

Norges miljø- og biovitenskapelige
universitet
Fakultet for miljøvitenskap og teknologi
Institutt for matematiske realfag og teknologi

Masteroppgave 2016
30 stp

Matematisk analyse:

Et ikke-standard alternativ

Herman Werner Gautefald

Forord

Denne mastergradsoppgaven er på mange måter av «ikke-standard» karakter. Den tar sikte på å forene matematikk, matematikkhistorie og filosofiske betraktninger rundt tanker og idéer som har bidratt til å utvikle matematikken. Min motivasjon for å velge et slikt siktepunkt er at jeg synes spesielt denne siste delen er svært mangelfull eller direkte fraværende i mange lærebøker i matematikk. Dette har ført til at spørsmål som: *Hva skal vi med dette her?* eller *Hvor kommer dette fra?* har hopet seg opp. Etter å ha lest litteratur som følger en streng *påstand-bevis*-modell, føler jeg at de bakenforliggende tankene og idéene ofte kan være vanskelig å få tak på og forblir i det skjulte. Det kan virke som om *metarefleksjon* over faget er noe som er bannlyst fra «korrekte» matematiske tekster. Mange ganger tror jeg beviser for sentrale teoremer hadde vært enklere å forstå dersom den bakenforliggende filosofien hadde kommet tydeligere fram. Som matematiker er det derfor av stor interesse for meg å undersøke matematikkens filosofiske grunnlag, og jeg vil med dette arbeidet forsøke å dykke dypere ned i denne materien.

Utgangspunktet mitt som forfatter av denne oppgaven, er at jeg utdanner meg til å bli lektor med fagene fysikk og matematikk. Som lektor er det viktig å være faglig dyktig, men man må også kunne formidle kunnskapen og gjøre den forståelig og tilgjengelig for et ikke like profesjonelt publikum. Det er særlig lærere som har vært gode til å forklare den grunnleggende filosofien og tankegangen i faget, som har appellert til meg. Dette gir faglig innsikt; en forståelse av problemstillingen og hvilke geniale tanker som har ført til løsningen på problemet. Derfor vil en del av fokuset mitt være å *forstå* matematikk, og ikke bare bruke den som et problemløsningsverktøy.

Da min veileder, Arkadi Ponossov, tipset meg om at det finnes noe som heter *ikke-standard analyse* som man kan bruke som et alternativ til den klassiske analysen, og som ligger tettere opp til den opprinnelige formen for analyse, så jeg mitt snitt til endelig å få svar på mange av mine spørsmål om faget matematikk. Det har vært svært interessant, lærerikt og givende å jobbe med matematisk analyse i kombinasjon med historie og filosofi; en kombinasjon helt etter mitt hjerte.

En stor takk rettes til professor Arkadi Ponossov, som har viet mye tid til faglig veiledning og kommet med mange gode innspill og idéer underveis. Han har vært positiv med tanke på å legge oppgaven til rette for mine ønsker og behov, og raus med oppfølging. Uten ham hadde ikke denne oppgaven vært til.

Takkes bør også min gode venn, medstudent og kollega Martin Seland Ansnes for medmenneskelighet og «teknisk support». Han er særdeles dyktig og alltid raus med sin hjelp, og har således utgjort et solid bidrag til denne mastergradsoppgaven slik den nå framstår.

Ås, 1. mai 2016

Herman W. Gautefald

Sammendrag

Tittel: Matematisk analyse: Et ikke-standard alternativ

Forfatter: Herman Werner Gautefald

Veileder: Arkadi Ponossov, Institutt for matematiske realfag og teknologi

I denne mastergradsoppgaven er målet å undersøke hvordan ikke-standard analyse kan fungere som et alternativ til den veletablerte, klassiske analysen. Først gjennomgås konstruksjonen av såkalte hyperreelle tall, som deretter brukes til å redefinere kjente begreper fra klassisk kalkulus. Dette er begreper som funksjon, kontinuitet, derivasjon og integrasjon. Nye definisjoner samt hyperreelle talls egenskaper brukes videre til å begrunne sentrale teoremer i kalkulus. En viktig hensikt med dette er å vise hvordan bevisføringen ofte blir enklere og mer intuitiv dersom vi baserer oss på hyperreelle versus reelle tall. Ikke-standard-beviset for *Peanos eksistensteorem*, med og uten tidsforsinkelse, kan betraktes som oppgavens hovedresultat.

Utover oppgavens fokus på stringent, matematisk bevisføring og argumentasjon, legges det vekt på å forklare grunnlaget for, og utviklingen til, matematisk analyse i et historisk og filosofisk perspektiv. Dermed har oppgaven også andre formål enn å utføre alternative bevis for kjente teoremer. Spesielt vil tanker og idéer som har ledet frem til Robinsons konstruksjon av de hyperreelle tallene drøftes. På den måten søkes innsikt i analysen på en annen måte enn det som er *standard* i mange lærebøker i matematikk, der slike filosofiske betraktninger gjerne er viet liten plass. Denne oppgaven kan i så måte være interessant for lesere som søker å utforske grunnleggende tankegang i matematikk, og burde således passe godt for matematikklærere. Dette er for øvrig forfatterens eget utgangspunkt.

Abstract

Title: Mathematical Analysis: A non-standard option

Author: Herman Werner Gautefald

Supervisor: Arkadi Ponossov, Department of Mathematical Sciences and Technology

The aim of this master thesis is to examine how non-standard analysis may serve as an alternative to the established, classical analysis. The construction of so-called hyperreal numbers is reviewed, and then used to redefine familiar concepts from classical calculus. Concepts like function, continuity, differentiation and integration are redefined, and these new definitions and their properties are used to justify central theorems in calculus. An important purpose is to show that often the theorems are proved more easily and intuitively if we rely on hyperreal versus real numbers. Non-standard proof of Peano's existence theorem for differential equations, with and without delay, can be considered the main result.

The emphasis, beyond the focus on rigorous mathematical evidence and arguments, is explaining the basis for and the development of mathematical analysis in a historical and philosophical perspective. Thus, the thesis also includes other goals than to simply perform alternative proofs of known theorems. Thoughts and ideas that have led to Robinson's construction of the hyperreals are discussed, and accordingly the analysis is explored in a different manner than the *standard* in many mathematical textbooks, where this discussion is often missing. Therefore, this thesis may be of interest for readers seeking to explore basic thinking in mathematics, and especially teachers in mathematics; which is the author's point of view.

Innhold

Forord	i
Sammendrag	iii
Abstract	iv
Innledning	1
1 Robinsons hyperreelle tallinje	5
1.1 Konstruksjon av ${}^*\mathbb{R}$	6
1.2 Noen egenskaper ved ${}^*\mathbb{R}$	11
1.3 Historisk epistel: Robinson løser gåten	17
2 Ikke-standard kalkulus	21
2.1 Tallfølger og funksjonsbegrepet	21
2.1.1 Mengdeutvidelse fra \mathbb{R} til ${}^*\mathbb{R}$	22
2.1.2 Tallfølger	25
2.1.3 Funksjonsbegrepet	28
2.2 Kontinuitet	31
2.3 Derivasjon	34
2.4 Integrasjon	38
2.5 Analysens fundamentalteorem	43
2.6 Historisk epistel: <i>Ghosts of departed quantities</i>	48
3 Ikke-standard-analysens fortrefelighet	53
3.1 Kontinuitet for sammensatte funksjoner	54
3.2 Kjernerregelen	55
3.3 L'Hôpitals regel for « $\frac{0}{0}$ »-uttrykk	58

4	Peanos eksistensteorem for første ordens ordinære differensiallikninger	61
4.1	Formulering og bevis	62
4.2	Kommentarer og diskusjon til beviset	67
5	Peanos eksistensteorem for første ordens differensiallikninger med tidsforsinkelse	71
5.1	Dynamiske systemer med tidsforsinkelse	71
5.1.1	Den klassiske saltvannstanken	72
5.1.2	Populasjonsvekst	73
5.1.3	Eksemplene fortsetter	74
5.2	Vektorer og vektornotasjon	77
5.3	Peanos eksistensteorem for initialverdiproblemer med tidsforsinkelse	81
6	Hvorfor ikke-standard analyse?	93
6.1	Matematisk forståelse	93
6.2	Historisk utgangspunkt	96
6.3	Bruksområder	98
6.4	Kritikk: Hvorfor ikke <i>standard</i> analyse?	100
	Litteratur	103

Innledning

Historisk bakteppe for matematisk analyse

På slutten av 1600-tallet skjer det noe helt ekstraordinært i matematikkens historie, som kommer til å få enorme konsekvenser innenfor teoretisk og anvendt matematikk:

Uavhengig av hverandre, legger briten Isaac Newton (1642-1727) og tyskeren Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) grunnlaget for infinitesimalregningen. Begge har de en intuitiv forestilling om hva infinitesimaler, eller uendelig små størrelser, er for noe. Deres innsikt resulterer blant annet i oppdagelsen at integrasjon og derivasjon er motsatte operasjoner, og det gir et effektivt regneverktøy når prosesser i naturen, som planetenes baner, skal beskrives i matematikkens språkdrakt. Metoden med infinitesimaler er altså svært fruktbar, men den bygger på at man behandler størrelser som noen ganger oppfører seg som små tall forskjellig fra null, og andre ganger har egenskapen til tallet null. I kjølevannet av dette, føler man utover på 1800-tallet et behov for å rydde opp i analysens grunnlag. Det er først og fremst de uendelig små størrelsene man vil unngå ved å formalisere grensebegrepet med ϵ - δ -språket, som den klassiske analysen bygger på. Her står bidrag fra kjente matematikere som Bolzano, Cauchy og Weierstrass sentralt.

Om enn den klassiske analysen er motsigelsesfri og korrekt som bevismetode, er den vel heller lite effektiv som et intuitivt hjelpemiddel. Mange har derfor forsøkt å gjeninnføre infinitesimalene slik at de også kunne brukes i matematisk analyse, men disse forsøkene hadde mangler som gjorde at infinitesimalene ble utkonkurrert av det strengt definerte grenseverdibegrepet. Den første fullstendige løsningen på problemet kom med Abraham Robinson på 1960-tallet. Han klarte å legge grunnlaget for en *ikke-standard* analyse som bygger på at slike uendelig små (og store) størrelser faktisk kan eksistere, uten at det gir noen logiske selvmotigelser. Det var nettopp gjennom matematisk logikk at han fikk

sneket infinitesimalene inn bakveien, og på nytt brakte han de uendelig små størrelsene på banen. Dette innebar en utvidelse av den reelle tallinja \mathbb{R} , der man også tar med uendelig små og store tall; man får *hyperreelle tall* ${}^*\mathbb{R}$.

(Lindstrøm 1996; Mejlbo 1981)

Hensikt med og oppbygging av oppgaven

I MIN MASTERGRADSOPPGAVE ønsker jeg å vise hvordan Robinsons ikke-standard analyse kan brukes som et alternativ til klassisk/*standard* analyse. Parallelt med dette blir det naturlig å ta for meg problematikken omkring infinitesimalregningen, og gi en historisk framstilling av de tanker og idéer som har ledet fram til Robinsons konstruksjon av de såkalte hyperreelle tallene. Når selve konstruksjonen av ${}^*\mathbb{R}$ er på plass, følger en drøfting av de hyperreelle tallenes egenskaper. Dette er temaet i kapittel 1. I kapittel 2 vil jeg se på begreper som *tallfølger*, *funksjoner*, *kontinuitet*, *derivasjon*, og *integrasjon* i lys av klassisk og ikke-standard analyse. Jeg vil i hovedsak basere meg på forelesninger gitt av Arkadi Ponossov, samt oppgaver som jeg selv har løst. Der ikke annet er oppgitt, er dette tilfelle. Kapittel 1 og 2 utgjør selve teorigrunnet for den videre analysen. Eventuelle bemerkninger til hvordan analysen har utviklet seg i et historisk perspektiv, samt selve filosofien bak analysen, følger som historiske epistler ved slutten av kapitlene. Forbildet for denne måten å presentere stoffet på, er Lindstrøm (2006). I kapittel 3 vil beviser for noen utvalgte resultater i kalkulus bli gitt i standard og ikke-standard form, for at leseren lettere skal kunne se likheter og forskjeller mellom de to analysemetodene. I kapittel 4 gis et *ikke-standard* bevis for *Peanos eksistensteorem*. Beviset baserer seg på Lindstrøm (1988), men er generalisert i den forstand at det også dekker initialverdiproblem på vektorform og - i kapittel 5 - med såkalt *tidsforsinkelse*. Beviset hos Lindstrøm (1988) er dessuten mer skissekatig, og her er det forsøkt å gi en mer fyldig framstilling. Vektornotasjonen tar utgangspunkt i Wyller (2015), og er redegjort for i seksjon 5.2. Et ikke-standard bevis for Peanos eksistensteorem for ordinære differensiallikninger finnes også hos Birkeland og Normann (1980), der hovedresultatet kan sies å være beviset for *Knesers teorem*. Beviset er derfor av en annen art enn hos Lindstrøm (1988). Et ikke-standard bevis for Peanos eksistensteorem med tidsforsinkelse, har jeg ikke funnet i litteraturen. Dette er å betrakte som hovedresultatet i denne mastergradsoppgaven. Til slutt - i kapittel 6 - ønsker jeg å

samle trådene og filosofere litt over hvorfor ikke-standard analyse er en fruktbar analyseform.

En stor del av oppgaven vil dreie seg om å gå igjennom beviser for sentrale resultater i klassisk kalkulus; ikke fordi bevisene nødvendigvis har stor verdi i seg selv (teoremene er jo allerede bevist), men fordi tankegangen her er interessant. Dersom det ikke er spesifisert hvor et bevis eller en formulering er hentet fra, så er dette *min* versjon; ofte sterkt preget av veileder. Tanken er å utføre beviset på bakgrunn av den teorien som allerede er blitt presentert i oppgaven, og jeg vil - så langt det lar seg gjøre - unngå å trekke inn nye momenter underveis i bevisene. Imidlertid vil leseren oppdage at det enkelte steder er påkrevd med ett eller flere *lemmaer* (hjelpesetninger). Da jeg har dårlig erfaring med at disse har en tendens til å dukke opp på «ulogiske» steder i faglitteraturen, velger jeg i hovedsak å presentere og bevise disse fortløpende ettersom de viser seg nødvendige. Lemmaene som direkte eller indirekte er knyttet til beviset for Peanos eksistensteorem, er nummerert 1, 2, 3 og 4.

LESEREN BØR VÆRE KLAR OVER at jeg i denne oppgaven bruker begrepene *klassisk* analyse, *standard* analyse og *reell* analyse om hverandre. Det siktes da til begrunnelsen for hovedresultatene innen matematikk etter Newtons og Leibniz's oppdagelser på slutten av 1600-tallet, som bygger på aksiomsettet for *reelle* tall og ϵ - δ -formuleringer. Klassiske resonnementer vil ofte ta utgangspunkt i Trench (2012), da dette er det læreverket jeg selv har brukt ved et universitetskurs i reell analyse. Med *ikke-standard* analyse refereres det til matematisk analyse som baserer seg på Robinsons *hyperreelle* tall (herunder infinitesimaler).

Videre i oppgaven velger jeg å skrive i *vi*-form. Per definisjon er altså *vi* = *jeg*, men leseren inviteres til å la seg inkludere i denne definisjonen.

Kapittel 1

Robinsons hyperreelle tallinje

«Hemmeligheten» bak ikke-standard analyse, er innføringen av de hyperreelle tallene. Robinsons inspirasjon til å konstruere en matematisk modell som baserer seg på hyperreelle tall, kom fra matematisk logikk, nærmere bestemt den delen som kalles modellteori (se seksjon 1.3). Tanken hans er å konstruere en utvidet tallinje som i tillegg til de reelle tallene \mathbb{R} også inneholder uendelig små og store tall. Den utvidede tallinja ${}^*\mathbb{R}$ består nå av *hyperreelle tall*. Denne modellteoretiske konstruksjonen har den fordelen at man har full kontroll over egenskapene til den nye modellen gjennom et formelt språk som gjør det mulig å overføre egenskaper mellom \mathbb{R} og ${}^*\mathbb{R}$. Det finnes altså grunnleggende matematisk-logiske prinsipper som fungerer som en oversettelsesprosedyre mellom de to modellene, og en slik setning er for eksempel *det elementære utvidelsesprinsipp* (Mejlbo 1981, s. 10):

En (elementær) setning i \mathbb{R} er sann hvis og bare hvis dens oversettelse i ${}^\mathbb{R}$ er sann.*

Denne setningen er av avgjørende betydning fordi den sier at vi kan føre *ikke-standard* beviser for resultater i klassisk kalkulus. Det finnes imidlertid mer *logikkfattige* måter å konstruere de hyperreelle tallene på, som er mindre avhengig av et formelt språk. En slik måte å konstruere ${}^*\mathbb{R}$ på, er gitt i Lindstrøm (1988). Det er denne tilnærmingen til ikke-standard analyse som danner grunnlaget for dette kapittelet og mastergradsoppgaven forøvrig. Et lite innblikk i Robinsons egen tilnærming til konstruksjonen av ${}^*\mathbb{R}$, er forsøkt gitt i seksjon 1.3 ved slutten av dette kapittelet.

1.1 Konstruksjon av ${}^*\mathbb{R}$

Det er flere måter å konstruere hyperreelle tall på. Den varianten vi skal basere oss på her, tar utgangspunkt i tallfølger og ekvivalensklasser. Vi innfører nå notasjonen $\{x_n\}$ for en tallfølge, der $n \in \mathbb{N}$. Hvis vi betrakter de to tallfølgene $\{\frac{1}{n}\} = \{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ og $\{\frac{1}{n^2}\} = \{\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots\}$, observerer vi at begge konvergerer mot 0. Intuitivt tenker vi da på hva det siste tallet i følgen går mot, d.v.s. n går mot uendelig. Vi ser at $\{\frac{1}{n^2}\}$ går raskere mot 0 enn $\{\frac{1}{n}\}$. Når vi skal betrakte konvergens av følger, vil vi i klassisk analyse ikke skille mellom disse to følgene; begge konvergerer mot 0. Spørsmålet er om det finnes andre måter å skille de to følgene på, som også gir informasjon om *hvor raskt* de to følgene konvergerer mot 0. Vi innfører nå et *mål*, som har til hensikt å skille mellom ekvivalente og forskjellige tallfølger/mengder. For vårt mål m , som per definisjon kun kan anta to verdier, 0 og 1, skal følgende aksiomer (grunnleggende definisjoner) gjelde:

$$\text{I } m(A \cup B) = m(A) + m(B), \quad A \cap B = \emptyset, \quad A, B \subset \mathbb{N}$$

$$\text{II } A \subset \mathbb{N} \text{ er en endelig mengde} \Rightarrow m(A) = 0$$

$$\text{III } m(\mathbb{N}) = 1$$

Vi sier at A er en *uvesentlig* mengde dersom $m(A) = 0$, og A er en *vesentlige* mengde dersom $m(A) = 1$. Før vi kobler målet m opp mot tallfølger, vil vi se litt nærmere på noen grunnleggende egenskaper ved vårt mål m som følger av aksiomene ovenfor. For det første har vi at

$$m(E) = 0 \Leftrightarrow m(\mathbb{N} - E) = 1, \quad E \subset \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

Bevis:

Da $E \subset \mathbb{N}$, vet vi at $(\mathbb{N} - E) \cap E = \emptyset$ og at $(\mathbb{N} - E) \cup E = \mathbb{N}$. Da følger det av definisjonene ovenfor at

$$1) m((\mathbb{N} - E) \cup E) = m(\mathbb{N} - E) + m(E) \quad (\text{jf. aksiom I})$$

$$2) m((\mathbb{N} - E) \cup E) = m(\mathbb{N}) = 1 \quad (\text{jf. aksiom III})$$

Dermed har vi at $m(\mathbb{N} - E) + m(E) = 1$. Da målet m kun kan anta verdiene 0 og 1, må $m(E) = 0 \Rightarrow m(\mathbb{N} - E) = 1$ og $m(\mathbb{N} - E) = 1 \Rightarrow m(E) = 0$. Konklusjonen er at $m(E) = 0 \Leftrightarrow m(\mathbb{N} - E) = 1$. □

Vi kan få dette resultatet på en litt annen form hvis vi setter $E^C = \mathbb{N} - E$. Vi kaller E^C for *komplementet* til mengden E . Da får vi (1.1) på følgende, ekvivalente form:

$$m(E) = 0 \Leftrightarrow m(E^C) = 1, \quad E \subset \mathbb{N} \quad (1.2)$$

Dette betyr med andre ord at for enhver mengde $E \subset \mathbb{N}$ er enten $m(E) = 1$ eller $m(E^C) = 1$, men ikke begge samtidig. Dermed kan vi hevde at

$$m(A) = m(B) = 0 \Leftrightarrow m(A^C) = m(B^C) = 1 \quad \forall A, B \subset \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

og at

$$m(A) = m(B) = 1 \Leftrightarrow m(A^C) = m(B^C) = 0 \quad \forall A, B \subset \mathbb{N}. \quad (1.4)$$

Nå er vi klare til å vise neste egenskap ved målet m :

$$m(A) = m(B) = 0 \Rightarrow m(A \cup B) = 0 \quad \forall A, B \subset \mathbb{N} \quad (1.5)$$

Bevis:

Det kan virke som om aksiomsettet vårt tilsynelatende bare beskriver hvordan målet m virker på disjunkte mengder ($A \cap B = \emptyset$). Hva skjer når mengdene ikke nødvendigvis er disjunkte? For å klargjøre dette, baserer vi oss på følgende lemma:

$$m(C) \leq m(B) \quad \forall C \subseteq B \subset \mathbb{N} \quad (1.6)$$

Bevis for lemma 1.6:

Vi begrunner (1.6) ved å gjøre følgende observasjon: $B = C \cup (B - C)$ og $C \cap (B - C) = \emptyset$. Da har vi at $m(B) = m(C \cup (B - C)) = m(C) + m(B - C)$, hvor den siste likheten følger av aksiom I. Da målet m kun kan anta verdiene 0 og 1, må vi ha at $m(C) \leq m(C) + m(B - C)$, og lemma 1.6 er herved vist. \square

Beviset for (1.5) fortsetter:

Videre har vi at $A \cup B = A \cup (B - A)$ og $A \cap (B - A) = \emptyset$ gjelder for alle $A, B \subset \mathbb{N}$. Altså har vi at $m(A \cup B) = m(A \cup (B - A)) = m(A) + m(B - A)$, hvor den siste likheten følger av aksiom I. Det faktum at $(B - A) \subseteq B$ og lemma 1.6 gir oss nå at

$$m(B - A) \leq m(B) \quad \forall A, B \subset \mathbb{N},$$

og vi kan konkludere med at

$$m(A \cup B) = m(A \cup (B - A)) = m(A) + m(B - A) \leq m(A) + m(B) \quad \forall A, B \subset \mathbb{N} \quad (1.7)$$

Vi observerer at (1.7) på mange måter er en generalisering av aksiom I, fordi vi ikke lenger krever at $A \cap B = \emptyset$. Hvis nå $m(A) = m(B) = 0$, gir (1.7) oss følgende:

$$m(A \cup B) \leq m(A) + m(B) = 0 \Rightarrow m(A \cup B) = 0$$

Altså har vi vist at $m(A) = m(B) = 0 \Rightarrow m(A \cup B) = 0$ for alle $A, B \subset \mathbb{N}$. □

Nå vil det være naturlig å vise en liknende egenskap, nemlig at

$$m(A) = m(B) = 1 \Rightarrow m(A \cap B) = 1 \quad \forall A, B \subset \mathbb{N} \quad (1.8)$$

Bevis:

Vi har allerede påpekt at for enhver $A \subset \mathbb{N}$ er enten $m(A) = 1$ eller $m(A^C) = 1$ ($A^C = \mathbb{N} - A$), men ikke begge samtidig. Dette følger av setning 1.2. Som vi også har sett tidligere, er en konsekvens av dette at

$$1) \quad m(A) = m(B) = 1 \Leftrightarrow m(A^C) = m(B^C) = 0. \quad (\text{jf. setning 1.4})$$

Det følger også at

$$2) \quad m(A \cap B) = 1 \Leftrightarrow m((A \cap B)^C) = 0.$$

Videre er

$$m((A \cap B)^C) = m(A^C \cup B^C) \leq m(A^C) + m(B^C) = 0.$$

Dette følger av (1.7) og antakelsen om at $m(A) = m(B) = 1$. Dermed er $m((A \cap B)^C) = 0 \Leftrightarrow m(A \cap B) = 1$, og egenskapen er vist. □

Vi har nå sett på noen egenskaper ved selve målet m ; egenskaper som følger direkte av aksiomsettet som vi på et tidspunkt bare har vedtatt. La oss gå over til å betrakte sammenhengen mellom målet m og tallfølger. Vi sier at to følger $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er *m-ekvivalente* dersom $m\{n | a_n = b_n\} = 1$, hvilket betyr det samme som at $m\{n | a_n \neq b_n\} = 0$. Vi skriver $\{a_n\} \sim \{b_n\}$, og mener at $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er m-ekvivalente. Intuitivt betyr dette at de to følgene $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er like bortsett fra i en *uvesentlig* mengde, for eksempel en endelig

mengde (jf. aksiom II). Vi definerer nå ekvivalensklassen $\langle a_n \rangle$ til følgen $\{a_n\}$ som mengden av de følger $\{b_n\}$ som er m-ekvivalente med $\{a_n\}$:

$$\langle a_n \rangle \equiv \{\{b_n\} | \{a_n\} \sim \{b_n\}\}$$

Videre kan det vises at dersom $\{a_n\} \sim \{b_n\}$, så er $\langle a_n \rangle = \langle b_n \rangle$. Dersom $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ ikke er m-ekvivalente, så er $\langle a_n \rangle \cap \langle b_n \rangle = \emptyset$. Dette betyr at enhver følge $\{a_n\}$ er med i nøyaktig én ekvivalensklasse $\langle a_n \rangle$. Vi kan derfor tenke på et hyperreelt tall som en ekvivalensklasse bestående av m-ekvivalente følger. Nå definerer vi de hyperreelle tallene ${}^*\mathbb{R}$ til å være mengden av alle ekvivalensklaser $\langle x_n \rangle$:

$${}^*\mathbb{R} \equiv \{\langle x_n \rangle | \{x_n\} \in \mathfrak{R}\},$$

hvor \mathfrak{R} er mengden av alle følger $\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ av reelle tall. Dette betyr at dersom $x \in {}^*\mathbb{R}$, så finnes det følger $\{x_n\} \in \mathfrak{R}$ slik at $x = \langle x_n \rangle$. Vi kaller en slik følge for *representanten* til x (Lindstrøm 1996).

Definisjonen ovenfor kan nok for mange virke meningsløs, for hvordan skal vi regne med slike hyperreelle tall? Vi starer denne drøftingen med å se på egenskapene til m-ekvivalente følger:

Anta nå at $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$ og $\{b_n\} \sim \{b'_n\}$. Vi ønsker å vise noen grunnleggende egenskaper som burde gjelde for disse m-ekvivalente følgene:

- 1) Addisjon: $\{a_n + b_n\} \sim \{a'_n + b'_n\}$
- 2) Multiplikasjon: $\{a_n \cdot b_n\} \sim \{a'_n \cdot b'_n\}$

Bevis:

La $A = \{n | a_n = a'_n\}$ og $B = \{n | b_n = b'_n\}$. På grunn av antakelsen vår, blir $m(A) = m(B) = 1$. Vi definerer nå:

- 1) $C = \{n | a_n + b_n = a'_n + b'_n\}$
- 2) $D = \{n | a_n \cdot b_n = a'_n \cdot b'_n\}$

For alle $n \in A \cap B$, har vi at $a_n = a'_n$ og $b_n = b'_n$. Dermed får vi at $m(C) = m(D) = 1$ for alle $n \in A \cap B$. Hvis vi nå kan vise at $A \cap B$ utgjør en *vesentlig* mengde, kan vi slå fast at addisjons- og multiplikasjonsegenskapene er oppfylt for m-ekvivalente følger. Vi har allerede vist at $m(A) = m(B) = 1 \Rightarrow m(A \cap B) = 1 \forall A, B \subset \mathbb{N}$. (jf. setning 1.8).

Dermed utgjør $A \cap B$ en *vesentlig* mengde, og egenskapene er vist. \square

På grunn av egenskapene til m -ekvivalente følger, kan vi nå gi meningsfulle (veldefinerte) definisjoner for addisjon og multiplikasjon i ${}^*\mathbb{R}$:

Vi antar at $x, y \in {}^*\mathbb{R}$, og lar $\{x_n\}$ og $\{y_n\}$ være representanter for henholdsvis x og y ; med andre ord: $x = \langle x_n \rangle$ og $y = \langle y_n \rangle$. Da definerer vi følgende:

- 1) Addisjon: $x + y = \langle x_n + y_n \rangle$
- 2) Multiplikasjon: $x \cdot y = \langle x_n \cdot y_n \rangle$

Ut fra disse definisjonene ser vi at vi først legger sammen komponentene x_n og y_n , og deretter tar ekvivalensklassen til følgen $\{x_n + y_n\}$. Tilsvarende gjør vi også for multiplikasjon. Vi sier at addisjon og multiplikasjon er definert *komponentvis*.

Vi har nå sett på hvordan addisjon og multiplikasjon defineres i ${}^*\mathbb{R}$. For ordens skyld tar vi også med en tredje definisjon, som forteller oss hvordan vi skal forstå ordningsrelasjonen $<$ i ${}^*\mathbb{R}$:

$$\langle x_n \rangle < \langle y_n \rangle \Leftrightarrow m\{n | x_n < y_n\} = 1 \quad (1.9)$$

For at denne setningen skal være éntydig/veldefinert, må vi undersøke om definisjonen er uavhengig av hvilke representanter for ekvivalensklassene $\langle x_n \rangle$ og $\langle y_n \rangle$ vi velger. Hvis vi antar at $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$, $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$ og $\langle x_n \rangle < \langle y_n \rangle$, ønsker vi altså å vise at $\langle x'_n \rangle < \langle y'_n \rangle$.

Bewis:

Vi antar følgende:

- 1) $\{x_n\} \sim \{x'_n\} \Leftrightarrow m\{n | x_n = x'_n\} = 1$
- 2) $\{y_n\} \sim \{y'_n\} \Leftrightarrow m\{n | y_n = y'_n\} = 1$
- 3) $\langle x_n \rangle < \langle y_n \rangle \Leftrightarrow m\{n | x_n < y_n\} = 1$

La $A = \{n | x_n = x'_n\}$, $B = \{n | y_n = y'_n\}$ og $C = \{n | x_n < y_n\}$. Dermed har vi at $m(A) = m(B) = m(C) = 1$. For alle $n \in A \cap B$ har vi at $x_n = x'_n$ og $y_n = y'_n$. Videre vil $x_n < y_n \Rightarrow x'_n < y'_n$ for alle $n \in A \cap B \cap C$. Det gjenstår nå å vise at $A \cap B \cap C$ utgjør en *vesentlig* mengde. På grunn av (1.8), har vi følgende:

$$i) \quad m(A) = m(K) = 1 \Rightarrow m(A \cap K) = 1 \quad \forall A, K \subset \mathbb{N}$$

$$\text{ii) } m(B) = m(C) = 1 \Rightarrow m(B \cap C) = 1 \forall B, C \subset \mathbb{N}$$

Dersom vi nå setter $K = B \cap C$, fører i) og ii) til at $m(A \cap B \cap C) = 1$, som altså betyr at $A \cap B \cap C$ er en *vesentlig* mengde. \square

Ved å konstruere ${}^*\mathbb{R}$ slik vi har gjort, har vi oppnådd at de vanlige regnereglene for reelle tall også gjelder for hyperreelle tall. Den kommutative lov, assosiative lov, distributive lov etc. er alle oppfylt for hyperreelle tall, med unntak av *kompletthetsaksiomet*. Hvis dette også var oppfylt, ville hyperreelle tall være identiske med reelle tall, og vi ville vært like langt. I neste seksjon skal vi se litt nærmere på hva det innebærer at kompletthetsaksiomet ikke er oppfylt for ${}^*\mathbb{R}$, og hvilke egenskaper som følger av vår konstruksjon av ${}^*\mathbb{R}$. Den oppvakte leser vil imidlertid kanskje reagere på at det elementære utvidelsesprinsipp, som vi formulerte innledningsvis, burde tilsi at også dette aksiomet er oppfylt for ${}^*\mathbb{R}$. Dette problemet skal vi drøfte nærmere i seksjon 1.3.

1.2 Noen egenskaper ved ${}^*\mathbb{R}$

Vi har sett at ${}^*\mathbb{R}$ er konstruert slik at regnereglene for hyperreelle tall er nøyaktig de samme som for de reelle tallene. Hva er så den store forskjellen på ${}^*\mathbb{R}$ og \mathbb{R} ? Vi begynner vår drøfting med å observere at det hyperreelle tallet ${}^*a \in {}^*\mathbb{R}$ som svarer til ekvivalensklassen $\langle a_n \rangle$ der $a_n = a \forall n \in \mathbb{N}$, hvor $a \in \mathbb{R}$ er en konstant, svarer til nøyaktig ett element a i \mathbb{R} . Altså: ${}^*a = a$. Dermed blir

$$\mathbf{R} = \{ \langle a, a, a, \dots \rangle \mid a \in \mathbb{R} \}$$

en tro kopi av \mathbb{R} . Altså er

$$\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}.$$

Nå innfører vi definisjonen av *endelige*, *uendelig store* og *uendelig små* størrelser:

- i $x \in {}^*\mathbb{R}$ er *endelig* dersom $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ for en positiv $a \in \mathbb{R}$
- ii $x \in {}^*\mathbb{R}$ er *uendelig* dersom x ikke er endelig, d.v.s. $|x| > a$ for alle positive $a \in \mathbb{R}$
- iii $x \in {}^*\mathbb{R}$ er *infinitesimal* (uendelig liten) dersom $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ for alle positive $a \in \mathbb{R}$

Det eneste reelle tallet x som oppfyller $|x| < a$ for alle positive $a \in \mathbb{R}$, er tallet $x = 0$. I henhold til vår definisjon, blir altså 0 det eneste reelle tallet som er infinitesimalt. La oss se et eksempel på hvordan vi skiller mellom ulike infinitesimale, hyperreelle tall:

La $a_n = \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$ og $b_n = \frac{1}{n^2} \forall n \in \mathbb{N}$. $\epsilon = \langle a_n \rangle$ og $\delta = \langle b_n \rangle$ er da to infinitesimale, hyperreelle tall. Dette kommer av at $m(\{n|a_n < a\}) = m(\{n|b_n < b\}) = 1$, da a_n og b_n vil være mindre enn to positive, reelle tall, henholdsvis a og b , for alle n bortsett fra i en endelig (og dermed uvesentlig) mengde. Videre lar vi $A = \{n|a_n \neq b_n\}$. Da $a_n \neq b_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$ bortsett fra $n = 1$, blir $m(A) = 1$. Dette betyr at $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ ikke er m-ekvivalente følger, og dermed er ϵ og δ to forskjellige infinitesimaler. (NB! Dette er de to tallfølgene fra seksjon 1.1.)

La oss se litt nærmere på en mengde $E \subset {}^*\mathbb{R}$ som består av produkter av naturlige og infinitesimale tall. Vi definerer $E = \{n\epsilon|n \in \mathbb{N}\}$, der ϵ er et positivt, infinitesimalt tall. Først vil vi vise at siden ϵ er et infinitesimalt tall, blir alle produktene $n\epsilon$ også infinitesimale tall:

At ϵ er et positivt, infinitesimalt tall, betyr i henhold til definisjon *iii* ovenfor at

$$\epsilon < a \forall a \in \mathbb{R}^+.$$

Legg merke til at \mathbb{R}^+ symboliserer alle positive reelle tall. Vi får nå at

$$n\epsilon < na \forall a \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}. \quad (1.10)$$

Videre setter vi $na = \delta$, der δ er et positivt, reelt tall. Dermed kan vi skrive (1.10) om til

$$n\epsilon < \delta \forall \delta \in \mathbb{R}^+.$$

Dette betyr i henhold til definisjon *iii* at alle produktene $n\epsilon$ er infinitesimale. Mengden E består altså kun av infinitesimale tall, og er dermed begrenset. Det er naturlig å anta at E dermed har et supremum $s = \sup E$ som oppfyller følgende betingelser:

- 1) s er en *øvre skranke* for E .
- 2) s er den minste blant alle øvre skranker.

Dersom betingelsene skal gjelde, har vi at:

$$1) n\epsilon \leq s \forall n \in \mathbb{N}$$

2) Enhver $s' = s - \epsilon < s$ er ikke øvre skranke for E .

Fra betingelse 1), har vi at:

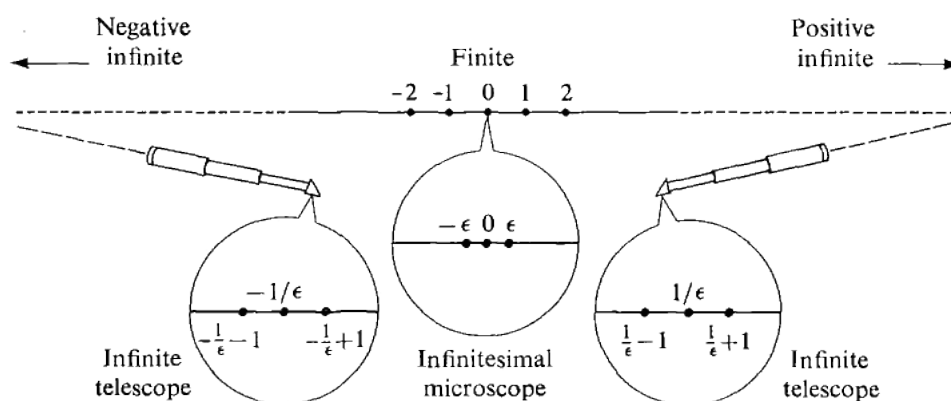
$$(n + 1)\epsilon \leq s \Rightarrow n\epsilon \leq s - \epsilon = s' \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Men dette betyr at s' også er en øvre skranke for E , hvilket strider med betingelse 2). Altså finnes det ikke en slik $s = \sup E$, og vi må konkludere med at mengden E ikke har noe supremum. Dette eksempelet viser at *kompletthetsaksiomet*, som sier at enhver begrenset, ikke-tom delmengde har en minste øvre skranke (=supremum), ikke gjelder for ${}^*\mathbb{R}$.

Et viktig spørsmål er ennå ikke besvart:

Hvordan kan vi se for oss de hyperreelle tallene?

Som sagt inneholder ${}^*\mathbb{R}$ uendelig små og store tall. Et uendelig lite tall, vil vi her betegne med ϵ . Et uendelig stort tall, vil derfor være $\frac{1}{\epsilon}$. Om ethvert reelt tall t kan vi tenke oss at vi finner et hyperreelt tall *t i en omegn, eller *monade*, bestående av tall som ligger uendelig nærme tallet t . Et slikt tall vil for eksempel være $t + \epsilon$. På samme måte finnes det tall i ${}^*\mathbb{R}$ som ligger uendelig langt borte. Et slikt tall vil for eksempel være $t + \frac{1}{\epsilon}$. Vi ser for oss følgende figur:



Figur 1.1: Hyperreell tallinje

Herved kan vi hevde at to tall $r, s \in {}^*\mathbb{R}$ ligger *uendelig tett* dersom differansen $r - s$ er et infinitesimale tall. Vi skriver: $r \approx s$, og mener med det at r og s ligger uendelig tett. Dermed kan vi si at monaden til et tall $t \in \mathbb{R}$ består av alle tall $q \in {}^*\mathbb{R}$ som er slik at $q \approx t$. Vi sier da at $t \in \mathbb{R}$ er standarddelen til $q \in {}^*\mathbb{R}$, og skriver: $St(q) = t$. Det er altså

en naturlig sammenheng mellom grensen til en konvergent følge $\{q_n\}$ og plasseringen av det hyperreelle tallet $q = \langle q_n \rangle$. Hvis vi antar at $\{q_n\}$ konvergerer mot $t \in \mathbb{R}$, har vi at

$$q \approx t \Leftrightarrow St(q) = t.$$

Dette følger av at det bare er et endelig antall elementer $n \in \mathbb{N}$ som ikke er med i mengden $A = \{n \mid -\epsilon < q_n - t < \epsilon\}$ for enhver positiv $\epsilon \in \mathbb{R}$, siden q_n konvergerer mot t . Dermed er $m(A) = 1$, og med andre ord er A en *vesentlig* mengde. Dette betyr at $-\epsilon < q - t < \epsilon$ ($q = \langle q_n \rangle$) for enhver positiv $\epsilon \in \mathbb{R}$. (Dette argumentet er hentet fra Lindstrøm 1996).

For å kunne representere hyperreelle tall på en éntydig måte, har følgende teorem avgjørende betydning:

Ethvert endelig element $q \in {}^*\mathbb{R}$ har en unik standarddel.

Bevis:

Dersom $q \in {}^*\mathbb{R}$ er et endelig element, gir definisjon *i* oss at $|q| \leq a \Leftrightarrow -a \leq q \leq a$ for en positiv $a \in \mathbb{R}$. Vi definerer nå en mengde $A \subset \mathbb{R}$ slik at $A = \{b \mid b \leq q\}$, der $b \in \mathbb{R}$. A er dermed begrenset ovenfra (øvre begrenset). Kompletthetsaksiomet for \mathbb{R} gir oss da at mengden A har et supremum $\sup A = t$, der $t \in \mathbb{R}$. Vi ønsker nå å vise at $t = St(q) \Leftrightarrow t \approx q$, altså at differansen $q - t$ er infinitesimal:

Vi gjennomfører et *ad absurdum*-bevis ved å anta det motsatte, nemlig at $q - t \geq \rho > 0$ der $\rho \in \mathbb{R}$ ikke er et infinitesimale tall. Vi definerer nå et tall $\bar{b} = t + \frac{\rho}{2}$ slik at $\bar{b} < q \Rightarrow \bar{b} \in A$. Men samtidig ser vi at $\bar{b} > t$, hvilket betyr at $t \neq \sup A$. Dette fører til en kontradiksjon (selvmotsigelse) ettersom vi har antatt at $t = \sup A$. Dette betyr at ρ må være et infinitesimale tall, og dermed kan vi konkludere med at $t = St(q) \Leftrightarrow t \approx q$. □

Vi vil nå vise at de vanlige regnereglene er oppfylt for standarddelene til endelige elementer $r, s \in {}^*\mathbb{R}$. (Uendelige tall har ikke noen reell standarddel.)

- 1) $St(r \pm s) = St(r) \pm St(s)$
- 2) $St(r \cdot s) = St(r) \cdot St(s)$
- 3) $St\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{St(r)}{St(s)}$, $St(s) \neq 0$

Bevis:

1) Her nøyer vi oss med å betrakte $St(r + s)$, da beviset for tilfellet $St(r - s)$ blir helt

tilsvarende:

Da r og s er endelige hyperreelle tall, har vi vist at slike tall har sine unike standarddeler.

Derfor kan vi skrive: $r = St(r) + \epsilon_r$ og $s = St(s) + \epsilon_s$, der ϵ_r og ϵ_s er infinitesimale tall.

Dermed får vi:

$$St(r + s) = St(St(r) + \epsilon_r + St(s) + \epsilon_s) = St(St(r) + St(s) + \epsilon_{r+s}) = St(r) + St(s)$$

Den siste likheten følger av at $\epsilon_{r+s} = \epsilon_r + \epsilon_s$ bare et nytt infinitesimale tall.

2) For å forenkle notasjonsbruken i dette beviset, skriver vi at $r = \bar{r} + \epsilon_r$ og $s = \bar{s} + \epsilon_s$,

der $\bar{r} = St(r)$ og $\bar{s} = St(s)$. Dermed får vi følgende:

$$St(r \cdot s) = St((\bar{r} + \epsilon_r) \cdot (\bar{s} + \epsilon_s)) = St(\bar{r}\bar{s} + \bar{r}\epsilon_s + \bar{s}\epsilon_r + \epsilon_r\epsilon_s)$$

Alle infinitesimale tall ϵ oppfyller i henhold til definisjon *iii* at $|\epsilon| < \delta$, hvor $\delta > 0$ er et vilkårlig reelt tall. Da ϵ_r og ϵ_s er infinitesimale tall, oppfyller de derfor $|\epsilon_r| < \delta_r$ og $|\epsilon_s| < \delta_s$ for alle positive $\delta_r, \delta_s \in \mathbb{R}$. Dermed får vi at

$$|\bar{r}\epsilon_s| < |\bar{r}| \cdot \delta_s = c, \quad |\bar{s}\epsilon_r| < |\bar{s}| \cdot \delta_r = d, \quad |\epsilon_r\epsilon_s| < \delta_r\delta_s = e,$$

hvor c, d og e er vilkårlig små, positive reelle tall. Dermed har vi vist at $\bar{r}\epsilon_s, \bar{s}\epsilon_r$ og $\epsilon_r\epsilon_s$ er infinitesimale tall. Konklusjonen er derfor at

$$St(r \cdot s) = St(\bar{r}\bar{s} + \bar{r}\epsilon_s + \bar{s}\epsilon_r + \epsilon_r\epsilon_s) = \bar{r}\bar{s} = St(r) \cdot St(s).$$

3) Når vi har vist egenskap 2), følger 3) som en naturlig konsekvens:

$$St(r) = St\left(\frac{r}{s} \cdot s\right) = St\left(\frac{r}{s}\right) \cdot St(s) \Rightarrow St\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{St(r)}{St(s)}, \quad St(s) \neq 0$$

□

Til slutt i denne seksjonen vil vi vise følgende egenskap for to endelige tall $r, s \in {}^*\mathbb{R}$:

$$r \leq s \Rightarrow St(r) \leq St(s) \tag{1.11}$$

Bevis:

Igen skriver vi: $r = St(r) + \epsilon_r$ og $s = St(s) + \epsilon_s$, der ϵ_r og ϵ_s er infinitesimale tall.

Vi antar at $r \leq s$, og dermed får vi at

$$St(r) + \epsilon_r \leq St(s) + \epsilon_s \Rightarrow St(r) \leq St(s) + (\epsilon_s - \epsilon_r).$$

Siden ϵ_r og ϵ_s er infinitesimale tall, vil vi ha at

$$|\epsilon_s - \epsilon_r| < \delta \Rightarrow St(r) < St(s) + \delta$$

for ethvert positivt, reelt tall δ . Dette betyr med andre ord at

$$St(r) \leq St(s).$$

□

1.3 Historisk epistel: Robinson løser gåten

På 1960-tallet klarte Abraham Robinson (1918-74) å løse en tre hundre år gammel gåte. Siden Newtons og Leibniz' oppdagelser, hadde matematikerne ennå ikke klart å gi infinitesimalregningen et rigid grunnlag. (En fyldigere framstilling av denne problematikken er gitt i seksjon 2.6.) Hvorfor tok det så lang tid? For å besvare dette spørsmålet, må vi se nærmere på hvordan Robinson selv kom fram til løsningen på problemet. I forordet til sin bok *Non-standard Analysis* som utkom i 1966, skrev Robinson:



Figur 1.2: Abraham Robinson, 1970

In the fall of 1960 it occurred to me that the concepts and methods of contemporary Mathematical Logic are capable of providing a suitable framework for the development of the Differential and Integral Calculus by means of infinitely small and infinitely large numbers.

Det var altså gjennom matematisk logikk at Robinson så en løsning på problemet med å begrunne infinitesimalene som grunnlag for en holdbar matematisk analyse. Den delen av matematisk logikk som kalles modellteori, vokste for alvor fram i første halvdel av 1900-tallet som et resultat av at problemer innen matematisk analyse krevde nøye avklarte grunnkonsepter (Robinson 1967). Modellteori gir en eksakt formulering av hva det vil si at en matematisk påstand er sann innenfor et system eller en matematisk struktur; den forteller hva som må til for at en matematisk struktur skal være en *modell* der alle påstandene er sanne (Goldblatt 1998). Det var nettopp dette redskapet Robinson trengte for å vise at aksiomesettet som beskriver hyperreelle tall er en modell for ${}^*\mathbb{R}$, slik også aksiomsettet for reelle tall er en modell for \mathbb{R} ; et redskap som fram til 1950-tallet ennå ikke var ferdigutviklet.

I dette kapittelet fokusert vi ikke på logikk da vi introduserte de hyperreelle tallene; vi har tvert imot forsøkt å unngå det. Dette kommer rett og slett av at en slik tilnærming krever en større innsikt i matematisk logikk enn mange matematikere (forfatteren inkludert) er fortrolige med. Selv om det er mulig å konstruere hyperreelle tall på måter som er «logikk-frie» og uavhengige av formelle språk - slik som vi har forsøkt på her - er det viktig å være klar over at Robinson selv brukte metoder fra matematisk logikk - nærmere bestemt modellteori - for å gjøre denne konstruksjonen. En slik metode er *kompakthets-teoremet*, og vi skal kort gi en smakebit på hva dette går ut på. Teoremet kan formuleres på følgende måte (oversatt fra Goldblatt 1998, s. 10):

Dersom et sett S av elementære påstander har den egenskapen at hver endelig delmengde S' av disse påstandene har en modell (d.v.s. en struktur der alle påstandene i S' er sanne), så må det finnes én struktur som er en modell for hele S .

Med *elementære påstander* menes passende formulerte påstander som utelukkende gir relevant informasjon om tall og variable størrelser innenfor et system, for eksempel \mathbb{R} . Anta nå at $S_{\mathbb{R}}$ består av alle slike påstander som er sanne for reelle tall. Dette innbefatter for eksempel aksiomene for såkalte *ordnede kropper* (eng. *ordered fields*). La oss i tillegg til $S_{\mathbb{R}}$ også inkludere følgende påstand (med uendelig mange utsagn):

$$\epsilon > 0 \wedge \epsilon < 1 \wedge \epsilon < \frac{1}{2} \wedge \epsilon < \frac{1}{3} \wedge \dots \wedge \epsilon < \frac{1}{n} \wedge \dots \quad (1.12)$$

Vi bør merke oss at påstand 1.12 ikke er oppfylt for noe reelt tall $\epsilon \in \mathbb{R}$. La oss nå betegne denne nye samlingen for påstander med $S_{*\mathbb{R}}$. Ved å anvende kompakthetsteoremet ovenfor, kan det vises at $S_{*\mathbb{R}}$ har en modell - la oss kalle denne ${}^*\mathbb{R}$ - som er en ordnet kropp hvor ϵ er et positivt, infinitesimalt tall (Goldblatt 1998). Videre kan det vises at ${}^*\mathbb{R}$ tilfredsstiller *det elementære utvidelsesprinsipp* som vi formulerte ved starten av dette kapittelet. Vi reformulerer prinsippet her (oversatt fra Goldblatt 1998, s. 11):

En elementær påstand er sann i ${}^\mathbb{R}$ hvis og bare hvis den også er sann i \mathbb{R} .*

På bakgrunn av dette prinsippet kan man fort bli ledet til å tro at det dermed ikke er noe poeng å befatte seg med ${}^*\mathbb{R}$, siden denne modellen dermed oppfyller de samme teoremene som \mathbb{R} . Det vi imidlertid har oppnådd, er en ny modell som gir andre muligheter til for eksempel å begrunne slike teoremer. Med andre ord har vi fått en ny analyseform som

formelt sett er et fullgodt alternativ til reell analyse. Det blir vår oppgave i resten av denne mastergradsoppgaven å argumentere for at *ikke-standard* analyse i mange sammenhenger også er *mer egnet* enn den klassiske analysen.

Robinsons store landevinning var - foruten å gjøre det elementære utvidelsesprinsipp til et viktig verktøy for matematisk resonnering - at han klarte å argumentere for en konsistent matematisk modell som inneholder infinitesimaler, slik Leibniz hadde foreslått tre hundre år tidligere. Robinson kalte metoden sin for ikke-standard analyse (*non-standard analysis*), selv om den tidligere betegnelsen *infinitesimal analysis* kanskje er mer passende. Imidlertid krevde metoden hans en nærmere granskning av infinitesimalenes natur. Leibniz' idé var at infinitesimalene var underlagt de samme reglene som vanlige tall, og han antok også at to størrelser kunne regnes som like dersom differansen på dem var infinitesimalt liten i forhold til størrelsene selv (Robinson 1967). Selv hadde Leibniz og hans samtid store problemer med å begrunne at disse to antakelsene kan være oppfylt samtidig. I sin artikkel *The methaphysics of the calculus* (Robinson 1967) skrev Robinson følgende om dette:

However, Non-standard Analysis shows how a relatively slight modification of these ideas leads to a consistent theory or, at least, to a theory which is consistent relative to classical Mathematics.

Videre skriver han at istedenfor å hevde at to størrelser med en infinitesimal differanse, x og $x + dx$, faktisk er like, kan vi påstå at størrelsene har lik *standarddel*, slik at $St(x) = St(x + dx)$. Dermed er størrelsene x og $x + dx$ kun «like» på én veldefinert måte, hvilket betyr at de kan regnes som like i noen sammenhenger, men ikke i andre. Påstanden om at infinitesimale tall og endelig, reelle tall har de samme egenskapene, er samtidig ivaretatt siden ${}^*\mathbb{R}$ oppfyller de samme setningene som \mathbb{R} . Imidlertid viste vi i seksjon 1.2 at *kompletthetsaksiomet* ikke er oppfylt for ${}^*\mathbb{R}$. Robinson (1967) trekker fram et nært beslektet problem med *Arkimedes' aksiom* (referert til som *Archimedes' axiom* i Robinson 1967 og *Archimedean property* i Trench 2012) for å vise at aksiomets gyldighet avhenger av hvordan vi tolker det. Intuitivt sier Arkimedes' aksiom at en gitt størrelse (tall, lengde eller volum) kan gjøres større enn en hvilken som helst annen størrelse av samme slag ved å mangedobles et tilstrekkelig antall ganger, selv om størrelsen er meget liten. Dersom vi

tolker dette aksiomet dithen at ethvert positivt tall ϵ , uansett hvor lite, kan gjøres større enn et annet positivt tall δ ved å multiplisere ϵ med et reelt, naturlig tall $n \in \mathbb{N}$, så er ikke Arkimedes' aksiom oppfylt for alle positive tall $\epsilon, \delta \in {}^*\mathbb{R}$. Vi viste for eksempel i seksjon 1.2 at alle produkter $n\epsilon$, der ϵ er et infinitesimalt tall, selv er infinitesimale og dermed begrensede. Altså finnes det ikke et tall $n \in \mathbb{N}$ som er slik at $n\epsilon > \delta$, hvilket strider mot Arkimedes' aksiom. Robinson (1967) peker imidlertid på at hvis vi derimot tolker aksiomet slik at n er et naturlig tall som *kan* være uendelig stort, $n \in {}^*\mathbb{N}$, så holder aksiomet også for ${}^*\mathbb{R}$. Gitt en slik tolkning, kan vi ikke bruke mengden $E = \{n\epsilon | n \in \mathbb{N}\}$ til å vise at kompletthetsaksiomet ikke er oppfylt for ${}^*\mathbb{R}$, slik vi gjorde i seksjon 1.2. På den måten ligger «usikkerheten» ved bruk av det elementære utvidelsesprinsipp i hvordan man skal oppfatte en *elementær påstand* i betydningen *passende formulert*.

Kapittel 2

Ikke-standard kalkulus

For at ikke-standard analyse skal fungere som en fruktbar metode for matematisk analyse, er det avgjørende at vi kan dra nytte av de hyperreelle tallenes egenskaper på en fornuftig måte. I dette kapitlet skal vi se nærmere på hvilke konsekvenser de hyperreelle tallene medfører når vi bruker dem til å betrakte begreper som tallfølger, funksjoner, kontinuitet, derivasjon og integrasjon. Disse begrepene er helt sentrale i klassisk kalkulus, og nødvendige for å bygge opp en «anstendig» matematisk analyse. Legg merke til at vi bruker begrepet *kalkulus* om sentrale resultater (teoremer) i matematikk, mens vi med begrepet *analyse* først og fremst sikter til begrunnelsen for disse resultatene. For å tydeliggjøre at vi baserer vår analyse på hyperreelle tall, vil vi i de følgende avsnittene forsøke å få frem sammenhengen, og samtidig også kontrasten, mellom reelle talls egenskaper og hyperreelle talls egenskaper. Derfor presenterer vi ofte begrepene ved å ta utgangspunkt i hvordan de er definert i klassisk analyse, for så å bygge opp definisjonene og begrunnelsene for sentrale teoremer slik de framstår i ikke-standard analyse.

2.1 Tallfølger og funksjonsbegrepet

Målet vårt i denne seksjonen, er å klargjøre funksjonsbegrepet i lys av ikke-standard analyse. Historisk sett har funksjonsbegrepet vært svært omdiskutert, og man har hatt flere ulike definisjoner på hva en funksjon egentlig er (Lindstrøm 2006). Dette kan kanskje ha noe å gjøre med at funksjonsbegrepet henger sammen med forståelse av mengder og tallfølger. Da det er en relativt omfattende prosess å bygge opp begrepet *funksjon* i

matematisk analyse, skal vi i denne seksjonen gjøre dette trinnvis. Første steg er å gi en kort innføring i mengdeutvidelsen fra \mathbb{R} til ${}^*\mathbb{R}$. Siden følger en kort drøfting av tallfølger; både en oppsummering av hva disse har å gjøre med hyperreelle tall, og hvordan vanlige tallfølger i \mathbb{R} utvides til hyperreelle tallfølger i ${}^*\mathbb{R}$. Til slutt viser vi hvordan vi kan forstå funksjoner som en utvidelse/generalisering av tallfølger.

2.1.1 Mengdeutvidelse fra \mathbb{R} til ${}^*\mathbb{R}$

Før vi går videre til en grundigere betraktning av tallfølger og funksjoner, er det påkrevd med en kort innføring i mengdeutvidelse fra \mathbb{R} til ${}^*\mathbb{R}$:

Vi har sett at $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$, og at ${}^*\mathbb{R}$ i tillegg til endelige elementer som vi også finner i \mathbb{R} , inneholder uendelig små og store tall. På den måte er ${}^*\mathbb{R}$ en *utvidet mengde* i forhold til \mathbb{R} . Det er også slik at enhver delmengde $A \subseteq \mathbb{R}$ har en utvidelse til en delmende ${}^*A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ slik at:

$$A \subseteq {}^*A$$

La oss se litt nærmere på hva vi legger i begrepet *utvidet mengde*. Dersom $A \subseteq {}^*A$ der *A er ikke-standard-utvidelsen av $A \subseteq \mathbb{R}$, innfører vi nå følgende definisjon:

$$\langle a_n \rangle \in {}^*A \Leftrightarrow m\{n|a_n \in A\} = 1 \quad (2.1)$$

For at denne setningen skal være veldefinert, må vi undersøke om definisjonen er uavhengig av hvilken representant for ekvivalensklassen $\langle a_n \rangle$ vi velger. Hvis vi antar at $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$ og $\langle a_n \rangle \in {}^*A$, ønsker vi altså å vise at $\langle a'_n \rangle \in {}^*A$.

Bevis:

Vi antar følgende:

$$1) \{a_n\} \sim \{a'_n\} \Leftrightarrow m\{n|a_n = a'_n\} = 1$$

$$2) \langle a_n \rangle \in {}^*A \Leftrightarrow m\{n|a_n \in A\} = 1$$

La $B = \{n|a_n = a'_n\}$ og $C = \{n|a_n \in A\}$. På grunn av antakelse 1) og 2) har vi at $m(B) = m(C) = 1$. For alle $n \in B \cap C$ har vi at $a_n = a'_n \in A$. Setning 1.8 gir oss at $m(B \cap C) = 1$, som betyr at $B \cap C$ er en *vesentlig* mengde. Dermed får vi at $m\{n|a'_n \in A\} = 1$, som i henhold til vår definisjon er ekvivalent med at $\langle a'_n \rangle \in {}^*A$. \square

Et viktig spesialtilfelle av utvidede mengder, er utvidelsen av de naturlige tallene \mathbb{N} . Da $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, får vi den utvidede mengden ${}^*\mathbb{N} \subset {}^*\mathbb{R}$ slik at:

$$\mathbb{N} \subset {}^*\mathbb{N}$$

I henhold til definisjon 2.1, kan vi hevde at

$$\langle a_n \rangle \in {}^*\mathbb{N} \Leftrightarrow m\{n | a_n \in \mathbb{N}\} = 1,$$

og altså har vi følgende:

$${}^*\mathbb{N} = \{\langle a_n \rangle | a_n \in \mathbb{N}\}$$

Vi kaller ${}^*\mathbb{N}$ for *hypernaturlige* tall. Da \mathbb{N} er en oppad ubegrenset mengde i \mathbb{R} , vil ${}^*\mathbb{N}$ inneholde uendelig store, positive hyperreelle tall. Dette følger av *det elementære utvidelsesprinsipp* fra kapittel 1, men dersom vi skal unngå å bruke dette prinsippet, kan følgende resultat hjelpe på overbevisningen:

Mengden ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ (d.v.s. alle elementer i ${}^*\mathbb{N}$ som ikke er med i \mathbb{N}) består utelukkende av uendelig store hypernaturlige tall.

Bevis:

La oss anta at $\langle b_n \rangle$ er et element fra ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ og at $\langle p \rangle = p$ ($p \in \mathbb{N}$) er et endelig element fra ${}^*\mathbb{N}$. Da må vi vise at $\langle p \rangle < \langle b_n \rangle$ for alle $p \in \mathbb{N}$. En annen måte å se dette på, er at $\langle b_n \rangle$ er et element fra ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ hvis og bare hvis $m\{n | b_n = p\} = 0$ for alle $p \in \mathbb{N}$. Vi utfører nå beviset *ad absurdum* ved å anta det motsatte, nemlig at $\langle b_n \rangle \leq \langle p \rangle$ for minst én $\langle p \rangle \in \mathbb{N}$:

Dersom vi antar at $\langle b_n \rangle \leq \langle p \rangle$, er dette i henhold til (1.9) ekvivalent med at $m\{n | b_n \leq p\} = 1$. Setning 1.2 gir oss at dette igjen er ekvivalent med at $m\{n | b_n > p\} = 0$, fordi mengdene $C_0 = \{n | b_n > p\}$ og $C_1 = \{n | b_n \leq p\}$ er komplementære ($C_0 \cap C_1 = \emptyset$ og $C_0 \cup C_1 = \mathbb{N}$). Da altså $C_0 \cap C_1 = \emptyset$ og $C_0 \cup C_1 = \mathbb{N}$, gir henholdsvis aksiom I og III fra seksjon 1.1 oss at

$$m(C_0 \cup C_1) = m(C_0) + m(C_1) = m(\mathbb{N}) = 1.$$

Våre antakelser gir oss at $m(C_0) = 0$ og $m(C_1) = 1$. Dette betyr at $b_n = 1 \vee b_n = 2 \vee \dots \vee b_n = p$ for alle $n \in \mathbb{N}$ unntatt delmengden C_0 med mål lik 0. La oss se litt nærmere

på mengdene $A_1 = \{n|b_n = 1\}$, $A_2 = \{n|b_n = 2\}$, ..., $A_p = \{n|b_n = p\}$. Først observerer vi at

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p = C_1.$$

Vi antar at $m(C_1) = 1$, og dermed har vi at

$$m(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p) = 1. \quad (2.2)$$

Mengdene A_1, A_2, \dots, A_p er disjunkte, d.v.s. $A_i \cap A_j = \emptyset$ for alle $i, j \in \{1, 2, \dots, p\}$ og $i \neq j$. En konsekvens av dette, er at

$$m(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p) = \sum_{i=1}^p m(A_i). \quad (2.3)$$

Dette er en generalisering av egenskapen

$$m(A \cup K) = m(A) + m(K), \quad A \cap K = \emptyset, \quad A, K \subset \mathbb{N}, \quad (2.4)$$

kalt aksiom I fra seksjon 1.1. Vi kan vise at (2.3) følger av (2.4) ved å bruke induksjon. Dersom vi setter $K = B \cup C$ ($B \cap C = \emptyset$), får vi at $m(A \cup K) = m(A) + m(B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C)$ o.s.v.

Nå gir (2.2) og (2.3) oss at

$$\sum_{i=1}^p m(A_i) = 1,$$

og derfor må konklusjonen nødvendigvis være at nøyaktig én av mengdene A_1, A_2, \dots, A_p har målet 1, mens de andre har målet 0. Dette følger av at målet m kun kan anta verdiene 0 og 1. Anta for eksempel at $m(A_k) = 1$ for en $k \in \{1, 2, \dots, p\}$. Dermed finnes det en $k \in \mathbb{N}$ slik at $m\{n|b_n = k\} = 1$, som betyr at $\langle b_n \rangle$ er et element fra \mathbb{N} . (NB! $\langle b_n \rangle$ er et element fra \mathbb{N} hvis og bare hvis det finnes en $k \in \mathbb{N}$ slik at $m\{n|b_n = k\} = 1$; da er $\langle b_n \rangle = \langle k \rangle = k$). Dette gir en selvmotsigelse, siden den grunnleggende antakelsen er at $\langle b_n \rangle$ er et element fra ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ (som er ekvivalent med at $m\{n|b_n = p\} = 0$ for alle $p \in \mathbb{N}$). Vi må dermed konkludere med at ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ ikke inneholder endelige elementer, men altså kun inneholder uendelig store elementer. \square

2.1.2 Tallfølger

I det foregående kapittelet startet vi drøftingen av ${}^*\mathbb{R}$ ved å ta utgangspunkt i tallfølger. Vi har sett at vår konstruksjon av ${}^*\mathbb{R}$ gir en naturlig sammenheng mellom grensen til en konvergent tallfølge $\{q_n\}$ og plasseringen av det hyperreelle tallet $q = \langle q_n \rangle$ langs tallinjen, slik at $St(q) = t$ dersom $\{q_n\}$ konvergerer mot et reelt tall t . La oss igjen betrakte de to følgene $\{\frac{1}{n}\}$ og $\{\frac{1}{n^2}\}$ fra seksjon 1.1: Begge tallfølgene konvergerer mot det reelle tallet 0. Hvis vi nå definerer to hyperreelle tall $\epsilon = \langle \frac{1}{n} \rangle$ og $\delta = \langle \frac{1}{n^2} \rangle$, gir resultatet ovenfor at begge disse to tallene har standarddel lik 0; altså $St(\epsilon) = St(\delta) = 0$. Hvis vi tenker på tallinjen, betyr dette at vi finner ϵ og δ innenfor en uendelig liten omegn, kalt *monade*, om tallet 0. I seksjon 1.2 viste vi også at disse to tallene, ϵ og δ , er forskjellige hyperreelle tall. En konsekvens av vår konstruksjon av ${}^*\mathbb{R}$, er nemlig at vi kan skille hypernaturlige tall fra hverandre ved å se på om følgene som representerer de hyperreelle tallene er forskjellige i en *vesentlig* mengde. Innenfor én og samme monade om ethvert endelig, reelt tall, eksisterer det altså uendelig mange hyperreelle tall. Om det reelle tallet 0 finner vi for eksempel hyperreelle tall som $\langle \frac{1}{n} \rangle, \langle \frac{1}{n^2} \rangle, \langle \frac{1}{n^3} \rangle, \langle \frac{1}{n^4} \rangle, \dots$, fordi alle tallfølgene $\{\frac{1}{n}\}, \{\frac{1}{n^2}\}, \{\frac{1}{n^3}\}, \{\frac{1}{n^4}\}, \dots$ konvergerer mot 0. Alle disse hyperreelle tallene er infinitesimale, siden de oppfyller $|x| < a$ for enhver positiv $a \in \mathbb{R}$. Hva så hvis tallfølgene ikke konvergerer mot et endelig tall, d.v.s. når tallfølgene divergerer? La oss for eksempel betrakte de hyperreelle tallene $\langle n \rangle$ og $\langle n^2 \rangle$. Tallfølgene som representerer disse tallene, vil da være $\{n\}$ og $\{n^2\}$. Vi ser at begge følgene går mot uendelig etterhvert som n vokser; de divergerer. I klassisk analyse nøyer man seg vanligvis med det faktum at begge følgene divergerer, og tar ikke hensyn til at følgene vokser mot uendelig med ulik hastighet. Vi observerer at $\{n^2\} = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$ går raskere mot uendelig enn $\{n\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Om enn begge følgene går mot uendelig, vil de imidlertid være forskjellige bortsett fra i en endelig mengde ($n = 1$). Dette betyr at $m\{n|n \neq n^2\} = 1$, og dermed er $\langle n \rangle$ og $\langle n^2 \rangle$ to forskjellige hyperreelle tall. Begge disse tallene er uendelige, fordi de oppfyller $|x| > a$ for enhver positiv $a \in \mathbb{R}$. På samme måte som vi skilte mellom ulike infinitesimaler, skiller vi i ikke-standard analyse også mellom ulike uendelige hyperreelle tall.

Til nå har vi sett på hvordan de hyperreelle tallene henger sammen med asymptotiske egenskaper til tallfølger, og hvordan vi kan bruke målet m til å skille mellom ulike

hyperreelle tall. I fortsettelsen ønsker vi å dykke dypere ned i materien omkring tallfølger og vise noen få, grunnleggende resultater for disse. Hensikten med dette er imidlertid ikke å vie mye oppmerksomhet til selve tallfølgene, men å vise hvordan tallfølger henger sammen med funksjonsbegrepet. For at dette skal være mulig, er det imidlertid nødvendig å kjenne til noen formelle definisjoner og sentrale begreper. Vi starter med å gi en formell definisjon på ikke-standard utvidelse av en tallfølge:

Vi tar utgangspunkt i en vanlig tallfølge $\{a_n\}$ der $a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. La $\{\phi(n)\}$ være en tallfølge som kun antar naturlige tall, altså der $\phi(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Dermed er $\{\phi(n)\} \subseteq \mathbb{N}$. La nå $\{a_{\phi(n)}\}$ være en tallfølge der $a_{\phi(n)} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Dermed er $\{a_{\phi(n)}\}$ er en delfølge av $\{a_n\}$. Vi definerer ikke-standard-utvidelsen av tallfølgen $\{a_n\}$ til å være $\{^*a_{*n}\}$ gitt ved:

$$\{^*a_{*n}\} = \{^*a_{\langle\phi(n)\rangle}\} \equiv \{\langle a_{\phi(n)} \rangle\}, \quad (2.5)$$

der $^*a_{*n} : ^*\mathbb{N} \rightarrow ^*\mathbb{R}$. I denne definisjonen er $^*n = \langle\phi(n)\rangle \in ^*\mathbb{N}$. Dermed gir ulike delfølger $\{\phi(n)\}$ forskjellige hypernaturlige tall *n . Her anser vi det som hensiktsmessig å skille $^*n \in ^*\mathbb{N}$ fra $n \in \mathbb{N}$. Etterhvert vil denne notasjonen sløyfes ettersom det vil gå klart frem av sammenhengen om n er hypernaturlig eller ei.

La oss nå betrakte en spesiell type tallfølge som vi ofte kommer til å benytte oss av heretter; *hyperendelige* tallfølger:

$\{a_n\}_{n=1}^N$, der $a_n \in \mathbb{R}$ og $n \in \{1, 2, \dots, N\} \subset \mathbb{N}$, er en vanlig tallfølge. Da N er et endelig tall, sier vi at tallfølgen er *endelig*. $\{^*a_n\}_{n=1}^{*N}$, der $^*a_n \in ^*\mathbb{R}$ og $n \in \{1, 2, \dots, ^*N\} \subset ^*\mathbb{N}$ er dermed en ikke-standard utvidelse av $\{a_n\}_{n=1}^N$. Dersom *N er et element fra $^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$, sier vi at *N er et *hyperendelig* tall. Som vist i avsnitt 2.1.1, er *N dermed et uendelig stort hypernaturlig tall. Imidlertid har vi argumentert for hvordan vi i ikke-standard analyse skiller mellom slike uendelig store tall. Hvert hyperendelige tall er dermed unikt, og vi kaller $\{^*a_n\}_{n=1}^{*N}$ for en *hyperendelig* tallfølge. (NB! Symbolet $*$ ble her brukt for å skille $^*N \in ^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ fra $N \in \mathbb{N}$. Heretter vil vi imidlertid ofte sløyfe symbolet $*$ dersom det går klart frem av sammenhengen at N er et hyperendelig tall.)

På grunn av at vi ofte bruker hyperendelige tallfølger i forbindelse med oppdeling av intervaller $[t_0, t_1]$, er det hensiktsmessig å både angi antall oppdelingspunkter (også kalt *partisjonspunkter*) og samtidig posisjonen til oppdelingspunkt nummer n . La oss derfor tillate oss å innføre en dobbeltindeksering, slik at $\{t_{n,N}\}$ nå er en vanlig (endelig) tallfølge, der $n \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$ og N er et naturlig tall. (Legg merke til at vi nå velger å starte nummereringen fra og med tallet 0.) Dersom vi lar N være et hyperendelig tall, altså $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$, og fortsatt krever at $n \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$, blir $\{t_{n,N}\}$ en hyperendelig tallfølge.

La nå tallfølgen $\{t_{n,N}\}$ bestå av alle oppdelingspunktene av intervallet $[t_0, t_1]$, der *oppdelingsbredden* er $\Delta t = \frac{t_1 - t_0}{N}$ og N er et endelig, naturlig tall. Dermed kan vi definere $t_{n,N} = t_0 + n\Delta t$ for alle $n \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$. På denne måten har vi at $t_{0,N} = t_0$ og $t_{N,N} = t_1$. Vi kaller dette heretter for en *endelig oppdeling* av intervallet $[t_0, t_1]$. Dersom vi lar $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$, får vi en *hyperendelig oppdeling* av intervallet $[t_0, t_1]$, der oppdelingsbredden Δt nå blir et infinitesimalt tall dt . Videre kan vi definere $t_{n,N} = t_0 + ndt$ for alle $n \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$. Her vil vi også ha at $t_{0,N} = t_0$ og $t_{N,N} = t_1$. Vi kommer til å bruke denne måten (eller en liknende måte) å definere oppdelinger av intervaller på når vi siden skal drøfte bestemte integraler og bevise Peanos eksistensteorem.

Nå vil vi bevise et grunnleggende resultat for hyperendelige tallfølger, som vi siden skal generalisere til ekstremalverdisetningen for funksjoner:

Enhver hyperendelig tallfølge inneholder sitt minimums- og maksimumselement.

Bevis:

For det første er det trivielt at enhver endelig tallfølge i \mathbb{R} inneholder sine ekstremalverdier. For følgen $\{t_{n,N}\}$, der $t_{n,N} \in \mathbb{R}$ og $N \in \mathbb{N}$, vil det altså eksistere en t_{min} og en t_{max} slik at

$$t_{min} \leq t_{n,N} \leq t_{max} \quad \forall \quad n \in \{0, 1, 2, \dots, N\} \quad (2.6)$$

der t_{min} og t_{max} er inneholdt i følgen. For alle $N \in \mathbb{N}$ har vi dermed at $t_{min} = \min_{0 \leq n \leq N} t_{n,N} = t_{k(N),N}$ for en $k(N) \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$. (Vi skriver $k(N)$ for å understreke at dette tallet avhenger av antall oppdelingspunkter N .) Tilsvarende har vi også for maksimumsverdien, slik at $t_{max} = \max_{0 \leq n \leq N} t_{n,N} = t_{l(N),N}$ for en $l(N) \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$. På grunn av egenskap 4) fra neste avsnitt, bevares ulikhet 2.6, slik at den også vil gjelde for hyperendelige følger

$\{t_{n,N}\}$, der $t_{n,N} \in {}^*\mathbb{R}$ og $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$. For å være helt tydelig på dette, kan vi skrive:

$${}^*t_{min} \leq {}^*t_{*n, *N} \leq {}^*t_{max} \quad \forall \quad {}^*n \in \{0, 1, 2, \dots, {}^*N\}, \quad {}^*N \in {}^*\mathbb{N}$$

Denne utvidelsen innebærer at ${}^*t_{min} = {}^*t_{*k(*N), *N}$ og ${}^*t_{max} = {}^*t_{*l(*N), *N}$, der $*k(*N), *l(*N) \in \{0, 1, 2, \dots, {}^*N\}$ er utvidelser av henholdsvis $k(N)$ og $l(N)$, er inneholdt i den utvidede tallfølgen. \square

Til slutt i dette avsnittet ønsker vi å vise et resultat som bygger på det foregående, og som vi senere kommer til å få bruk for ved flere anledninger. La oss kalle resultatet for lemma 1:

Lemma 1: Dersom $\{\gamma_{n,N}\}$ er en hyperendelig tallfølge (d.v.s. $N = {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$) der $\gamma_{n,N} \approx 0$ for alle $0 \leq n \leq N$, vil $\max_{1 \leq n \leq N} \gamma_{n,N} \approx 0$.

Bevis for lemma 1:

Ekstremalverdisetningen for hyperendelige tallfølger sier at enhver hyperendelig tallfølge inneholder sitt største og minste element. Derfor vet vi at $\max_{1 \leq n \leq N} \gamma_{n,N} = \gamma_{max}$ eksisterer. Dersom $\gamma_{n,N} \approx 0$ for alle $0 \leq n \leq N$, må nødvendigvis også $\gamma_{max} \approx 0$. \square

Nå har vi forsøkt å gi et lite innblikk i hvordan vi kan oppfatte tallfølger i lys av ikke-standard analyse. La oss i fortsettelsen vise hvordan dette henger sammen med oppfatelsen av, og egenskapene til, funksjoner.

2.1.3 Funksjonsbegrepet

I klassisk analyse har det oppigjennom historien vært brukt flere tolkninger eller definisjoner av hva en *funksjon* er/skal være. Den versjonen som i utstrakt grad brukes i skolematematikken per i dag, lyder noe i retning av (Heir m.fl. 2006, s. 105):

Når det til hver verdi av x svarer én bestemt verdi for y , sier vi at y er en funksjon av x .

Hvis vi legger denne definisjonen til grunn, kan en tallfølge tolkes som verdimengden til en funksjon der definisjonsmengden er naturlige tall \mathbb{N} (og altså er diskret). Definisjonsmengden til $t_{n,N}$ som gir den dobbeltindekserte tallfølgen $\{t_{n,N}\}$, er gitt ved $n \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$

og $N \in \mathbb{N}$. Således blir tallfølger spesialtilfeller av funksjoner, som vanligvis er definert på kontinuerlige intervaller. Ved å foreta en hyperendelig oppdeling av et kontinuerlig intervall $[a, b]$ og la en funksjon f ha dette som definisjonsmengde, vil funksjonen produsere en hyperendelig tallfølge $\{f_{n,N}\}$ ($N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$). Denne tallfølgen kan oppfattes som en approksimasjon til den kontinuerlige funksjonen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. La oss i fortsettelsen se nærmere på hvordan vi foretar ikke-standard utvidelse av funksjoner:

På tilsvarende måte som for utvidelse av mengder, gjelder det at det til enhver funksjon $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ finnes en utvidet funksjon ${}^*f : {}^*A \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ slik at:

$${}^*f(x) = f(x) \text{ for enhver } x \in A \quad (2.7)$$

La oss betrakte dette nærmere ved å sette opp en formell definisjon på hva vi mener med en ikke-standard utvidelse av funksjonen $f : A \rightarrow \mathbb{R}$:

Dersom $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ er en funksjon, vil dens ikke-standard-utvidelse være funksjonen

${}^*f : {}^*A \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ gitt ved:

$${}^*f({}^*x) = {}^*f(\langle x_n \rangle) \equiv \langle f(x_n) \rangle \quad (2.8)$$

I denne definisjonen er ${}^*x \in {}^*A$ hvor ${}^*x = \langle x_n \rangle$ der $x_n \in A$. Her anser vi det som hensiktsmessig å skille ${}^*x \in {}^*A$ fra $x \in A$. Etterhvert vil imidlertid notasjonen * sløyfes ettersom det vil gå klart fram av sammenhengen om argumentet til funksjonen er et hyperreelt tall eller ei. (NB! Den oppvakte leser vi se at vår definisjon 2.8 er en generalisering av definisjon 2.5 for ikke-standard utvidelse av tallfølger.)

En konsekvens av definisjon 2.8, er dermed at ${}^*f({}^*x) = f(x)$ for alle ${}^*x = x \in A$. Vi husker at for et hyperreelt tall ${}^*a = \langle a, a, a, \dots \rangle$ vil ${}^*a = a$ for et reelt tall a . Altså betyr ${}^*x = x$ at ${}^*x = \langle x, x, x, \dots \rangle$, og i henhold til definisjonen ovenfor har vi at

$${}^*x = \langle x, x, x, \dots \rangle \Rightarrow {}^*f({}^*x) = {}^*f(\langle x, x, x, \dots \rangle) = \langle f(x), f(x), f(x), \dots \rangle = f(x)$$

Dette er en grundigere forklaring på hvorfor ${}^*f(x) = f(x)$ for enhver $x \in A \subseteq \mathbb{R}$. La oss se nærmere på hvordan egenskapene til den opprinnelige funksjonen f vil gjenspeiles i dens ikke-standard-utvidelse *f ; men først litt notasjon:

Dersom $D_f \cap D_g \neq \emptyset$, der D_f og D_g er definisjonsmengden til henholdsvis f og g , vil $f + g$, $f - g$ og $f \cdot g$ være definert på $D_f \cap D_g$, og

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x),$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Brøken f/g er definert som

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

for $x \in D_f \cap D_g$ slik at $g(x) \neq 0$.

(Formuleringen er hentet fra Trench 2012.)

Vi ønsker nå å begrunne følgende egenskaper:

- 1) $*(f \pm g)(*x) = *f(*x) \pm *g(*x)$
- 2) $*(f \cdot g)(*x) = *f(*x) \cdot *g(*x)$
- 3) $*\left(\frac{f}{g}\right)(*x) = \frac{*f(*x)}{*g(*x)}$
- 4) $f(x) \leq g(x), x \in D \Rightarrow *f(*x) \leq *g(*x), *x \in *D$

Bevis:

1) Vi antar at $*f, *g : *D \rightarrow *\mathbb{R}$, og $*x \in *D \subseteq *\mathbb{R}$, d.v.s. at $*x = \langle x_n \rangle$ der $x_n \in D \subseteq \mathbb{R}$.

I henhold til definisjon 2.8 har vi dermed at

$$*(f \pm g)(*x) = \langle (f \pm g)(x_n) \rangle = \langle f(x_n) \pm g(x_n) \rangle = \langle f(x_n) \rangle \pm \langle g(x_n) \rangle = *f(*x) \pm *g(*x)$$

Husk at vi i seksjon 1.1 definerte addisjon (og dermed subtraksjon) komponentvis i $*\mathbb{R}$.

2) Under samme antakelse som i 1), har vi at

$$*(f \cdot g)(*x) = \langle (f \cdot g)(x_n) \rangle = \langle f(x_n) \cdot g(x_n) \rangle = \langle f(x_n) \rangle \cdot \langle g(x_n) \rangle = *f(*x) \cdot *g(*x)$$

3) Når vi har vist 2), følger det at

$$*f(*x) = \langle f(x_n) \rangle = \left\langle \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \cdot g(x_n) \right\rangle = \left\langle \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \right\rangle \cdot \langle g(x_n) \rangle = * \left(\frac{f}{g}\right)(*x) \cdot *g(*x),$$

under antakelsen om at $*g(*x) \neq 0$. Dette gir oss at

$$*\left(\frac{f}{g}\right)(*x) = \frac{*f(*x)}{*g(*x)}$$

4) Under samme antakelse som i 1), har vi at

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in D \Rightarrow \langle f(x_n) \rangle \leq \langle g(x_n) \rangle \quad \forall x_n \in D,$$

og per definisjon har vi at

$$\langle f(x_n) \rangle \leq \langle g(x_n) \rangle \quad \forall x_n \in D \Leftrightarrow {}^*f({}^*x) \leq {}^*g({}^*x) \quad \forall {}^*x \in {}^*D$$

Herved er egenskapene 1) - 4) begrunnet. □

2.2 Kontinuitet

I klassisk analyse baserer man seg på ϵ - δ -formuleringen av grensebegrepet når man snakker om kontinuitet. Vi sier at f er kontinuerlig i x_0 dersom f er definert på et intervall (a, b) som inneholder x_0 , og $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. I henhold til den klassiske tolkningen av grensebegrepet, betyr dette følgende (oversatt fra Trench 2012, s. 54):

En funksjon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig i $x_0 \in \mathbb{R}$ hvis og bare hvis f er definert på et intervall $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ som inneholder x_0 , og det for ethvert positivt, reelt tall ϵ , uansett hvor lite, eksisterer et positivt, reelt tall δ slik at $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ dersom $|x - x_0| < \delta$.

I ikke-standard analyse har vi en annen formulering av kontinuitetskravet:

En funksjon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig i $x_0 \in \mathbb{R}$ hvis og bare hvis

$${}^*f({}^*x) \approx {}^*f(x_0) \text{ for alle } {}^*x \approx x_0.$$

Først og fremst kan vi merke oss at ${}^*f(x_0) = f(x_0)$ på grunn av resultat 2.7. En umiddelbar konsekvens av definisjonen, er dermed at en kontinuerlig funksjon f oppfyller følgende:

$$St({}^*f({}^*x)) = f(St({}^*x))$$

Intuitivt betyr det at en funksjon f er kontinuerlig i et punkt x_0 , at funksjonsverdien i et punkt x endrer seg uendelig lite dersom vi er uendelig nærme punktet x_0 . At $x \approx x_0$ betyr nettopp at x og x_0 ligger uendelig tett ($x \in {}^*\mathbb{R}$ ligger i monaden til $x_0 \in \mathbb{R}$, og derfor er $St(x) = x_0$). Mange vil nok påstå at ikke-standard-formuleringen er mer intuitiv og lettfattelig enn den klassiske ϵ - δ -formuleringen. Her kan jo leseren av denne oppgaven gjøre seg opp en mening selv.

La oss i fortsettelsen se på noen konsekvenser av vår definisjon av kontinuitet. Vi starter med å anta at to funksjoner f og g er kontinuerlige i $x = a$ for et tall $a \in \mathbb{R}$. Da har vi at følgende også er kontinuerlige i $x = a$:

- 1) $f \pm g$
- 2) $f \cdot g$
- 3) $\frac{f}{g}$, $g(a) \neq 0$

Bevis:

1) Vi har at $*f(*x) \approx f(a)$ og $*g(*x) \approx g(a)$ for alle $*x \approx a$. Videre har vi fra forrige seksjon at $*(f \pm g)(*x) = *f(*x) \pm *g(*x)$. Følgelig har vi at $*f(*x) \pm *g(*x) \approx f(a) \pm g(a) = (f \pm g)(a)$. Konklusjonen er at $(f \pm g)(x)$ er kontinuerlig i $x = a$ dersom $f(x)$ og $g(x)$ er kontinuerlige i $x = a$.

2) Vi har at $*f(*x) \approx f(a)$ og $*g(*x) \approx g(a)$ for alle $*x \approx a$. Videre har vi fra forrige seksjon at $*(f \cdot g)(*x) = *f(*x) \cdot *g(*x)$. Følgelig har vi at $*f(*x) \cdot *g(*x) \approx f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a)$. Konklusjonen er at $(f \cdot g)(x)$ er kontinuerlig i $x = a$ dersom $f(x)$ og $g(x)$ er kontinuerlige i $x = a$.

3) Vi har at $*f(*x) \approx f(a)$ og $*g(*x) \approx g(a)$ for alle $*x \approx a$. Videre har vi fra forrige seksjon at $*\left(\frac{f}{g}\right)(*x) = \frac{*f(*x)}{*g(*x)}$. Følgelig har vi at $\frac{*f(*x)}{*g(*x)} \approx \frac{f(a)}{g(a)} = \left(\frac{f}{g}\right)(a)$. Konklusjonen er at $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ er kontinuerlig i $x = a$ dersom $f(x)$ og $g(x)$ er kontinuerlige i $x = a$. \square

Definisjonen av kontinuitet gjelder også for funksjoner av flere variable (se seksjon 5.2). Vi skal nå vise et resultat som vi kommer til å få bruk for når vi senere skal bevise Peanos eksistensteorem. La oss kalle resultatet for lemma 2:

Lemma 2: $f(t, x(t))$ er en kontinuerlig funksjon dersom f og x er kontinuerlige.

Bevis for lemma 2:

At x er kontinuerlig, betyr: $*t \approx t_0 \Rightarrow *x(*t) \approx x(t_0)$.

At f er kontinuerlig, betyr: $(*t, *x) \approx (t_0, x_0) \Rightarrow *f(*t, *x) \approx f(t_0, x_0)$.

Dermed har vi at: $*f(*t, *x(*t)) \approx f(t_0, x(t_0))$ for alle $*t \approx t_0$. \square

Til slutt i denne seksjonen vil vi formulere og bevise ekstremalverdisetningen for kontinu-

erlige funksjoner. Beviset bygger på ekstremalverdisetningen for hyperendelige tallfølger fra avsnitt 2.1.2, og definisjonen av kontinuitet. Teoremet er som følger:

Enhver kontinuerlig funksjon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ antar sitt minimums- og maksimumspunkt.

Bevis:

Vi starter med å anta at f er en funksjon av en variabel x , og foretar en hyperendelig oppdeling av x -intervallet $[a, b]$. La $\{x_{n,N}\}$ være tallfølgen som består av alle oppdelingspunktene, slik at $dx = \frac{b-a}{N}$, der $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$, er en infinitesimal differanse, og partisjonspunkt nummer n er definert som $x_{n,N} = a + ndx$ for $0 \leq n \leq N$. Dermed er $\{x_{n,N}\}$ en hyperendelig tallfølge.

Siden f er en kontinuerlig funksjon av x på $[a, b]$, vil det til enhver verdi $x_{n,N}$ svare en verdi ${}^*f(x_{n,N})$. Dermed er $\{{}^*f(x_{n,N})\}$ en annen hyperendelig tallfølge. På grunn av ekstremalverdisetningen for hyperendelige tallfølger, vet vi at det eksisterer en $x_{k(N),N}$ for en $k(N) \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$ slik at

$${}^*f(x_{k(N),N}) \leq {}^*f(x_{n,N}) \quad \forall n \in \{0, 1, 2, \dots, N\}. \quad (2.9)$$

Av samme årsak eksisterer det en $x_{l(N),N}$ for en $l(N) \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$ slik at

$${}^*f(x_{n,N}) \leq {}^*f(x_{l(N),N}) \quad \forall n \in \{0, 1, 2, \dots, N\}. \quad (2.10)$$

For alle $x \in [a, b]$ eksisterer det en $x_{n,N}$ slik at

$$St(x_{n,N}) = x.$$

Videre lar vi $c = St(x_{k(N),N}) \in [a, b]$ og $d = St(x_{l(N),N}) \in [a, b]$ være to konstanter. På grunn av at f er kontinuerlig på $[a, b]$, har vi at

$$f(x) \approx {}^*f(x_{n,N}), \quad f(c) \approx {}^*f(x_{k(N),N}), \quad f(d) \approx {}^*f(x_{l(N),N}).$$

På grunn av (2.9) og (2.10), har vi dermed at

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d) \quad \forall x \in [a, b],$$

og vi har herved bevist teoremet. □

2.3 Derivasjon

I klassisk analyse har vi følgende definisjon på den deriverte av en funksjon (oversatt fra Trench 2012, s. 73):

En funksjon f er deriverbar i et indre punkt x_0 av definisjonsmengden, dersom forholdet $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $x \neq x_0$, går mot ei grense når x nærmer seg x_0 . Dersom dette er tilfellet, kaller vi denne grensa for den deriverte til f i x_0 , og skriver $f'(x_0)$. Vi har altså at:

$$f'(x_0) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

En alternativ formulering av dette får vi ved å la $x = x_0 + \Delta x$. Da får vi:

$$f'(x_0) \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Den siste likheten får vi ved å sette $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Geometrisk kan vi betrakte $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ som stigningstallet til en sekant til kurven til f som går igjennom punktene $(x_0, f(x_0))$ og $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Dermed blir $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ stigningstallet til tangenten til kurven f i punktet $(x_0, f(x_0))$.

I klassisk analyse innfører man så en alternativ skrivemåte for den deriverte; man skriver $\frac{d}{dx}(f(x))$ eller bare $\frac{df}{dx}$, og mener $f'(x)$. Notasjonen stammer fra Leibniz, men $\frac{d}{dx}$ tolkes her som en derivasjonsoperator som skal virke på en funksjon f . Det blir derfor litt uklart hva vi mener med df og dx hver for seg. Likevel viser det seg ofte at det er en stor fordel å kunne separere df fra dx i regnetekniske oppgaver. Eksempler på dette er når vi bruker substitusjon under integrasjon eller løser separable differensiallikninger. Man definerer da *differensialet av funksjonen f* slik:

$$df(x) \equiv f'(x) \cdot dx$$

dx kalles *differensialet av x* . Man kan jo spørre seg hva dx egentlig er, når det ikke kan være lik null og heller ikke kan være uendelig lite (uendelig små tall finnes ikke i klassisk forstand). I klassisk analyse er det eneste tallet dt som oppfyller egenskapen $|dt| < \epsilon$ for enhver $\epsilon > 0$, nemlig tallet 0. Men man kan ikke dele på tallet 0. Derfor sier man litt «halvhjertet» at vi ofte skriver dx i stedet for Δx (sitat hentet fra Heir m.fl. 2008, s. 241). I ikke-standard analyse, derimot, er det helt uproblematisk å snakke om uendelig små

tall. Differensialet av $x \in \mathbb{R}$, $dx \in {}^*\mathbb{R}$, oppfyller følgende egenskap: $dx \approx 0$ som betyr at $St(dx) = 0$. Derfor blir det også helt uproblematisk å tolke differensialet av f som:

$$df = {}^*f(x + dx) - {}^*f(x) \quad (2.11)$$

Fordi $dx \in {}^*\mathbb{R}$, blir ${}^*f(x + dx) \in {}^*\mathbb{R}$ og derfor også $df \in {}^*\mathbb{R}$. For notasjonens skyld, vedtar vi at differensialet av en funksjon f i punktet x_0 skrives

$$df(x_0) = {}^*f(x_0 + dx) - {}^*f(x_0).$$

Anta at f og g er kontinuerlige funksjoner. Vi vil nå vise følgende egenskaper for differensialene til disse funksjonene:

$$1) d(f \pm g) = df \pm dg$$

$$2) d(f \cdot g) \approx df \cdot {}^*g + {}^*f \cdot dg$$

$$3) d\left(\frac{f}{g}\right) \approx \frac{df \cdot {}^*g - {}^*f \cdot dg}{{}^*g^2}$$

Bevis:

De påfølgende bevisene baserer seg i all hovedsak på (2.11), egenskapene som vi viste i avsnitt 2.1.3, og kontinuitet av f og g .

$$1) d(f \pm g) = {}^*(f \pm g)(x + dx) - {}^*(f \pm g)(x)$$

$$= {}^*f(x + dx) \pm {}^*g(x + dx) - ({}^*f(x) \pm {}^*g(x))$$

$$= ({}^*f(x + dx) - {}^*f(x)) \pm ({}^*g(x + dx) - {}^*g(x))$$

$$= df \pm dg$$

$$2) d(f \cdot g) = {}^*(f \cdot g)(x + dx) - {}^*(f \cdot g)(x)$$

$$= {}^*f(x + dx) \cdot {}^*g(x + dx) - {}^*f(x) \cdot {}^*g(x)$$

$$= {}^*f(x + dx) \cdot {}^*g(x + dx) - {}^*f(x) \cdot {}^*g(x + dx) + {}^*f(x) \cdot {}^*g(x + dx) - {}^*f(x) \cdot {}^*g(x)$$

$$= ({}^*f(x + dx) - {}^*f(x)) \cdot {}^*g(x + dx) + {}^*f(x) \cdot ({}^*g(x + dx) - {}^*g(x))$$

$$= df \cdot {}^*g(x + dx) + {}^*f(x) \cdot dg$$

$$\approx df \cdot {}^*g(x) + {}^*f(x) \cdot dg$$

$$\begin{aligned}
3) \quad d\left(\frac{f}{g}\right) &= {}^* \left(\frac{f}{g}\right)(x+dx) - {}^* \left(\frac{f}{g}\right)(x) \\
&= \frac{{}^* f(x+dx)}{{}^* g(x+dx)} - \frac{{}^* f(x)}{{}^* g(x)} \\
&= \frac{{}^* f(x+dx) \cdot {}^* g(x) - {}^* f(x) \cdot {}^* g(x+dx)}{{}^* g(x+dx) \cdot {}^* g(x)} \\
&= \frac{{}^* f(x+dx) \cdot {}^* g(x) - {}^* f(x) \cdot {}^* g(x) - {}^* f(x) \cdot {}^* g(x+dx) + {}^* f(x) \cdot {}^* g(x)}{{}^* g(x+dx) \cdot {}^* g(x)} \\
&= \frac{({}^* f(x+dx) - {}^* f(x)) \cdot {}^* g(x) - {}^* f(x) \cdot ({}^* g(x+dx) - {}^* g(x))}{{}^* g(x+dx) \cdot {}^* g(x)} \\
&= \frac{df \cdot {}^* g(x) - {}^* f(x) \cdot dg}{{}^* g(x+dx) \cdot {}^* g(x)} \\
&\approx \frac{df \cdot {}^* g(x) - {}^* f(x) \cdot dg}{{}^* g(x)^2}
\end{aligned}$$

□

Vi innfører nå ikke-standard-definisjonen av den deriverte til en funksjon $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f'(x) \equiv St\left(\frac{df}{dx}\right) = St\left(\frac{{}^* f(x+dx) - {}^* f(x)}{dx}\right), \quad dx \neq 0, \quad dx \approx 0, \quad x \in (a, b) \quad (2.12)$$

eller slik

$$f'(x_0) \equiv St\left(\frac{df(x_0)}{dx}\right) = St\left(\frac{{}^* f(x_0+dx) - {}^* f(x_0)}{dx}\right), \quad dx \neq 0, \quad dx \approx 0, \quad x_0 \in (a, b) \quad (2.13)$$

dersom $St\left(\frac{df}{dx}\right)$ (evt. $St\left(\frac{df(x_0)}{dx}\right)$) er et endelig element i \mathbb{R} og uavhengig av ulike valg for $dx \neq 0$. Vi sier at funksjonen f er *deriverbar* så lenge $St\left(\frac{df}{dx}\right)$ oppfyller dette kravet. Merk at ${}^* f(x) = f(x)$ for alle $x \in (a, b)$ (se resultat 2.7).

Da $St\left(\frac{df}{dx}\right)$ er et endelig element i \mathbb{R} , må $\frac{df}{dx}$ være et endelig element i ${}^*\mathbb{R}$. Siden dx er et endelig, infinitesimalt tall, må nødvendigvis også df være endelig og infinitesimalt ($St(df) \approx 0$) for at $\frac{df}{dx}$ skal være et endelig element i ${}^*\mathbb{R}$. Det følger at en deriverbar funksjon f må være kontinuerlig, fordi det betyr at $df \approx 0$ når $(x+dx) \approx x$. Dette resultatet er avgjørende for beviset for setning 2 i neste kapittel, så vi setter det opp som et eget teorem:

$$\text{Hvis en funksjon } f \text{ er deriverbar i } x_0, \text{ må } f \text{ også være kontinuerlig i } x_0. \quad (2.14)$$

Bevis:

Anta at f er deriverbar i $x = x_0$. Per definisjon har vi da at $f'(x_0) = St\left(\frac{df(x_0)}{dx}\right)$, som er et endelig, reelt tall. Fordi $dx \neq 0$ er et infinitesimalt tall ($dx \approx 0 \Leftrightarrow St(dx) = 0$), må $df(x_0)$ også være et infinitesimalt tall når $St\left(\frac{df(x_0)}{dx}\right)$ er et endelig tall. Dette kan vi vise slik: $St(df(x_0)) = St\left(\frac{df(x_0)}{dx} \cdot dx\right) = St\left(\frac{df(x_0)}{dx}\right) \cdot St(dx) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$. \square

Ovenfor definerte vi den deriverte til en funksjon f med hensyn til en reell variabel $x \in (a, b)$ (jf. (2.12)) eller i et reelt punkt $x_0 \in (a, b)$ (jf. (2.13)). Med utgangspunkt i disse definisjonene, skriver vi at den deriverte til f med hensyn på en $t \in {}^*(a, b)$ er

$${}^*f'(t) \approx \frac{{}^*f(t + dt) - {}^*f(t)}{dt}, \quad dt \neq 0, \quad dt \approx 0, \quad St(t) \in (a, b). \quad (2.15)$$

Dersom vi setter $t = x_0 + dt$ der $x_0 = St(t) \in (a, b)$ og $dt = \frac{dx}{2}$, får vi at

$$\begin{aligned} St({}^*f'(t)) &= St\left(\frac{{}^*f(x_0 + 2dt) - {}^*f(x_0 + dt) + {}^*f(x_0 + dt) - {}^*f(x_0)}{2dt}\right) \\ &= St\left(\frac{{}^*f(x_0 + 2dt) - {}^*f(x_0 + dt)}{2dt}\right) - St\left(\frac{{}^*f(x_0 + dt) - {}^*f(x_0)}{2dt}\right) \\ &= \frac{f'(x_0)}{2} + \frac{f'(x_0)}{2} = f'(x_0). \end{aligned}$$

Altså har vi vist at

$$St({}^*f'(t)) = f'(St(t)) \quad (2.16)$$

dersom denne eksisterer.

La oss avslutningsvis i denne seksjonen vise noen egenskaper for derivasjon. Anta at f og g er deriverbare funksjoner. Da vil følgende gjelde:

- 1) $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- 2) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- 3) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Bevis:

De påfølgende bevisene baserer seg i all hovedsak på definisjon 2.12, egenskapene til differensialer (som vist tidligere i denne seksjonen) og regneregler for standarddeler fra seksjon

1.2.

$$1) \quad (f \pm g)'(x) = St \left(\frac{d(f \pm g)}{dx} \right) = St \left(\frac{df \pm dg}{dx} \right) = St \left(\frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx} \right) \\ = St \left(\frac{df}{dx} \right) \pm St \left(\frac{dg}{dx} \right)$$

$$= f'(x) \pm g'(x)$$

$$2) \quad (f \cdot g)'(x) = St \left(\frac{d(f \cdot g)}{dx} \right) = St \left(\frac{df \cdot *g + *f \cdot dg}{dx} \right) \\ = St \left(\frac{df}{dx} \right) \cdot St(*g) + St(*f) \cdot St \left(\frac{dg}{dx} \right)$$

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$3) \quad \left(\frac{f}{g} \right)'(x) = St \left(\frac{d\left(\frac{f}{g}\right)}{dx} \right) = St \left(\frac{\frac{df \cdot *g - *f \cdot dg}{*g^2}}{dx} \right)$$

$$= St \left(\frac{df \cdot *g - *f \cdot dg}{*g^2 \cdot dx} \right)$$

$$= St \left(\frac{1}{*g^2} \left(\frac{df}{dx} \cdot *g - *f \cdot \frac{dg}{dx} \right) \right)$$

$$= \frac{St\left(\frac{df}{dx}\right) \cdot St(*g) - St(*f) \cdot St\left(\frac{dg}{dx}\right)}{St(*g^2)}$$

$$= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

□

2.4 Integrasjon

I klassisk analyse går man veien om *Riemannsum* for å definere det bestemte integralet.

Vi forutsetter at en funksjon $f(x)$ er definert på et intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Vi deler intervallet $[a, b]$ opp i n deler, og definerer $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Vi definerer nå Riemannsummen som følger:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Vi kan betrakte $\{f(x_i) \Delta x\}$ som en dobbeltindeksert tallfølge, og vi setter $f(x_i) \Delta x \equiv \alpha_{i,n}$ hvor $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ og $n \in \mathbb{N}$ (jf. avsnitt 2.1.2). Her er det strengt tatt ikke nødvendig at lengden på alle delintervallene Δx skal være like lange, men vi velger dette som en forenkling. Intuitivt kan vi betrakte denne Riemannsummen som en tilnærming til arealet

under grafen til $f(x)$ fra $x = a$ til $x = b$. Det bestemte integralet til $f(x)$ fra $x = a$ til $x = b$ innføres nå ved:

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

Vi kan oppfatte dette som en grenseprosess der vi får en stadig bedre tilnærming til arealet under grafen ved å forfine partisjonen av intervallet $[a, b]$, d.v.s. la antall oppdelingspunkter n gå mot uendelig. Ved dette grensetilfellet blir $\int_a^b f(x)dx$ lik arealet avgrenset av grafen til $f(x)$, x -aksen, linja $x = a$ og linja $x = b$. Vi sier at funksjonen f er *Riemann-integrerbar* (eller bare *integrerbar*) dersom denne grensen eksisterer.

I ikke-standard analyse definerer vi det bestemte integralet - i samsvar med den klassiske tankegangen - via en *hyperendelig* Riemannsum. Vi utvider funksjonen $f(x)$ definert på $[a, b] \subset \mathbb{R}$ til ${}^*f(x)$ definert på ${}^*[a, b] \subset {}^*\mathbb{R}$, og vedtar at $dx = \frac{b-a}{N} \approx 0$ der $N = {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ er et uendelig stort hypernaturlig (*hyperendelig*) tall. Dermed blir

$$\sum_{i=1}^N {}^*f(x_i)dx$$

en hyperendelig Riemannsum. Følgen $\{{}^*f(x_i)dx\}$ kan nå tolkes som en hyperendelig tallfølge der ${}^*f(x_i)dx = {}^*\alpha_{i,N}$, hvor $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ og $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ (jf. avsnitt 2.1.2). Det bestemte integralet til $f(x)$ fra $x = a$ til $x = b$ defineres nå på følgende måte:

$$\int_a^b f(x)dx \equiv St \left(\sum_{i=1}^N {}^*f(x_i)dx \right) \quad (2.17)$$

For at vår definisjon skal være veldefinert, er det nødvendig at $\sum_{i=1}^N {}^*f(x_i)dx$ er uavhengig av valg av dx . I så fall sier vi at f er integrerbar. Imidlertid har vi et velkjent teorem i klassisk kalkulus sier følgende:

$$\text{Dersom en funksjon } f \text{ er kontinuerlig på } [a, b], \text{ er } f \text{ også integrerbar på } [a, b]. \quad (2.18)$$

For kontinuerlige (og dermed integrerbare) funksjoner, følger det av den klassiske definisjonen at integralet er uavhengig av hvordan Δx går mot 0. I ikke-standard analyse tolkes $f(x)dx$ som et produkt der dx er et infinitesimalt, hyperreelt tall. Hva skjer hvis vi velger en annen oppdeling av intervallet ${}^*[a, b]$, slik at $dt = \frac{b-a}{M} \approx 0$, der $M \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$? At

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ er opplagt i klassisk forstand, men når dx og dt tolkes som forskjellige infinitesimaler, er det ikke helt opplagt at disse integralene blir like. Vi har imidlertid et resultat i ikke-standard analyse som sier at

$$St \left(\sum_{i=1}^N {}^*f(x_i)dx \right) = St \left(\sum_{j=1}^M {}^*f(t_j)dt \right), \quad (2.19)$$

dersom f er kontinuerlig på $[a, b]$, og når $t_1 \approx x_1 = a$, $t_M \approx x_N = b$ og $t_{j+1} = t_j + dt$.

Bevis:

Tankegangen i dette beviset, er at dersom vi kan vise at

$$St \left(\sum_{i=1}^N {}^*f(x_i)dx \right) \leq St \left(\sum_{j=1}^M {}^*f(t_j)dt \right), \quad (2.20)$$

samtidig som at

$$St \left(\sum_{i=1}^N {}^*f(x_i)dx \right) \geq St \left(\sum_{j=1}^M {}^*f(t_j)dt \right), \quad (2.21)$$

så er eneste mulighet at

$$St \left(\sum_{i=1}^N {}^*f(x_i)dx \right) = St \left(\sum_{j=1}^M {}^*f(t_j)dt \right). \quad (2.22)$$

Vi starter med å bevise (2.20), som er ekvivalent med at

$$\sum_{i=1}^N {}^*f(x_i)dx \leq \sum_{j=1}^M ({}^*f(t_j) + \epsilon) dt \quad (2.23)$$

for enhver positiv $\epsilon \in \mathbb{R}$. Vi ønsker nå å gjennomføre beviset *ad absurdum*, og antar det motsatte, nemlig at det finnes en positiv $\epsilon_0 \in \mathbb{R}$ slik at

$$\sum_{i=1}^N {}^*f(x_i)dx > \sum_{j=1}^M ({}^*f(t_j) + \epsilon_0) dt.$$

Da må det finnes et tall K slik at $x_K \in [t_j, t_{j+1}]$ og $f(x_K) > f(t_j) + \epsilon_0$. I så fall er $t_j \approx x_K$ fordi $dt = t_{j+1} - t_j \approx 0$. Kontinuitet av f gir oss dermed at

$${}^*f(x_K) \approx {}^*f(t_j) \Leftrightarrow {}^*f(x_K) - {}^*f(t_j) \approx 0.$$

Dette stemmer ikke overens med at $f(x_K) > f(t_j) + \epsilon_0$ for et positivt tall $\epsilon_0 \in \mathbb{R}$, fordi dette betyr at $f(x_K) - f(t_j) > \epsilon_0$. Antakelsen om at en slik ϵ_0 eksisterer, har ført til en

selvmotsigelse, og vi må derfor forkaste denne antakelsen. Konklusjonen er at (2.23) er gyldig for enhver positiv $\epsilon \in \mathbb{R}$, og dermed har vi vist at

$$\sum_{i=1}^N {}^* f(x_i) dx \leq \sum_{j=1}^M {}^* f(t_j) dt.$$

(2.20) følger nå av egenskap 1.11 fra seksjon 1.2. Et helt tilsvarende bevis kan nå føres for (2.21), og dermed er (2.19) vist. \square

Dette resultatet garanterer dermed for at

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt,$$

og dermed er det bestemte integralet av en kontinuerlig funksjon $f(x)$ på intervallet $[a, b]$ veldefinert. Dette begrunner teorem 2.18. Til sammenlikning går det klassiske beviset for dette teoremet veien om *uniform kontinuitet* (Trench 2012, s. 133).

La f og g være to kontinuerlige funksjoner på intervallene $[a, b]$ og $[a, c]$. Vi ønsker nå å bruke definisjonen på det bestemte integralet til å vise følgende egenskaper:

- 1) $\int_a^b (f \pm g) dx = \int_a^b f dx \pm \int_a^b g dx$
- 2) $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$
- 3) $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx, \quad a < b < c$

Bevis:

- 1) Definisjon 2.17 gir oss at

$$\int_a^b f(x) dx = St \left(\sum_{i=1}^N {}^* f(x_i) dx \right) \quad \text{og} \quad \int_a^b g(x) dx = St \left(\sum_{i=1}^N {}^* g(x_i) dx \right)$$

for $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Dermed har vi at

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx &= St \left(\sum_{i=1}^N {}^*f(x_i)dx \right) \pm St \left(\sum_{i=1}^N {}^*g(x_i)dx \right) \\ &= St \left(\sum_{i=1}^N {}^*f(x_i)dx \pm \sum_{i=1}^N {}^*g(x_i)dx \right) \\ &= St \left(\sum_{i=1}^N ({}^*f(x_i) \pm {}^*g(x_i))dx \right) \\ &= \int_a^b (f(x) \pm g(x))dx, \end{aligned}$$

hvor den (første og) siste likheten følger av definisjon 2.17.

2) Som vist i avsnitt 2.1.3, har vi at

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow {}^*f(x) \leq {}^*g(x).$$

Dette fører til at

$$St \left(\sum_{i=1}^N {}^*f(x_i)dx \right) \leq St \left(\sum_{i=1}^N {}^*g(x_i)dx \right)$$

for $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$, og definisjon 2.17 gir oss dermed at

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

3) Vi starter med å foreta en hyperendelig oppdeling av intervallet $[a, c]$, slik at $dx = \frac{c-a}{N}$ for en $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ og $x_{i+1} = x_i + dx$ ($x_1 = a$ og $x_N = c$). Vi velger nå en b på intervallet $\langle a, c \rangle$. Da finnes det et hyperendelig tall k som er slik at $x_{k-1} \approx x_k \approx b$. Dermed får vi at

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx &= St \left(\sum_{i=1}^{k-1} {}^*f(x_i)dx \right) + St \left(\sum_{i=k}^N {}^*f(x_i)dx \right) \\ &= St \left(\sum_{i=1}^{k-1} {}^*f(x_i)dx + \sum_{i=k}^N {}^*f(x_i)dx \right) \\ &= St \left(\sum_{i=1}^N {}^*f(x_i)dx \right) \\ &= \int_a^c f(x)dx, \end{aligned}$$

hvor den første og siste likheten følger av definisjon 2.17. □

2.5 Analysens fundamentalteorem

I forrige avsnitt la vi vekt på å tolke et bestemt integral som en sum av arealelementer som til slutt gir oss et areal avgrenset av en graf og øvre og nedre integrasjonsgrense. Et viktig spørsmål er imidlertid ikke besvart: Hvordan skal man regne på slike integraler? Det er uten tvil mye arbeid å regne på uendelige summer, og dessuten får vi problemer med å regne ut et areal når grafen som avgrenser det er krum. Finnes det en annen tolkning av integralet som er mer regnekraftig?

Historisk sett har integrasjon sin opprinnelse i arealberegning, men gjennombruddet kom med Newton og Leibniz på slutten av 1600-tallet. De oppdaget at dersom de hadde to funksjoner $F(x)$ og $f(x)$, der $F'(x) = f(x)$, så var arealet under grafen til $f(x)$ gitt av $F(x)$ (Lindstrøm 2006). Dermed kan man også tenke på integrasjon som antiderivasjon. Dette er svært hensiktsmessig når det kommer til utregning av integraler, fordi vi allerede har klare regneregler for derivasjon. Det er denne oppdagelsen som danner grunnlaget for det som siden er blitt kalt *analysens fundamentalteorem*. Dette teoremet sier essensielt at de to tolkningene av integralet (som sum av arealelementer og som antiderivasjon) er to sider av samme sak. Her vil vi formulere teoremet i to deler, bevise den ene delen og vise at den ene formuleringen fører til den andre:

Dersom f er kontinuerlig på intervallet $[a, b]$, har vi at

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (2.24a)$$

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) \quad \forall \quad G'(x) = f(x) \quad (2.24b)$$

Bevis:

Vi starter med å bevise (2.24a), for så å vise at (2.24b) følger av (2.24a):

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$, som er en funksjon i \mathbb{R} , har en ikke-standard-utvidelse ${}^*F(x) \approx \sum_{i=1}^k {}^*f(t_i) dt$ ($1 \leq k \leq N$ og $N = {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$), som er en funksjon i ${}^*\mathbb{R}$. For å forenkle notasjonen her, vedtar vi at $\sum_{i=1}^k {}^*f(t_i) dt = \sum_{t=a}^{x_k} {}^*f(t) dt$. Vi ønsker å vise at

$$F'(x) \equiv St \left(\frac{{}^*F(x + dx) - {}^*F(x)}{dx} \right) = f(x) \quad \forall \quad dx \approx 0, dx \neq 0.$$

Vi bruker resultatet fra forrige seksjon som sier at $\sum_{t=a}^{x_k} {}^*f(t)dt$ er uavhengig av ulike valg for dt , og setter $dt = dx$. Dermed har vi at

$$\frac{{}^*F(x+dx) - {}^*F(x)}{dx} \approx \frac{\sum_{t=a}^{x_k+dx} {}^*f(t)dt - \sum_{t=a}^{x_k} {}^*f(t)dt}{dx} = \frac{{}^*f(x_k+dx)dt}{dx} = {}^*f(x_k+dx) \quad (2.25)$$

Overgangen $*$ er begrunnet i kommentaren på slutten av beviset. (2.25) gir oss nå at

$$St\left(\frac{{}^*F(x+dx) - {}^*F(x)}{dx}\right) = St({}^*f(x_k+dx)) = f(x) \quad \forall x = St(x_k+dx)$$

der den siste likheten følger av at f er kontinuerlig på $[a, b]$. Herved har vi vist (2.24a).

Nå gjenstår det å vise at (2.24b) følger fra dette resultatet:

Dersom vi antar (2.24a), er $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ en antiderivert til $f(x)$, og vi har at

$$F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0 \quad \text{og} \quad F(b) = \int_a^b f(t) dt.$$

Dermed har vi at:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Vi kan imidlertid sette spørsmålsteget ved om setningen gjelder for alle antideriverte til f .

La oss si at $G(x)$ er en annen, vilkårlig antiderivert til f . Altså har vi at $F'(x) = G'(x) = f(x)$. Da må vi ha at

$$(G(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0.$$

Nå baserer vi resten av beviset vårt på følgende lemma:

$$\text{Dersom } \phi'(x) = 0 \text{ for alle } x \in (a, b), \text{ så er } \phi \text{ konstant på } (a, b). \quad (2.26)$$

Bevis for lemma 2.26:

Vi starter med å velge oss et lukket intervall $[c, d]$ som er slik at $a < c < d < b$. Antakelsen er nå at $\phi'(x) = 0$ for alle $c \leq x \leq d$. Videre foretar vi en hyperendelig oppdeling av intervallet $[c, d]$, slik at $dx = \frac{d-c}{N}$ der $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Dermed har vi at

$$\phi'(x) = St\left(\frac{{}^*\phi(x_i+dx) - {}^*\phi(x_i)}{dx}\right) = 0 \quad \forall x = St(x_i)$$

i alle oppdelingspunkter x_i . Nå definerer vi $\alpha_{i,N} \equiv \frac{{}^*\phi(x_i + dx) - {}^*\phi(x_i)}{dx}$, og dermed har vi at

$${}^*\phi(x_k) = {}^*\phi(x_j) + \sum_{i=j}^{k-1} \alpha_{i,N} dx,$$

der $j < k \leq N$, $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ og $dx = \frac{x_k - x_j}{k - j}$.

$\{\alpha_{i,N}\}$, hvor $i = \{1, 2, \dots, N\}$ og $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$, er en hyperendelig tallfølge der $\alpha_{i,N} \approx 0$, og lemma 1 fra avsnitt 2.1.2 gir oss nå at $\max_{1 \leq i \leq N} |\alpha_{i,N}| = \alpha_{max} \approx 0$. Ekstremalverdisetningen garanterer for at ϕ antar sin maksimumsverdi på (a, b) , og dermed har vi at

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=j}^{k-1} \alpha_{i,N} dx \right| &\leq \sum_{i=j}^{k-1} |\alpha_{i,N}| dx \leq \sum_{i=j}^{k-1} \alpha_{max} dx = (k - j) \cdot \alpha_{max} dx \\ &= (k - j) \cdot \alpha_{max} \cdot \frac{x_k - x_j}{k - j} \\ &= (x_k - x_j) \cdot \alpha_{max}. \end{aligned}$$

Videre har vi at

$$St\left(\sum_{i=j}^{k-1} \alpha_{max} dx\right) = St((x_k - x_j) \cdot \alpha_{max}) = St(x_k - x_j) \cdot St(\alpha_{max}) = 0,$$

fordi $St(\alpha_{max}) = 0$. Dette betyr at

$$St({}^*\phi(x_k)) = St({}^*\phi(x_j)) \Leftrightarrow {}^*\phi(x_k) \approx {}^*\phi(x_j)$$

for alle $x_k, x_j \in {}^*[c, d]$. Vi velger oss to reelle verdier $\beta, \gamma \in [c, d]$ slik at $\beta = St(x_k)$ og $\gamma = St(x_j)$. Etersom ϕ nødvendigvis er deriverbar på (a, b) , gir teorem 2.14 oss at ϕ også må være kontinuerlig på (a, b) . Dette betyr at

$$\phi(\beta) \approx {}^*\phi(x_k) \approx {}^*\phi(x_j) \approx \phi(\gamma).$$

For to reelle tall, $\beta, \gamma \in [c, d]$, må vi ha at $\phi(\beta) = \phi(\gamma)$. Siden ϕ er kontinuerlig på (a, b) og $a < c < d < b$, får vi endelig at

$$\phi(\beta) = \phi(\gamma) \quad \forall \beta, \gamma \in (a, b),$$

hvilket betyr at ϕ er konstant på (a, b) . □

Beviset for analysens fundamentalteorem fortsetter:

På grunn av lemma 2.26, kan vi sette $\phi(x) = G(x) - F(x)$ og få at

$$(G(x) - F(x))' = 0 \Rightarrow G(x) - F(x) = k$$

for en konstant k . Dermed har vi at $G(x) = F(x) + k$, hvilket betyr at $G'(x) = F'(x)$.

Altså har vi at

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = G(b) - G(a),$$

og (2.24b) er herved bevist. □

Kommentar til beviset:

Beviset for analysens fundamentalteorem i klassisk analyse går ofte veien om begrepet *uniform kontinuitet* (Trench 2012, s. 143), og er på mange måter mer kontraintuitivt enn vårt ikke-standard-bevis. Imidlertid hviler den siste delen av vårt bevis på lemma 2.26. I klassisk analyse følger dette lemmaet fra Lagranges middelverditeorem (et spesialtilfelle av det generaliserte middelverditeoremet), som bygger på Rolles teorem, som i sin tur bygger på ekstremalverdisetningen (Trench 2012, s. 83-84). Altså ikke en intuitivt enkel vei å gå dette heller.

I vårt ikke-standard bevis for analysens fundamentalteorem gjenstår det å begrunne overgangen $*$ i likning 2.25, da denne overgangen ikke er helt triviell:

Vi tar utgangspunkt i en hyperendelig oppdeling av intervallet $[a, b]$ der funksjonen f er kontinuerlig, og velger oss to påfølgende partisjonspunkter, x_k og x_{k-1} ($x_k \approx x_{k-1}$). Dersom $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, gir definisjon 2.17 oss at

$$F(x) = St \left(\sum_{i=1}^k {}^* f(t_i) dt \right),$$

for $1 \leq k \leq N$ der $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Vi setter $t_k = x_k = a + k \cdot dx$, $dt = dx = \frac{b-a}{N} = x_k - x_{k-1}$ og $x = St(x_k)$. Generelt kan vi ikke hevde at ${}^*F(x_k) = \sum_{i=1}^k {}^* f(x_i) dx$, men la oss definere

$$\tilde{F}(x_k) = \sum_{i=1}^k {}^* f(t_i) dt.$$

Vi ønsker nå å vise at

$$\frac{{}^*F(x_k) - {}^*F(x_{k-1})}{dx} \approx \frac{\tilde{F}(x_k) - \tilde{F}(x_{k-1})}{dx}. \quad (2.27)$$

Videre definerer vi

$$d^*F_k = {}^*F(x_k) - {}^*F(x_{k-1}), \quad d\tilde{F}_k = \tilde{F}(x_k) - \tilde{F}(x_{k-1})$$

Påstanden er nå at $d^*F_k - d\tilde{F}_k = \alpha_k dx$, der $\alpha_k \approx 0$ for alle k . Dette viser vi ved å sette

$$d^*F_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} {}^*f(t) dt, \quad d\tilde{F}_k = {}^*f(x_k)dt = \int_{x_{k-1}}^{x_k} {}^*f(x_k) dt$$

Ettersom $x_k \approx x_{k-1}$ og $f(t)$ er kontinuerlig, har vi at ${}^*f(t) \approx {}^*f(x_k)$ for alle $t \in [x_{k-1}, x_k]$.

Dette betyr at $|{}^*f(t) - {}^*f(x_k)| < \epsilon$ for enhver positiv $\epsilon \in \mathbb{R}$. Dermed har vi at

$$|d^*F_k - d\tilde{F}_k| = \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} ({}^*f(t) - {}^*f(x_k)) dt \right| \leq \epsilon \cdot dt \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$$

Vi kan kort begrunne den siste overgangen med at den gjelder for reelle tall, og at en ikke-standard utvidelse bevarer ulikheter (se avsnitt 2.1.3). Altså kan vi hevde at

$$d^*F_k - d\tilde{F}_k = \alpha_k dt = \alpha_k dx$$

der $|\alpha_k| < \epsilon$ for enhver $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ og $dx = x_k - x_{k-1} = dt$. Dette betyr at

$$\frac{d^*F_k - d\tilde{F}_k}{dx} = \alpha_k \approx 0 \Rightarrow \frac{d^*F_k}{dx} \approx \frac{d\tilde{F}_k}{dx},$$

som altså er ekvivalent med (2.27). For alle $x = St(x_k) = St(x_{k-1})$ får vi (2.27) på formen

$$\frac{{}^*F(x+dx) - {}^*F(x)}{dx} \approx \frac{\tilde{F}(x_k+dx) - \tilde{F}(x_k)}{dx}, \quad (2.28)$$

som følger fra (2.15) og (2.16):

$$St\left(\frac{d\tilde{F}_k}{dx}\right) = St\left(\frac{d^*F_k}{dx}\right) = St({}^*F'(x_k)) = F'(x) = St\left(\frac{{}^*F(x+dx) - {}^*F(x)}{dx}\right)$$

Når vi så har vist (2.28), ser vi at

$$\frac{\tilde{F}(x+dx) - \tilde{F}(x)}{dx} = \frac{\sum_{t=a}^{x_k+dx} {}^*f(t)dt - \sum_{t=a}^{x_k} {}^*f(t)dt}{dx},$$

og dermed er overgangen begrunnet.

2.6 Historisk epistel: *Ghosts of departed quantities*

Utsagnet *ghosts of departed quantities* stammer fra den irske filosofen og biskopen George Berkeley (1685-1753), og viser hvilken problematisk «fødsel» infinitesimalene hadde. Mye tyder på at både Leibniz og Newton var usikre på stringensen i sine teorier, og dette kan ha vært en medvirkende årsak til at begge to tilsynelatende forsinket offentliggjørelsen av sine arbeider (Holme 2004).

Newton baserte infinitesimalregning på sin teori om *fluenter* og *fluksjoner*. En fluent er en størrelse som varierer med tiden; la oss tenke på det som en partikkel som følger en gitt bane med en (variabel) hastighet. Hastighetsendringen til fluenten x , kaller han fluksjonen \dot{x} . Newton innfører så *momentet til fluksjonen*, $\dot{x}o$, der o er en uendelig liten tidsforskjell. Altså blir $\dot{x}o$ en uendelig liten forflytning, slik at partikkelen som ved ett tidspunkt er i posisjon x , i neste øyeblikk er i posisjon $x + \dot{x}o$. (Her regner vi som om hastigheten er konstant, fordi vi bare ser på hva som skjer i et uendelig lite tidsintervall.) La oss se på et eksempel hentet fra Lindstrøm (2006, s. 298): En partikkel følger banen til en enhetssirkel gitt av likningen

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Med Newtons notasjon blir \dot{x} hastighetsendringen i x -retning, og \dot{y} hastighetsendringen i y -retning. Et punkt på kurva i ett øyeblikk, har funksjonsverdi $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, og i neste øyeblikk $f(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o)$. Alle punkter på kurva f har funksjonsverdi lik 0, og derfor har vi sammenhengen:

$$f(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o) - f(x, y) = 0$$

Dette gir oss følgende:

$$(x + \dot{x}o)^2 + (y + \dot{y}o)^2 - 1 - (x^2 + y^2 - 1) = 0$$

Løser vi opp parentesene og trekker sammen uttrykket, får vi:

$$2x\dot{x}o + (\dot{x})^2o^2 + 2y\dot{y}o + (\dot{y})^2o^2 = 0$$

«Trikket» til Newton er å se bort fra alle ledd som inneholder høyere potenser av o , fordi disse leddene blir *uendelig små* sammenliknet med o i første potens. Da står vi igjen med:

$$2x\dot{x}o + 2y\dot{y}o = 0 \Leftrightarrow x\dot{x}o + y\dot{y}o = 0$$

Stigningstallet til tangenten til sirkelen i punktet (x, y) er da \dot{y}/\dot{x} , som vi får ved å dele på $\dot{x}o$:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{x}{y}$$

Vi ser at metoden til Newton er fortreffelig som problemløsningsverktøy, men et logisk problem oppstår når vi regner o^2 som null, mens vi må anta at o ikke er lik null når vi deler på $\dot{x}o$. Det er det sviktende logiske grunnlaget i denne teorien som Berkeley påpeker i sitt skrift *The analyst*:

And what are these fluxions? The velocities of evanescent (flyktig, forsvinnende) increments. And what are these same evanescent increments? They are neither finite quantities, nor quantities infinitely small, nor yet nothing. May we call them ghosts of departed quantities?

Problematikken er også gjeldende hos Leibniz, som har en annen innfallsvinkel til problemet: Han observerte (ifølge Katz 2014) at en serie av tall $y = \{y_i\}$ ($i \in \{0, 1, \dots, n\}$) danner en serie av differanser $\{(\delta y)_i\}$, der $(\delta y)_i = y_i - y_{i-1}$, slik at:

$$\sum_i (\delta y)_i = y_n - y_0$$

På samme måte kan man betrakte en serie av summer $\{(\Sigma y)_i\}$, hvor $(\Sigma y)_i = y_0 + y_1 + \dots + y_i$. Utfra denne serien av summer, danner vi nå en serie av differanser $\{\delta(\Sigma y)_i\}$, der $\delta(\Sigma y)_i = (\Sigma y)_i - (\Sigma y)_{i-1}$. Da får man at

$$\{\delta(\Sigma y)_i\} = \{y_i\}_{i=1}^n \text{ eller } \delta(\Sigma y)_i = y_i \text{ for } i \geq 1$$

Leibniz utvidet denne oppdagelsen til å betrakte funksjoner $y = f(x)$ definert på et intervall $[a, b]$ som en uendelig serie av funksjonsverdier. Kurven til funksjonen betraktet han som et polygon med uendelig mange sider, der vi trekker en rett strek fra funksjonsverdiene (to funksjonsverdier på kurven definerer en side i polygonet) ned på x -aksen. Han startet med å dele opp intervallet $[a, b]$ i et endelig antall like delintervaller, med $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Til en x_i hører funksjonsverdien $y_i = f(x_i)$. Bredden på delintervallene, blir $(\delta x)_i = x_{i+1} - x_i = \Delta x$. Når denne bredden Δx gjøres *uendelig*

liten, betegnet Leibniz den med dx ; og analogt med dette skrev han en infinitesimal differanse δy som dy . Fordi Leibniz betraktet kurven til funksjonen $y = f(x)$ som en «brukket linje» gjennom uendelig mange punkter, er arealet som kurven og x -aksen begrenser lik summen av uendelig mange uendelig tynne arealstriper (rektangler) med bredde dx og høyde y . Dette arealet betegnet han med:

$$\int y dx$$

Dette betyr altså, ifølge Leibniz, at summen $(\Sigma y dx)_i$ skal tas over et uendelig antall uendelig små arealelementer. På samme måte som δ går over i d (d for det latinske ordet for differanse, *differentia*), går Σ over i \int (en elongert utgave av bokstaven S for *summa*) (Katz 2014). I samsvar med $\delta(\Sigma y)_i = y_i$, får vi at:

$$d \int y dx = y dx$$

Denne oppdagelsen, at summer og differanser er inverse operasjoner, er i bunn og grunn analysens fundamentalteorem. Videre innføres den deriverte ved:

$$dy = y' dx \quad \text{eller} \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

La oss ta et eksempel på hvordan Leibniz selv argumenterte for det vi kan kalle *produktregelen for differensialer* (se egenskap 2 fra seksjon 2.3). Ifølge Goldblatt (1998) gav Leibniz denne regelen på formen:

$$dxy = xdy + ydx$$

For å komme fram til dette, gjorde han følgende observasjon: dxy er det samme som differansen mellom to suksessive produkter $(x + dx)(y + dy)$ og xy . Dermed får vi:

$$dxy = (x + dx)(y + dy) - xy = xdy + ydx + dxdy$$

Resultatet følger ved at vi betrakter størrelsen $dxdy$ som infinitesimalt liten sammenliknet med de andre leddene, da både dx og dy er infinitesimalt små størrelser.

Vi kan ved disse eksemplene se likheten i tankegangen hos Newton og Leibniz: Newton ser bort fra høyere ordens potenser av o , mens Leibniz forkaster $dxdy$ til fordel for

de andre leddene med dx og dy . Idéen er genial, men hvordan skal man begrunne slike uendelig små størrelser? Leibniz innså nok svakheten ved teorien sin, og var ofte uvil- lig til å snakke om hva infinitesimale størrelser egentlig var, og hva som skilte dem fra vanlige tall (Lindstrøm 2006). Det fremkommer imidlertid av Leibniz' korrespodanser og brevvekslinger, at han selv var skeptisk til å betrakte infinitesimalenes eksistens på lik linje med endelige, reelle talls eksistens. Noe av Leibniz' eget syn på saken kommer frem i hans bok *Tentamen de motuum coelestium causis* utgitt i 1689. Kort oppsummert er idéen hans at infinitesimaler oppfører seg som vanlige tall, men at de må betraktes som fiktive størrelser slik man også kan betrakte imaginære (av lat. *innbildte, uvirkelige*) tall (Robinson 1967). Vi kan kanskje si at Leibniz betraktet fenomenet *infinitesimaler* fra et mer filosofisk ståsted, mens Newton på sin side tilnærmet seg problemet med en fysikers innfallsvinkel. Han snakker ofte om fenomenet i forbindelse med partikler som beveger seg i kontinuerlige baner over tid. På den måten blir en *fluksjon*, \dot{x} , det samme som det vi med Leibniz' notasjon ville betegnet $\frac{dx}{dt}$; altså den deriverte av x med hensyn på tiden t (eller *hastigheten* til x). Newton opererer dessuten med flere betegnelser på fenomenet, slik at han noen ganger refererer til *moments of fluent quantities*, mens han også snakker om *limits of ratios of quantities, infinitely small quantities* o.s.v. (Goldblatt 1998). I sitt hovedverk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* forklarer Newton at for ham er det snakk om en grenseovergang der størrelsene går mot null. På den måten foregrep han grensebegrepet som en viktig hjørnestein i matematisk analyse.

På tross av infinitesimalregningens praktiske suksess, ble biskop Berkeleys beskrivel- se av infinitesimaler som *gjenferd etter avdøde størrelser* symbolet på at man hadde et behov for å rydde opp i analysens logiske grunnlag. Med sentrale menn som Bernhard Bolzano (1781-1848), Augustin Louis Cauchy (1789-1857) og Karl Theodor Wilhelm Wei- erstrass (1815-97), forsøkte man utover på 1800-tallet å unngå begreper som *uendelig små størrelser* ved å ty til ϵ - δ -formuleringer, som formaliseringen av grensebegrepet:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ betyr at det for ethvert positivt tall } \epsilon, \text{ uansett hvor lite, eksisterer et} \\ \text{positivt tall } \delta \text{ slik at: } |f(x) - L| < \epsilon \text{ dersom } |x - x_0| < \delta$$

Det eneste tallet t som oppfyller egenskapen $|t| < \epsilon$ for enhver $\epsilon > 0$, er nemlig tallet 0. Dette betyr at vi på en elegant måte kan kreve at forskjellen mellom funksjonen $f(x)$

og grensen L skal være *vilkårlig liten* så lenge differansen mellom x og x_0 er tilstrekkelig liten. Vi snakker altså ikke lenger om at differansen er *uendelig liten*.

Lenge kom infinitesimalene i skyggen av den klassiske analysens ϵ - δ -formuleringer. Selv om ϵ - δ -språket var en elegant måte å unngå å snakke om uendelig små størrelser på, var tanken om disse størrelsene populær i forbindelse med praktiske anvendelser av matematikken, for eksempel i fysikk (Lindstrøm 1996). Dessuten har vel mang en skarve matematikkstudent (forfatteren inkludert) fått erfare at ϵ - δ -språket fort kan bli vanskelig, rigorøst og lite intuitivt. Det oppstod et behov for igjen å kunne ta i bruk infinitesimalene i matematisk analyse på en korrekt måte. Utover på 1900-tallet ble det gjort flere forsøk på å bygge opp en alternativ analyse som baserte seg på infinitesimaler, men det viste seg at disse forsøkene hadde betydelige svakheter. Gjennombruddet kom på 1960-tallet da Abraham Robinson fant en logisk vanntett måte å konstruere en slik *ikke-standard* analyse på. Som vi har sett i dette og det foregående kapitlet, ligger «hemmeligheten» bak denne konstruksjonen i egenskapene til de hyperreelle tallene.

Kapittel 3

Ikke-standard-analysens fortreffelighet

There are good reasons to believe that nonstandard analysis, in some version or other, will be the analysis of the future.

(Kurt Gödel)

I kapittel 2 så vi noen eksempler på hvordan man definerer begreper som funksjon, kontinuitet, derivasjon og integrasjon i klassisk vs. ikke-standard analyse. Mange vil nok hevde at definisjonene i ikke-standard analyse i stor grad er i overensstemmelse med vår intuitive oppfatning av hva begrepene er for noe. På den måten blir ikke-standard analyse et nyttig verktøy for å drive matematisk analyse på en fruktbar måte. Påstanden i dette kapittelet er at ikke-standard betraktninger ofte forenkler bevisføringen og er mer i tråd med vår intuisjon enn den klassiske analysen. Dette er selvsagt en subjektiv påstand som ikke nødvendigvis alltid er like gyldig. For å vise at ikke-standard analyse har noe for seg, trekker vi likevel fram noen utvalgte eksempler der vi beviser klassiske resultater i kalkulus ved å bruke begge metodene; klassisk og ikke-standard. Leseren får selv dømme i hvert tilfelle hva som virker mest hensiktsmessig.

3.1 Kontinuitet for sammensatte funksjoner

Setning 1: *Kontinuitet for sammensatte funksjoner.*

Anta at $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig i x_0 , $g(x_0)$ er et indre punkt i D_f , og $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig i $g(x_0)$. Da er den sammensatte funksjonen $f(g(x))$ kontinuerlig i x_0 .

Klassisk bevis:

Beviset vi skal gi her, baserer seg på klassisk definisjon av kontinuitet fra seksjon 2.2. Formuleringen er hentet fra Trench (2012, s. 59).

Anta at $\epsilon > 0$ er et reelt tall. Siden $g(x_0)$ er et indre punkt i D_f og f er kontinuerlig i $g(x_0)$, eksisterer det et reelt tall $\delta_1 > 0$ slik at $f(t)$ er definert, og

$$|f(t) - f(g(x_0))| < \epsilon \text{ dersom } |t - g(x_0)| < \delta_1.$$

Siden g er kontinuerlig i x_0 , eksisterer det en $\delta > 0$ slik at $g(x)$ er definert, og

$$|g(x) - g(x_0)| < \delta_1 \text{ dersom } |x - x_0| < \delta.$$

Dette medfører at

$$|f(g(x)) - f(g(x_0))| < \epsilon \text{ dersom } |x - x_0| < \delta.$$

Derfor kan vi konkludere med at $f(g(x))$ er kontinuerlig i x_0 . □

Ikke-standard bevis:

Beviset vi skal gi her, baserer seg på ikke-standard definisjon av kontinuitet fra seksjon 2.2. Vi bruker notasjonen $*$ for å understreke at mengder eller funksjoner er hyperreelle (d.v.s. er elementer i ${}^*\mathbb{R}$).

$$g(x) \text{ er kontinuerlig i } x = x_0 \iff {}^*g({}^*x) \approx g(x_0) \text{ for alle } {}^*x \approx x_0$$

$$f(y) \text{ er kontinuerlig i } y = g(x_0) \iff {}^*f({}^*y) \approx f(g(x_0)) \text{ for alle } {}^*y \approx g(x_0)$$

Dette medfører at

$${}^*f({}^*g({}^*x)) \approx f(g(x_0)) \text{ for alle } {}^*x \approx x_0.$$

Derfor kan vi konkludere med at $f(g(x))$ er kontinuerlig i x_0 . □

3.2 Kjernerregelen

Setning 2: *Kjernerregelen.*

Anta at $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er deriverbar i x_0 , og at $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er deriverbar i $g(x_0)$. Da er den sammensatte funksjonen $h(x) = f(g(x))$ deriverbar i x_0 , og

$$h'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Klassisk bevis:

Beviset vi skal gi her, baserer seg på klassisk definisjon av derivasjon fra seksjon 2.3. Formuleringen er hentet fra Trench (2012, s. 77-78).

Fordi f er deriverbar i $g(x_0)$, har vi et resultat (Trench 2012, s. 76) som sier at

$$f(t) - f(g(x_0)) = [f'(g(x_0)) + E(t)][t - g(x_0)],$$

hvor

$$\lim_{t \rightarrow g(x_0)} E(t) = E(g(x_0)) = 0.$$

Vi definerer

$$E(t) = \begin{cases} \frac{f(t) - f(g(x_0))}{t - g(x_0)} - f'(g(x_0)), & t \in D_f \text{ og } t \neq g(x_0) \\ 0, & t = g(x_0) \end{cases}$$

slik at $E(t)$ blir kontinuerlig i $t = g(x_0)$. Dersom vi lar $t = g(x)$, får vi at

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = [f'(g(x_0)) + E(g(x))][g(x) - g(x_0)].$$

Siden $h(x) = f(g(x))$, impliserer dette at

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = [f'(g(x_0)) + E(g(x))]\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Siden g er deriverbar i x_0 , gir teorem 2.14 oss at g dermed også er kontinuerlig i x_0 .

Setning 1 gir oss nå at den sammensatte funksjonen $E(g(x))$ er kontinuerlig i x_0 , og vi får at

$$\lim_{x \rightarrow x_0} E(g(x)) = E(g(x_0)) = 0.$$

Vi står dermed igjen med

$$h'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0),$$

hvilket vi skulle vise. □

Ikke-standard bevis:

Før vi gir selve beviset, vil vi bemerke at kjerneregelen nærmest automatisk følger fra Leibniz' notasjon. Idéen er som følger:

La $h(x) = f(g(x))$. Da er

$$h'(x) = \frac{dh}{dx} = \frac{df(g)}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Vi kan imidlertid argumentere mer rigorøst for dette, og vi skal gi beviset på to måter. Begge alternativene baserer seg på ikke-standard definisjon av derivasjon fra seksjon 2.3.

Alternativ 1:

Først observerer vi at fordi g er deriverbar i x_0 , gir teorem 2.14 oss at g også er kontinuerlig i x_0 . Fordi f er deriverbar i $g(x_0)$, kan vi av samme årsak hevde at f er kontinuerlig i $g(x_0)$. Setning 1 gir oss nå at den sammensatte funksjonen $h(x) = f(g(x))$ er kontinuerlig i x_0 . Per definisjon har vi at

$$h'(x_0) = St \left(\frac{dh(x_0)}{dx} \right),$$

der

$$dh(x_0) = {}^*h(x_0 + dx) - {}^*h(x_0) = {}^*f({}^*g(x_0 + dx)) - {}^*f({}^*g(x_0)) \quad \forall dx \approx 0, dx \neq 0.$$

Nå består resten av beviset kun i å anvende regneregler for standarddelene (se seksjon 1.2) til differensialene. I ikke-standard analyse blir differensialer infinitesimale tall, så regnereglene for disse blir som for vanlige, reelle tall. Under forutsetning at $dx \neq 0$ og $dg \neq 0$, får vi at

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= St \left(\frac{dh(x_0)}{dx} \right) = St \left(\frac{df(g(x_0))}{dg} \cdot \frac{dg(x_0)}{dx} \right) = St \left(\frac{df(g(x_0))}{dg} \right) \cdot St \left(\frac{dg(x_0)}{dx} \right) \\ &= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0), \end{aligned}$$

hvilket vi skulle vise. Den siste likheten får vi når vi vet at $St(dg) = 0 \Leftrightarrow dg \approx 0$, som følger av at funksjonen g er kontinuerlig i x_0 :

$$dg = dg(x_0) = {}^*g(x_0 + dx) - {}^*g(x_0) \approx 0 \quad \forall dx \approx 0. \quad (3.1)$$

Hvis ikke det var slik, kunne vi ikke hevde at $St\left(\frac{df(g(x_0))}{dg}\right)$ representerer den deriverte av f med hensyn på g (jf. definisjon 2.13). At den sammensatte funksjonen h er kontinuerlig i x_0 , er strengt tatt overflødig informasjon fordi deriverbarhet er et «strengere» krav enn kontinuitet.

Alternativ 2:

Kjerneregelen kan også vises ved å ta definisjonen av differensialene med i betraktning.

Per definisjon har vi at

$$g'(x_0) = St\left(\frac{dg(x_0)}{dx}\right) = St\left(\frac{{}^*g(x_0 + dx) - {}^*g(x_0)}{dx}\right) \quad \forall dx \approx 0, dx \neq 0 \quad (3.2)$$

$$f'(g(x_0)) = St\left(\frac{df(g(x_0))}{dg}\right) = St\left(\frac{{}^*f({}^*g(x_0) + dg) - {}^*f({}^*g(x_0))}{dg}\right) \quad \forall dg \approx 0, dg \neq 0 \quad (3.3)$$

Vi tar utgangspunkt i (3.2) og (3.3), og får at

$$f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) = St\left(\frac{{}^*f({}^*g(x_0) + dg) - {}^*f({}^*g(x_0))}{dg} \cdot \frac{{}^*g(x_0 + dx) - {}^*g(x_0)}{dx}\right).$$

På grunn av (3.1) får vi nå at

$$f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) = St\left(\frac{{}^*f({}^*g(x_0) + dg) - {}^*f({}^*g(x_0))}{dx}\right).$$

På grunn av (3.1) får vi også at ${}^*g(x_0) + dg = {}^*g(x_0 + dx)$, og dermed har vi at

$$f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) = St\left(\frac{{}^*f({}^*g(x_0 + dx)) - {}^*f({}^*g(x_0))}{dx}\right) = h'(x_0) \quad \forall dx \approx 0, dx \neq 0,$$

hvilket skulle vises. □

3.3 L'Hôpitals regel for « $\frac{0}{0}$ »-uttrykk

Setning 3: *L'Hôpitals regel for « $\frac{0}{0}$ »-uttrykk.*

Anta at f og g er deriverbare og at $g'(x) \neq 0$ på et åpent intervall om $x = a$ (og ikke nødvendigvis i $x = a$). Anta videre at $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ og at grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad (3.4)$$

eksisterer (L er endelig eller $\pm\infty$). Da er

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L. \quad (3.5)$$

Klassisk bevis:

Beviset baserer seg på det generalisert middelverditeoremet (Trench 2012, s. 83), og formuleringen er hentet fra Trench (2012, s. 89-90).

Vi beviser teoremet i tilfellet der L er et endelig tall:

Anta at $\epsilon > 0$. Fra (3.4) får vi at det finnes en x_0 på intervallet om $x = a$ der f og g er deriverbare samtidig som $g'(x) \neq 0$ - la oss betegne dette intervallet $(a_0, a_1) \setminus \{a\}$ - slik at

$$\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| < \epsilon \quad (3.6)$$

dersom c ligger mellom x_0 og a . Det generaliserte middelverditeoremet impliserer at dersom x og t ligger på intervallet $[x_0, a)$ eller $(a, x_0]$, så finnes det en c mellom x og t , og derfor i (x_0, a) eller (a, x_0) , slik at

$$[g(x) - g(t)]f'(c) = [f(x) - f(t)]g'(c). \quad (3.7)$$

Siden $g'(x) \neq 0$ på intervallet $(a_0, a_1) \setminus \{a\}$, gir middelverditeoremet (Trench 2012, s.83) at

$$g(x) - g(t) \neq 0 \quad \text{dersom} \quad x, t \in (a_0, a_1) \setminus \{a\}.$$

Dette betyr at g ikke kan ha mer enn ett nullpunkt på $(a_0, a_1) \setminus \{a\}$. Derfor kan vi velge x_0 slik at g ikke har nullpunkter på $[x_0, a)$ eller $(a, x_0]$. Dermed kan (3.7) omformuleres til

$$\frac{f(x) - f(t)}{g(x) - g(t)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

og (3.6) gir oss at

$$\left| \frac{f(x) - f(t)}{g(x) - g(t)} - L \right| < \epsilon \quad \text{dersom} \quad x, t \in [x_0, a) \cup (a, x_0]. \quad (3.8)$$

La x ligge på intervallet $[x_0, a)$ eller $(a, x_0]$. Vi definerer oss nå funksjonen

$$G(t) = \frac{f(x) - f(t)}{g(x) - g(t)} - L.$$

Da $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ får vi at

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \lim_{t \rightarrow a} g(t) = 0,$$

slik at

$$\lim_{t \rightarrow a} G(t) = \frac{f(x)}{g(x)} - L. \quad (3.9)$$

Siden

$$|G(t)| < \epsilon \quad \text{dersom} \quad t \in (x_0, a) \cup (a, x_0),$$

gir (3.8) og (3.9) at

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| \leq \epsilon.$$

Dette er oppfylt for alle $x \in (x_0, a) \cup (a, x_0)$, hvilket gir oss (3.5). □

Ikke-standard bevis:

Beviset vi skal gi her, baserer seg på ikke-standard definisjon av kontinuitet og derivasjon samt regneregler for standarddeler. Idéen til dette beviset er hentet fra Keisler (1976a, s. 286). Beviset vi skal gi her, antar - i motsetning til det klassiske beviset - at $f'(a)$ og $g'(a)$ eksisterer og at $g'(a) \neq 0$.

Vi beviser teoremet i tilfellet der L er et endelig tall og $g'(a) \neq 0$:

Dersom f og g ikke er definert i $x = a$ (eller er definert, men ikke kontinuert), kan vi utvide f og g til kontinuerte funksjoner i a ved å sette $f(a) = g(a) = 0$ (Lindstrøm 2006, s. 271). Videre lar vi $dx \approx 0, dx \neq 0$ være et infinitesimalt tall. Dersom vi antar at $f'(a)$ og $g'(a)$ eksisterer, får vi at

$$\frac{*f(a + dx)}{*g(a + dx)} = \frac{\frac{*f(a+dx) - f(a)}{dx}}{\frac{*g(a+dx) - g(a)}{dx}} = \frac{\frac{df(a)}{dx}}{\frac{dg(a)}{dx}} \approx \frac{f'(a)}{g'(a)} \quad (3.10)$$

Kontinuitet av f og g samt (3.10) gir oss at

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = St \left(\frac{*f(a + dx)}{*g(a + dx)} \right) = St \left(\frac{\frac{df(a)}{dx}}{\frac{dg(a)}{dx}} \right) = \frac{St \left(\frac{df(a)}{dx} \right)}{St \left(\frac{dg(a)}{dx} \right)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

□

Kapittel 4

Peanos eksistensteorem for første ordens ordinære differensiallikninger

Foreløpig har vi bare sett på hvordan éndimensjonale tilfeller i \mathbb{R} blir oversatt til ${}^*\mathbb{R}$, men utvidelsen av \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$) til ${}^*\mathbb{R}^n$ følger naturlig. I dette kapittelet ser vi hvordan vi kan bevise *Peanos eksistensteorem* for ordinære differensiallikninger i \mathbb{R}^n ved hjelp av ikke-standard analyse. Peanos eksistensteorem kan tolkes som et mer generelt resultat enn *Picards teorem* (Wyller 2015, s. 24), fordi *Lipschitz*-kravet er fjernet. Til gjengjeld kan man ikke avgjøre om resultatet er éntydig; bare at det eksisterer en løsning på initialverdiproblemet:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(t, \underline{x}) \tag{4.1}$$

$$\underline{x}(t_0) = \underline{c}, \quad \underline{c} = [c_1, c_2, \dots, c_N]^T$$

Notasjonen her følger kurset Math401 (Kontinuerlige dynamiske systemer, se Wyller 2015), slik at $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ og $\underline{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ er n -dimensjonale vektorer i \mathbb{R}^n . En grundigere redegjørelse for vektorer og vektornotasjon er å finne i seksjon 5.2. For at initialverdiproblemet skal ha en løsning for alle $\underline{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$, stilles følgende krav:

- (a) \underline{f} er kontinuerlig.
- (b) \underline{f} er begrenset; d.v.s. $|\underline{f}(t, \underline{x})| \leq M$ for en positiv konstant M (ofte skrevet $M \in \mathbb{R}^+$).

Beviset for Peanos eksistensteorem som blir gitt her, er en generalisering (fra \mathbb{R} til \mathbb{R}^n)

av beviset som er skissert i Lindstrøm (1988).

4.1 Formulering og bevis

Peanos eksistensteorem:

La $\underline{f} : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ være en kontinuerlig og begrenset vektorfunksjon. Da har initialverdiproblemet

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(t, \underline{x}), \quad \underline{x}(t_0) = \underline{c} \quad (4.2)$$

en løsning for alle $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$.

Ikke-standard bevis:

Vi starter med å sette opp initialverdiproblem 4.2 på komponentform:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, \dots, x_n), \quad x_1(t_0) = c_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, \dots, x_n), \quad x_2(t_0) = c_2 \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, \dots, x_n), \quad x_n(t_0) = c_n \end{aligned} \quad (4.3)$$

For $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ har vi da at

$$x'_i(t) = f_i(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad x_i(t_0) = c_i \quad (4.4)$$

Dermed uttrykker (4.2), (4.3) og (4.4) det samme initialverdiproblemet. Nå setter vi opp en integrallikning på komponentform som er ekvivalent med dette initialverdiproblemet, som gjelder for $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ og $t_0 \leq t \leq t_1$:

$$x_i(t) = \int_{t_0}^t f_i(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \dots, x_n(\tau)) d\tau + c_i \quad (4.5)$$

Målet vårt er å vise at løsningen av (4.5) eksisterer. Det første steget er å oversette *standard*-betingelsene til *ikke-standard*-terminologi. Deretter vil vi bruke disse formuleringene til å bevise teoremet.

For å gi integrallikningen (4.5) en ikke-standard tolkning som en hyperendelig Riemannsum, foretar vi en hyperendelig oppdeling av intervallet $[t_0, t_1]$. Vi setter $d\tau = \frac{t_1 - t_0}{N}$ der $N = {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ er et hyperendelig tall, og definerer

$$\tau_{j,N} = t_0 + j \cdot d\tau \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, N\}.$$

Dermed er $\{\tau_{j,N}\}$ en hyperendelig oppdeling av $[t_0, t_1]$, slik vi hevdet i avsnitt 2.1.2. Vi definerer nå følgende:

$$t_{k,N} = t_0 + k \cdot dt, \quad dt = d\tau$$

I vårt ikke-standardbevis, skal $x_i(t) \in \mathbb{R}$ utvides til hyperreelle funksjoner definert på ${}^*\mathbb{R}$ for $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Vi starter denne utvidelsen ved å betrakte summen

$$x_{i,k,N} = c_i + \sum_{j=0}^{k-1} {}^*f_i(\tau_{j,N}, x_{1j,N}, x_{2j,N}, \dots, x_{nj,N})d\tau, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (4.6)$$

Summen på høyre side i (4.6) er en hyperendelig Riemannsum dersom $k - 1$ ($1 \leq k \leq N$) er et hyperendelig tall. Vi ser på hvordan $x_{i,k,N}$ vil utvikle seg:

$$k = 1 \Rightarrow x_{i1,N} = c_i + {}^*f_i(t_{0,N}, x_{10,N}, x_{20,N}, \dots, x_{n0,N})d\tau$$

$$k = 2 \Rightarrow x_{i2,N} = c_i + ({}^*f_i(t_{0,N}, x_{10,N}, x_{20,N}, \dots, x_{n0,N}) + {}^*f_i(t_{1,N}, x_{11,N}, x_{21,N}, \dots, x_{n1,N}))d\tau$$

O.S.V.

Dermed har vi definert $x_{i,k,N} \in {}^*\mathbb{R}$ suksessivt for $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ og $k \in \{1, 2, \dots, N\}$. Nå definerer vi $x_i(t)$ slik:

$$x_i(t) \equiv St(x_{ik}) \quad \forall t = St(t_k) \quad (4.7)$$

Her tillater vi oss å sløyfe N i indekseringen, da det er underforstått at alt bygger på den hyperendelige oppdelingen der $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Spørsmålet er nå om definisjonen av

$x_i(t)$ gir veldefinerte, kontinuerlige funksjoner i \mathbb{R} for $t \in [t_0, t_1]$. Først viser vi at $x_i(t)$ er veldefinert, som betyr at dersom $St(t_k) = St(t_l)$, så må $St(x_{ik}) = St(x_{il})$:

$$\begin{aligned} x_{ik} &= c_i + \sum_{j=0}^{k-1} {}^*f_i(\tau_j, x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})d\tau \\ x_{il} &= c_i + \sum_{j=0}^{l-1} {}^*f_i(\tau_j, x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})d\tau \\ \Rightarrow x_{ik} - x_{il} &= \sum_{j=l}^{k-1} {}^*f_i(\tau_j, x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})d\tau \end{aligned}$$

Nå utnytter vi at \underline{f} er begrenset; d.v.s. $|\underline{f}(t, \underline{x})| \leq M$ for en konstant $M \in \mathbb{R}^+$. Dette betyr at hver komponent f_i er begrenset, og med ikke-standard terminologi har vi da at

$$|{}^*f_i(\tau_j, x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})| \leq M_i \text{ for et tall } M_i \in \mathbb{R}^+.$$

Dette impliserer:

$$|x_{ik} - x_{il}| \leq M_i (k - l) d\tau = M_i (\tau_k - \tau_l) \quad (4.8)$$

På grunn av måten vi har definert τ_j og t_k på, har vi at

$$t_k = \tau_k \text{ og } t_l = \tau_l. \quad (4.9)$$

Følgelig må

$$\tau_k - \tau_l = t_k - t_l \approx 0,$$

når antakelsen er at t_k og t_l ligger i samme *monade*, d.v.s. uendelig tett, om $St(t_k) = St(t_l)$.

Vi har dermed vist at

$$t_k \approx t_l \Rightarrow x_{ik} \approx x_{il}.$$

Dette betyr at vår definisjon 4.7 gir veldefinerte funksjoner $x_i(t) \in \mathbb{R}$ for $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Neste steg er å vise at $x_i(t)$ er kontinuerlige funksjoner:

Vi velger oss to elementer $u, v \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$. Da eksisterer det to elementer $t_k, t_l \in {}^*\mathbb{R}$ som er slik at

$$t_k \approx u \text{ og } t_l \approx v.$$

I henhold til definisjon 4.7 samt resultatene 4.8 og 4.9, har vi at:

$$|x_i(u) - x_i(v)| = |St(x_{ik}) - St(x_{il})| = St|x_{ik} - x_{il}| \leq M_i \cdot St|\tau_k - \tau_l| = M_i|u - v|$$

Vi ser at $x_i(t)$ er *Lipschitz*-kontinuerlig, og dermed er kontinuerlig. Dette kan enkelt be-
 grunnes utfra ikke-standard analyse:

Vi tar utgangspunkt i at

$$|x_i(u) - x_i(v)| \leq M_i|u - v| \text{ for } u, v \in [t_0, t_1] \text{ og } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Vi utvider dette til å gjelde for hyperreelle tall og mengder (symbolisert ved $*$):

$$|*x_i(*u) - *x_i(*v)| \leq M_i|*u - *v| \text{ for } *u, *v \in *[t_0, t_1] \text{ og } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Dermed har vi at:

$$*u \approx *v \Rightarrow *x_i(*u) \approx *x_i(*v)$$

I henhold til vår ikke-standard definisjon av kontinuitet, betyr dette at $x_i(t)$ er kontinu-
 erlige funksjoner for $t \in [t_0, t_1]$ og $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Til slutt gjenstår det å vise at

$$St(x_{ik}) = c_i + St \left(\sum_{j=0}^{k-1} *f_i(\tau_j, x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})d\tau \right)$$

er ekvivalent med

$$x_i(t) = c_i + \int_{t_0}^t f_i(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \dots, x_n(\tau)) d\tau.$$

Først ser vi på venstresidene i de to likningene:

Fra definisjon 4.7 har vi at

$$x_i(t) \equiv St(x_{ik}) \forall t = St(t_k).$$

Det gjenstår å undersøke om høyresidene i likningene er ekvivalente; altså om

$$\int_{t_0}^t f_i(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \dots, x_n(\tau))d\tau = St \left(\sum_{j=0}^{k-1} *f_i(\tau_j, x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})d\tau \right).$$

Fra ikke-standard-definisjonen på et bestemt integral, får vi at:

$$\int_{t_0}^t f_i(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \dots, x_n(\tau)) d\tau \equiv St \left(\sum_{j=0}^{k-1} {}^* f_i(\tau_j, x_1(\tau_j), x_2(\tau_j), \dots, x_n(\tau_j)) d\tau \right),$$

der $k - 1$ er et hyperendelig tall. Lemma 2 fra seksjon 2.2 på komponentform gir at $f_i(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}$ er kontinuerlig dersom f_i og $x_i(t)$ er kontinuerlige for $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Når vi vet at ${}^* f_i$, $x_i(\tau)$ og x_{ij} er kontinuerlige for $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, gir lemma 2 oss at

$${}^* f_i(\tau_j, x_1(\tau_j), x_2(\tau_j), \dots, x_n(\tau_j)) \approx {}^* f_i(\tau_j, x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}) \quad (4.10)$$

fordi $x_i(\tau_j) \approx x_{ij}$ og $\tau_j = t_0 + j \cdot dt$ for $j \in \{0, 1, \dots, N\}$. Nå trenger vi et resultat som bygger på lemma 1 fra avsnitt 2.1.2. La oss kalle det lemma 3:

Lemma 3: Dersom $\{\alpha_k\}$ og $\{\beta_k\}$ er to hyperendelige tallfølger ($k \in \{1, 2, \dots, N\}$, $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$), der $\alpha_k \approx \beta_k$ for alle $1 \leq k \leq N$, så har vi at $\sum_{k=1}^N \alpha_k dt \approx \sum_{k=1}^N \beta_k dt$.

Bevis for lemma 3:

$\sum_{k=1}^N \alpha_k dt \approx \sum_{k=1}^N \beta_k dt$ er ekvivalent med at $\sum_{k=1}^N \alpha_k dt - \sum_{k=1}^N \beta_k dt \approx 0$, som også kan skrives:

$$\sum_{k=1}^N (\alpha_k - \beta_k) dt \approx 0$$

Dersom $\alpha_k \approx \beta_k \forall 1 \leq k \leq N$, må vi ha at $|\alpha_k - \beta_k| \approx 0 \forall 1 \leq k \leq N$. Vi setter $|\alpha_k - \beta_k| = \gamma_k$. Dermed er $\{\gamma_k\}$ en hyperendelig tallfølge der $\gamma_k \approx 0$ for alle $k \in \{1, 2, \dots, N\}$. Vi setter $\max_{1 \leq k \leq N} \gamma_k = \gamma_{max}$.

Videre har vi at

$$\left| \sum_{k=1}^N (\alpha_k - \beta_k) dt \right| \leq \sum_{k=1}^N |\alpha_k - \beta_k| dt = \sum_{k=1}^N \gamma_k dt \leq \sum_{k=1}^N \gamma_{max} dt = N \cdot \gamma_{max} dt.$$

Tidligere har vi definert $dt = \frac{t_1 - t_0}{N}$. Dette gir:

$$\sum_{k=1}^N \gamma_{max} dt = N \cdot \gamma_{max} \cdot \left(\frac{t_1 - t_0}{N} \right) = \gamma_{max} \cdot (t_1 - t_0)$$

Lemma 1 gir oss at $\gamma_{max} \approx 0$. Dermed blir:

$$St \left(\sum_{k=1}^N \gamma_{max} dt \right) = St(\gamma_{max} \cdot (t_1 - t_0)) = St(\gamma_{max}) \cdot St(t_1 - t_0) = 0 \cdot (t_1 - t_0) = 0$$

Konklusjonen er at $|\sum_{k=1}^N (\alpha_k - \beta_k) dt| \approx 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^N (\alpha_k - \beta_k) dt \approx 0$ □

Beviset for Peanos eksistensteorem fortsetter:

Hvis vi nå betrakter $\{^*f_i(\tau_j, x_1(\tau_j), x_2(\tau_j), \dots, x_n(\tau_j))\}$ og $\{^*f_i(\tau_j, x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})\}$ som to hyperendelige tallfølger der (4.10) er oppfylt, gir lemma 3 oss følgende:

$$St \left(\sum_{j=0}^{k-1} ^*f_i(\tau_j, x_1(\tau_j), x_2(\tau_j), \dots, x_n(\tau_j)) d\tau \right) = St \left(\sum_{j=0}^{k-1} ^*f_i(\tau_j, x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}) d\tau \right)$$

Fra (4.6) får vi videre at

$$St \left(\sum_{j=0}^{k-1} ^*f_i(\tau_j, x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}) d\tau \right) = St(x_{ik}) - c_i,$$

og fra definisjon 4.7 får vi at

$$St(x_{ik}) - c_i = x_i(t) - c_i.$$

Konklusjonen er at

$$\int_{t_0}^t f_i(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \dots, x_n(\tau)) d\tau = St \left(\sum_{j=0}^{k-1} ^*f_i(\tau_j, x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}) d\tau \right),$$

hvilket skulle vises. □

4.2 Kommentarer og diskusjon til beviset

Vi har nå sett på hvordan vi beviser Peanos eksistensteorem ved hjelp av ikke-standard analyse. Strategien er enkel: Først oversetter vi *standard*-betingelsene til *ikke-standard*-termer. Deretter bruker vi disse reformuleringene til å bevise det *standard*e teoremet. I mange tilfeller vil ikke-standard beviser være mer i tråd med vår intuitive oppfatninger enn et standard/klassisk bevis. Dette er selvsagt en subjektiv påstand, men leseren

kan sammenlikne det gitte beviset med en klassisk variant og dømme selv. Essensen i vårt bevis for Peanos eksistensteorem tar utgangspunkt i at man reduserer en klassisk differensiallikning til en hyperendelige Riemannsum. Til sammenlikning går det klassiske beviset for dette teoremet veien om kompakthet for uendelig-dimensjonale *metriske rom* og *Ascoli-Arzela*-teoremet (Trench 2012, s.541), og beviset blir fort vanskelig å følge dersom man ikke har god kontroll på teorien bak kompakthet for metriske rom. Ved hjelp av ikke-standard analyse, kan beviset gjennomføres uten nærmere kjennskap til dette.

Som sagt innledningsvis kan man trekke paralleller mellom Peanos eksistensteorem og Picards teorem. Begge teoremene tar stilling til et startverdiproblem, men Picards teorem både antar mer og konkluderer mer enn Peanos eksistensteorem. Der *Picard* forutsetter *Lipschitz*-kontinuitet, krever *Peano* bare vanlig kontinuitet av funksjonen f . Prisen vi må betale ved å stille enklere krav, blir imidlertid at *Peano* kun kan garantere for eksistens av løsning, mens *Picard* både garanterer for eksistens og éntydighet. Som en illustrasjon på dette kan vi trekke fram følgende eksempel, hentet fra Wyller (2015, s. 24):

$$\frac{dx}{dt} = x^{\frac{1}{2}}, \quad x(0) = 0, \quad D_x = [0, 1]$$

I dette eksempelet gir ikke Picards teorem noen konklusjon, da høyresiden i likningen ikke er *Lipschitz*-kontinuerlig på et intervall som inneholder $x = 0$. Dette ser vi av følgende sammenheng:

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} |x_1 - x_2|.$$

Det er altså ikke mulig å finne en *Lipschitz*-konstant K på en delmengde som inneholder $(0, 0)$ slik at

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leq K|x_1 - x_2|.$$

Når *Lipschitz*-kravet ikke er oppfylt, kan vi dermed - på bakgrunn av Picards teorem - ikke garantere at initialverdiproblemet har en éntydig løsning; ei heller at løsningen eksisterer. På definisjonsmengden $D_x = [0, 1]$ er imidlertid funksjonen $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ både kontinuerlig og begrenset. Dermed garanterer Peanos eksistensteorem at det finnes minst én løsning på initialverdiproblemet. Det viser seg at problemet har to løsninger:

$$x_1(t) = \frac{1}{4}t^2, \quad x_2(t) = 0,$$

hvilket betyr at det ikke finnes en éntydig løsning på initialverdiproblemet.

I mange tilfeller er det mest interessant å avgjøre om det faktisk eksisterer en løsning på problemet, og da framstår Peanos eksistensteorem som et høyst aktuelt resultat. Når man så klarer å påvise eksistens av løsningen, er neste steg å avgjøre hvorvidt løsningen er éntydig eller om det finnes flere mulige løsninger. Her kommer *Lipschitz*-kravet inn, og vi får Picards teorem. Så lenge eksistens av løsningen er påvist, er det imidlertid mulig å benytte mer generelle krav som garanterer éntydighet. Et eksempel på dette er at funksjonen f må oppfylle *Osgoods kriterium* (Mathoverflow 2016).

Kapittel 5

Peanos eksistensteorem for første ordens differensiallikninger med tidsforsinkelse

I forrige kapittel var vi interessert i å undersøke om differensiallikninger på formen

$$\frac{dx}{dt} = \underline{f}(t, \underline{x}), \quad \underline{x}(t_0) = \underline{c} \quad (5.1)$$

har løsning for alle $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$. I dette kapitlet har vi en liknende problemstilling - i den forstand at vi er interessert i om løsningen eksisterer - men her skal vi konsentrere oss om en ny type differensiallikninger med det vi kaller *tidsforsinkelse* (eng. *delay*). Før vi formulerer og beviser Peanos eksistensteorem i tilfelle for denne nye typen differensiallikninger, vil vi i starten av dette kapitlet motivere bruken av slike likninger ved å gi et par enkle, men forhåpentligvis illustrerende, eksempler.

5.1 Dynamiske systemer med tidsforsinkelse

Hensikten med de påfølgende eksemplene er å synliggjøre hvorfor man er interessert i differensiallikninger med tidsforsinkelse, og hvilke nye problemstillinger disse likningene genererer. Ofte beskriver differensiallikninger fysiske eller biologiske systemer som er i forandring, og vi kaller dem for *dynamiske systemer*. Eksemplene i denne seksjonen er hentet fra forelesningene til Arkadi Ponossov og Wyller (2015).

5.1.1 Den klassiske saltvannstanken

Dette eksempelet dukker, i sin enkleste form, ofte opp i skolematematikken som en klassisk «gjenganger» (se f.eks. Heir m.fl. 2008, s. 285). Vi tenker oss en vanntank som inneholder en saltvannsblending. Ferskvann strømmer inn i tanken med farten q liter per minutt, mens blandingen tappes ut ved bunnen av tanken med samme fart. Det konstante volumet av saltvann i tanken er B liter. La $x(t)$ være saltmengden i tanken ved tida t . Nå ønsker vi å sette opp en modell som beskriver hvordan saltinnholdet i tanken endrer seg med tida t , og lister opp følgende:

Tilført saltmengde: $Q_{inn}(t) = 0$

Avtappet saltmengde: $Q_{ut}(t) = \frac{q}{B}x(t)$

Vekstfarten til saltmengden $x'(t)$ blir dermed:

$$x'(t) = Q_{inn} - Q_{ut} = -cx(t), \quad c = \frac{q}{B}.$$

Dette er en ordinær første ordens differensiallikning, med løsningen

$$x(t) = x_0 e^{-ct},$$

der x_0 er saltmengden ved $t = 0$.

La oss se litt nærmere på hvilke antakelser vi måtte gjøre for å sette opp denne modellen: En viktig forutsetning for at modellen skal gjelde, er at saltet er uniformt fordelt i saltvannsblendingen til enhver tid. En slik *momentant perfekt blanding* er så og si umulig å oppnå i praksis. En mer realistisk modell får vi dersom vi antar at saltet først er uniformt fordelt i blandingen tiden h etter at endringene ved tida t har skjedd. Ved ethvert tidspunkt t vil derfor saltmengden som forlater tanken måtte beregnes utifra hvor mye salt det var ved tida $t - h$. Dermed får vi en ny og bedre modell som beskriver situasjonen på en mer realistisk måte:

$$x'(t) = -cx(t - h), \quad h \geq 0 \tag{5.2}$$

Vi kaller h for en *tidsforsinkelse*. Så lenge h antas å være konstant, kaller vi (5.2) for en differensiallikning med *absolutt tidsforsinkelse*. Imidlertid kan vi godt se for oss at saltet av en eller annen kjemisk grunn har lettere for å gå i løsning når saltkonsentrasjonen er

liten. Dermed vil vi hurtigere oppnå en *perfekt blanding* etterhvert som prosessen går, og tidsforsinkelsen $h(t)$ endrer seg derfor i takt med tida. Den nye modellen blir dermed

$$x'(t) = -cx(t - h(t)), \quad h(t) \geq 0, \quad (5.3)$$

og $h(t)$ er nå en *variabel tidsforsinkelse*. I mange praktiske problemstillinger vil det nok være en grov forenkling å påstå at tidsforsinkelsen alltid er konstant. Således vil en variabel tidsforsinkelse ofte gi en bedre modell for et dynamisk system, men den kan fort skape større utfordringer når vi skal regne på modellen.

5.1.2 Populasjonsvekst

La oss se på et annet eksempel som, i likhet med det foregående, også ofte dukker opp i skolematematikken (se f.eks. Heir m.fl. 2008, s. 287-289). Denne gangen er problemstillingen hentet fra biologien: Vi ønsker å modellere hvordan antallet forplantningsdyktige individer av samme art innenfor et geografisk avgrenset område, i biologien kalt en *populasjon*, utvikler seg over tid. La oss kalle antall individer i populasjonen ved tida t for $N(t)$. En enkel modell for hvordan N utvikler seg, får vi ved å anta at vekstfarten $N'(t)$ til enhver tid er proporsjonal med antall individer. Dermed har vi at

$$N'(t) = kN(t) \Leftrightarrow \frac{N'(t)}{N(t)} = k$$

hvor k er proporsjonalitetskonstanten. Dette kalles for en *malthusiansk vekstmodell*, og har løsningen

$$N(t) = N_0 e^{kt},$$

der N_0 er antall individer i populasjonen ved $t = 0$.

La oss se nærmere på hvilke antakelser som ligger til grunn for denne modellen: Den eneste faktoren som inneholder informasjon om forhold som påvirker populasjonens utvikling, er k . Siden k er en konstant, har vi altså antatt at populasjonen alltid - uansett størrelse - har de samme vekstvilkårene. Det betyr for eksempel at tilgang på viktige ressurser som mat, bosted o.l. er konstant. Vi vet imidlertid at populasjonstetthet og områdets bæreevne setter grenser for hvor mye en populasjon kan vokse i praksis; tilgang

på ressurser er ikke ubegrenset. En mer realistisk modell får vi derfor ved å anta at tilveksten blir mindre når antall individer øker mot bæreevnen P . Tar vi dette med i betraktning, får vi en ny modell:

$$N'(t) = kN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{P}\right)$$

Det er dette som kalles en *logistisk vekst*, og løsningen er på formen

$$N(t) = \frac{N_0 e^{kt}}{1 + \frac{N_0}{P}(e^{kt} - 1)}.$$

I henhold til vår nye antakelse, observerer vi nå at $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = P$, hvilket betyr at vekstfarten går mot 0 slik at populasjonen stabiliserer seg ved bæreevnen. Dette er mer i overensstemmelse med hva som faktisk skjer i naturen, sammenliknet med vår forrige modell. Er det likevel noe vi har oversett? Vi har for eksempel ikke tatt hensyn til at det kreves en viss *modningsperiode* fra en generasjon blir født til den er klar for å føde neste generasjon. La oss anta at individene som fødes først er forplantningsdyktige h år etter fødselen. På samme måte som i eksempelet med saltvannstanken, må vi justere modellen slik at det er $t - h$ som blir gjeldene for hva som skjer ved tida t . Den nye modellen blir da:

$$N'(t) = kN(t)\left(1 - \frac{N(t-h)}{P}\right) \quad (5.4)$$

Igjen er h tidsforsinkelsen, som i dette tilfellet er antatt konstant. I utgangspunktet er modellen vår definert for $t \geq 0$. Imidlertid ser vi at vi ikke kan sette inn $t = 0$ i (5.4) uten at vi vet hva $N(-h)$ er for noe. Ved å operere med tidsforsinkelse, er det derfor nødvendig å kjenne til hva som skjedde i tidsrommet $-h \leq t \leq 0$. I eksempelet med populasjonsvekst «tvinges» vi altså til å ha kunnskap om populasjonens forhistorie for å kunne si noe om utviklingen fremover. Dette er nytt krav i forhold til tidligere, da vi så på differensiallikninger uten tidsforsinkelse. Gevinsten er at vi får en modell som beskriver et dynamisk system på en mer tilpasset og realistisk måte.

5.1.3 Eksemplene fortsetter

I vår undersøkelse av differensiallikninger med tidsforsinkelse, har vi ennå ikke drøftet løsningen av slike likninger. Vi har imidlertid formulert nye modeller, og argumentert for

at disse bør beskrive dynamiske systemer på en mer presis måte enn det vi var i stand til før vi introduserte begrepet tidsforsinkelse. Problemet er nå å påvise eksistensen av løsningene til disse nye modellene.

Hvis vi går tilbake til eksempelet med saltvannstanken, har vi Peanos eksistensteorem som garanterer for at initialverdiproblemet

$$x'(t) = -cx(t), \quad x(0) = x_0 \quad (5.5)$$

er velformulert i den forstand at vi vet at en løsning eksisterer. Kravet er imidlertid at $f(t, x) = -cx(t)$ er kontinuerlig og begrenset på et intervall $[t_0, t_1]$. Spørsmålet er nå om et liknende argument kan føres for initialverdiproblemer med tidsforsinkelse. Det første vi må undersøke, er imidlertid om disse initialverdiproblemene blir på samme form som tidligere. I eksempelet med populasjonsvekst argumenterte vi for at denne nye typen likninger «krever» at vi ikke bare vet hva som skjer ved $t = 0$, men har oversikt over hele tidsrommet $-h \leq t \leq 0$ når h er tidsforsinkelsen. Dermed kan vi ikke lenger bare forholde oss til en *initialverdi*, men nå må vi faktisk kjenne en *initialfunksjon* som er definert på intervallet $[-h, 0]$. La oss kalle denne funksjonen for θ . Altså vil et startverdiproblem som (5.5), bli på formen

$$x'(t) = -cx(t-h), \quad x(t) = \theta(t) \quad (5.6)$$

når vi trekker inn tidsforsinkelsen h . Poenget er altså at $\theta(t)$ må være kjent på intervallet $[-h, 0]$.

Med utgangspunkt i (5.6) skal vi nå introdusere en løsningsstrategi for initialverdiproblemer med tidsforsinkelse, som i faglitteraturen ofte refereres til som *the method of steps* (Wyller 2015, s. 110). Anta at θ er en kontinuerlig funksjon på intervallet $[-h, 0]$. Videre deler vi t -aksen inn i delintervaller $I_n = [(n-1)h, nh]$, og kaller løsningen $x(t)$ på intervallet I_n for $x_n(t)$. Dermed blir startbetingelsen at $x_0(t) = \theta(t)$ på intervallet $I_0 = [-h, 0]$. Problemet nå er å finne $\{x_n(t)\}_{n=0}^T$ for et tall T slik at det aktuelle gyldighetsområdet/ t -intervallet dekkes. Prosedyren er som følger:

Siden vi har at $x(t) = \theta(t)$ på intervallet $I_0 = [-h, 0]$, må vi ha at $x(t-h) = \theta(t-h)$ på

intervallet $I_1 = [0, h]$. Dette betyr at

$$x_1'(t) = -c\theta(t - h) \quad (5.7)$$

for $t \in I_1$. Ved å anta at x er kontinuerlig i $t = 0$, får vi initialbetingelsen

$$x_1(0) = \theta(0). \quad (5.8)$$

Løsningen på initialverdiproblemet (5.7) og (5.8) er nå gitt ved:

$$x_1(t) = \theta(0) - c \int_{-h}^{t-h} \theta(s) ds$$

På denne måten har vi funnet $x_1(t)$ ($x_0(t) = \theta(t)$ er antatt kjent). Videre finner vi $x_2(t)$ ved å observere at $x(t - h) = x_1(t - h)$ på intervallet $I_2 = [h, 2h]$. Dermed har vi at

$$x_2'(t) = -cx_1(t - h) \quad (5.9)$$

for $t \in I_2$. Igjen antar vi at x er en kontinuerlig funksjon, og da må

$$x_2(h) = x_1(h). \quad (5.10)$$

Initialverdiproblemet (5.9) og (5.10) løses nå med standard framgangsmåte, og dermed finner vi $x_2(t)$. Slik fortsetter denne metoden til det aktuelle intervallet $[t_0 - h, t_1]$ er dekket.

Løsningsstrategien *the method of steps* anvendt på (5.6), kan altså oppsummeres slik:

På intervallet I_n er løsningen $x_n(t)$, som vi finner ved å løse initialverdiproblemet

$$x_n'(t) = -cx_{n-1}(t - h), \quad x_n((n - 1)h) = x_{n-1}((n - 1)h). \quad (5.11)$$

Dersom vi for eksempel antar at $\theta(t) = 1$ på intervallet $[-h, 0]$, finner vi at

$$x_1(t) = 1 - ct, \quad 0 \leq t \leq h$$

$$x_2(t) = 1 - ct + \frac{1}{2}c^2(t - h)^2, \quad h \leq t \leq 2h$$

⋮

Selv om løsningsstrategien i seg selv er enkel, ser vi at utregningene fort kan bli kompliserte. Dessuten får vi problemer dersom tidsforsinkelsen h er lik 0, da prosessen stopper opp. Vi kan også få trøbbel dersom $h = h(t)$ ikke er konstant, men varierer med tiden t . La oss for eksempel anta at $h(t) = 2^{-t}$, og altså er potensielt avtakende. Lengden på intervallene $I_0, I_1, I_2, \dots, I_n$ vil da også være potensielt avtakende. Summen av intervallene vil konvergere mot en endelig verdi, og dermed vil prosessen *the method of steps* stoppe opp. Imidlertid vil Peanos eksistensteorem gi oss at løsningen eksisterer for alle $t \in [t_0 - h, t_1]$, hvor t_0 og t_1 er en gitte konstanter, og $h = \sup_{t \in [t_0, t_1]} h(t)$. I seksjon 5.3 ønsker vi å formulere og begrunne dette teoremet ved hjelp av ikke-standard analyse. Det er viktig å være klar over at flere tidsforsinkelser kan inngå når man skal beskrive dynamiske systemer. Eksempler på dette finner vi blant annet hos Kolmanovskii og Myshkis (1999). Derfor vil vi generalisere teoremet og bevise, slik at dette også dekkes. La oss først kort redegjøre for vektornotasjonen som benyttes i beviset.

5.2 Vektorer og vektornotasjon

I kapittel 4 formulerte vi Peanos eksistensteorem for ordinære differensiallikninger på vektorform, mens vi i beviset «oversatte» betingelsene til en ekvivalent komponentform. Ved å gjøre dette, unngikk vi en del formelle betraktninger omkring hyperreelle vektorer og vektornotasjon. I beviset for Peanos eksistensteorem for differensiallikninger med tidsforsinkelse, ønsker vi imidlertid å beholde formuleringene på vektorform rett og slett fordi det vil forenkle notasjonen. Derfor vil vi i denne seksjonen vie litt oppmerksomhet til notasjon og egenskaper til vektorer, som vil bli nyttige når vi i neste seksjon skal formulere og bevise Peanos eksistensteorem for differensiallikninger med tidsforsinkelse.

Vektornotasjon:

Som påpekt i kapittel 4, følger vektornotasjonen i denne mastergradsoppgava standarden brukt ved kurset Math 401 (se Wyller 2015), slik at for eksempel $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ($x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$) er en vektor i \mathbb{R}^n . T symboliserer at vektormatrisa skal transponeres,

slik at

$$\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

En vektorfunksjon $\underline{f}(x)$ vil da være en vektor som er avhengig av én variabel x (eller flere variable \underline{x}), og vi har at $\underline{f}(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T$.

Egenskaper:

Egenskapene til vektorer med tanke på vanlige regneoperasjoner som addisjon, subtraksjon og multiplikasjon blir helt tilsvarende som for vanlige tall. Dette kommer av at disse operasjonene er definert komponentvis. Hvis vi har to vektorer $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ og $\underline{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$, har vi altså følgende:

$$1) \underline{x} \pm \underline{y} = [x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \dots, x_n \pm y_n]^T$$

$$2) k\underline{x} = [kx_1, kx_2, \dots, kx_n]^T \text{ for } k \in \mathbb{R}$$

Derivasjon og integrasjon av vektorfunksjoner $\underline{f}(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T$ skjer også komponentvis:

$$3) \frac{d\underline{f}}{dx} = \underline{f}'(x) = [f_1'(x), f_2'(x), \dots, f_n'(x)]^T.$$

$$4) \int_a^b \underline{f} dx = \left[\int_a^b f_1(x) dx, \int_a^b f_2(x) dx, \dots, \int_a^b f_n(x) dx \right]^T$$

En viktig forskjell på vektorer og tall er imidlertid at vektorer har et veldefinert *indreprodukt* og *lengde*, hvilket vi ikke har for tall. Indreproduktet (produktet mellom to vektorer) defineres på følgende måte:

$$5) \underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Videre definerer vi lengden til en vektor på følgende måte:

$$6) |\underline{x}| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Legg merke til at både indreproduktet og lengden til en vektor er tall, og ikke nye vektorer.

Hyperreelle vektorer ${}^* \underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in {}^* \mathbb{R}^n$ får vi når $x_1, x_2, \dots, x_n \in {}^* \mathbb{R}$, og på samme måte som for hyperreelle tall (se seksjon 1.2) sier vi at

- i ${}^*\underline{x}$ er *endelig* hvis og bare hvis alle komponentene x_1, x_2, \dots, x_n er endelige, hvilket betyr at $|{}^*\underline{x}| \leq a$ for en positiv $a \in \mathbb{R}$
- ii ${}^*\underline{x}$ er *uendelig* hvis og bare hvis minst én av komponentene x_1, x_2, \dots, x_n er uendelig, hvilket betyr at $|{}^*\underline{x}| > a$ for alle positive $a \in \mathbb{R}$
- iii ${}^*\underline{x}$ er *infinitesimal* (uendelig liten) hvis og bare hvis alle komponentene x_1, x_2, \dots, x_n er infinitesimale, hvilket betyr at $|{}^*\underline{x}| < a$ for alle positive $a \in \mathbb{R}$

Vi får *hyperreelle vektorfunksjoner* ved å utvide vanlige vektorfunksjoner på samme måte som vi fikk hyperreelle vektorer ved å utvide vanlige vektorer; d.v.s. ved at alle komponentene er hyperreelle utvidelser av de opprinnelige komponentene. Dersom $\underline{f}(\underline{x}) = [f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \dots, f_n(\underline{x})]^T$ er en reell vektorfunksjon, er altså ${}^*\underline{f}({}^*\underline{x}) = [{}^*f_1({}^*\underline{x}), {}^*f_2({}^*\underline{x}), \dots, {}^*f_n({}^*\underline{x})]^T$ dens hyperreelle utvidelse. Da alle vanlige operasjoner med vektorfunksjoner skjer komponentvis, vil definisjoner og teoremer for funksjoner av én variabel også holde for vektorfunksjoner (hvilket vi kan oppfatte som funksjoner av flere variable). For eksempel har vi følgende definisjon på kontinuitet for en n -dimensjonal vektorfunksjon \underline{f} av en m -dimensjonal vektor \underline{x} :

En vektorfunksjon $\underline{f}(\underline{x}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ er kontinuerlig i $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ hvis og bare hvis

$${}^*\underline{f}({}^*\underline{x}) \approx \underline{f}(\underline{x}_0) \text{ for alle } {}^*\underline{x} \approx \underline{x}_0.$$

La oss også se et eksempel der hyperreelle vektorer og vektorfunksjoner brukes - helt i samsvar med hyperreelle størrelser og funksjoner - til å bevise lemma 2 fra seksjon 2.2 på vektorform:

Lemma 2: $\underline{f}(t, \underline{y}(t))$ er en kontinuerlig vektorfunksjon i \mathbb{R}^n dersom \underline{f} og \underline{y} er kontinuerlige.

Bevis for lemma 2:

At \underline{y} er kontinuerlig, betyr: ${}^*t \approx t_0 \Rightarrow {}^*\underline{y}({}^*t) \approx \underline{y}(t_0)$.

At \underline{f} er kontinuerlig, betyr: $({}^*t, {}^*\underline{y}) \approx (t_0, \underline{y}_0) \Rightarrow {}^*\underline{f}({}^*t, {}^*\underline{y}) \approx \underline{f}(t_0, \underline{y}_0)$.

Dermed har vi at: ${}^*\underline{f}({}^*t, {}^*\underline{y}({}^*t)) \approx \underline{f}(t_0, \underline{y}(t_0))$ for alle ${}^*t \approx t_0$. □

I beviset for lemma 2 betraktet vi rett og slett argumentet $(t_0, \underline{y}(t_0))$ som en ny vektor \underline{x}_0 , slik at vi kan bruke definisjonen ovenfor. Således vil definisjonen på kontinuitet og lemma 2 ha gyldighet dersom vi utvider argumentet med flere vektorer, slik at

$${}^*f({}^*t, {}^*\underline{y}_1({}^*t), {}^*\underline{y}_2({}^*t), \dots, {}^*\underline{y}_m({}^*t)) \approx \underline{f}(t_0, \underline{y}_1(t_0), \underline{y}_2(t_0), \dots, \underline{y}_m(t_0))$$

dersom ${}^*t \approx t_0$, ${}^*\underline{y}_1({}^*t) \approx \underline{y}_1(t_0)$, \dots , ${}^*\underline{y}_m({}^*t) \approx \underline{y}_m(t_0)$. Dette kommer vi til å utnytte i beviset for Peanos eksistensteorem i neste seksjon. Vi bruker symbolet $*$ for å understreke at for eksempel vektoren \underline{x} er hyperreell. Ofte utelater vi imidlertid symbolet $*$ hvis det går klart fram av sammenhengen at vektoren er hyperreell.

La oss til slutt se nærmere på hva vi mener med *standarddelen* til en hyperreell vektor, og hvordan vi regner med slike:

Standarddelen til en hyperreell vektor \underline{x} defineres som den reelle vektoren

$$St(\underline{x}) = [St(x_1), St(x_2), \dots, St(x_n)]^T \quad (5.12)$$

Regnereglene for standarddelene til hyperreelle vektorer, \underline{x} og \underline{y} , blir tilsvarende som for hyperreelle tall, slik at:

- 1) $St(\underline{x} \pm \underline{y}) = St([x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \dots, x_n \pm y_n]^T) = [St(x_1 \pm y_1), St(x_2 \pm y_2), \dots, St(x_n \pm y_n)]^T$
 $= St(\underline{x}) \pm St(\underline{y})$
- 2) $St(k\underline{x}) = St([kx_1, kx_2, \dots, kx_n]^T) = [St(kx_1), St(kx_2), \dots, St(kx_n)]^T$
 $= St(k) \cdot St(\underline{x})$
- 3) $St(\underline{x} \cdot \underline{y}) = St(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n) = St(x_1y_1) + St(x_2y_2) + \dots + St(x_ny_n)$
 $= St(\underline{x}) \cdot St(\underline{y})$
- 4) $St(|\underline{x}|) = St\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}\right) = \sqrt{St(x_1^2) + St(x_2^2) + \dots + St(x_n^2)}$
 $= |St(\underline{x})|$

Egenskapene 1) til 3) ovenfor følger av definisjon 5.12 og regnereglene for standarddelen til hyperreelle tall fra seksjon 1.2. For å vise 4), observerer vi i tillegg at begge funksjonene \sqrt{x} og x^2 er kontinuerlige. Dermed har vi at $St(\sqrt{x}) = \sqrt{St(x)}$ og $St(x^2) = (St(x))^2$.

Denne siste likheten er dessuten også en konsekvens av egenskap 3). En kombinasjon av disse observasjonene, gir oss 4).

Med de foregående eksemplene og denne redegjørelsen for vår vektornotasjon samt noen egenskaper ved hyperreelle vektorer friskt i minne, vil vi i neste avsnitt betrakte hovedresultatet for dette kapittelet.

5.3 Peanos eksistensteorem for initialverdiproblemer med tidsforsinkelse

Vi vil nå formulere og bevise Peanos eksistensteorem for initialverdiproblem med tidsforsinkelse i det generelle tilfellet i \mathbb{R}^n . Tankegangen bak beviset i dette kapittelet har klare likhetstrekk med beviset for Peanos eksistensteorem for ordinære differensiallikninger, men tidsforsinkelsene gjør det hele mer komplisert. Her tillater vi at flere tidsforsinkelser inngår, og lar disse symboliseres ved $h_i(t)$, der $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ og $m \in \mathbb{N}$ er en vilkårlig konstant. La \underline{x} være en n -dimensjonal vektorfunksjon, og $\underline{f} : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^{(m+1)n} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Et generelt initialverdiproblem med tidsforsinkelse, blir da på formen:

$$\underline{x}'(t) = \underline{f}(t, \underline{x}(t), \underline{x}(t - h_1(t)), \underline{x}(t - h_2(t)), \dots, \underline{x}(t - h_m(t))), \quad t \in [t_0, t_1], \quad h_i(t) \geq 0 \quad (5.13)$$

$$\underline{x}(t) = \underline{\theta}(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0] = I_0, \quad h = \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} h_i(t)$$

Dette kan betraktes som en generalisering av det ordinære tilfellet (5.1).

Peanos eksistensteorem:

Anta at vi har et initialverdiproblem på formen (5.13), som oppfyller følgende krav:

- \underline{f} er en kontinuerlig vektorfunksjon.
- \underline{f} er begrenset, slik at

$$|\underline{f}(t, \underline{x}, \underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots, \underline{y}_m)| \leq M$$

for alle $t \in [t_0, t_1]$, $\underline{x}, \underline{y}_i \in \mathbb{R}^n$ ($i \in \{1, 2, \dots, m\}$) og en positiv konstant M .

- Tidsforsinkelsene $h_i(t) \geq 0$ er kontinuerlige for alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ og $t \in [t_0, t_1]$.
- Initialvektorfunksjonen $\underline{\theta}(t)$ er kontinuerlig på I_0 .

Da eksisterer det en løsning på (5.13), og løsningen er en veldefinert, kontinuerlig vektorfunksjon $\underline{x} : [t_0 - h, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Vi får **Picards teorem** dersom vi i tillegg antar at

- \underline{f} er *Lipschitz*-kontinuerlig, slik at

$$|\underline{f}(t, \underline{x}_1, \underline{y}_{1,1}, \underline{y}_{1,2}, \dots, \underline{y}_{1,m}) - \underline{f}(t, \underline{x}_2, \underline{y}_{2,1}, \underline{y}_{2,2}, \dots, \underline{y}_{2,m})| \leq N(|\underline{x}_1 - \underline{x}_2| + |\underline{y}_{1,1} - \underline{y}_{2,1}| + |\underline{y}_{1,2} - \underline{y}_{2,2}| + \dots + |\underline{y}_{1,m} - \underline{y}_{2,m}|), \quad N \in \mathbb{R}^+, \quad m \in \mathbb{N}$$

Da har (5.13) en éntydig løsning på intervallet $[t_0 - h, t_1]$.

Ikke-standard bevis for Peano:

Vi starter med å sette opp en integrallikning med initialbetingelse på vektorform som svarer til initialverdiproblem 5.13, slik at en løsning på følgende problem også er en løsning på (5.13):

$$\underline{x}(t) = \underline{\theta}(t_0) + \int_{t_0}^t \underline{f}(\tau, \underline{x}(\tau), \underline{x}(\tau - h_1(\tau)), \underline{x}(\tau - h_2(\tau)), \dots, \underline{x}(\tau - h_m(\tau))) d\tau, \quad t \in [t_0, t_1] \tag{5.14}$$

$$\underline{x}(t - h_i(t)) = \underline{\theta}(t - h_i(t)), \quad t_0 - h \leq t - h_i(t) \leq t_0, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

Målet vårt er å vise at (5.14) har en veldefinert, kontinuerlig løsning for alle $t \in [t_0 - h, t_1]$. Siden initialbetingelsen i (5.14) bare dekker noen utvalgte verdier $t - h_i(t)$, må vi spesielt undersøke om initialbetingelsen i det opprinnelige problemet (5.13) er oppfylt. Som i beviset for Peanos eksistensteorem for ordinære differensiallikninger, starter vi med å sette opp en ikke-standard tolkning av integrallikningen. For å gjøre dette må vi foreta en hyperendelig oppdeling av intervallet $[t_0 - h, t_1]$:

Vi vedtar at $d\tau = \frac{t_1 - t_0}{N}$ der $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Videre setter vi

$$\tau_{j,N} = t_0 + j \cdot d\tau \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, N\}. \tag{5.15}$$

På den måten er $\tau_{0,N} = t_0$ og $\tau_{N,N} = t_1$, og for alle $j \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ har vi dermed at $\tau_{j,N} \in (t_0, t_1)$. Foreløpig har vi bare sett på intervallet $[t_0, t_1]$. La oss nå se litt nærmere på et annet intervall, nemlig $[0, h]$. Vi deler dette intervallet opp i K deler, der K er et hypernaturlig tall slik at $K \cdot d\tau \geq h$ og $(K-1) \cdot d\tau < h$ (hvilket betyr at $K \cdot d\tau \approx h$). Dersom vi nå tillater negative heltallsverdier for j i vår definisjon 5.15, har vi at $\tau_{-K,N} \approx t_0 - h$ ($j = -K$). Ved å bruke oppdelingen

$$\tau_{j,N} = t_0 + j \cdot d\tau \quad \forall j \in \{-K, -K+1, \dots, 0, 1, \dots, N\}, \quad (5.16)$$

har vi altså dekket hele intervallet $[t_0 - h, t_1]$. Vi definerer nå følgende:

$$t_{k,N} = t_0 + k \cdot dt, \quad dt = d\tau \quad (5.17)$$

Kommentar:

Vi søker hyperreelle utgaver av $\underline{x}(t - h_i(t))$, la oss betegne dem ${}^* \underline{x}(t_{k,N} - {}^* h_i(t_{k,N}))$, slik at

$$\underline{x}(t - h_i(t)) \approx {}^* \underline{x}(t_{k,N} - {}^* h_i(t_{k,N})) \quad \forall t = St(t_{k,N})$$

for alle $t \in [t_0 - h, t_1]$, $k \in \{-K, -K+1, \dots, 0, 1, \dots, N\}$ og $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. La oss se litt nærmere på funksjonene h_i :

Tidsforsinkelsene $h_i : [t_0, t_1] \rightarrow [0, h]$ er antatt kontinuerlige for alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ og $t \in [t_0, t_1]$. Disse vil ha en utvidelse til ${}^* h_i$ slik at

$$h_i(t) \approx {}^* h_i(t_{k,N}) \quad \forall t = St(t_{k,N})$$

Dermed kan vi skrive

$${}^* h_i(t_{k,N}) \approx s_i dt$$

for en $s_i \in \{0, 1, \dots, K\}$. Siden konstanten s_i er avhengig av valg av $t_{k,N}$, bør vi egentlig skrive $s_i(t_{k,N})$, men velger s_i for å forenkle notasjonen. Vi kan generelt ikke garantere for at ${}^* h_i(t_{k,N}) = s_i dt$ for en $s_i \in \{0, 1, \dots, K\}$, og derfor heller ikke for at $t_{k,N} - {}^* h_i(t_{k,N}) = t_{k,N} - s_i dt = t_{k-s_i,N}$. Dette er et problem, fordi alle argumentene i den utvidede vektorfunksjonen

* \underline{x} må forholde seg til én og samme oppdeling intervallet $[t_0, t_1]$. Vi «ønsker» derfor at vi kan bruke en \tilde{h}_i slik at

$$\tilde{h}_i(t_{k,N}) = s_i dt.$$

Dette ønsket, samt noen andre krav som vil vise seg nyttige, er årsaken til at vi nå formulerer følgende lemma:

Kommentar slutt!

Lemma 4: Gitt en kontinuertlig funksjon $g : [t_0, t_1] \rightarrow [0, h]$, så finnes det en funksjon (hyperendelig tallfølge, se avsnitt 2.1.3) \tilde{g} som oppfyller følgende betingelser:

- (a) $0 < \tilde{g} \leq h$
- (b) $\tilde{g}(t_{k,N}) = h_{s,N}$
- (c) $St(\tilde{g}(t_{k,N})) = g(St(t_{k,N}))$

der $t_{k,N} = t_0 + kdt$ er en hyperendelig oppdeling av $[t_0, t_1]$ ($dt = \frac{t_1 - t_0}{N}$, $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$), og $h_{s,N}$ er en hyperendelig oppdeling av $[0, h]$ slik at $h_{s,N} = sdt$.

Bevis for lemma 4:

Vi starter med å foreta en endelig oppdeling av intervallene $[t_0, t_1]$ og $[0, h]$. Disse oppdelingene er gitt av henholdsvis

$$t_{k,N} = t_0 + k\Delta t, \quad k \in \{0, 1, \dots, N\}$$

og

$$h_{s,N} = s\Delta t, \quad s \in \{0, 1, \dots, K\}$$

der $\Delta t = \frac{t_1 - t_0}{N}$ for en $N \in \mathbb{N}$, og $K\Delta t \geq h$, mens $(K - 1)\Delta t < h$. Vi definerer oss nå en funksjon \tilde{g}_N som oppfyller følgende betingelse:

$$\tilde{g}_N(t_0 + k\Delta t) \text{ er verdien blant } h_{s,N} = s\Delta t \text{ som ligger nærmest } g(t_0 + k\Delta t).$$

Dersom $h_{s,N}$ skulle havne midt mellom to verdier av g , kan vi vilkårlig velge én av disse verdiene som \tilde{g}_N . På den måten har vi garantert at

$$\Delta t \leq \tilde{g}_N \leq h \quad \forall s \in \{1, 2, \dots, K - 1\}. \quad (5.18)$$

Videre har vi at

$$\tilde{g}_N(t_0 + k\Delta t) = s\Delta t. \quad (5.19)$$

for en $s = s(k)$ som avhenger av k . Dessuten har vi at

$$|\tilde{g}_N(t_0 + k\Delta t) - g(t_0 + k\Delta t)| < \Delta t. \quad (5.20)$$

Vi observerer at for $\alpha_{k,N} = \tilde{g}_N(t_0 + k\Delta t)$ blir $\{\alpha_{k,N}\}$ ($N \in \mathbb{N}$) en endelig tallfølge. På samme måte som vi drøftet i avsnitt 2.1.2, får vi en hyperendelig tallfølge $\{\alpha_{k,N}\}$ dersom vi lar $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Da blir Δt et infinitesimalt tall dt . Da (5.18), (5.19) og (5.20) fortsatt skal være oppfylt, får vi:

(a) $0 < dt \leq \tilde{g}_N \leq h \quad \forall s \in \{1, 2, \dots, K - 1\}$

(b) $\tilde{g}_N(t_0 + kdt) = sdt, \quad s = s(k)$

(c) $|\tilde{g}_N(t_0 + kdt) - {}^*g(t_0 + kdt)| < dt$

Konsekvensen av (c), er at

$$St(\tilde{g}_N(t_0 + kdt)) = St({}^*g(t_0 + kdt)) = g(St(t_0 + kdt)) \quad (5.21)$$

hvor den siste likheten følger av at g er antatt å være kontinuerlig på $[t_0, t_1]$. Enhver \tilde{g}_N som oppfyller (5.21), refereres ofte til i litteraturen som en *lifting* av g (Albeverio m.fl. 1986, s. 69).

Hvis vi setter $\tilde{g} = \alpha_{k,N}$, har vi altså påvist en funksjon som oppfyller betingelsene (a), (b) og (c). Vi konkluderer med at en slik \tilde{g} eksisterer for enhver kontinuerlig funksjon g . \square

Beviset for Peanos eksistensteorem fortsetter:

På grunn av at tidsforsinkelsene h_i er kontinuerlig for alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, vil disse ifølge lemma 4 ha en *lifting* \tilde{h}_i slik at

$$\tilde{h}_i(\tau_{j,N}) = s_i \cdot d\tau, \quad s_i \in \{1, 2, \dots, K-1\}, \quad s_i = s_i(\tau_{j,N})$$

for alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ og $j \in \{0, 1, \dots, N\}$. På denne måten har vi garantert at $\tilde{h}_i(t)$ oppfyller

$$*\underline{x}(\tau_{j,N} - *h_i(\tau_{j,N})) \approx *\underline{x}(\tau_{j,N} - \tilde{h}_i(\tau_{j,N})),$$

der $0 < \tilde{h}_i(\tau_{j,N}) \leq h$, hvilket vi trenger når vi om litt skal definere \underline{x} (og dermed også $*\underline{x}$).

I vårt ikke-standard-bevis skal $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ utvides en hyperreell vektorfunksjon $\underline{x}_{k,N} \in {}^*\mathbb{R}^n$. Med utgangspunkt i (5.13) erstatter vi for det første initialbetingelsen med følgende definisjon:

$$\underline{x}_{k,N} = *\underline{\theta}(t_{k,N}) \quad \forall \quad -K \leq k \leq 0 \quad (5.22)$$

Videre søker vi en ikke-standard versjon av (5.14), og betrakter nå følgende initialverdi-problem:

$$\underline{x}_{k,N} = \underline{\theta}(t_0) + \sum_{j=0}^{k-1} *\underline{f}(\tau_{j,N}, \underline{x}_{j,N}, \underline{x}_{j-s_1,N}, \underline{x}_{j-s_2,N}, \dots, \underline{x}_{j-s_m,N})d\tau, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (5.23)$$

$$\underline{x}_{j-s_i,N} = *\underline{\theta}(t_{j-s_i,N}), \quad -K \leq j - s_i \leq 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

Initialbetingelsen $\underline{x}(t - h_i(t)) = \underline{\theta}(t - h_i(t))$ erstattes her av $\underline{x}_{j-s_i,N} = *\underline{\theta}(t_{j-s_i,N})$, men må likevel suppleres med definisjon 5.22 for å svare til betingelsen i (5.13). Vi legger også merke til at integralet i (5.14) er blitt erstattet av en hyperendelig sum. Vi har nå konstruert en hyperreell utgave av integrallikningen 5.14, og vi ønsker å vise at løsningen på (5.23) eksisterer; dernest at (5.14) og *standard*-versjonen av (5.23) er ekvivalente problemstillinger. «Filosofien» er at løsningen på initialverdiproblemet 5.13 dermed eksisterer som en konsekvens av dette.

La oss nå undersøke konsekvensene av (5.23):

$$k = 1 \Rightarrow \underline{x}_{1,N} = \underline{\theta}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \underline{f}(t_{0,N}, \underline{x}_{0,N}, \underline{x}_{-s_1,N}, \underline{x}_{-s_2,N}, \dots, \underline{x}_{-s_m,N}) d\tau$$

$$k = 2 \Rightarrow \underline{x}_{2,N} = \underline{\theta}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \underline{f}(t_{0,N}, \underline{x}_{0,N}, \underline{x}_{-s_1,N}, \underline{x}_{-s_2,N}, \dots, \underline{x}_{-s_m,N}) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \underline{f}(t_{1,N}, \underline{x}_{1,N}, \underline{x}_{1-s_1,N}, \underline{x}_{1-s_2,N}, \dots, \underline{x}_{1-s_m,N}) d\tau$$

O.S.V.

Dermed har vi en induktiv definisjon av $\underline{x}_{k,N} \in {}^*\mathbb{R}^n$ for $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, som vi har fullstendig kontroll over siden alle $\underline{x}_{j-s_i,N}$ er gitt av initialbetingelsen for $-K \leq j - s_i \leq 0$. Vi bør også merke oss at denne induktive definisjonen i bunn og grunn er *the method of steps* fra avsnitt 5.1.3. Som tidligere påpekt kan vi få trøbbel med metoden dersom tidsforsinkelse(e) går mot 0, slik at summen av intervallengdene til I_0, I_1, I_2, \dots konvergerer. I ikke-standard analyse tillater vi imidlertid infinitesimal(e) tidsforsinkelse(r), og vi kan alltid finne et positivt, infinitesimalt *iterasjonsintervall*. Derfor vil *the method of steps* alltid fungere i ikke-standard analyse. (Tidsforsinkelse(e) kan erstattes $\tilde{h}_i(t) > 0$.)

Nå definerer vi $\underline{x}(t)$ slik:

$$\underline{x}(t) \equiv St(\underline{x}_{k,N}) \quad \forall t = St(t_{k,N}), \quad t \in [t_0 - h, t_1] \quad (5.24)$$

Fra nå av tillater vi oss å utelate dobbeltindeksering med N av notasjonsmessige hensyn, da det er underforstått at alt bygger på oppdelingen der $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Spørsmålet er nå om definisjonen av $\underline{x}(t)$ gir en veldefinert, kontinuerlig vektorfunksjon i \mathbb{R}^n for $t \in [t_0 - h, t_1]$. Først viser vi at dette er oppfylt på intervallet $I_0 = [t_0 - h, t_0]$:

I henhold til definisjon 5.22 og 5.24, har vi at

$$\underline{x}(t) \equiv St(\underline{x}_k) = St({}^*\underline{\theta}(t_k)) = \underline{\theta}(t) \quad \forall t = St(t_k). \quad (5.25)$$

Det er viktig å merke seg at $\underline{\theta}(t)$ er antatt kontinuerlig på I_0 , og dermed er også $\underline{x}(t)$ kontinuerlig på I_0 . Det følger også at $\underline{x}(t)$ er veldefinert på I_0 , hvilket betyr at ${}^*\underline{x}(t_k) \approx {}^*\underline{x}(t_l)$ ($\Leftrightarrow St(\underline{x}_k) = St(\underline{x}_l)$) dersom $t_k \approx t_l$. Dette kommer av (5.25) og at ${}^*\underline{\theta}(t_k) \approx {}^*\underline{\theta}(t_l)$

dersom $t_k \approx t_l$, som igjen følger av at $\underline{\theta}(t)$ er kontinuerlig. Konklusjonen er at definisjon 5.24 gir en veldefinert, kontinuerlig vektorfunksjon $\underline{x}(t)$ på I_0 . La oss undersøke om dette også er tilfelle på intervallet $[t_0, t_1]$. Vi starter med følgende observasjon:

$$\begin{aligned}\underline{x}_k &= \underline{\theta}(t_0) + \sum_{j=0}^{k-1} {}^* \underline{f}(\tau_j, \underline{x}_j, \underline{x}_{j-s_1}, \underline{x}_{j-s_2}, \dots, \underline{x}_{j-s_m}) d\tau \\ \underline{x}_l &= \underline{\theta}(t_0) + \sum_{j=0}^{l-1} {}^* \underline{f}(\tau_j, \underline{x}_j, \underline{x}_{j-s_1}, \underline{x}_{j-s_2}, \dots, \underline{x}_{j-s_m}) d\tau \\ \Rightarrow \underline{x}_k - \underline{x}_l &= \sum_{j=l}^{k-1} {}^* \underline{f}(\tau_j, \underline{x}_j, \underline{x}_{j-s_1}, \underline{x}_{j-s_2}, \dots, \underline{x}_{j-s_m}) d\tau\end{aligned}$$

Nå utnytter vi at \underline{f} er begrenset; hvilket betyr at

$$|{}^* \underline{f}(\tau_j, \underline{x}_j, \underline{x}_{j-s_1}, \underline{x}_{j-s_2}, \dots, \underline{x}_{j-s_m})| \leq M, \quad M \in \mathbb{R}^+.$$

Dette impliserer:

$$|\underline{x}_k - \underline{x}_l| \leq \sum_{j=l}^{k-1} M d\tau = M(k-l) d\tau = M(\tau_k - \tau_l) \quad (5.26)$$

Først bruker vi dette resultatet til å vise at $\underline{x}(t)$ er veldefinert, som betyr at dersom $St(t_k) = St(t_l)$, så må $St(\underline{x}_k) = St(\underline{x}_l)$:

På grunn av måten vi har definert τ_j og t_k på, har vi at

$$t_k = \tau_k \text{ og } t_l = \tau_l. \quad (5.27)$$

Følgelig må

$$\tau_k - \tau_l = t_k - t_l \approx 0,$$

når antakelsen er at $St(t_k) = St(t_l)$. På grunn av (5.26) er konklusjonen at

$$t_k \approx t_l \Rightarrow \underline{x}_k \approx \underline{x}_l.$$

Dette betyr at vår definisjon 5.24 gir en veldefinert vektorfunksjon $\underline{x}(t)$ på $[t_0, t_1]$. Neste steg er å vise at $\underline{x}(t)$ er kontinuerlig på $[t_0, t_1]$:

Vi velger oss to vilkårlige elementer $u, v \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$. Da eksisterer det to elementer $t_k, t_l \in {}^*\mathbb{R}$ som er slik at

$$t_k \approx u \text{ og } t_l \approx v.$$

I henhold til definisjon 5.24 samt resultatene 5.26 og 5.27, har vi at:

$$|\underline{x}(u) - \underline{x}(v)| = |St(\underline{x}_k) - St(\underline{x}_l)| = St|\underline{x}_k - \underline{x}_l| \leq M \cdot St|\tau_k - \tau_l| = M|u - v|$$

Vi ser at $\underline{x}(t)$ er *Lipschitz*-kontinuerlig, og dermed er kontinuerlig. Dette kan enkelt begrunnes utfra ikke-standard analyse (som i seksjon 4.1, men da på komponentform):

Vi tar utgangspunkt i at

$$|\underline{x}(u) - \underline{x}(v)| \leq M|u - v| \text{ for } u, v \in [t_0, t_1].$$

Vi utvider dette til å gjelde for hyperreelle vektorer og mengder (symbolisert ved $*$):

$$|*\underline{x}(*u) - *\underline{x}(*v)| \leq M|*u - *v| \text{ for } *u, *v \in *[t_0, t_1].$$

Dermed har vi at:

$$*u \approx *v \Rightarrow *\underline{x}(*u) \approx *\underline{x}(*v)$$

Vi kan alltid velge $*v = v \in [t_0, t_1]$, og dette betyr - i henhold til vår ikke-standard definisjon av kontinuitet - at $\underline{x}(t)$ er en kontinuerlig vektorfunksjon for $t \in [t_0, t_1]$.

Vi har vist at $\underline{x}(t)$ er kontinuerlig på I_0 og $[t_0, t_1]$. For at $\underline{x}(t)$ skal være kontinuerlig på hele intervallet $[t_0 - h, t_1]$ gjenstår det å undersøke om vår definisjon også sørger for at $\underline{x}(t_0) = \underline{\theta}(t_0)$. I henhold til definisjon 5.24 har vi at

$$\underline{x}(t_0) = St(\underline{x}_0)$$

Fra initialbetingelsen i (5.23) får vi at

$$St(\underline{x}_0) = St(*\underline{\theta}(t_{0,N})) = \underline{\theta}(t_0),$$

og dermed er $\underline{x}(t)$ kontinuerlig på hele intervallet $[t_0 - h, t_1]$.

Vi har nå vist at vår $\underline{x}(t) \equiv St(\underline{x}_k)$ eksisterer; den er veldefinert og kontinuerlig på intervallet $[t_0 - h, t_1]$. Til slutt gjenstår det å vise at det vi kan kalle standard-versjonen av (5.23):

$$St(\underline{x}_k) = \underline{\theta}(t_0) + St \left(\sum_{j=0}^{k-1} {}^* \underline{f}(\tau_j, \underline{x}_j, \underline{x}_{j-s_1}, \underline{x}_{j-s_2}, \dots, \underline{x}_{j-s_m}) d\tau \right), \quad k \in \{1, 2, \dots, N\}$$
(5.28)

$$St(\underline{x}_{j-s_i}) = St({}^* \underline{\theta}(t_{j-s_i})), \quad -K \leq j - s_i \leq 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

og integrallikningen 5.14 er ekvivalente problemstillinger. Vi starter med å vise at

$$St(\underline{x}_k) = \underline{\theta}(t_0) + St \left(\sum_{j=0}^{k-1} {}^* \underline{f}(\tau_j, \underline{x}_j, \underline{x}_{j-s_1}, \underline{x}_{j-s_2}, \dots, \underline{x}_{j-s_m}) d\tau \right)$$

er ekvivalent med

$$\underline{x}(t) = \underline{\theta}(t_0) + \int_{t_0}^t \underline{f}(\tau, \underline{x}(\tau), \underline{x}(\tau - h_1(\tau)), \underline{x}(\tau - h_2(\tau)), \dots, \underline{x}(\tau - h_m(\tau))) d\tau$$

Først ser vi på venstresidene i de to likningene:

Fra definisjon 5.24 har vi at

$$\underline{x}(t) \equiv St(\underline{x}_k) \quad \forall t = St(t_k),$$

og dermed er venstresidene ekvivalente. Det gjenstår å undersøke om høyresidene i likningene er ekvivalente; altså om

$$\int_{t_0}^t \underline{f}(\tau, \underline{x}(\tau), \underline{x}(\tau - h_1(\tau)), \underline{x}(\tau - h_2(\tau)), \dots, \underline{x}(\tau - h_m(\tau))) d\tau$$
(5.29)

$$= St \left(\sum_{j=0}^{k-1} {}^* \underline{f}(\tau_j, \underline{x}_j, \underline{x}_{j-s_1}, \underline{x}_{j-s_2}, \dots, \underline{x}_{j-s_m}) d\tau \right)$$

Fra ikke-standard-definisjonen på integralet av en vektorfunksjon, får vi at

$$\int_{t_0}^t \underline{f}(\tau, \underline{x}(\tau), \underline{x}(\tau - h_1(\tau)), \underline{x}(\tau - h_2(\tau)), \dots, \underline{x}(\tau - h_m(\tau))) d\tau$$
(5.30)

$$\equiv St \left(\sum_{j=0}^{k-1} {}^* \underline{f}(\tau_j, {}^* \underline{x}(\tau_j), {}^* \underline{x}(\tau_j - {}^* h_1(\tau_j)), {}^* \underline{x}(\tau_j - {}^* h_2(\tau_j)), \dots, {}^* \underline{x}(\tau_j - {}^* h_m(\tau_j))) d\tau \right),$$

der $k - 1$ er et hyperendelig tall. Da \underline{f} , \underline{x} og h_i er kontinuerlige for alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ og $t \in [t_0, t_1]$, gir lemma 2 fra seksjon 2.2 på vektorform at vektorfunksjonen $\underline{f}(t, \underline{x}(t), \underline{x}(t - h_1(t)), \underline{x}(t - h_2(t)), \dots, \underline{x}(t - h_m(t)))$ også er kontinuerlig for alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ og $t \in [t_0, t_1]$. Dette betyr at

$$\begin{aligned} & {}^* \underline{f}(\tau_j, {}^* \underline{x}(\tau_j), {}^* \underline{x}(\tau_j - {}^* h_1(\tau_j)), {}^* \underline{x}(\tau_j - {}^* h_2(\tau_j)), \dots, {}^* \underline{x}(\tau_j - {}^* h_m(\tau_j))) \\ & \approx {}^* \underline{f}(\tau_j, \underline{x}_j, \underline{x}_{j-s_1}, \underline{x}_{j-s_2}, \dots, \underline{x}_{j-s_m}) \end{aligned} \tag{5.31}$$

fordi ${}^* \underline{x}(\tau_j) \approx \underline{x}_j$ og ${}^* \underline{x}(\tau_j - {}^* h_i(\tau_j)) \approx {}^* \underline{x}(\tau_j - \tilde{h}_i(\tau_j)) = {}^* \underline{x}(\tau_j - s_i d\tau) = {}^* \underline{x}(\tau_{j-s_i}) \approx \underline{x}_{j-s_i}$ for alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Hvis vi nå betrakter

$$\{ {}^* \underline{f}(\tau_j, {}^* \underline{x}(\tau_j), {}^* \underline{x}(\tau_j - {}^* h_1(\tau_j)), {}^* \underline{x}(\tau_j - {}^* h_2(\tau_j)), \dots, {}^* \underline{x}(\tau_j - {}^* h_m(\tau_j))) \} \equiv \{ \underline{\alpha}_j \}$$

og

$$\{ {}^* \underline{f}(\tau_j, \underline{x}_j, \underline{x}_{j-s_1}, \underline{x}_{j-s_2}, \dots, \underline{x}_{j-s_m}) \} \equiv \{ \underline{\beta}_j \}$$

som to hyperendelige følger der (5.31) er oppfylt - hvilket betyr at $\underline{\alpha}_j \approx \underline{\beta}_j$ - gir lemma 3 fra seksjon 4.1 på vektorform at $\sum_{j=0}^{k-1} \underline{\alpha}_j d\tau \approx \sum_{j=0}^{k-1} \underline{\beta}_j d\tau$, d.v.s.

$$\begin{aligned} St \left(\sum_{j=0}^{k-1} {}^* \underline{f}(\tau_j, {}^* \underline{x}(\tau_j), {}^* \underline{x}(\tau_j - {}^* h_1(\tau_j)), {}^* \underline{x}(\tau_j - {}^* h_2(\tau_j)), \dots, {}^* \underline{x}(\tau_j - {}^* h_m(\tau_j))) d\tau \right) \\ = St \left(\sum_{j=0}^{k-1} {}^* \underline{f}(\tau_j, \underline{x}_j, \underline{x}_{j-s_1}, \underline{x}_{j-s_2}, \dots, \underline{x}_{j-s_m}) d\tau \right) \end{aligned}$$

Fra (5.28) får vi videre at

$$St \left(\sum_{j=0}^{k-1} {}^* \underline{f}(\tau_j, \underline{x}_j, \underline{x}_{j-s_1}, \underline{x}_{j-s_2}, \dots, \underline{x}_{j-s_m}) d\tau \right) = St(\underline{x}_k) - \underline{\theta}(t_0),$$

og fra definisjon 5.24 får vi at

$$St(\underline{x}_k) - \underline{\theta}(t_0) = \underline{x}(t) - \underline{\theta}(t_0) \quad \forall t = St(t_k), \quad t \in [t_0 - h, t_1].$$

Konklusjonen er at (5.29) er oppfylt. Dette betyr at integrallikningen i det opprinnelige problemet (5.14) og standarddelen til den hyperendelige integralsum-likningen i (5.28) er

ekvivalente.

Nå gjenstår å vise at initialbetingelsene i (5.14) og (5.28) er ekvivalente; altså at

$$St(\underline{x}_{j-s_i}) = St(*\underline{\theta}(t_{j-s_i})), \quad -K \leq j - s_i \leq 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (5.32)$$

er ekvivalent med

$$\underline{x}(t - h_i(t)) = \underline{\theta}(t - h_i(t)), \quad t_0 - h \leq t - h_i(t) \leq t_0, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (5.33)$$

Først ser vi på venstresidene i de to likningene:

Definisjon 5.24 gir oss at

$$\underline{x}(t - h_i(t)) \equiv St(\underline{x}_{j-s_i}) \quad \forall t - h_i(t) = St(t_{j-s_i}).$$

La oss se nærmere på betingelsen $t - h_i(t) = St(t_{j-s_i})$:

Definisjon 5.17 gir oss at

$$St(t_{j-s_i}) = St(t_0 + (j - s_i)dt) = St(t_0 + jd\tau - s_id\tau) = St(\tau_j - \tilde{h}_i(\tau_j)) = t - h_i(t) \quad (5.34)$$

Betingelsen er altså oppfylt for alle $t = St(\tau_j)$, hvilket betyr at venstresidene er ekvivalente for slike valg av t . Det gjenstår å vise at høyresidene i likningene 5.32 og 5.33 også er ekvivalente:

Da $*\underline{\theta}$ er en ikke-standard utvidelse av $\underline{\theta}$, og $\underline{\theta}$ er kontinuert på I_0 , må vi ha at

$$St(*\underline{\theta}(t_{j-s_i})) = \underline{\theta}(St(t_{j-s_i})) = \underline{\theta}(t - h_i(t)),$$

der den siste likheten følger av (5.34). Altså er også høyresidene i (5.32) og (5.33) like.

Konklusjonen er at (5.14) og (5.28) er ekvivalente. Når vi i tillegg vet at en veldefinert og kontinuert løsning på (5.28) eksisterer, har vi vist teoremet. \square

Kapittel 6

Hvorfor ikke-standard analyse?

Som leseren sikkert allerede har oppdaget, har vi gjennom hele denne mastergradsoppgaven hatt som overordnet mål å framstille ikke-standard analyse som et fullgodt - om ikke bedre - alternativ til klassisk analyse. I dette kapitlet ønsker vi å oppsummere og drøfte noen hovedargumenter for hvorfor man kan hevde at ikke-standard analyse er en egnet form for matematisk analyse, på bakgrunn av de momentene vi har fokusert på i oppgaven forøvrig. Sentrale argumenter dels inn i noen hovedpunkter, som vi så drøfter hver for seg. La oss betrakte dette kapitlet som et slags *filosofisk hjørne*, der vi kan løfte blikket opp fra de matematiske resonnementene og «samle trådene».

6.1 Matematisk forståelse

Et viktig argument for å befatte seg med ikke-standard analyse, er at den kan bidra til å øke vår forståelse av matematikk. For å undersøke dette nærmere, stiller vi oss følgende spørsmål:

Hva er det ikke-standard analyse kan bidra med som hjelper oss til å øke vår forståelse av matematikk?

For å besvare dette spørsmålet, er det nødvendig å ha en felles formening om hva vi mener med *forståelse av matematikk*. I et pedagogisk/didaktisk perspektiv kan man betrakte begrepet *forståelse* på forskjellige måter. Skemp (1976) skiller for eksempel mellom instrumentell og relasjonell forståelse. Den instrumentelle forståelsen er knyttet til å bruke

algoritmer, formler og regler for å løse matematiske problemer, mens relasjonell forståelse innebærer å bygge opp begrepsmessige strukturer og se sammenhenger mellom begreper. Skemp (1976) gir oss et godt bilde på hvorfor det er den relasjonelle forståelsen som først og fremst er viktig. Vi ser for oss at vi skal finne fram til et bestemt kontor i en stor bygning. Det er to måter vi kan finne frem på: Enten har vi lært oss en detaljert beskrivelse av veien fra der vi står og helt fram til kontoret, eller så har vi studert et kart og orientert oss i bygningen. Fordelen med den siste metoden, er at vi nå har en viss oversikt over bygningen og er fleksible med tanke på valg av vei. Det er enkelt å gjøre om på veivalget dersom for eksempel en korridor er sperret, og vi trenger ikke huske alt i detalj. Ulempen er at det tar tid å gjøre seg kjent i bygningen. Hvis vi derimot bare har én enkelt beskrivelse å forholde oss til, trenger vi ikke å bruke mye tid på å orientere oss. Imidlertid vil vi få problemer dersom det oppstår uforutsette hindringer underveis (som en stengt korridor), for ikke å si dersom vi skulle glemme en detalj fra beskrivelsen. Videre trekker Skemp (1976) parallellen mellom å forholde seg til en detaljert beskrivelse og instrumentell forståelse, og parallellen mellom å gjøre seg kjent i bygningen og den relasjonelle forståelsen.

Matematisk analyse kan vi si er et felt som først og fremst utfordrer den relasjonelle forståelsen. Vi bruker mye tid på å sette oss inn i grunnleggende, konseptuelle begreper og prinsipper, for så å studere hvordan disse virker i en større matematisk sammenheng. Ikke minst er det viktig at man kan argumentere og føre bevis for det man påstår, og bruke det man allerede har kjennskap til for å resonnerer omkring nye problemer. Nå kan jo noen hevde at vi i denne mastergradsoppgaven forsåvidt ikke har kommet fram til nye oppdagelser med tanke på å produsere nye resultater i matematikk. Imidlertid har argumentasjon, begrunnelse og resonnering i matematisk analyse stått sentralt i denne oppgaven. Et slikt fokus er viktig for å utvikle en relasjonell forståelse av matematikk. I fortsettelsen vil vi se på hva slags fortrinn ikke-standard analyse gir i denne sammenhengen. Vi starter denne drøftingen med følgende påstand:

1. Sentrale begreper og definisjoner er ofte formulert enklere og mer intuitivt.

Dette er selvsagt en subjektiv påstand, og leseren oppfordres til selv å ta en avgjørelse på

bakgrunn av det vi tidligere har presentert i oppgaven. Vi kan spesielt trekke fram eksempelet med definisjonen på *kontinuitet* fra seksjon 2.2. Den klassiske definisjonen bygger på ϵ - δ -formuleringen av grensebegrepet, og er formulert på en måte som krever at man har knekt koden med ϵ - δ -språket. Dette er et «språk» som i sin tid ble utviklet av blant andre Weierstrass for å gi en formell og presis definisjon på grensebegrepet nettopp for å unngå å snakke om infinitesimaler (Katz 2014). På den andre siden bygger ikke-standard-definisjonen av kontinuitet på begrepet standardddel, men dette har en opplagt appell til vår intuisjon hvis vi tenker på tallinja (se seksjon 1.2).

Et annet eksempel er *differensialet* av en funksjon fra seksjon 2.3, som ikke umiddelbart gir en intuitiv mening i klassisk forstand, og blir definert mest som en formalitet man bruker av notasjonsmessige hensyn. I klassisk analyse gir selve definisjonen av $\frac{df}{dx}$ en klar tolkning som stigningstallet til tangenten til kurven f i punktet $(x, f(x))$, men hvordan skal man tolke $df = f'(x)dx$? Med en ikke-standard tolkning av $df = *f(x + dx) - *f(x)$ som en infinitesimalt liten differanse mellom to funksjonsverdier og dx som en infinitesimalt liten forflytning i x -retning, gir notasjonen $\frac{df}{dx}$ intuitivt mening som et stigningstall. Historisk sett var det også dette som var opphavet til denne notasjonen (se seksjon 2.6).

Poenget er at en mindre komplisert måte å beskrive sentrale begreper på, forhåpentligvis vil gjøre det enklere for matematikkstudenter og matematikere å forstå og bruke begrepene og definisjonene. Dette var en av grunnene til at Keisler (1976a) valgte å presentere kalkulus ved å inkludere infinitesimaler i betraktninger og resonnementer i sin bok *Elementary calculus*.

2. Vi får nye og innsiktsfulle beviser på teoremer; ofte enklere og mer intuitive.

Eksempler på dette finner vi først og fremst i kapittel 3, men underveis i denne oppgaven er mange teoremer blitt begrunnet annerledes enn i klassisk analyse. Tenk bare på ekstremalverdisetningene for tallfølger og funksjoner, lemmaene, analysens fundamentalteorem, Peanos eksistensteorem etc. Ikke bare blir disse bevisene ofte kortere, men også gjennomført på en mer intuitiv måte som ikke krever kjennskap til nye og vanskelige begreper. I beviset for analysens fundamentalteorem unngikk vi for eksempel å ta hensyn til *uniform kontinuitet* og *Lagranges middelverditeorem*, og i beviset for Peanos eksistens-

teoremer unngikk vi *Ascoli-Arzela*-teoremet og *kompakthet for metriske rom*. Vi bygget disse bevisene kun på de relativt få og grunnleggende begrepene og definisjonene som vi presenterte i kapittel 2. For eksempel viste teknikken med hyperendelig oppdeling av intervaller og tolkningen av integraler som hyperendelige summer seg svært fruktbar og (forhåpentligvis) fattbar.

3. Et *ikke-standard* alternativ gir større fleksibilitet.

Hvis vi går tilbake Skemps (1976) metafor, innser vi fort at man blir mer fleksibel med tanke på å finne fram i en bygning dersom man kjenner til flere veier. Hvis en korridor er stengt i én retning, kan man legge om ruta og velge en annen vei. Dersom én vei viser seg å være lenger og mer tungvint enn en annen, kan man også gjøre visse omprioriteringer. Slik er det også i matematisk analyse. Det er ofte mange måter man kan gripe fatt i et problem på, og én er gjerne enklere enn en annen, selv om begge fører frem. Vi har sett eksempler på at måten vi velger å resonnerer omkring grunnleggende begreper på, blir avgjørende for hvordan vi begrunner teoremer i matematikk. Enkelte ganger er den ene måten å tenke på mest fruktbar; noen ganger den andre. Dersom man har oversikt over flere former for å analysere matematikk på, kan vi derfor hevde at man vil være mer fleksibel med tanke på å løse et problem enn om man bare kjente til én grunnleggende måte å tenke på. Vi er stadig på jakt etter en *egnet* «vei», og da kreves det at vi har flere muligheter å velge mellom. Dette var nok også en av grunnene til at Keisler (1976a) valgte å presentere *elementary calculus* ved å inkludere «ikke-standard» betraktninger og resonnementer parallelt med klassiske argumenter.

Påstanden er at et såkalt *ikke-standard* alternativ til den allerede veletablerte, klassiske analysen, som den ikke-standard analysen utgjør, vil øke oversikten og «veivalget» i et matematisk landskap. Dette gir et fruktbart *perspektiv* på valg av metode, argumentasjon og tankegang.

6.2 Historisk utgangspunkt

Mange viktige innsikter i matematikk har sitt utspring i at mennesker har tenkt på størrelser som uendelig små, eller som tilnæringsprosess der man for eksempel foretar en

oppdeling av en geometrisk figur. En av de første vi kjenner til som tenkte på denne måten, var Arkimedes i det tredje århundret f.Kr. Han approksimerte arealet til en sirkel ved å tenke på det som et regulært polygon med n sider. Det er nærliggende for oss å tenke på dette som en grenseprosess der vi får en stadig bedre tilnærming til sirkelens areal etterhvert som n øker. Greske matematikere hadde ikke utviklet idéen om å ta grensen til en uendelig sekvens/følge. I stedet brukte de et indirekte *ad absurdum*-bevis, og viste at dersom arealet A til en sirkel med radius r og omkrets C ikke var lik $\frac{1}{2}rC$, ville det føre til en selvmotsigelse dersom man sammenliknet sirkelen med et polygon med tilstrekkelig mange sider. Arkimedes brukte denne idéen til å bevise mange av formlene for areal og volum av diverse geometriske figurer (Goldblatt 1998).

Tanken om å dele opp en geometrisk figur, kurve etc. er altså ikke ny. Neste steg er å la oppdelingen gå mot uendelig, slik at for eksempel arealet under en graf betraktes som en sum av uendelig mange uendelig små arealelementer (les om Leibniz i seksjon 2.6). En slik tankegang benyttes ofte i fysikk til eksempelvis å finne massesenter og treghetsmoment til legemer (Tipler og Mosca 2008, s.153 og 295). Det er nærliggende å tro at dette kommer av at metoden er effektiv, intuitiv og «brukervennlig».

Historien viser at det ofte er stor forskjell på hvordan matematiske sannheter blir oppdaget og hvordan de faktisk blir begrunnet. Slik har det definitivt vært med infinitesimalregningen; intuisjonen er skaperkraften, mens behovet for matematisk holdbar argumentasjon springer ut fra et ønske om å kunne bruke metoden som et gyldig verktøy. Det er viktig å være klar over dette med tanke på framtidige «oppdagelser»; matematikken er en dynamisk prosess mellom intuisjon og argumentasjon, der intuisjonen som oftest tar *det første steget*. Det er også viktig å sette seg inn i hvilke tanker som opprinnelig var i sving, med tanke på å forstå matematikken slik den fremstår for oss i dag. Det er nok dette Keisler (1976b) peker på når han i sitt forord skriver:

The infinitesimals provided the intuition for the original development of the calculus and should help students as they repeat this development.

En analyseform som tar utgangspunkt i infinitesimaler ligger tett opp til den intuitive tankegangen som opprinnelig ledet frem til sentrale resultater i kalkulus. Ikke-standard analyse har derfor en verdi med tanke på å forstå hvor disse resultatene kommer fra, og hvordan man har resonnert for å komme fram til dem. Det hjelper oss også til å bygge opp

en relasjonell, matematisk forståelse; altså til å se sammenhenger mellom «fenomener», symboler og begreper. Litt filosofisk kan vi si at vi forstår matematikken «baklengs», men erfarer den «forlengs». Med det menes at matematikken undervises med utgangspunkt i de resultater og begrunnelser vi har per i dag, selv om det kanskje har tatt menneskeheten århundrer å komme fra resultat til en holdbar begrunnelse. Studenten som undervises tenker ikke nødvendigvis over dette, og får servert denne historien i omvendt rekkefølge, preget av en god porsjon «etterpåkløkskap». Dermed kan man ledes til å tro at det er slik matematikken utvikler seg; noen bare gulper opp en genial idé, og plutselig får vi en konsistent teori. Vi er stort sett fornøyde med å kjenne beviset for teoremene vi lærer, og tenker ikke mer over hvilke bakenforliggende tanker det var som førte frem til dem. Hvis det er vår virkelighetsoppfatning at matematikken drives fremover av kryptiske bevis uten noen videre filosofi, viser historien om infinitesimalregningen at dette synet er svært galt. For å skjønne matematikkens utvikling, er det viktig å forstå *hvorfor* matematiske problemer dukker opp, *hvor* de kommer fra og *hvordan* de blir løst. Viktige poenger omkring dette kan gå oss hus forbi dersom matematikken framstilles på en *historieløs* måte. Derfor blir det viktig å alltid ha et blikk bakover i tenkningens historie dersom vi skal løse de gåtene som ligger foran oss.

6.3 Bruksområder

Det viser seg at *ikke-standard* tankegang har hatt innflytelse på mange områder i teoretisk og anvendt matematikk. Vi har allerede påpekt at et intuitivt forhold til infinitesimale størrelser i utstrakt grad brukes innen diverse felt i fysikk, men også innen økonomi (Stigum 1990) og sannsynlighetsteori (Nelson 1987) viser denne metoden seg svært fruktbar. Hva kan årsaken til dette være? Et opplagt svar er at ikke-standard modeller egner seg til å beskrive prosesser i for eksempel fysikk og økonomi. Hvis vi skal forstå dette nærmere, kan vi spesielt trekke frem en egenskap som vi brukte med stor suksess under beviset for Peanos eksistensteorem: Uendelige mengder i reell analyse blir til hyperendelige mengder i ikke-standard analyse. Dette er kanskje den mest anvendelige siden ved ikke-standard analyse. På den måten kan vi betrakte et fysisk legeme som en hyperendelig sum av infinitesimale elementer, eller hyperendelige økonomier der den enkelte aktør har en uendelig

liten innflytelse, men der samlinger av mange «innflytelsesløse» individer kan ha betydelig innvirkning (Lindstrøm 1996, s. 89). På samme måte kan vi «erstatte» uendelige summer med hyperendelige summer, uendelig-dimensjonale vektorrom med hyperendelig-dimensjonale rom o.s.v.

En annen side ved ikke-standard analyse som også spiller inn, er at hyperreelle tall - om enn de er uendelige små - inneholder en uendelig mengde med informasjon. Som vi så i kapittel 1, betrakter vi de hyperreelle tallene som ekvivalensklasser, og vi kan oppfatte disse som representasjoner for asymptotiske egenskaper ved reelle tallfølger. Det hyperreelle tallet (d.v.s. ekvivalensklassen) som representeres ved tallfølgen $\{n\}$ er forskjellig fra det hyperreelle tallet som representeres ved følgen $\{n^2\}$. Vi går altså inn og skiller mellom ulike uendelige størrelser, på tilsvarende måte som vi skiller mellom ulike infinitesimale størrelser. Om ethvert reelt tall finner vi en *monade*, og enhver monade inneholder en uendelighet av hyperreelle tall. Slik inneholder hyperreelle tall uendelig mye mer informasjon enn reelle tall. Det eneste reelle tallet som er infinitesimalt i henhold til definisjon *iii* fra seksjon 1.2, er tallet 0. I klassisk analyse nøyer man seg dessuten også med å si at de to følgene $\{n\}$ og $\{n^2\}$ går mot uendelig, og bruker samlebetegnelsen ∞ for å symbolisere at størrelser *går mot* uendelig. $\pm\infty$ er imidlertid ikke reelle tall. Likevel ser vi at de to tallfølgene går mot uendelig med ulik *hastighet*. Intuitivt kan vi si at det er hastigheten som følgene vokser med som skiller dem i ikke-standard analyse, og som gjør at de betraktes som to *forskjellige* hyperreelle tall. Dette har betydning innen for eksempel *singulær perturbasjonsteori*, der man ved hjelp av ikke-standard analyse skiller mellom prosesser langs to tidsskalaer; enkelt sagt går den ene prosessen sakte mens den andre går raskt. Vi kan si det slik at man i et reelt univers mangler en *uendelighet* med informasjon i forhold til i et hyperreelt univers.

I våre dager (d.v.s. etter 1960) har Robinsons ikke-standard analyse vært brukt på en rekke områder innen teoretisk og anvendt matematikk. Eksempler på dette er singulær perturbasjonsteori (F. Diener og M. Diener i Frankrike), målteori (P. Loeb i USA), funksjonalanalyse (W. Henson i USA), matematisk fysikk (S. Albeverio i Norge og Tyskland, R. Høegh-Krohn i Norge, N. Cutland i UK, og L. Arkerud i Sverige) og stokastisk analyse (T. Lindstrøm i Norge og J. Keisler i USA).

6.4 Kritikk: Hvorfor ikke *standard* analyse?

Selv om det kanskje kan framstå slik, er det ikke tilfelle at forfatteren her er motstander av den veletablerte, klassiske analysen. Å argumentere *for* ikke-standard analyse er ikke det samme som å argumentere *mot* standard analyse. Vi har i denne mastergradsoppgaven hatt fokus på å framstille ikke-standard analyse som et *alternativ* til den klassisk analyseformen som i størst grad er i bruk innen matematikkfaget per i dag. Dermed blir det naturlig å trekke fram sider ved analysen som viser seg hensiktsmessig. Noe vi imidlertid har forsøkt å unngå i vår presentasjon av den elementære analysen, er å anvende setninger i *logikk* for å begrunne teoremer. Vi har bevisst styrt unna *det elementære utvidelsesprinsipp* under framstillingen av ikke-standard analyse, selv om det historisk sett var slik den ble formalisert av Robinson. Veien om logikk kan nok oppleves like kontraintuitiv som for eksempel *Heine-Borel*-teoremet som den klassiske analysen bygger på. Et argument mot å basere seg på ikke-standard analyse, kan derfor være at det krever mer kjennskap til logisk formalisme enn klassisk analyse. Imidlertid vil ikke denne formalismen spille noen stor rolle i den videre utviklingen av teorien; størst rolle spiller den ved selve konstruksjonen av ${}^*\mathbb{R}$. Som vi har forsøkt vist i denne oppgaven, finnes det dessuten andre, mer *logikkfattige* måter å gjennomføre denne konstruksjonen på. Dette var årsaken til at vi i seksjon 1.1 valgte å innføre det noe mystiske målet m . Selv om hensikten med m nok kan virke *okkult* på den uforberedte leser, har den altså en svært nyttig rolle dersom målet er å unngå bruk av formell logikk. Utover dette har vi i denne oppgava også forsøkt å unngå såkalte *interne* mengder og funksjoner (eng. *internal sets and functions*). Dette er begreper som ofte brukes i litteraturen (se f.eks. Lindstrøm 1988), men som kan være vanskelige å fatte på et intuitivt plan. Interne mengder oppfyller visse egenskaper som viser seg gunstige i mange sammenhenger. Lindstrøm (1996) gir oss følgende eksempel på en intern mengde: La $a, b \in {}^*\mathbb{R}$. Da er det ikke-standardde intervallet

$${}^*[a, b] = \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

en intern mengde. Vår *erstatning* for slike mengder fikk vi essensielt sett ved innføringen av dobbeltindekserte følger/mengder i avsnitt 2.1.2. Dette var en av Arkadi Ponosovs genistreker.

Et spørsmål man kan stille seg, er hvorfor ikke-standard analyse ikke er like utbredt som klassisk analyse, når den faktisk ligger nærmere opp til den opprinnelige tankegangen som la grunnlaget for analysen. Det er nærliggende å tro at svaret på dette spørsmålet henger sammen med at begrunnelsen som rettferdiggjør bruken av infinitesimaler kom *for sent*. Da man på 1800-tallet ryddet opp i analysens grunnlag, ble infinitesimalene bannlyst fra alle «anstendige» matematikkttekster (Lindstrøm 1996). Endelig hadde man funnet en skikkelig måte å begrunne teoremer på, som ikke forholdt seg til størrelser man ikke kunne begrunne (infinitesimalene). Robinsons løsning på problemet kom - man kan si dessverre - lenge etter at ϵ - δ -språket var etablert. Dette er nok den største grunnen til at ikke-standard analyse kommer i skyggen av klassisk analyse per i dag. Det er ikke godt å si hva framtiden vil bringe, men levekårene blir vel neppe dårligere for ikke-standard analyse etter som tiden går.

Selv om både klassisk og ikke-standard analyse er anerkjente analyseformer i fagmiljøet, er det imidlertid én ting som kan komme begge disse analyseformene til skade for framtida; hvilket understrekes godt i følgende sitat fra Errett Bishops (1928-1983) forord til sin bok *Foundations of Constructive Analysis* (1967, s. ix):

Our program is simple: To give numerical meaning to as much as possible of classical abstract analysis. Our motivation is the well-known scandal, ... , that classical mathematics is deficient in numerical meaning.

I et filosofisk perspektiv kan vi si at problemet ligger der det hele startet, ved begrepet *uendelig*. Både klassisk og ikke-standard analyse befatter seg med *uendelighet*, om enn på vidt forskjellig vis. Alle numeriske metoder er imidlertid basert på et endelig antall operasjoner. Datamaskiner forholder seg for eksempel ikke til begrepet uendelig; det gjør bare mennesker. Dette er et okkult fenomen som ingen noensinne har erfart, men som eksisterer i menneskers fantasi. Likevel har det vist seg at menneskers refleksjoner omkring uendelig små og store størrelser har frambrakt noen av de største idéene som menneskeheten har sett. Skal vi da feie dem under teppet?

Litteratur

- Albeverio, S.; Fenstad, J. E.; Høegh-krohn, R.; Lindstrøm, T. (1986): *Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics*, Academic Press, Orlando/.../Toronto
- Birkeland, B. og Normann, D. (1980): *A non-standard treatment of the equation $y' = f(y, t)$* . Hentet fra internett 22.04.2016:
<https://www.duo.uio.no/bitstream/handle/10852/43824/1980-17.pdf?sequence=1>
- Goldblatt, Robert (1998): *Lectures on the Hyperreals - An Introduction to Nonstandard Analysis*, Springer, New York
- Heir, O.; Erstad, G.; Engeseth, J.; Borgan, Ø.; Pedersen, P. I. (2006): *Matematikk 1T*, 1. utgave, 1. opplag, Aschehoug
- Heir, O.; Erstad, G.; Moe, H.; Skrede, P. A. (2008): *Matematikk R2*, 1. utgave, 1. opplag, Aschehoug
- Holme, Audun (2004): *Matematikkens historie 2*, Fagbokforlaget, Bergen
- Katz, Victor J. (2014): *History of Mathematics*, 4. utgave, Pearson, Edinburgh
- Keisler, H. Jerome (1976a): *Elementary calculus*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston/Massachusetts
- Keisler, H. Jerome (1976b): *Foundations of infinitesimal calculus*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston/Massachusetts
- Keisler, H. J.; Körner, S.; Luxemburg, W. A. J.; Young, A. D. (1979): *Selected Papers of Abraham Robinson*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam/New

York/Oxford

- Kolmanovskii, V. og Myshkis, A. (1999): *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht/Boston/London
- Lindstrøm, Tom (1988): *An invitation to nonstandard analysis*, i *Nonstandard Analysis and its Applications* (N.J. Cutland, red.), University Press, Cambridge, side 1-105
- Lindstrøm, Tom (1996): *Uendelig små og store tall - og litt om hva de kan brukes til*, Normat 44, Scandinavian University Press, Oslo/Copenhagen/Stockholm/Boston, side 71-91
- Lindstrøm, Tom (2006): *Kalkulus*, 3. utgave, Universitetsforlaget, Oslo
- Mathoverflow (2016): *Osgood's Criterion*. Hentet fra internett 19.04.2016: <http://mathoverflow.net/questions/55289/existence-uniqueness-of-solutions-to-quasi-lipschitz-odes>
- Mejlbo, Lars C. (1981): *Om ikke-standard analyse*, Normat 29, Scandinavian University Press, Oslo/Copenhagen/Stockholm/Boston, side 7-19
- Nelson, E. (1987): *Radically elementary probability theory*, Princeton University Press, New Jersey
- Robinson, Abraham (1967): *The metaphysics of the calculus*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam
- Skemp, Richard R. (1976): *Relational and Instrumental Understanding*, Mathematics teaching, Bulletin of the Association of Teachers of Mathematics, 77, side 20-26
- Stigum, B. P. (1990): *Toward a formal science of economics*, MIT Press, Cambridge
- Tipler, P. A. og Mosca, G. (2008): *Physics for Scientists and Engineers*, 6. edition, W. H. Freeman and Company, New York

- Trench, William F. (2012): *Introduction to Real Analysis*, Pearson Education, Upper Saddle River, New Jersey
- Wyller, John (2015): *Continuous Dynamical Systems*, Department of Mathematical Sciences and Technology, Norwegian University of Life Sciences, Ås

Liste over figurer:

- Figur 1.1: Hentet fra Keisler (1976b); gjengitt med tillatelse av forfatter.
- Figur 1.2: Hentet fra Keisler m.fl. (1979)



Norges miljø- og
biovitenskapelige
universitet

Postboks 5003
NO-1432 Ås
67 23 00 00
www.nmbu.no