får muligheten til å vurdere sitt eget og andres arbeid i matematikk, kan elevene få større innsikt i egen forståelse og sin egen læring (Olafsen & Maugesten, 2015). Og ved at elevene diskuterer oppgaver med hverandre, vil de dessuten kunne bli mer bevisst på sitt resonnement og hvordan de argumenterer (Lithner, 2008). Dette kan bidra til å øke elevers begrepsforståelse av algebra og variabler.

6.2 Konklusjon

I denne studien ønsket jeg å finne ut hvilken sammenheng det er mellom elevenes metakognitive reguleringsferdigheter og deres matematiske resonnement i forhold til løsning av variabelproblemer, og hva denne sammenhengen har og si for problemløsing.

Tuva og Siris umiddelbare respons i samtlige høyttenkningsprotokoller er imitativ. De ønsker å bruke tillærte regler og algoritmer for å løse oppgavene, selv om de selv påpeker at de ikke vet om løsningen vil føre frem. Det kan dermed virke som det er denne formen for resonnering jentene er mest vant til å gjennomføre. De bruker imitativ resonnering som er overfladisk ved at den er preget av utenatlæring. Av elevresponsene fra kartleggingstesten kan man også se at mange av elevene bruker aritmetiske regler som ikke fører frem til rett svar.

Først etter jentene har brukt metakognitive reguleringsferdigheter kan resonnementssekvensene deres betegnes som kreative. De metakognitive reguleringsferdighetene viser seg da ved at de forkaster planene som ikke fører frem, leser oppgaveteksten på nytt, bruker de nødvendige opplysningene gitt i teksten og lager nye planer. Dette innleder resonneringssekvenser som er plausible og matematisk forankret i iboende matematiske egenskaper. Sammenhengen mellom de metakognitive ferdighetene og et kreativt resonnement viser seg også ved jentenes fleksible tilnærming til oppgavene. Det er jentenes metakognitive overvåkningsferdigheter som driver problemløsingsprosessen fremover, og kreativitet innebærer det å tenke nye veier. Resultatene fra kartleggingstesten underbygger denne sammenhengen.

Min studie er et bidrag til lærere og lærerstudenter når det kommer til å se hvor viktig det er å utvikle elevers metakognitive reguleringsferdigheter og resonnerende evner i matematikken. Blir undervisningen lagt opp på en slik måte at disse ferdighetene øves, kan vi få elever som er bedre problemløsere og elever som ikke bare ser algebra som et isolert system med regler og prosedyrer. Sammenhengen denne studien belyser mellom elevenes metakognitive reguleringsferdigheter og matematiske resonnement, viser også at en endret klasseromspraksis vil kunne bedre disse ferdighetene hos elevene samtidig.

REFERANSER

Bergem, O. K., Kaarstein, H. & Nilsen, T. (2016). *Vi kan lykkes i realfag. Resultater og analyser fra TIMSS 2015.* Hentet fra https://www.idunn.no/file/pdf/66911876/vi-kan-lykkes-i-realfag.pdf

Biryukov, P. (2004). Metacognitive Aspects of Solving Combinatorics Problems. *International Journal in Educational Mathematics, 74*.

Brekke, G. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk*. Hentet fra http://bestilling.utdanningsdirektoratet.no/bestillingstorg/pdf/59447_kar_mat_007_innmat.pdf

Brekke, G., Grønmo, L. S. & Rosén, B. (2000). *Veiledning til algebra: F, H og J*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic.

Charters, E. (2003). The Use of Think-aloud Methods in Qualitative Research - An Introduction to Think-aloud Methods. *Brock Education Journal, 12*(2), 68-82.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forlag.

Creswell, J. W. (2014). *Research design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4. utg.). California, Los Angeles: SAGE.

Creswell, J. W. & Plano Clark, V. L. (2011). *Designing and conducting mixed methods research* (2. utg.). California, Los Angeles: SAGE.

Desoete, A. (2008). Multi-method assessment of metacognitive skills in elementary school children: how you test is what you get. *Metacognition and Learning, 3*(3), 189-206. doi: 10.1007/s11409-008-9026-0

Desoete, A., Roeyers, H. & Buysse, A. (2001). Metacognition and mathematical problem solving in grade 3. *Journal of Learning Disabilities, 34*(5), 435-447.

Efklides, A. (2001). Metacognitive Experiences in Problem Solving. I A. Efklides, J. Kuhl & R. M. Sorrentino (Red.), *Trends and Prospects in Motivation Research* (s. 297-323). Dordrecht: Kluwer Academic.

Efklides, A. (2006). Metacognition and affect: What can metacognitive experiences tell us about the learning process? *Educational Research Review, 1*(1), 3-14. doi: 10.1016/j.edurev.2005.11.001

Ericsson, K. A. & Simon, H. A. (1984/1993). *Protocol Analysis: Verbal Reports as Data*. Cambridge: MIT Press.

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist, 34*(10), 906-911. doi: 10.1037/0003-066X.34.10.906

Forskrift til opplæringslova. (2009). *Kapittel 3. Individuell vurdering i grunnskolen og i vidaregåande opplæring*. Hentet fra https://lovdata.no/dokument/SF/forskrift/2006-06-23-724/KAPITTEL_4#KAPITTEL_4

Fortunato, I., Hecht, D., Tittle, C. K. & Alvarez, L. (1991). Metacognition and problem solving. *The Arithmetic Teacher, 39*(4), 38-40.

Garofalo, J. & Lester, F. K. (1985). Metacognition, Cognitive Monitoring, and Mathematical Performance. *Journal for research in mathematics education, 16*(3), 163-176. doi: 10.2307/748391

Gray, S. S., Loud, B. J. & Sokolowski, C. P. (2009). Calculus Students' Use and Interpretation of Variables: Algebraic vs. Arithmetic Thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 9*(2), 59-72. doi: 10.1080/14926150902873434

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Helmer, A. & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram: Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011*. Hentet fra http://www.timss.no/timss_2011_web.pdf

Grønmo, L. S., Onstad, T. & Pedersen, I. F. (2010). *Matematikk i motvind: TIMSS Advanced 2008 i videregående skole*. Hentet fra http://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/timss-advanced/rapportmat2008.pdf

Hart, K., Brown, M., Kerslake, D., Küchemann, D. & Ruddock, G. (1985). *Chelsea Diagnostic Mathematics Tests: Teacher's guide*: Nfer-Nelson.

Haylock, D. (1997). Recognising Mathematical Creativity in Schoolchildren. *The International Journal on Mathematics Education*, *29*(3), 68-74. doi: 10.1007/s11858-997-0002-y

Hiebert, J. (2003). What Research Says About the NCTM Standards. I J. Kilpatrick, G. Martin & D. Schifter (Red.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (s. 5-26). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Jacobsen, D. I. (2005). *Hvordan gjennomføre undersøkelser? Innføring i samfunnsvitenskapelig metode*. Oslo: Høyskoleforlaget.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at Middle School Through College Levels. I F. K. Lester (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 707-743). Charlotte, N.C: Information Age.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Kjærnsli, M. & Jensen, F. (2016). *Stø kurs. Norske elevers kompetanse i naturfag, matematikk og lesing i PISA 2015*. Hentet fra https://www.idunn.no/file/pdf/66915414/sto-kurs-pisa-2015.pdf

Küchemann, D. (1981). Algebra. I K. Hart (Red.), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16* (s. 102-119). England: John Murray.

Lithner, J. (2006). *A framework for analysing creative and imitative mathematical reasoning*. Hentet fra http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.466.7119&rep=rep1&type=pdf

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *An International Journal*, *67*(3), 255-276. doi: 10.1007/s10649-007-9104-2

Lithner, J. (2015). Learning mathematics by imitative or creative reasoning. I S. J. Cho (Red.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (s. 487-506) doi: 10.1007/978-3-319-17187-6_28

Meld. St. 28 (2015-2016). (2016). *Fag - Fordypning - Fortåelse - En fornyelse av Kunnskapsløftet*. Hentet fra https://www.regjeringen.no/contentassets/e8e1f41732ca4a64b003fca213ae663b/no/pdfs/stm201520160028000dddpdfs.pdf

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Consil of Teachers of Mathematics.

NOU 2014:7. (2014). *Elevenes læring i fremtidens skole*. Hentet fra https://www.regjeringen.no/contentassets/e22a715fa374474581a8c58288edc161/no/pdfs/nou201420140007000dddpdfs.pdf

Olafsen, A. R. & Maugesten, M. (2015). *Matematikkdidaktikk i klasserommet* (2. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Ozsoy, G. (2011). An investigation of the relationship between metacognition and mathematics achievement. *Asia Pacific Education Review, 12*(2), 227-235. doi: 10.1007/s12564-010-9129-6

Pólya, G. (1971). *How To Solve It: A New Aspect Of Mathematical Method* (2. utg.). Hentet fra https://notendur.hi.is/hei2/teaching/Polya_HowToSolveIt.pdf

Powell, A. B., Francisco, J. M. & Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(4), 405-435. doi: 10.1016/j.jmathb.2003.09.002

Ross, K. A. (1998). Doing and Proving: The Place of Algorithms and Proofs in School Mathematics. *The American Mathematical Monthly, 105*(3), 252-255. doi: 10.2307/2589080

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, Florida: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's All the Fuss About Metacognition. I A. H. Schoenfeld (Red.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (s. 189-215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Sengul, S. & Katranci, Y. (2012). Metacognitive aspects of solving function problems. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 46*, 2178-2182.

Stacey, K. & MacGregor, M. (2000). Learning the Algebraic Method of Solving Problems. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(2), 149-167. doi: 10.1016/S0732-3123(99)00026-7

Stillman, G. & Mevarech, Z. (2010). Metacognition research in mathematics education: from hot topic to mature field. *ZDM, 42*(2), 145-148. doi: 10.1007/s11858-010-0245-x

van Someren, M. W., Barnard, Y. F. & Sandberg, J. A. C. (1994). *The think aloud method - A practical guide to modelling cognitive processes*. Hentet fra http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.98.7738&rep=rep1&type=pdf

Wølner, T. A. (2013). *Kriteriebasert vurdering*. Oslo: Universitetsforlaget.

Yackel, E. & Hanna, G. (2003). Reasoning and Proof. I J. Kilpatrick, G. Martin & D. Schifter (Red.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*. Hentet fra http://393methods1.wikispaces.com/file/view/Yackel+%26+Hanna.pdf

VEDLEGG

Vedlegg 1

Navn:____

Når du løser disse oppgavene ønsker vi at du skriver ned så mye som mulig av det du tenker. Etter dere har løst disse to oppgavene, får dere et nytt ark som dere skal svare på.

Takk for at du deltar ☺

Oppgave 1:

Sett rett bokstavuttrykk på strekene, vis utregningen og forklar fremgangsmåten din med ord.

$$\_\_\_ - 3b = 2a + 6a + 5b - \ \_\_\_$$

Svar:

Oppgave 2:

- Hvis $a = b + 3$, hva skjer med *a* hvis *b* øker med 2? Forklar svaret ditt.

- Hvis $f = 3g + 1$, hva skjer med *f* hvis g øker med 2? Forklar svaret ditt.

Spørreskjema til oppgave 2.

Navn:_______________

Sett ett kryss for hvert utsagn.

Utsagn	**Ja**	**Nei**	**Usikker**
1. Jeg leste oppgaven mer enn en gang.			
2. Jeg passet på at jeg forstod hva det ble spurt etter i oppgaven.			
3. Jeg vurderte hvor mye tid jeg trengte for å løse oppgaven.			
4. Jeg løste oppgaven med en fremgangsmåte jeg kunne fra før.			
5. Jeg prøvde å huske om jeg tidligere hadde jobbet med en lignende oppgave.			
6. Jeg lagde en strategi for å løse oppgaven.			
7. Jeg visste hvordan jeg skulle begynne for å løse oppgaven.			
8. Da jeg løste oppgaven møtte jeg på en utfordring.			
Hvis «ja» i 8., beskriv utfordringen.			
9. Da jeg løste oppgaven fant jeg en feil jeg hadde gjort og rettet den.			
Hvis «ja» i 9., beskriv feilen.			
10. Jeg tenkte på hvordan jeg gikk frem for å løse oppgaven.			
11. Jeg prøvde ulike strategier for å løse oppgaven.			
12. Jeg spurte meg selv om svaret mitt ga mening.			
13. Jeg undersøkte at mine beregninger var riktige.			
14. Jeg tenkte på om det var noe av informasjonen, gitt i oppgaven, som trengte spesiell oppmerksomhet.			
Hvis «ja» i 14., beskriv hva.			

Vedlegg 2

Elin B.Vårtun og Ingrid Kay Ås, 18.01.16

Til

Rektor v/

Søknad om tillatelse til å gjennomføre forskning ved Deres skole.

Vi, Elin Brandsnes Vårtun og Ingrid Kay, er studenter ved lektorutdanningen i realfag, ved Norges Miljø- og Biovitenskapelige Universitet. Vi er i gang med masteroppgave på studiet og forsker begge under felles prosjekt med tittel:

Matematisk resonnement i algebra

Hensikten med prosjektet er å kartlegge elevenes matematiske resonnement i algebra, og se på ulike faktorer som spiller inn på dette. Elin ser på lærerens rolle, mens Ingrid ser sammenheng med metakognisjon. Vi vil gjennomføre en kartleggingstest av elever, høyttenkningsprotokoll med elever, observasjon i klasserommet og eventuelle intervjuer med elev og lærer.

Datainnsamling vil foregå med video- og lydopptaker og notater.

I den forbindelse ønsker vi å gjennomføre forskning blant lærere og elever ved Deres skole. Vi forsikrer om at alle opplysninger vil bli behandlet **konfidensielt**.

Det understrekes at deltakelse i prosjektet er frivillig. Deltakerne kan trekke seg fra prosjektet når som helst underveis i prosjektet og samtidig få allerede registrerte opplysninger om seg slettet. Jamfør vedlagte kopi av **samtykke-erklæring** som de involverte lærerne og elevene blir bedt om å underskrive før deltakelse i spørreundersøkelsen. Veileder, Margrethe Naalsund, har også underskrevet brevet, for å vise hvem fra universitetet som er ansvarlig veileder på prosjektet.

Vi håper på snarlig svar og positiv respons.

Med vennlig hilsen

__________________________ __________________________

Elin Brandsnes Vårtun Margrethe Naalsund

____

Ingrid Kay

Vedlegg 3

Samtykke om deltakelse i Mastergradsprosjekt

Generell informasjon
Vi er masterstudenter i matematikkdidaktikk ved Norges miljø- og biovitenskapelige universitet. Dette brevet er en forespørsel til deg som elev i matematikk 1T om ditt samtykke til deltakelse i et forskningsprosjekt tilknyttet våre masteroppgaver våren 2017. Noe av datainnsamlingen vil foregå sammen for våre to prosjekter, og derfor sendes det ut en felles samtykkeerklæring for begge.

Datainnsamlingen som vil foregå sammen, er en kartleggingstest i algebra med tilhørende spørreskjema hvor vi kan få et nærmere innblikk i deres matematiske resonnement og tanker om læring. Ut i fra resultatene på denne prøven kan dere bli valgt ut til videre datainnsamling i et eller begge prosjektene. Nedenfor følger informasjon om Elins og Ingrids prosjekt.

Elin:
Etter at dere har gjennomført kartleggingstesten vil jeg velge ut 2-3 elever til videre observasjon. Dette innebærer at de som blir plukket ut sitter sammen i en gruppe og følger vanlig undervisning, som de andre i klassen. Til forskjell fra de andre elevene, vil et kamera og en båndopptaker være plassert på disse elevene. Elevene kan bli spurt i ettertid om å stille opp i et kort intervju. Det er viktig å presisere at de som velges ut følger vanlig undervisning, og trenger ikke tenke over at de blir filmet. De vil ikke bli vurdert på om de gjør noe rett eller galt.

Ingrid:
I mitt prosjekt ønsker jeg 4-6 elever til en høyttenkningsdel. Høyttenkningsmetoden går ut på å la eleven tenke høyt mens han/hun utfører et utvalg matematikkoppgaver uten innblanding av forsker. Jeg vil bruke video eller båndopptaker og ta notater mens vi snakker sammen. Datainnsamlingen vil ta omtrent 20-30 minutter, og vil foregå på her på skolen.

Anonymitet og oppbevaringa av data
All informasjon vil bli samlet inn og lagret på våre private PCer, hvor kun vi og våre veiledere har innsyn. Du kan be om å få dette slettet om du måtte ønske det. Alle som deltar i prosjektet vil bli anonymisert i form av fiktive navn. Navnet på skolen vil heller ikke bli nevnt. Prosjektet er meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelige datatjeneste AS (NSD), og arbeidet med data vil følge deres retningslinjer.

Det er frivillig å delta i forskningsstudien og du kan når som helst trekke deg fra studien uten å begrunne dette nærmere. Vår rolle som forskere innebærer at vi er underlagt strenge etiske regler for hvordan datamaterialet kan brukes. Materialet vil bli behandlet konfidensielt, og vil kun benyttes til forskningsformål.

Vi håper du vil gi oss den nødvendige tillatelse ved å undertegne arket og returnere til oss (side 2). For nærmere spørsmål kan du kontakte oss, Elin Brandsnes Vårtun (elin.brandsnes.vaartun@nmbu.no, 95835016) og Ingrid Kay (ingrid.kay@nmbu.no, 95029592). Vår veileder er Margrethe Naalsund (margrethe.naalsund@nmbu.no, 67231528/92806592) og biveileder er Ellen Kristine Solbrekke Hansen (ellen.hansen@nmbu.no).

Vennlig hilsen

Elin Brandsnes Vårtun og Ingrid Kay

Samtykkeerklæring

Jeg har lest informasjonen om forskningsprosjektet tilknyttet masterprosjektet. Jeg er kjent med at den frivillige deltakelsen i forskningsprosjektet innebærer dokumentasjon ved hjelp av video- og lydopptak.

Vennligst kryss av:

1) Jeg kan delta i forskningsprosjektet:
   - ❑ Ja, jeg samtykker
   - ❑ Nei, jeg samtykker ikke

Underskrift:____

Sted: _____________________________________ Dato: ____________________________

Norges miljø- og biovitenskapelig universitet
Noregs miljø- og biovitskapelege universitet
Norwegian University of Life Sciences

Postboks 5003
NO-1432 Ås
Norway