MATEMATIKKSAMTALE OM PROPORSJONALITET: HVORDAN KAN SAMTALE I MATEMATIKK VÆRE MED PÅ Å SYNLIGGJØRE ELEVENES FORSTÅELSE AV BEGREPET PROPORSJONALITET?

MATHEMATICAL DISCUSSION OF PROPORTIONALITY: HOW CAN CONVERSTATIONS REGARDING MATHEMATICS HELP TO ESTABLISH THE PUPILS' UNDERSTANDING OF THE CONCEPT OF PROPORTIONALITY?

GRY SVANTESVOLD

UNIVERSITETET FOR MILJØ- OG BIOVITENSKAP
INSTITUTT FOR MATEMATISKE REALFAG OG TEKNOLOGI
MASTEROPPGAVE 30 STP. 2012

En halv er,

tænk nu hvor aparte,

to tredjedele af tre kvarte.

Piet Hein.

Forord

Lektorutdanning i realfag var mitt førstevalg på samordnet opptak, og da jeg fikk vite at jeg hadde kommet inn på førstevalget mitt ble jeg naturligvis glad, samtidig som jeg var atten år og litt usikker på hva utdannelsen egentlig innebar. Var det et riktig valg for meg? Det var et vanskelig spørsmål å svare på. Jeg startet opp på Universitetet for Miljø- og Biovitenskap (UMB), og fikk fort innsikt i hvordan utdannelsesløpet var. Det var nemlig slik at vi ble kastet ut i første praksisperiode før det var gått så mye som en måned av studietiden. I ettertid har jeg tenkt mye på at det var en fin måte å sjekke ut hvordan livet etter studiene ville bli. Det var i praksisperiodene vi fikk en forsmak på hvordan yrkeslivet så ut. Siden jeg nå sitter med en masteroppgave i hånden, er det vel ingen tvil om at jeg fikk den bekreftelsen jeg søkte etter i praksisperioden. Lærer var tingen, og gjennom lektorutdannelsen ved UMB har jeg fått undervisningskompetanse i hele tre fag; matematikk, fysikk og naturfag på videregående skole, med praktisk pedagogisk utdanning (PPU) inkludert. Arbeidet med selve masteroppgaven har vært en lang prosess, og takket være gode råd og innspill underveis fra både veileder, kollegaer, og mine nærmeste har den kommet i land. Takk for all støtte gjennom både arbeidet med oppgaven, og ellers gjennom studietiden på Ås.

Nesbyen, desember 2012

Gry Svantesvold

Sammendrag

Masteroppgaven omhandler i korte trekk ulike forståelsestyper i matematikk, med hovedvekt på begrepsforståelse og resonnementsforståelse. Jeg har sett på hvordan elevers samtale i matematikk henger i sammen med disse forståelsestypene når elevene arbeider med det algebraiske temaet proporsjonalitet. Følgende problemstilling i oppgaven ble utarbeidet:

Hvordan kan samtale i matematikk være med på å synliggjøre elevenes forståelse av begrepet proporsjonalitet?

Samtale i matematikk gir elevene gode fordeler i forhold til sin egen og medelevenes forståelse til et tema; her proporsjonalitet. For at elevene skal kunne samtale seg i mellom, må hver enkelt elev tenke godt igjennom personlige ideer og tanker som svirrer inni hodene deres, for så å sette ord på dem. Resonnementsforståelsen til elevene blir styrket og trent opp når elevene setter ord på sine matematiske tanker på denne måten. Elevenes begrepsforståelse, altså elevenes evne til å gjenkjenne matematiske situasjoner, og hvilken fremgangsmåte som er mest hensiktsmessig å benytte der. Ved å trene på dette vil elevene etter hvert klare å snakke matematikk på en helt ny måte, og relasjonsforståelsen deres utvikles videre.

Elevene som var med på forskningen var to grupper av tre og fire elever som gikk i første klasse på medier- og kommunikasjonslinja på videregående skole. Elevene jobbet sammen om å løse ett oppgavesett med oppgaver om proporsjonalitet. De leverte testen digitalt, altså løste de oppgavene ved hjelp av dynamiske matematikkprogrammer, slik de var vant med fra den vanlige matematikkundervisningen på skolen. Resultatene fra forskningen er fremstilt med korte transkripsjonsutdrag fra elevenes samtale, og forklarende tekst. Resultatene ble analysert med delvis bruk av Toulmins modell.

Siden elevene skulle jobbe sammen om å løse oppgavesettet, og levere én digital besvarelse var det ingen vei utenom å samtale med hverandre. Elevene leste oppgaveteksten høyt for hverandre og kom med innspill på hva svaret kunne være. De var flinke til å dele tankene og ideene de hadde om oppgavene, samtidig som de under hele prosessen passet på å gjenta forklaringer til alle på gruppa forsto hva de mente. Dermed fikk de beskrevet sine matematiske ideer opp til flere ganger. De fikk trent på dette og selv styrket sin resonnementsforståelse.

Elevene var ivrige og samarbeidsvillige til å jobbe sammen for å diskutere proporsjonalitet og hva hver enkelt variabel sto for i denne sammenhengen. Dermed hadde elevene et godt startsted for å synliggjøre og utbedre deres forståelse for begrepene i proporsjonalitet. Elevenes relasjonsforståelse ble synliggjort når de snakket sammen om disse variablene, og de utfordret både seg selv og medelevenes forståelse for proporsjonalitetsbegrepet gjennom samtalene. Da elevene la fram sine tanker for proporsjonalitetsbegrepet for medelevene måtte de være presise og tydelige i sine argumenter for at de andre elevene skulle forstå deres tankegang.

Å la elevene presentere ulike begreper for hverandre vil også være betydningsfullt for andre temaer i matematikk.

Abstract

Much simplified, this thesis discusses different variants of understanding in mathematics, with an emphasis on conceptual understanding and reasoning understanding. I have looked at the conversations of pupils regarding mathematics can be linked to these types of understanding when working with the algebraic issue of proportionality. The research question upon which much of this thesis is based reads as follows:

How can conversations regarding mathematics help to establish the pupils' understanding of the concept of proportionality?

Conversations about mathematics enhance the collective as well as individual understanding of a given topic among pupils, as shown in this study of proportionality. In order for the pupils to engage in such conversation, each pupil must first consider his or her personal thoughts and ideas on the topic before putting them into words. Thus the adaptive reasoning of the pupils will be strengthened when the pupils have to articulate their mathematical thinking in the presence of others, and this will in turn also aid the understanding of concepts as well as the ability to recognize any mathematical situations that might happen to be present. When conversations on a mathematical topic are regularly repeated the pupils will eventually be able to discuss mathematics in a whole new way, and their conceptual understanding will accordingly also develop further.

The pupils who participated in the research consisted of groups of three or four pupils from the media and communications line aged from fifteen to sixteen years[1]. The pupils worked together to solve a set of tasks about proportionality. The students handed in the test digitally, and solved the tasks by using dynamic math programs, much as they were used from their

[1] First year pupils of the Norwegian 'Videregående skole'.

regular math classes. The results of the research were obtained by means of short transcript excerpts from the conversations of the pupils accompanied by an explanatory text. The results were analyzed making partial use of the Toulmin model.

Because the pupils worked together to solve the problems, and were going to deliver the answers digitally, they had no other choice than to discuss the tasks with each other. The pupils started by reading the problem text aloud to each other, and then came up with suggestions as to what the answer might be. They were good at sharing their thoughts and ideas concerning the tasks. This process was repeated several times until every member of the group had understood. Thus, when the pupils were forced to describe their mathematical ideas several times this task gradually became easier. Added to this the conceptual understanding of the pupils also came to be strengthened.

The pupils were eager to cooperate with each other as well as to discuss proportionality in the given context. Thus, the pupils had a good starting point from which they could work to further improve their understanding of the concept of proportionality. The pupils' grasp of conceptual understanding came to be highlighted when discussing the variables of the questions given, and in addition they challenged their own as well as their fellow pupils' understanding of the concept of proportionality through conversation. When the pupils presented their ideas regarding the concept of proportionality to the rest of the group they were urged to do so precisely and clearly so that the other pupils easily could follow their arguments.

Allowing students to present various mathematical concepts to each other is also of significance to the teaching of other mathematical topics.

Innhold

Kapittel 1 – Innledning

Algebra, og norske elevers dårlige resultater i algebra i undersøkelser som TIMMS og PISA, er et tema som stadig er i fokus. Rapporten fra TIMMS advanced i videregående skole 2008 viser at norske elever og deres algebrakunnskaper på flere steder er utilfredsstillende for kunnskapen de lærte de to første årene på videregående skole. De norske elevene scoret relativt bra på en algebraoppgave med gitt funksjonsuttrykk, der de kunne benytte seg av teknologiske verktøy for å finne løsningen, men selv om de norske elevene scoret bra på denne ene oppgaven, var det en tilbakegang i resultatene fra ti år tilbake (Grønmo et al. 2010). Videre står det at kunnskap som tilegnes over kort tid mest trolig vil være betraktelig dårligere noen år etter endt utdanning, enn kunnskap som repeteres i senere matematikkurs. En annen rapport som baser seg på resultatene fra en internasjonal studie (TEDS-M 2008, Teacher Education and Development Study in Mathematics), viser at resultatene fra lærerstudenter i matematikk hadde begrenset forståelse av proporsjonalitet (Grønmo & Onstad 2012). Kanskje får også elever som lærer kunnskap over kort tid, med lite repetisjon kommende skoleår, dårligere resultater noen år etter fullført videregående skole. Ser man på algebra generelt, kan vi se at de norske elevene ikke presterer spesielt bra. Etter å ha lest flere ulike forskningsresultater om algebra, bestemte jeg meg for å studere dette nærmere. Jeg valgte meg ut begrepet proporsjonalitet under temaet algebra, fordi algebra et tema som innebærer så mangt. I henhold til størrelsen og omfanget på masteroppgaven syntes jeg det var interessant og passende å velge ut ett bestemt tema. Jeg undersøkte parallelt at elevene som skulle være med på forskningen hadde proporsjonalitet som en del av sitt pensum. Jeg ønsket å gjøre en undersøkelse der elevene samarbeidet om å løse et sett med oppgaver ved hjelp av dynamiske programmer. Noe jeg kommer nærmer inn på i **avsnitt 3 Bakgrunn for valg av elevenes arbeidsmetode**. Videre ønsket jeg å fokusere på hvordan elevene samarbeidet, hvordan de snakket sammen om oppgavene, og hva slags forståelse de hadde for temaet proporsjonalitet når de arbeidet med proporsjonalitetsoppgaver. For når elever samtaler med andre blir de satt i den situasjonen at de blir nødt til å begrunne og forklare tankene sine nærmere enn de kanskje ville gjort om de holdt tankene sine for seg selv. En slik bevisstgjøring av sin egen forståelse vil være nyttig både for elevene selv, og for lærerne. Det kommer ofte frem en sammenheng mellom begrepene når man samtaler, argumentere for seg, og resonnere seg fram til et svar i matematikk. Denne sammenhengen kan lærerne nyttiggjøre seg av i både planlegging og tilrettelegging av undervisningen, i tillegg til at elevene blir mer bevisste på sin egen forståelse. Alle disse tingene vil kunne gi en dypere forståelse av de matematiske begrepene, og sørge for at den matematiske forståelsen ikke nødvendigvis forblir instrumentell, og baserer seg på pugging av formler og begreper. Jeg har selv opplevd å forstå et begrep enda bedre etter å ha forklart en annen elev min tankegang for å komme fram til løsningen på en oppgave. Ofte får man selv en aha-opplevelse, der sammenhenger mellom begrepene blir enda mer tydelig enn de var fra før av når man må sette ord på dem. Ut i fra denne bakgrunnen utformet jeg følgende problemstilling til å gjelde for masteroppgaven:

Hvordan kan samtale i matematikk være med på å synliggjøre elevenes forståelse av begrepet proporsjonalitet?

Kapittel 2 Teoretisk oversikt er et rent teorikapittel, som inneholder de to hovedpunktene forståelse og matematikksamtale. Viktige begreper som begrepsforståelse, resonnementsforståelse, strategifleksibilitet, variabelforståelse og språk i matematikk forklares nærmere. Teoriene beskrives først generelt, før jeg har rettet fokuset mot problemstillingen.

Kapittel 3 Forskningsmetode omhandler forskningsmetoden som er valgt. En kvalitativ forskningsmetode, som blir belyst med litteratur, bakgrunn for valg av metoden, og hvordan utvalget og gjennomføringen av studien ble utført.

Kapittel 4 Resultater presenterer oppgavene elevene i den kvalitative undersøkelsen min fikk utdelt med løsningsforslag, og inneholder utdrag fra elevenes samtale med tilhørende analyse.

Kapittel 5 Diskusjon tar opp og tolker de empiriske dataene fra kapittel 4, med støtte i litteraturen, ut i fra problemstillingen.

Kapittel 6 Konklusjon er det avsluttende og konkluderende kapittelet, som oppsummerer funnene, og besvarer problemstillingen ytterligere.

Kapittel 2 – Teoretisk oversikt

I hverdagslivet er vi mennesker opptatt av å forstå hverandre riktig, og at vi ikke skal misforstås. Vi ønsker en felles forståelse av ulike hendelser. I matematikken derimot er det ikke like enkelt å tenke seg hva som ligger i begrepet forståelse. Selvsagt er det viktig at vi har en felles forståelse av et matematisk uttrykk, slik at svaret er entydig, men didaktisk sett kan begrepet forståelse ha flere betydninger. Det kommer jeg nærmer inn på i avsnittet under.

2.1 Forståelse i matematikk

Det finnes fire hovedteoritradisjoner om læring (behavioristisk, kognitiv, konstruktivistisk og sosiokulturell), og disse læringsteoriene har hatt stor innvirkning på matematikkundervisningen. I korte trekk kan man si at den behavioristiske læringsteorien legger vekt på den ytre atferden til eleven, som pugging av ferdig kunnskap, og drilling av oppgaver. De kognitive og konstruktivistiske læringsteoriene går begge på de indre prosessene til eleven, der kunnskap kan omdannes til symboler og bilder inne i hodet til eleven (Imsen 2005). I matematikken vil det si at elevene undersøker oppgaver og løser problemer for å finne matematiske sammenhenger. Mens sosiokulturell læringsteori omhandler utvikling av elevenes forståelse i matematikk gjennom samtale og samarbeid (Koschmann 1996).

Skemp (1989) har et konstruktivistisk syn på forståelse i matematikk, der læring betyr å tilegne seg kunnskap, og rekonstruere et eksisterende skjema av kunnskap, og begreper. Eleven kan for eksempel ha et skjema for geometri, et for derivasjon, og et for å spille håndball. Et tema er ikke nødvendigvis forstått eller ikke-forstått, elevene kan få en individuell oppfatning av forståelse. *«Å forstå noe er å kunne assimilere det inn i et eksisterende skjema» (Solvang 1986s. 81).* Så når eleven lærer et nytt begrep, vil eleven som sagt automatisk prøve å plassere det nye begrepet inn i et eksisterende skjema, da de fleste begreper er ledet ut fra andre begreper, sier man at skjemaene er hierarkisk organisert. Er derimot den nye kunnskapen lang unna ett eksisterende skjema, vil det skje en akkomodasjonsprosess, og eleven vil være nødt til å konstruere et nytt skjema til den nye kunnskapen (Imsen 2005). Elevene kan gjennom pugging av algoritmer utvikle forståelse for hvordan et problem skal løses, men ikke følgelig forstå hvorfor problemet skulle løses på akkurat denne måten. Det kan ses på som regler uten forklaringer (Skemp 1989). Dette kaller Skemp (1989) for instrumentell forståelse, og han mener tradisjonell undervisning inneholder mye av denne typen forståelse, da det er lettere å oppnå enn relasjonell forståelse. Han forklarer relasjonell forståelse med å forstå både hvordan og hvorfor problemet løses på en bestemt måte. *«Det er relasjonsforståelse som vil gi elevene et utgangspunkt for nye erobringer» (Solvang 1986s.97).* Skemp (1989) har listet opp flere fordeler med både instrumentell -og relasjonell forståelsen. Blant annet vil instrumentell forståelse kunne gi kjappere riktig -og troverdig svar bare fordi mindre kunnskap er involvert. Det vil over tid være en utfordring å løse problemer og oppgaver, fordi forståelsen baserer seg på elevenes pugging og hukommelse av den aktuelle fremgangsmåten. Skemp (1989) mener videre det er minst fire fordeler med å praktisere relasjonell matematikk, altså matematikk der elevene forstår både hvorfor og hvordan et problem skal løses.

1. Det er lettere å tilpasse seg nye utfordringer – fordi eleven ser hvilken fremgangsmetode som bør brukes når den står ovenfor et nytt problem, og eleven vet hvorfor denne metoden skal benyttes, ikke bare hvordan den brukes.
2. Det er lettere å huske – siden relasjonsforståelse gir mer langvarig forståelse. Elevene ser matematiske sammenhenger, og klare å knytte relasjoner mellom formler og figurer.
3. Relasjonell forståelse kan være et mål i seg selv.
4. Relasjonelle skjemaer er uerstattelige kvalitetsmessig (Skemp 1989).

Mellin-Olsen (1984) sin oppfatning av forståelse tar utgangspunkt i elevens fornuftsgrunnlag. Fornuftsgrunnlaget spiller en avgjørende rolle for kunnskapen eleven klarer å lære seg. Det forgreiner seg i to retninger: regeloppfatning og strukturoppfatning. Som det ligger i ordet regeloppfatning er dette praktisk kunnskap, der elevene fokuserer på bruk av regler og prinsipper i matematikken. Eleven har nådd sitt mål når den får korrekt svar, og har forstått hvordan en regel skal anvendes, mens veien dit ikke er av betydning. Eleven er motivert mot et instrumentelt fornuftsgrunnlag. Har derimot eleven satt seg mål om å få korrekt svar, samtidig som fremgangsmåten skal gi mening, ønsker den å forstå hvordan og hvorfor en regel benyttes. Eleven er motivert mot strukturoppfatning, der reglenes bevis er like viktige for forståelsen som selve bruken av den (Mellin-Olsen 1984).

Kilpatrick et al. (2001) ser på forståelse som en del av matematisk kompetanse. Han deler deretter opp matematisk kompetanse i fem ulike delkompetanser, som alle er nært knyttet til hverandre, vevd i sammen som han sier, og som alle er avhengige av hverandre i utviklingen av denne kompetansen.

Tabell 1: Fem ulike delkompetanser i matematisk kompetanse (Kilpatrick et al. 2001).

Matematisk kompetanse	
Begrepsforståelse *Conceptual understanding*	Elevene har forståelse av matematiske begreper, operasjoner og relasjoner. De forstår hvor og hvordan de kan bruke en matematisk formel. Begrepsforståelse kan gjerne settes opp i mot relasjonell forståelse, der elevene ser sammenhengen mellom formelen som skal benyttes, hvordan den skal benyttes, altså alle operasjonene, og de kjenner til resultatet den gir.
Regneferdigheter *Procedural fluency*	Her har elevene kjennskap til hvor og hvordan de skal bruke en matematisk formel (prosedyre), og de utfører den fleksibelt, nøyaktig og effektivt. Regneferdigheter er linken mellom instrumentell forståelse og relasjonell forståelse, siden det legges i regneferdigheter at elevene skal kunne bedømme om resultatet er logisk.
Strategisk kompetanse *Strategic competence*	Elevene har evne til å formulere matematiske problemer, sette dem opp, for så å løse dem. Når elevene oppnår strategisk kompetanse klarer de å løse problemer, og etter hvert vil de også klare å løse andre typer oppgaver enn de standardoppgavene. Denne relasjonen er linken mellom strategisk kompetanse og relasjonsforståelse (som kan settes opp mot begrepsforståelse).
Resonnementsforståelse *Adaptive reasoning*	Evne til å tenke logisk mellom et tenkt konsept (for eksempel et matematisk begrep) og en praktisk situasjon (ser at det er en nytteverdi som kan overføres til en spesiell situasjon). Resonnementsforståelse kan også linkes til relasjonsforståelse, i og med at elevene må begrunne og vurdere om konseptet holder mål.
Engasjement *Productive disposition*	Elevene opplever et engasjement for å lære matematikk der de ser nytteverdien og meningen med den. Engasjement er ikke en type forståelse som de foregående punktene, men engasjement er likevel et viktig punkt for å klare å utvikle deres forståelse i matematikk. Elevene klarer da å overføre og benytte den matematiske kunnskapen i andre sammenhenger.

Generelt sett spiller alle disse fem kompetansene en viktig rolle for elevene når de skal tilegne seg matematiske kunnskaper, og de er like viktige når elevene jobber med grafiske framstillinger. Kilpatrick (2001) sier mer eksakt at matematisk kompetanse er noe alle elever bør utvikle, og at kompetansen kan benyttes for å sette mål for alle elever, uavhengig av alder. Alle de fem delkompetansene må utvikles for å oppnå matematisk kompetanse, og elever som har denne kompetansen tenker at de har evnen til å løse oppgaver, lære fremgangsmåtene, og forbedre sin forståelse for problemet gjennom hardt arbeid. For disse elevene vil arbeidet de legger ned for å oppnå kompetanse være verdt tiden. I oppgaven vil jeg ta for meg to av Kilpatricks punkter for kompetanse i matematikk, noe som kan være realistisk for en lærers vektlegging i en undervisningstime i matematikk. Det kan være vanskelig å inkludere alle de fem delkompetansene i løpet av en enkelt undervisningsøkt. Kilpatrick (2001) syn er at han mener at det er viktig at alle de fem delkompetansene blir prioritert i løpet av et skoleår, for å styrke sammenhengen mellom dem. De to delkompetansene jeg har valgt å se nærmere på; begrepsforståelse og resonnementsforståelse, er svært sentrale når elevene har gruppesamtale. Se for deg en påstand som eleven skal begrunne. Det kan være to forskjellige fremgangsmåter for å finne løsningen, og eleven må derfor ha en viss kunnskap til begrepet som skal forklares til de andre på gruppa (begrepsforståelse), samtidig vil en av de andre på gruppa finne løsningen på en annen måte, og elevene blir dermed nødt til å resonnere seg frem til en avgjørelse. De må analysere og vurdere om metodene holder mål, og om de virker logiske (resonnementsforståelse). Med resonnementsforståelse kan elevene ta viktige avgjørelser, og vurdere ulike alternativer (Kilpatrick et al. 2001).

2.1.1 Begrepsforståelse

«Students with conceptual understanding know more than isolated facts and methods. They understand why a mathematical idea is important and the kinds of contexts in which it is useful. They have organized their knowledge into a coherent whole, which enables them to learn new ideas by connecting those ideas to what they already know" (Kilpatrick et al. 2001s.118). Videre skriver Kilpatrick at elevers begrepsforståelse kan gjenkjennes ved å se om elevene har evne til å beskrive matematiske situasjoner på forskjellige måter, og samtidig vet hvor de forskjellige beskrivelsene benyttes mest hensiktsmessig. Hvor dyp begrepsforståelsen er, kan vi se ut i fra hvilket nivå detaljene og sammenhengene ligger på.

Når elevene oppnår begrepsforståelse er det snakk om matematiske ideer de ser sammenhenger mellom. Begrepsforståelsen får elevene gjennom å jobbe med nye oppgaver, der de benytter kjente fremgangsmåter og regler. De kan også ved forbedring av begrepsforståelsen utvikle kunnskapen sin ved å rekonstruere fakta og fremgangsmåter for å ta fatt på nye ukjente oppgaver. Begrepsforståelse og relasjonsforståelse er to begreper som henger tett i sammen, siden de begge går ut på å systematisere, og lete etter sammenhenger i matematikk (Skemp 1987). Elevene lærer ny kunnskap lettere, og de får gjerne mindre å lære ved å systematisere, og ser ting i lys av en sammenheng. Når de får begrepsforståelse om proporsjonalitet, forstår de hvorfor dette er viktig, og i hvilke sammenhenger det er nyttig. De forstår hva proporsjonale størrelser er, hvor og hvordan de bruker formelen $y = a \cdot x$.

Det er sentralt at elevene må ha en viss forståelse for ulike begreper, for at de skal kunne utøve matematikk. Begrepet variabler er et av dem. Variabler er viktig for at elevene skal kunne utvikle seg både muntlig og skriftlig. Det er også viktig for utviklingen av deres kommunikasjonsferdigheter (Carpenter et al. 2003). Når elever uttrykker seg ved hjelp av variabler, har elevene dannet seg et begrep om de matematiske symbolene. De klarer å bruke sitt 2. ordens språk for å uttrykke sine ideer. Dette er noe elevene kan lære seg tidlig i skolegangen, men det er oftest ikke vanlig at elevene lærer å ordlegge seg på denne måten før de starter på videregående skole. Ofte fortsetter en manipulering av symbolene også i den videregående skolen, uten noe spesielt fokus på begrepsdannelse til den strukturelle delen av begrepet (Brekke et al. 2000). For hvis det kun er fokus på den operasjonelle siden ved et begrep, utvikles kun denne ferdigheten, og det blir vanskelig for elevene når de skal forså seg på hvordan og hvorfor en tilsvarende oppgave skal løses kun ved hjelp av variabler. Küchmann (1981) deler forståelse av variabler i fire nivåer, hierarkisk, der de to nederste nivåene representerer instrumentell forståelse, og de to øverste nivåene representerer relasjonell forståelse. I de to nederste nivåene har elevene liten forståelse, og de ser ikke på bokstaver som ukjente, mens i de to øverste nivåene har elevene høyere grad av forståelse, og de behandler bokstavene som ukjente, samtidig som de klarer å gi tallene og variablene mening (Küchemann 1981). Det er viktig for elevene å ha forståelse for variabelbegrepet når de jobber med proporsjonalitet, siden proporsjonalitet bygger på forståelsen av variabler. I følge TIMMS 2007 sliter norske elever sliter spesielt med variabler og bokstavuttrykk i den formelle algebraen, og de presterer dårligere en de andre referanselandene som er med i undersøkelsen (Grønmo & Onstad 2009). Det er resultater til ettertanke, og hvis forståelsen av variabler ikke er på plass, kan det bli vanskelig å forstå at for eksempel variablene i uttrykket $y = a \cdot x$ representerer en hel rekke med tall. Da kan det bli vanskelig å skille hva de ulike variablene i uttrykket representerer.

2.1.2 Resonnementsforståelse

Kilpatrick (2001) forklarer resonnementsforståelse som evnen til å tenke logisk om sammenhengen mellom begreper og situasjoner (Kilpatrick et al. 2001). Altså er det resonnementsforståelse som må til for at vi skal kunne godta en konklusjon. *"One uses it to navigate through the many facts, procedures, concepts, and solution methods and to see that they all fit together in some way, that they make sense"* (Kilpatrick et al. 2001s. 129). Det må alltid være en form for logisk sammenheng for at en elev skal forstå for eksempel sammenhengen mellom en tabell og den tilhørende grafiske framstillingen av den. Elevene vil gjennom deduktivt resonnement gå fra det allmenne til det enkle, og avslutte en uoverensstemmelse, og se at svarene deres er riktige ved å sjekke om resonnementene deres er gyldige/valide. De må hele veien resonnere og vurdere forskjellige alternativer, og forsvare valgene som tas. Elevene vil med resonnementsforståelse forstå at det er en logisk sammenheng mellom størrelsene x og y, og se at de er proporsjonale hvis de kan finne y ved å multiplisere x med et fast tall a (proporsjonalitetsfaktoren), $y = a \cdot x$. Slik resonnementsforståelse kan gjenkjennes hos elever når de blir gitt oppgaver der løsningene må forklares, og begrunnes ytterligere (Kilpatrick et al. 2001). Det er spesielt ved problemløsingsoppgaver resonnementsforståelse viser sammenheng mellom de andre delkompetansene i matematisk kompetanse. Begrepsforståelse og resonnementsforståelse henger godt i sammen ved at begrepsforståelse gir elevene matematiske ider, og kunnskap om fremgangsmåter for å løse problemer, samtidig som resonnementsforståelsen blir brukt iherdig når elevene må vurdere gyldigheten til valgt fremgangsmåte. Strategisk kompetanse vil også spille en sentral rolle om valgt fremgangsmåte ikke holder mål, i og med at elevene da blir nødt til å revurdere, og skaffe seg en oversikt over alternative fremgangsmåter (Kilpatrick et al. 2001).

2.1.3 Strategifleksibilitet

Matematisk kompetanse involverer hele fem delkompetanser, og kompetanse knyttet til algebra inneholder også mer enn én kompetanse. Det involverer en integrasjon av ferdigheter, forståelse som gir rom for fleksible, adaptive og passende bruk av algoritmer (Star & Newton 2009).

Star & Seifert (2006) har gjort en undersøkelse som gikk på fleksibilitet i algebraiske prosedyrer med elever i grunnskolen. Elevene som fylte opp de to punktene nedenfor, hadde en strategifleksibilitet ved oppgaveløsning i algebra.

1. En elev som har kunnskap til flere løsningsmetoder.
2. En elev som har kapasitet til å finne nyskapende prosedyrer (Star & Seifert 2006).

Eleven har altså en fleksibel ekspertise og en større rekkevidde av problemløsningsstrategier å velge ut i fra. I motsetning til eleven uten denne fleksibiliteten, som har et minimalt sett av prosedyrer å velge ut i fra. Studien viste en signifikant fordel ved å la elevene jobbe med å bruke egne symbolske metoder når de jobbet med å løse ligninger, der de forsøker å modifisere og avgrense metodene sine (Star & Seifert 2006). Ved å løse ligninger på denne måten vil elevene oppnå større prosedyrekunnskap- og fleksibilitet, samtidig som deres begrepsforståelse og relasjonsforståelse øker, sammenlignet med å se på hver metode separat.

2.2 Matematikksamtale

De fleste har sikkert opplevd å stå fast med en matematikkoppgave, og har i den forbindelse spurt om hjelp fra en medelev eller lærer for å komme seg videre. Idet øyeblikket en har lagt fram sin oppfatning av problemet, hørtes det ikke like logisk ut likevel, og et nytt forslag til hvordan oppgaven kunne løses dukket umiddelbart opp i hodet. Så før et svar på problemet fra motparten var rukket å komme på banen, var løsningen allerede falt på plass. Ved å diskutere matematikk med andre, oppleves det en felles gode for begge parter, der egne ideer blir offentliggjort, andre sine ideer blir lyttet til, og sist med ikke minst vurderes ideenes holdbarhet gjennom refleksjon. Denne refleksjonen er med på å utvikle elevenes resonnementsforståelse. I en slik gruppediskusjon kan man oppleve som beskrevet ovenfor at en ide ikke er holdbar, eller motsatt, at tankegangen gir mening for alle på gruppa. I det en elevs matematiske argumenter beveger seg fra underbevisstheten og ut i allmennheten, skapes det en læringssituasjon (Weber 2008). Slike læringssituasjoner er ønskelig å få til i matematikkundervisningen, fordi det vil fremme elevenes kommunikasjonskompetanse i matematikk. Samtidig får de styrket og trent opp sin egen resonnementsforståelse når de blir tvunget til å forklare og sette ord på egne matematiske tanker (Weber 2008). Men et problem elevene kan støte på her er rett og slett «hvordan skal man diskutere?». Det er ikke selvsagt at det er noe enhver elev kan fra før, eller tilegner seg med en gang. Det kan derfor være en fordel å gi elevene en innføring i hvordan en diskusjon i matematikk bør foregå, og sammen lage noen grunnregler. En samtale defineres av Gjørup (2006) som et møte mellom to eller flere personer hvor det utveksles informasjon og meninger dem i mellom. En grunnregel kan være at når du kommer med en påstand, må den alltid begrunnes og forklares til de andre på gruppa, eller at gruppa har en leder, gjerne læreren, som kan lede gruppemedlemmene på riktig spor hvis samtalen sklir ut i en digresjon. Ved å trene på matematikksamtaler, og å snakke matematikk, vil elevene utvikle sin resonnementsforståelse, som igjen vil føre til at elevene kan snakke matematikk på en helt ny måte, og dermed fremme utviklingen av sin relasjonsforståelse (Mercer 2006). Men det er sentralt at denne utviklingen starter med utgangspunkt i hver enkelt elevs matematiske språk og erfaringer, for å kunne bygge opp elevens relasjonsforståelse. Dette matematikkspråket vil hjelpe elevene til å finne meninger med matematiske symboler (Brekke et al. 2000). Når elever jobber sammen i en gruppe, har de en felles målsetting som er til fordel til alle på gruppa. De jobber for å forstå innholdet og løsningen på oppgavene de har fått for å nå målsettingen, men de vil kun bli fullverdig oppnådd hvis alle på gruppa når målene de har satt seg. Elevene føler seg samstemte med de andre på gruppa, de vil vise glede på egne, og de andre gruppemedlemmenes vegne ved gode resultater. Det blir altså en positiv gjensidig avhengighet mellom elevenes målsettinger (Johnson et al. 2006). Med et slikt samarbeid vil alle gruppemedlemmene gi og ta like mye, de blir altså tvunget til å offentliggjøre sine argumenter når de skal forklare gruppemedlemmene sin tankegang om begrepet proporsjonalitet. Sfard (2003) skriver om en undersøkelse hun har gjort der hun har fokusert på tenking som kommunikasjon. Elevene kan lære seg ny kunnskap gjennom for eksempel kommunikasjon, på elevenes egne prinsipper, og holdninger for å nå målet. Hun skriver om den nære sammenhengen mellom tankene i hodet og det man sier høyt. Det skal ikke være et stort gap mellom disse to, fordi når vi tenker argumenterer vi for oss selv. Vi venter på vår egen respons, vi stiller oss spørsmål, og ved å holde disse to tett sammen vil kommunikasjonen mellom elevene utbedres ved at elevene starter med å forklare for hverandre helt på starten av sin egen tankegang. Det vil bli lettere å se en sammenheng, og de andre elevene skjønner lettere fremgangsmåten og sammenhengen til problemet. De starter med den kunnskapen de har fra før, og opparbeider seg ny kunnskap ut i fra denne. Det blir et konstruktivistisk læringssyn, der elevene illustrerer bilder for hverandre gjennom kommunikasjon, og disse bildene hjelper til med utviklingen av deres begrepsforståelse (Fuglestad 2003).

2.2.1 Språk i matematikk

Som så mange andre ting i livet bygger også matematikken på tidligere erfaringer. Innlæring av nytt pensum i matematikk skjer ved hjelp av språket og ved bruk av matematiske begreper. Elevene må kunne bruke språket for å lære og forså matematikk (Lunde 2004). Hverdagslivets situasjoner og språkbruk henger nært i hop med det matematiske språket. Det kan oppstå misforståelser fordi uttrykk har forskjellig betydning i hverdagen enn i matematikken.

Hverdagslivets språk ←→ Matematisk språk

Den russiske psykologen Lev Vygotsky (1896-1934) mente språket hadde to funksjoner:

1. ordens språk: et språk som er kjent for elevene.
2. ordens språk: et språk som er fremmed for elevene.

Når elevene blir introdusert for nye begreper som for eksempel begrepet proporsjonalitet i funksjonslæren, er det ikke alltid de klarer å skape assosiasjoner til de nye begrepene. Da trenger det nye språket en oversettelse fra språk av 2. orden til et språk av 1. orden, for at elevene skal forstå den nye kunnskapen de blir introdusert for. Da brukes språk av 1. orden som et oversettelsesledd. Elevene har over tid utviklet sitt 1. ordens språk, ved å bygge opp begreper, og ved å se at kunnskap i en sammenheng også kan benyttes i en annen situasjon. Når elevene klarer å uttrykke seg naturlig uten behov for en oversettelse mellom de to språkene, da har elevene klart å utvikle et forhold til de nye begrepene, og et språk av 2. orden. Det er ikke lenger noe problem å assosiere de nye begrepene (Selvik et al. 2007). I

Selvik et. al (2007) blir en diskusjon blant en gruppe lærerstudenter tatt opp. De diskuterer hvordan deres valg av språk kan være med å påvirke hvordan elevene assosierer, knytter og utvikler kunnskap om proporsjonalitet. Proporsjonalitet som begrep ble gjennomgått for elevene med bruk av matematiske uttrykk, og beskrevet ved hjelp av den lineære funksjonen. Proporsjonalitet blir beskrevet tydelig, da lærerstudentene har vært opptatt av å formulere ordene riktig. Hele presentasjonen er logisk og fin, men når elevene etter gjennomgangen blir spurt om å gi et eksempel på hva proporsjonalitet er, og om de noen gang bruker ordet proporsjonalitet ble det helt stille blant elevene. Lærerstudentene fortalte så at de hadde gjort dette med et formål om å vise elevene hvor fort gjort det er å skape en avstand mellom de to ulike språkformene, og hvordan det lett kunne bli et stort gap mellom det nye begrepet proporsjonalitet, og betydningsfulle assosiasjoner. Elevene ble så bedt om å forklare i hvilke hverdagslige sammenhenger de brukte ordet proporsjonalitet. Da kom det opp flere eksempler, blant annet; «*når det mørkner i kveldingen mørkner det proporsjonalt med tiden!*» (Selvik et al. 2007s.112). Etter å ha presentert ulike situasjoner proporsjonalitet dukker opp i hverdagslivet, fant elevene fram grafene igjen.

Kapittel 3 – Forskningsmetode

Jeg ønsket å se om diskusjon om begrepet proporsjonalitet kunne utfordre eller berike elevenes forståelse om temaet proporsjonalitet. For å besvare problemstillingen på best mulig måte, undersøkte jeg flere forskjellige forskningstilnærminger og metoder, før jeg endte opp med at en kvalitativ forskningsmetode ville være mest passende i henhold til problemstillingen. En kvantitativ undersøkelse ville krevd mye dypere bakgrunnskunnskap og erfaring for å kunne utvikle spørsmål til et spørreskjema. En kvalitativ metode kan gi mulighet for å studere komplekse fenomener og omgivelsene rundt fenomenet (Baxter & Jack 2008). Det gav meg mulighet til å se på både hver enkelt elev, samtidig som jeg fikk mulighet til å studere hvordan elevene diskuterte og argumenterte seg i mellom på gruppa. Jeg valgte å observere elevene ved hjelp av videokamera, først og fremst med tanke på at det gav meg mulighet til å gå tilbake til en bestemt situasjon og fylle inn detaljer som ikke er så lett å fange opp ved kun å observere og notere der og da. Ved å gå tilbake og dobbeltsjekke egne notater med videoopptakene vil man kunne unngå mistolkninger, og dermed styrke forskningens troverdighet (Mertens 2005). I tillegg var det praktisk for meg å gjennomføre, siden jeg kunne se igjennom opptakene flere ganger med ulikt fokus, og fange opp detaljer som ellers ville vært vanskelig å fått med kun ved hjelp av notater. Jeg fikk også mulighet til å frigjøre meg fra å ta mye notater under selve forskningsprosessen, slik at jeg kunne fokusere på samspillet mellom elevene underveis, og se med egne øyne de spesielle øyeblikkene der et argument fra en medelev bidro til at en av de andre elevene på gruppa fikk utvidet sin forståelse til proporsjonalitet.

3.1 Bakgrunn for valg av elevenes arbeidsmetode

Da jeg selv gikk på videregående skole benyttet vi Excel hyppig i faget bedriftsøkonomi, noe jeg syntes fungerte bra, og i tillegg var det en spennende og ny arbeidsform. Mens i matematikktimene var det stort sett den grafiske kalkulatoren som var det mest avanserte hjelpemidlet vi brukte. Siden den gangen har den grafiske kalkulatoren fått mange nye konkurrenter, og de digitale verktøyene har også blitt inkludert i de grunnleggende ferdighetene:

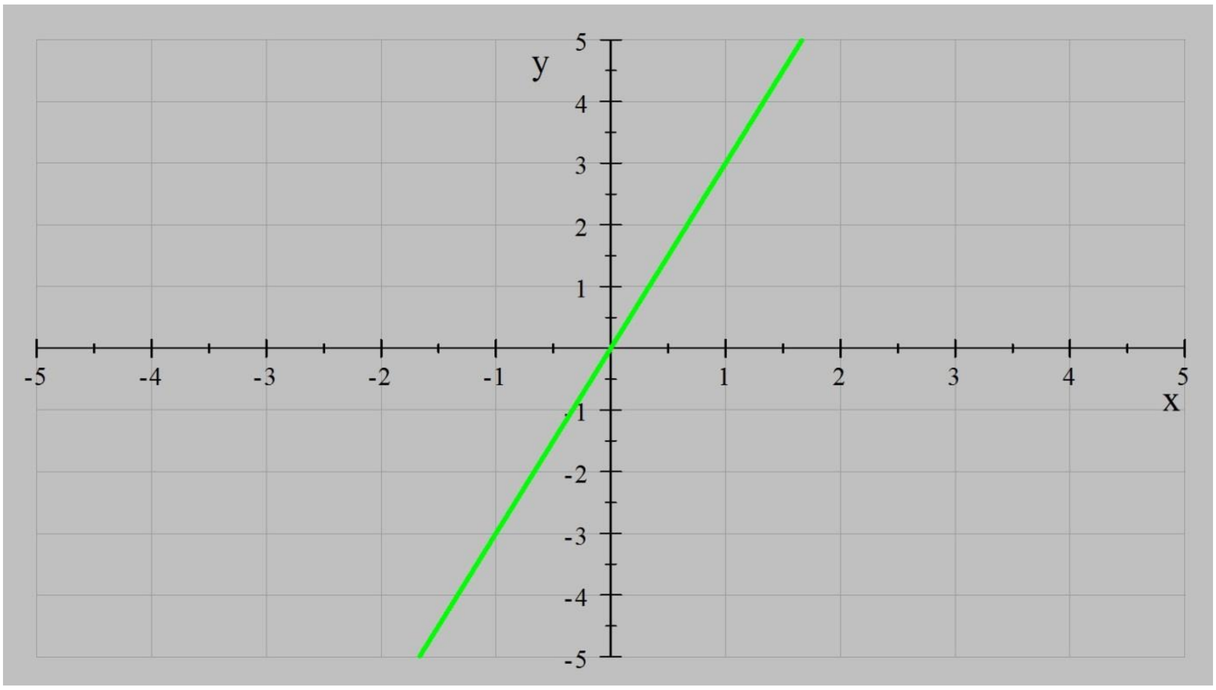
> *Å kunne bruke digitale verktøy i matematikk handlar om å bruke slike verktøy til spel, utforsking, visualisering og publisering. Det handlar òg om å kjenne til, bruke og vurdere digitale hjelpemiddel til problemløysing, simulering og modellering. I tillegg er det viktig å finne informasjon, analysere, behandle og presentere data med høvelege hjelpemiddel, og vere kritisk til kjelder, analysar og resultat.* (www.udir.no)

Elevene skal altså på lik linje med å kunne lese og regne matematikk, også kunne bruke digitale verktøy i matematikken. Det går blant annet ut på å bruke dataprogrammer som kan tegne en graf, i likhet med den grafiske kalkulatoren når vi plotter inn et uttrykk, f(x). De nye matematiske dataprogrammene gir oss mulighet til å dra i grafen, og endre dens posisjon, samtidig som det algebraiske uttrykket vi startet med automatisk endrer seg ettersom vi drar i grafen. Det hele er ganske snedig, og det er en helt ny matematisk hverdag i forhold til bare noen år tilbake. Dette gir studentene nye muligheter. De får i dette tilfellet mulighet til å fokusere på grafens utvikling, siden de enkelt kan plotte inn nye verdier, og hele tiden følge med på hvordan grafen endrer seg. Uten et slikt program ville elevene brukt mye tid på å regne ut de samme verdiene for hånd, og fokuset ville lett falt bort i fra forandringen av grafen. Det er selvsagt ikke slik at den ene metoden er bedre enn den andre, men det er nettopp dette som er interessant med bruk av digitale hjelpemidler i matematikkundervisningen. Jeg mener det er viktig å ha et positivt og åpent sinn til den nye utviklingen, og være villig til å bruke tid på å lære seg ny programvare, i stedet for å være redd for hvilke forandringer det kan føre med seg. Hvem vet, kanskje det nye, utrygge viser seg å være like bra som det gamle, trygge?

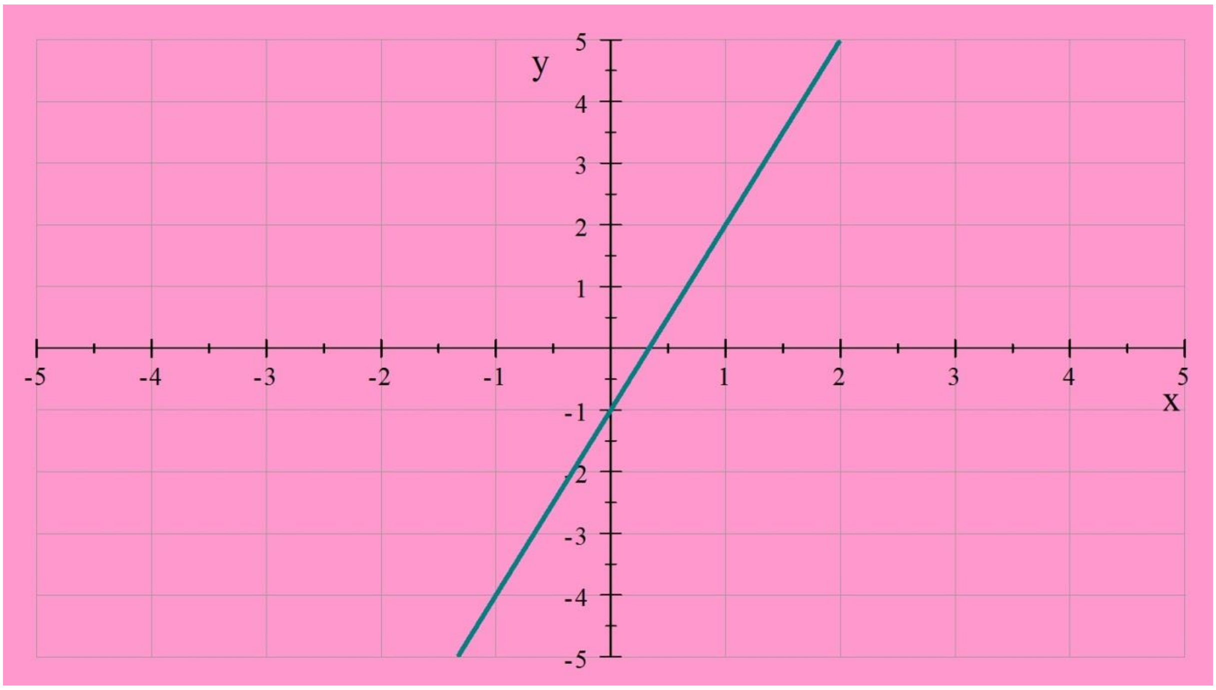
IKT er i fokus som aldri før, og det jobbes hardt for å integrere IKT i undervisningen for å fremme læring i Norske skoler. Generelt sett har mye blitt oppnådd, men hvis man trekker ut matematikkfaget spesielt, så kan man se en mindre grad av IKT integrering i undervisningen (Fuglestad 2007). Videre viser Fuglestad (2007) til en minimalistisk bruk av IKT rapportert i en undersøkelse (Alseth et al. 2003) av lærenes bruk av IKT i matematikkundervisning, samtidig viser den samme rapporten svakheter knyttet til læringsutbyttet. Fuglestads (2007) forklaring på norske elevers lave score i de internasjonale undersøkelsene TIMSS (Grønmo 2004) og PISA (Kjærnsli 2004) kan være relatert til lærernes manglende IKT-kunnskaper.

Lærernes usikkerhet kan henge i sammen med en teknologi som stadig er i utvikling, og en vag læreplan. For i Kunnskapsløftetets femte grunnleggende ferdighet for matematikkfaget, som nevnt ovenfor, står det at *«Å kunne bruke digitale verktøy i matematikk handlar om å bruke slike verktøy til spel, utforsking, visualisering og publisering».* En ferdighet som er noe upresis, dermed får lærerne det store ansvaret med å velge hvilke digitale verktøy, og fremgangsmåter som skal benyttes i undervisningen. Ved kunnskap om hvordan IKT kan utnyttes i matematikkundervisningen, kan teknologien være med på å gi undervisningen og læringen et løft (Fuglestad 2007). Forskning i et sosiokulturelt læringsfellesskap, fokuserer på læring som en prosess, der elevene er delaktige i en interaksjon. Et slikt læringsfellesskap der elevene jobber sammen, diskuterer og deler hverandres matematiske ideer, vil gjennom en kritisk testing av ideene utvikle forståelse og nye ideer (Wells 2001). Et annet prosjekt, LCM (Grevholm 2007) har også hatt læringsfelleskap i fokus. Dette prosjektet så på læringsfelleskap mellom lærere og didaktikere, samstundes med at de undersøkte elevers forståelse i matematikk. Studiens resultater viste at elevene fikk økt forståelse gjennom bruk av IKT i matematikkundervisningen. Det var ønskelig å finne en større økning av forståelse i studien, men det ble konkludert med at læring gjennom bruk av IKT i matematikkundervisningen har stort potensiale, og utfordringen var å klare å utnytte dette potensialet. *«Å studere funksjoner og grafer og deres grafiske framstilling har vært og er fortsatt en sentral aktivitet i å lære matematikk. Elevene må få utvikle en forståelse av sammenhengen mellom formel og graf. Med datamaskiner blir det lettere å tegne mange grafer og oppdage hvordan forandringer i funksjonsuttrykk påvirker grafen» (Fuglestad 2003s.227).* Det finnes mange programmer som kan tegne slike grafer, Scientific Notebook er et av dem. Et slikt program gir elevene en annen synsvinkel til å tegne grafer, siden grafen ikke lenger blir det endelige produktet. For når grafen først er tegnet opp, kan videre eksperimentering utføres (Fuglestad 2003). Hvis elevene for eksempel tegner opp grafen til uttrykkene $y = 3x$ og $y = 3x - 1$, vil de ut i fra grafene som kommer opp kanskje oppdage en ny side ved proporsjonalitetsbegrepet. De vil kunne se at grafen $y = 3x$ går gjennom origo, mens grafen $y = 3x - 1$ ikke gjør det. Det er da duket for diskusjon mellom elevene, der de kan bruke grafene til å forklare hverandre hvorfor den ene grafen er proporsjonal, og den andre ikke. Grafen blir ikke bare et sluttprodukt (Fuglestad 2003).

Proporsjonal graf tegnet i Scientific Notebook: $y = 3x$



Ikke-proporsjonal graf, tegnet i Scientific Notebook: $y = 3x - 1$



Ved å tegne opp ulike grafer som vist ovenfor i en dynamisk programvare kan elevene enkelt prøve seg fram, og utforske videre. De kan for eksempel endre parameterne på den ikke-proporsjonale grafen, og se om de klarer å få linja til å gå igjennom origo, slik at størrelsene x og y blir proporsjonale med hverandre. Slike problemstillinger kan elevene løse i grupper, for å trene på å argumentere, og samtale i matematikk. Elevene kan med programvaren teste ut forslagene etter hvert som de kommer opp, og de ser enkelt om linja går gjennom origo. Gjør den ikke det, blir misoppfatningene gjennomskuet, og diskutert på gruppa. De diskuterer sammen hva som ikke stemte med forslaget, før nye forslag kan foreslås. På den måten blir grafisk framstilling i et matematisk program en viktig del av elevenes ferd for å lete etter sammenhenger (Fuglestad 2003).

I denne studien er hovedfokuset på forståelse av begrepet proporsjonalitet ved gruppesamtale, og jeg ønsket at elevene skulle jobbe sammen for å levere en digital besvarelse, slik at elevene kunne få utnyttet fordelene med å bruke et dynamisk matematikkprogram når de arbeidet med proporsjonalitet. I henhold til tidsbegrensningen på oppgaven min var det derfor ønskelig å forske på en klasse som allerede var kjent med å bruke dynamisk programvare og dens syntaks fra før av, siden det trengs kunnskap og forståelse for programvaren. Elevene i studien er førsteklassinger på en videregående skole, som fra ungdomsskolen kun hadde hatt et par undervisningsøkter der de brukte Excel, og ellers var ukjente til bruk av dynamisk programvare. Nå brukte de kun datamaskinen og lærebok i matematikkundervisningen. De brukte programmet Scientific Notebook som kladdebok, der de enkelt kunne skrive inn tekst, og matematiske symboler. Programvaren har kalkulatoren innebygd og elevene kan løse ligninger og tegne grafer der. De brukte i tillegg flere ulike programmer i matematikkundervisningen, og for å få samlet alt materialet på samme sted, altså i Scientific Notebook brukte de utklippsverktøyet på datamaskinen og limte det inn i «kladdeboken».

3.2 Utvalg

Med denne kvalitative undersøkelsen ønsket jeg å bli bedre kjent med elevene, se hvordan de arbeidet sammen med oppgavene om proporsjonalitet ved hjelp av dynamiske programmer. Se hvordan de i samarbeid kom fram til riktig løsning. Se hvordan en elevs løsningsidé utviklet seg fra å være nettopp bare en idé, til å diskuteres med de andre på gruppa, og tilslutt å bli forsvart. Det var ønskelig å gjennomføre studien på en liten gruppe elever, for skaffe denne informasjonen. Det kunne selvsagt vært mer representativt å gjennomføre studien på et større antall elever, men i henhold til omfanget på oppgaven var det ønskelig å begrense dette, og heller gå mer i dybden på et fåtall elever. Undersøkelsen foregikk i to steg, der det første var å gjennomføre undersøkelsen på tre relativt tilfeldige elever, for å avdekke eventuelle svakheter med opplegget, før undersøkelsen ble gjort om igjen med fire elever som til sammen oppfylte kravene for utvalget.

Undersøkelsen ble meldt til NSD, Personvernombudet for forskning, da UMB har NSD som sitt personvernombud. Alle forskere og studenter er meldepliktig til å rapportere sine forsknings- eller kvalitetssikringsprosjekter til NSD hvis de utløser meldeplikt etter personopplysningsloven (samle inn/registrere/lagre personopplysninger ved bruk av datamaskin, innhold av sensitive opplysninger, behandle/lagre videoopptak/bilder ved bruk av datamaskin, behandle/lagre lydfiler ved bruk av datamaskin) (Norsk Samfunnsvitenskapelig Datatjeneste AS, www.nsd.uib.no/personvern/). **Vedlegg 1** viser NSD sin godkjenning av forskningsprosjektet, og **vedlegg 2** viser utdelt informasjonsskriv som ble gitt til elevene for godkjennelse.

Da jeg skulle velge ut en gruppe elever ønsket jeg å studere elever fra videregående skole, siden studien går ut på at elevene skal arbeide med oppgaver om proporsjonalitet, som blant annen inneholder arbeid med funksjoner, noe de elevene på videregående skole har større erfaring med, enn for eksempel elevene på en ungdomsskole. Jeg ønsket også at elevene skulle ha kjennskap til bruk av dynamiske programmer, siden jeg ville at elevene skulle levere en digital besvarelse av oppgavene i studien. Derfor valgte jeg ut en klasse som benyttet seg av slike dynamiske programmer i den ordinære matematikkundervisningen. Jeg endte opp med å velge ut en yrkesfaglig klasse på videregående skole. Fra før av hadde jeg allerede et godt kjennskap til skolen, så da jeg kontaktet skolen og faglærer i utvalgsklassen fikk jeg klarsignal til å forske. Klassen som består av 14 elever på medier og kommunikasjonslinjen, som har 1P matematikk, der all matematikkundervisning foregår ved bruk av PC. Alle utregninger gjennomfører elevene ved bruk av bruk av flere ulike matematisk dynamiske programmer, med hovedvekt på Scientific Notebook.

Når jeg skulle sette i sammen forskningsgruppen min tok jeg utgangspunkt i en heterogen gruppe, der elevene lå på forskjellige skalaer karaktermessig, men uten for stort gap. For stort gap mellom elevene vil kunne føre til at både den sterke og svake eleven føler at hele samarbeidet er unyttig, det kan bli lite samarbeid, og mest frustrasjon fra begge parter. Derfor valgte jeg å plukke ut elever som befant seg på ulike nivåer, men i samme ende av karakterskalaen for å få frem engasjement, og unngå en anstrengt tone. Elever har lettere for å diskutere og forklare sine ideer for hverandre når nivåene er ulike. Svake elever lærer mye av de sterke elevene, samtidig som de sterke elevene lærer mye av å måtte forklare til andre hvordan de tenker når de må sette ord på ideene sine. Alt dette er med på å heve forståelsen til elevene (Johnson et al. 2006). I tillegg til dette ønsket jeg representanter fra begge kjønn på gruppa. Forsøket mitt foregikk i to omganger, der første runde skulle være en test for å se om jeg trengte å gjøre noen justeringer til hovedundersøkelsen. Før testrunden startet hadde jeg og faglærer allerede bestemt hvilke elever som skulle delta i hovedundersøkelsen, ut i fra nevnte kriterier. På samme måte plukket jeg ut tre elever til å delta i første runde, men jeg unngikk å få overlapp av elevene, slik at det samme opplegget kunne benyttes begge gangene. Det jeg endte opp med var å velge en gruppe elever som lå rundt midten av karakterskalaen i første runde, og en gruppe elever i øvre sjikt av karakterskalaen i andre runde, for å unngå at noen av de samme elevene skulle delta på begge forsøkene. På begge forsøkene var det en elev som viste god forståelse av samtlige oppgaver, som tok ansvar med å forklare de andre elevene på gruppa sine matematiske ideer der de selv sto fast. Eleven som forklarte fikk utfordringen med å uttrykke seg matematisk slik at de andre skulle forstå, samtidig som de andre elevene fikk utfordret sin forståelse ved å sette de matematiske uttrykkene fra medelevene i en sammenheng med kjent kunnskap. Samtalen mellom elevene fungerte godt mellom elevene på begge gruppene selv om de befant seg på ulikt nivå av forståelse av proporsjonalitetsbegrepet, siden de ikke lå alt for langt unna hverandre karaktermessig. Jeg valgte å sette sammen en gruppe på fire elever i hovedundersøkelsen, da gruppestørrelser mellom to og seks deltagere er mest egnet for samarbeid (Johnson et al. 2006). Det gav også en viss bredde i elevenes kunnskaper om proporsjonalitetsbegrepet, noe som la et godt grunnlag for at de kunne utfordre hverandres forståelse av begrepet. Fire elever var også passe mange med tanke på at ingen av elevene ville forsvinne i mengden, og bare flyte med på gruppa uten å bidra noe selv. Alle elevene fikk anledning til å delta i samtalen, og dele sine matematiske ideer. Det kunne fort blitt kaos med fler enn fire elever, siden de jobbet rundt én PC, én felles besvarelse som skulle leveres. Fler enn fire elever ville også gitt større utfordringer i sosiale ferdigheter, der elevene må lære seg å fungere sammen, vise lederskap, og kommunisere med de andre elevene uten å støte hverandre, og selv bli forstått (Imsen

2009). Det ville kreve mer av hver enkelt elev å åpne seg i en større gruppe. Da ville det vært en fordel å ha praktisert gruppesamarbeid i en større gruppe før selve forsøket (Johnson et al. 2006). Noe elevene i forsøksklassen ikke hadde øvet på fra før. Jeg valgte ikke å bruke tid på dette, selv om det antageligvis hadde vært det mest optimale å gjøre. Det var hovedsakelig tidsmessige årsaker til at jeg ikke praktiserte noen øving på dette før. Det jeg ser på som positivt med ikke å ha sagt noe spesielt om dette til elevene på forhånd, er at situasjonen ble naturlig for dem. De kunne fokusere på oppgavene de skulle løse, i motsetning til hvordan de skulle føre en matematisk samtale med hverandre. De fire elevene som ble valgt ut var ulike i sin muntlige aktivitet i timene, og kunne alle gi hverandre utfordringer.

3.3 Observasjon

Mitt valg for hvordan jeg skulle samle inn data til forskningen falt på videoobservasjon. Hovedsakelig fordi det åpnet muligheten for å se opptakene flere ganger, med ulikt fokus, og på den måten danne et læringsbilde av hvordan gruppa diskuterte når de arbeidet med oppgaver om proporsjonalitet. Ved observasjon uten kamera, vil det kun være egne notater og hukommelse å gå på, noe som kan fungere godt i enkelte sammenhenger. Det er ikke alltid like lett å få med seg alt som skjer, heller ikke å ha det rette fokuset når en hendelse oppstår. Ved bruk av videokamera kan man ta for seg én spesifikk hendelse om gangen, og oppdage detaljene ved den. Dermed er det en forenklet prosess å presentere konkrete eksempler fra gruppa (Hiebert et al. 2003). Disse detaljene er ikke alltid like lett å få med seg uten bruk av kamera. Sagt på en annen måte åpner videoobservasjon opp for en ny måte å samle inn data på, dele, studere, presentere, og fange opp detaljer som er med å støtte opp under undervisningen, læringen, og intensive studier av dette (Derry et al. 2010).

3.3.1 Teoretisk utgangspunkt

På området rundt diskusjon i matematikk, er videoobservasjon av elever noe som stadig går igjen. Ta for eksempel Maher (2005) sin forskning på hvordan studentene tenker om matematiske ideer når de jobber sammen om å løse oppgaver. Der blir elevene observert når de jobber sammen om å bygge matematiske ideer, og måter å forklare dem på ved hjelp av en fokusgruppe med studenter. *«Thinking and reasoning are documented by the actions of the participants, that is, what they do say, and write. An extensive videotape database enables us to study the complexity of the group's learning" (Maher 2005s.4).*

Selv om videoobservasjon gir muligheter som næranalyse, detaljerte beskrivelser og mulighet for å analysere ikke-verbale situasjoner, kan det også være noen negative sider med bruk av videoobservasjon som er verdt å merke seg. Redusert lydkvalitet, to-dimensjonal romopplevelse når en ser opptaktene på video, i motsetning til tre-dimensjonal ved å være til stede å observere. Synsfeltet blir redusert, og det kan være eventuelt andre bevegelser og effekter i rommet som kan ha vært med å påvirke elevene, som ikke har blitt fanget opp på videoen (Alrø & Kristiansen 1997). Ellers kan den faktoren at det er et kamera til stede være med å påvirke situasjonen. Elevene i som var med på mine undersøkelser gikk som sagt på medier- og kommunikasjonslinja, og de var ganske drevene med bruk av kamera fra andre undervisningsfag. Det tror jeg kan ha vært en fordel med tanke på bekvemheten deres med et kamera som filmet hele forskningssekvensen. Selv la jeg ikke merke til noen merkbar forskjell på elevene da jeg observerte de i klasserommet uten kamera, og når de jobbet i en liten gruppe med kamera til stede. Elevene hadde på forhånd fått beskjed om hvordan forskningen skulle foregå, og de hadde samtykket til å delta på videoobservasjonene. Elevene jobbet godt i sammen underveis, og virket upåvirket av kameraet. Det ble hverken nevnt før, under, eller etter økta fra deres side. Min rolle under filmingen var hovedsakelig observatør, uten at jeg avbrøt eller veiledet dem underveis, med noen unntak. Når elevene satt fast og lurte på noe, tok de selv initiativ til å spørre om hjelp. Da gav jeg dem noen hint til å komme videre med oppgavene. Ellers brøt jeg selv inn noen få ganger underveis det jeg så det som hensiktsmessig å få en eller flere av elevene til å forklare de andre på gruppa hvordan de kom fram til løsningen.

3.3.2 Gjennomføring

Rett etter jeg hadde kontaktet skolen jeg skulle forske på, dro jeg opp dit for å danne meg et bilde av hvordan læringsmiljøet var i klassen. Timen gikk som vanlig i deres eget klasserom, eneste forskjellen var at jeg fikk være flue på veggen hele dobbelttimen. Jeg fikk observert hvordan elevene jobbet sammen, og hvordan en matematikktime fungerte når elevene regnet oppgaver kun ved hjelp av matematiske programvarer. Elevene lærte om proporsjonalitet denne timen, så jeg fikk mange ideer til videre forsking i klassen. Videre observasjon var de to forskningsrundene, med en testundersøkelse og en hovedundersøkelse. Det gikk for seg med at jeg startet økten med å gjennomgå/repetere sentral teori og et eksempel om proporsjonalitet, og litt om formlikhet siden den ene oppgaven tok utgangspunkt i to formlike trekanter. Etter denne gjennomgangen fikk elevene utdelt et ark med oppgaver som var hentet fra/inspirert av Gyldendal undervisning (SIGMA medier og kommunikasjon/ SIGMA 1P). Elevene hadde ikke fått noen instrukser av meg om hvordan de skulle oppføre seg, samarbeide eller løse oppgavene under forsøket. Det eneste de fikk beskjed om var at de skulle arbeide sammen om å løse de utdelte oppgavene, som om det var en normal arbeidsøkt. Jeg ikke ønsket å innføre elevene mer grundig om hvordan de skulle diskutere, eller å utarbeide diskusjonsregler med elevene i forkant av oppgavene. Jeg ville at elevene skulle ha så naturlig forhold til situasjonen som mulig, for å se hvordan de samtalte i sine naturlige omgivelser. På den måten unngikk jeg at elevene fokuserte på å passe best mulig inn i en rolle jeg hadde snakket om på forhånd. Jeg ville at de skulle være seg selv, og ikke tilpasse seg innenfor bestemte roller.

Tabell 2: Oppgave 1 slik den ble gitt til elevene.

OPPGAVE 1:

a.) Ida er 1.60m høy. En solskinnsdag står hun ved siden av Eiffeltårnet i Paris og kaster en skygge på 0.80m. Hun skritter opp skyggen som tårnet kaster, og finner at den er ca. 150m. Hvor høyt er Eiffeltårnet?

b.) Sett verdiene inn i en tabell.

c.) Lag en graf av verdiene, og vis formel.

d.) Sjekk om grafen er proporsjonal, og i så fall hvorfor.

Oppgave 1 er opprinnelig to oppgaver, som er satt i sammen. Grunnen til at jeg blandet inn noe om formlikhet i det hele tatt var av to grunner: 1 – elevene hadde på stadiet hvor undersøkelsen ble gjennomført, nylig hatt undervisning om formlikhet, og jeg valgte å ta med litt om dette i første oppgave, siden det satt friskt i minnet, og at det da ville være enklere å komme i gang både med oppgavene, og samtalen seg i mellom. 2 – for å se hvordan elevene argumenterte seg i mellom, når de måtte overføre resultatene fra første del av oppgaven for å komme inn på neste del, om proporsjonalitet.

Oppgave 1 har ingen illustrasjoner med, fordi jeg ønsket å se hvordan elevene selv tegnet opp trekantene, hvis de valgte å tegne, og for å se hvordan de forklarte og argumenterte for hverandre. Videre har oppgaven en stor utfordring, som ingen av gruppene oppdaget, selv om de prøvde seg fram med begge variantene for å få tegnet opp grafen. Det ikke er oppgitt hvilke verdier som er ønskelig at de benytter som x, og y – verdier underveis, dermed har oppgaven to løsninger. Den kan løses med tanke på at y = høyde, og x = skygge, eller motsatt; x = høyde, og y = skygge.

Tabell 3: Oppgave 4 slik den ble gitt til elevene.

<u>OPPGAVE 4:</u>
En bil bruker 0.80l bensin per mil på langkjøring. Bensin koster kr. 11 per liter.
a.) Forklar at bensinkostnaden ved å kjøre x mil er y=8.8x
b.) Tegn grafen til y for x- verdier mellom 0 og 100 mil.
c.) Finn grafisk hvor mye det koster å kjøre 50 mil.
d.) Hvor langt kan vi kjøre for kr. 200?

Oppgave 4 er tatt med for å få frem samtale mellom elevene. De blir spurt om å forklare, og de blir derfor tvunget til å argumentere for hverandre hva de tenker. Videre er det spørsmål som går på nøkkelbegrepene som omhandler proporsjonalitet, og forståelse for proporsjonalitet.

Alle de fire gruppemedlemmene jobbet sammen om å levere én digital besvarelse, men de fikk alle utdelt hvert sitt ark med de aktuelle oppgavene på. Dette skjedde på et eget klasserom, som elevene bruker i andre undervisningsfag. Jeg valgte å trekke elevene ut fra resten av klassen siden jeg skulle ha en kort undervisningssekvens først, og for å unngå unødvendig støy i bakgrunnen fra de andre elevene i klassen. I utgangspunktet tror jeg ikke det ville blitt store forskjeller resultatene hvis jeg hadde gjennomført studien i samme klasserom som de andre elevene, men siden både jeg og faglærer skulle gjennomgå teori parallelt, var det nødvendig å benytte et annet klasserom. Det gav også fordeler for filmingen, siden lydkvaliteten ikke ble påvirket av bakgrunnsstøy. Den korte undervisningssekvensen jeg hadde med elevene før de startet på oppgavene ble gjennomført før filmingen, og observasjonen av elevene startet. Det gjorde jeg fordi det gav elevene en mulighet til å bli tryggere på meg som forsker/lærer, og seg selv i forhold til å få friskt opp temaet de skulle jobbe med resten av timen. Mitt inntrykk av elevene under denne gjennomføringen var at noen av elevene i utgangspunktet ikke husket hva som lå i ordet proporsjonalitet, men med en gang jeg startet å gjennomgå, kom det fort tilbake. «*Å, var det det som var proporsjonalitet igjen…*» hørte jeg en av elevene si til sidemannen da jeg så vidt hadde startet gjennomgangen i testrunden. Det er ikke alltid så lett å få med seg alle navn på ulike begrep, setninger, og formler. Det er stort sett nye delkapittel med nye ord og uttrykk som gjennomgås hver eneste matematikktime. Samarbeidet mellom elevene da de jobbet sammen om oppgavene gjorde det mulig å både se og høre hvor langt de var kommet i prosessen forståelse av proporsjonalitet.

Som forsker valgte jeg å være delvis observatør, det vil si at jeg bare observerte de aktivitetene som var relevante i forhold til undersøkelsen min, og ikke i de øvrige matematikktimene. Hvis jeg skulle vært totalt deltagende observatør måtte jeg ha oppholdt meg over lengre tid sammen med klassen i deres miljø (Kristiansen & Krogstrup 1999). Jeg valgte dermed å bli en del av elevenes fellesskap, noe som gjorde meg til et fremmedelement. Det er ikke lett å si hvor mye det kan ha vært med og påvirket situasjonen. Skulle man observert elevene uten noen form for innvirkning ville en skjult observasjonsform vært det beste. Jeg valgte derimot en mer åpen observasjonsform, da jeg fikk fordeler med større frihet, muligheten til å bli bedre kjent med elevene, og stille spørsmål underveis (Holme & Solvang 1996). Når elevene arbeidet sammen om å løse proporsjonalitetsoppgavene brukte jeg et kamera, som jeg stort sett hadde i én fast posisjon, med elevene i fokus. Elevene satt tett ved siden av hverandre på samme side av et langt bord, med PC'en strategisk plassert i midten. Jeg vekslet på å observere fra siden, og bak elevene, for å kunne se hva elevene noterte underveis.

3.3.3 Analyse av observasjon

Videre analyserte jeg elevenes argumentasjoner om proporsjonalitet, og analysen av gruppesamtalene deres ved hjelp av Powell, Francisco & Mahers (2003) analytiske modell. Det er en modell som er blitt utviklet gjennom en longitudinal studie, med flere mål. De ønsket blant annet å studere utviklingen av elevenes matematiske ideer, deres begrunnelser, argumenter og bevisbygging av matematiske ideer. Elevene i studien jobbet sammen i fokusgrupper, mens de ble videoobservert, og modellen er gjeldene for videodata av elever som samtaler og argumenterer sammen om matematiske ideer (Powell et al. 2003). Det passet godt i henhold til min problemstilling, i og med at jeg studerte en gruppe elever ved bruk av videoobservasjon, der elevene skulle arbeide om å løse et oppgavesett. Elevene måtte samtale og argumentere seg i mellom underveis. Min gruppe elever var ingen fokusgruppe (en fokusgruppe består vanligvis av 6-12 deltagere (Johannessen et al. 2004)), men prinsippet for hvordan elevene ble observert og fokuset på argumentasjon i studien var tilnærmet lik, dermed valgte jeg å analysere videodataene etter denne modellen. Powell, Francisco & Mahers (2003) fremgangsmåte for å analysere et videoopptak består av følgende sju ikke-lineære faser:

1. Være oppmerksom når man ser igjennom videodataene
2. Beskrive videodataene
3. Identifisere de kritiske sekvensene
4. Transkribere
5. Kode
6. Konstruere et hendelsesforløp
7. Komponere hendelsesforløpet

Jeg så igjennom videoopptakene flere ganger med ulikt fokus. Første runde så jeg igjennom opptakene, laget en grov skisse av handlingene, og gjorde meg kjent med dataene, før jeg så igjennom opptakene igjen. Denne gangen med fokus på en og en elev, der jeg laget meg en oversikt over elevens oppfatninger rundt proporsjonalitetsbegrepet. Jeg noterte ned hvor i videosekvensen de ulike hendelsene skjedde, slik at det var enkelt å gå tilbake for å transkribere den nøyaktige situasjonen, altså en koding av dataene. I tillegg til å skrive ned muntlig aktivitet, var det noen steder der de ikke-verbale hendelser var vel så sentrale. De opplysende øyeblikkene hvor det er tydelig at en elev har en aha-opplevelse, og kom et steg videre i sin forståelse av begrepet proporsjonalitet. Disse bevegelsene eller *åååja!* lydene er vanskelig å transkribere etter en standard metode, og vil derfor være avhengig av forskeren som transkriberer (Alrø & Kristiansen 1997). Disse observasjonene vil derfor være subjektive. Det var mye videomateriale å gå igjennom, dermed var det en utfordring å klare å fokusere på det som var sentralt gjennom hele opptaket. Det viktigste for min egen del var å ha skrevet ned problemstillingen, og ha den ved siden av meg på skrivebordet hele tiden under arbeidet med selve masteroppgaven, og under transkriberingen av videoopptakene. Dette hjalp til å unngå for store digresjoner, selv om det var ting som dukket opp underveis som var vel så interessante, så var det viktig å holde fokuset på problemstillingen. Etter å ha gått igjennom disse sju punktene, satte jeg meg nærmere inn i argumentene som kom fram under analysen. Som beskrevet i **avsnitt 2.3** skriver Weber (2008) om hvordan matematisk diskusjon der elevenes ideer blir offentliggjort, lyttet til og vurdert gjennom refleksjon kan være med på å styrke elevenes resonnementsforståelse ved at de blir tvunget til å forklare, og på den måten trener opp sin egen kommunikasjonskompetanse i matematikk. Når han analyserte elevenes argumenter og medfølgende begrunnelser tok han utgangspunkt i Toulmins modell for analysering av argumenter. Den består av seks punkter som beskriver de ulike komponentene en argumentasjon kan bestå av:

1. En elevens påstand.
2. Elevens faktaopplysninger som støtter påstanden.
3. Elevens begrunnelse, og forklaring som setter påstanden og faktaopplysningene i sammenheng.
4. Mine underliggende antagelser for begrunnelsen/allmenne forutsetninger jeg mener eleven hadde for sitt argument.
5. Dersom eleven forsvarer sitt argument, ser jeg på om det er påstanden, fakta, eller begrunnelsen som forsvares, og om den har noen begrensninger.
6. Dersom elevens argument blir utfordret, ser jeg på hvilket grunnlag eleven har for å utfordre videre, om påstanden holder (Weber 2008).

Det er de fire første punktene som utgjør som oftest hoveddelen av en argumentasjon, mens de to siste punktene går mer inn i en kompleks argumentasjon. I **kapittel 5** fokuserer jeg på elevenes forståelse i lys av argumentene. Om elevene utfordret sin begreps- eller resonnementsforståelse ved å offentliggjøre sine egne ideer og argumenter for de andre på gruppa, eller ved å høre de andre gruppemedlemmene argumenter og dele deres ideer. Jeg så på hva slags forståelse elevene hadde for proporsjonalitet, og om den endret seg i takt med argumentasjonen.

I **kapittel 4** blir resultatene fra videoobservasjonen presentert med transkripsjonsutdrag, med tilhørende analyse ut i fra Toulmins modell, og en kort beskrivelse. Jeg har også tatt med noen utdrag fra elevenes besvarelser, der det er hensiktsmessig. Transkripsjonsutdragene er tatt med for å presentere situasjonene nøyaktig slik de oppstod, for å gi gode grunnlag og bevis for den videre analysen av situasjonene. Elevene jobbet sammen om å løse et oppgavesett, der transkripsjonsutdragene er med å skape en helhet i situasjonene som oppstod. *«…it is possible to produce transcripts that are close approximations to being exact and genuine for particular research purposes”* (Powell et al. 2003s.422). Videre diskusjon og refleksjon om presentasjonene blir tatt opp i **kapittel 5**.

3.4 Studiens gyldighet og troverdighet

Med tanke på forskning vil en undersøkelses gyldighet gå ut på om tilhørende resultater er troverdige, og det er mulig å gjøre generaliseringer ut i fra dem. Når man snakker om dette er det to viktige begreper som hører til; reliabilitet og validitet. Reliabilitet; hvor pålitelige er resultatene? Validitet; har man undersøkt det man faktisk ønsket å undersøke? (Kvale et al. 2009).

Reliabilitet handler som sagt om hvor pålitelige dataene fra undersøkelsen er, hvordan de benyttes og hvordan de bearbeides. Ved kvantitativ forskning er det letter å teste reliabiliteten til en undersøkelse, enn ved kvalitativ forskning fordi reliabiliteten testes ofte ved å gjenta en bestemt undersøkelse på samme gruppe med et gitt tidsrom i mellom. Der resultatene er sammenfallende vil det være høy reliabilitet, noe det også vil være dersom flere forskere gjør den samme undersøkelsen, og oppnår samme de samme resultatene (Johannessen et al. 2004).

I min studie benyttet jeg meg av videoobservasjon, noe som er med på å styrke reliabiliteten (Ryen 2002). Ved kun observasjon og egne notater å gå på måtte jeg ha startet prosessen med å velge ut hva jeg ville ha med videre i oppgaven allerede før selve observasjonen av elevene, mens ved å benytte video som observasjonsmetode har jeg fått muligheten til å rekonstruere utdrag fra datamaterialet, og bearbeidet dette. Noe som er med på å styrke reliabiliteten, men påliteligheten og gyldigheten til mine valg er også et resultat av validiteten. Jeg ønsket å finne ut mer om problemstillingen: *«hvordan kan samtale i matematikk være med på å synliggjøre elevenes forståelse av begrepet proporsjonalitet?»*

Det handler altså om mine valg for metode, hvordan den ble planlagt, gjennomført og analysert. *«validitet i kvalitative undersøkelser dreier seg om i hvilken grad forskerens funn på en riktig måte reflekterer formålet med studien og representerer virkeligheten» (Johannessen et al. 2004s.228).* Videre står det at gjentatte observasjoner over lengre tid, samt metodetriangulering (bruk av flere forskningsmetoder for å samle inn data) er det som styrker validiteten mest. I min studie ble samme ble elevene først observert i klasseromsettingen når de hadde vanlig undervisning og tilhørende økt med oppgaveløsning. Senere ble to forskjellige grupper elever med på forskningen som ble observert ved hjelp av video, noe som er med å gi et bedre utgangspunkt. Ellers kan man si at generalisering og overførbarhet er to sentrale emner innenfor validitet. Men å gjøre en statistisk generalisering av hovedsakelig fire elever er neppe mulig, det var heller ikke hensikten med undersøkelsen. Det er ofte ikke generalisering som står høyst i fokus når det gjelder kvalitative studer. Ved å gjennomføre en kvalitativ studie, beskrive nøye valg og beslutninger som er tatt underveis kan det være mulig for andre forskere å vurdere om det finnes lignende situasjoner hvor resultatene mine kan overføres til (Ryen 2002). Videre er overensstemmelse et begrep innenfor validitet som går på at resultatene skal komme av de faktiske funnene, og ikke komme ut i fra forskerens holdninger. Det er derfor viktig at forskeren er kritisk til seg selv, og stiller seg spørsmål til hvordan ting har blitt gjennomført (Johannessen et al. 2004). Min rolle i denne studien føler jeg har vært nøytral forskermessig, med tanke på at elevene ikke hadde noe kjennskap til meg fra før. Elevene hadde dermed ingen oppfatning eller forventninger til hva jeg ønsket å finne, noe som kunne vært med og påvirket resultatene mine.

Kapittel 4 – Resultater

Som beskrevet ovenfor ble det først gjennomført en teststudie, før selve hovedundersøkelsen ble satt i gang. Elevene som var med i testrunden fikk utdelt fire oppgaver de skulle jobbe med, mens elevene i hovedundersøkelsen bare fikk utdelt to av disse oppgavene. Grunnen til at elevene i hovedundersøkelsen kun fikk utdelt to oppgaver var med grunnlag på resultatene fra testundersøkelsen. Det var oppgave 1 og oppgave 4 som elevene diskuterte mest seg i mellom, og det var her det var mest relevante resultater å hente. Jeg valgte derfor å fokusere på disse to oppgavene, og komme dypere inn i resultatene fra dem, enn å få et mer overfladisk resultatpreg fra alle fire oppgavene. Jeg har delt inn i ett avsnitt for hver av oppgavene, der videoobservasjonen fremlegges og analyseres med inspirasjon fra Toulmins modell, som ble presentert i **avsnitt 3.2.3**. I transkripsjonsutdragene som er tatt med, er det en kombinasjon av elevenes utsagn, tilhørende informativ tekst, og noen utdrag fra elevenes besvarelser. Dette er med på å danne et helhetlig bilde av situasjonene. I samtaleutdragene ser vi hvordan elevene samtaler, argumenterer og viser sin forståelse av proporsjonalitetsbegrepet. Elevene på gruppe 1 ligger på midten/litt over midten av karakterskalaen, mens elevene på gruppe 2 består av elever i øvre del av karaktersjiktet.

Joakim Erik Aina	Gruppe 1
Martin Celine Sindre Helen	Gruppe 2

Jeg valgte å gjennomføre forskningen uten å innføre elevene om hvordan de skulle diskutere og samarbeide om oppgavene. Det syntes jeg fungerte utmerket, siden jeg fikk fanget elevene i sine naturlige omgivelser. De virket upåvirket av kameraet, og mitt nærvær under seansen, kanskje mest fordi elevene gikk på medier- og kommunikasjonslinjen, der kamerabruk er en naturlig del av skolehverdagen, og siden jeg på forhånd hadde vært med i en vanlig matematikktime. På den måten ble jeg ufarliggjort for elevene, og de fikk dannet seg et bilde av meg, og om hvordan forskningen skulle gjennomføres en stund i forveien. Elevene samtalte som om jeg ikke skulle vært der, og de hadde lik oppførsel som den jeg registrerte da jeg observerte elevene i matematikktimen i forveien. Det var betryggende for meg, og for resultatene mine. Da fikk jeg bekreftet at elevene ikke anstrengte jeg unødig eller unaturlig for å prøve å passe inn i en bestemt ramme. Hvis jeg hadde laget en slik ramme ville jeg antageligvis gitt elevene noen stikkord som at det er viktig å lytte til hverandre. At de må prøve å unngå å avbryte hverandre, stille oppfølgingsspørsmål hvis det er noe de lurer på, eller om det er noen uklarheter, og at de må prøve å begrunne påstandene sine. Og helt til slutt å være positive til hverandre, og huske å ha det gøy. Resultatene ville muligens blitt annerledes da, de ville kanskje begrunnet påstandene sine på et tidligere tidspunkt, men det jeg opplevde uten disse linjene, var at elevene helt uten oppfordring stilte oppfølgingsspørsmål når de ikke forsto, og motsatt at de andre tok seg av elevene som ble sittende å undre. De forklarte for hverandre flere ganger hva de tenkte, helt til alle var om bord med løsningsmetoden.

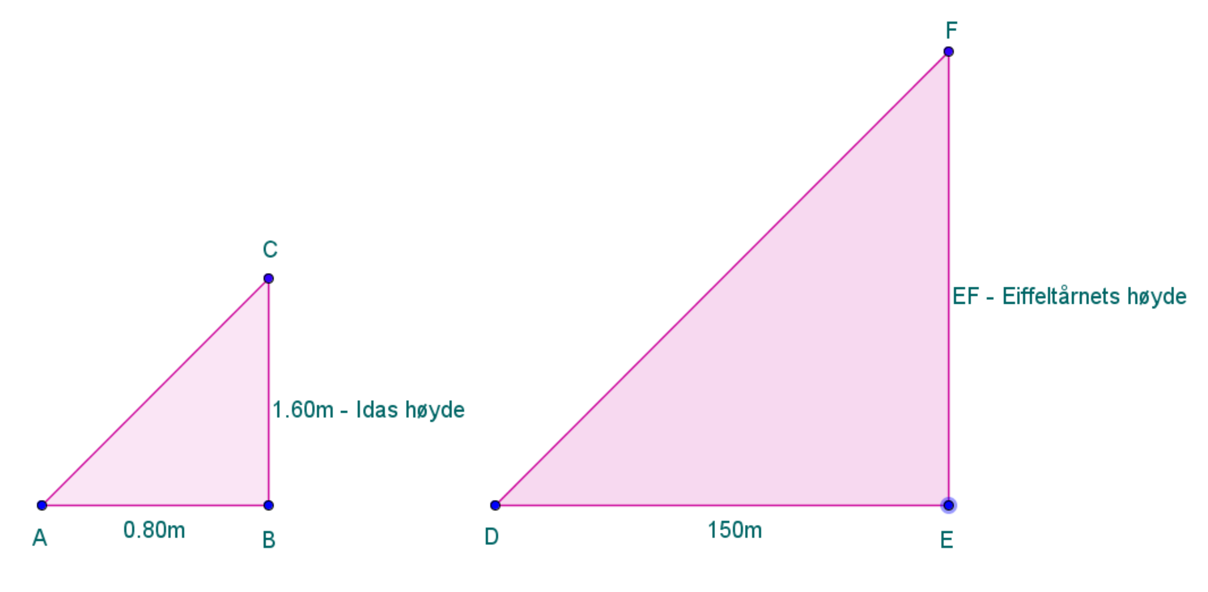
4.1 Resultater fra oppgave 1

Elevene i undersøkelsen fikk utdelt oppgavene slik de står i **tabell 2, avsnitt 3.2.2.** Løsningsforslaget til oppgavene vises i tabellen under, før utdrag og analyse av resultatene presenteres.

Tabell 4: Løsningsforslag til oppgave 1.

OPPGAVE 1 – løsningsforslag:

a.) Ida er 1.60m høy. En solskinnsdag står hun ved siden av Eiffeltårnet i Paris og kaster en skygge på 0.80m. Hun skritter opp skyggen som tårnet kaster, og finner at den er ca. 150m. Hvor høyt er Eiffeltårnet?



De to trekantene er formlike.

Ida sin trekant: ABC er formlik med Eiffeltårnet sin trekant DEF.

Metode 1:

Setter inn alle verdiene vi har, og finner den ukjente siden; høyden på Eiffeltårnet.

$$\frac{EF}{CB} = \frac{DE}{AB}$$

$$\frac{EF}{1.60} = \frac{150}{0.80}$$

$$EF = \frac{150 \cdot 1.60}{0.80}$$

$$\underline{EF = 300m}$$

Metode 2:

Finner forholdet mellom skyggene i begge trekantene, for å finne høyden på Eiffeltårnet.

$\frac{150m}{0.8m} = 187.5$

$\underline{\underline{1.60m \cdot 187.5 = 300m}}$

Metode 3:

Finner forholdstallet mellom skyggen og høyden på Idas trekant, for å finne høyden på Eiffeltårnet.

$\frac{1.60}{0.80} = 2$

$\underline{\underline{150 \cdot 2 = 300m}}$

Eiffeltårnet er $300m$ høyt.

b.) Sett verdiene inn i en tabell.

Løsning 1:

y = høyde

x = skygge

y	1.60	300
x	0.80	150

Løsning 2:

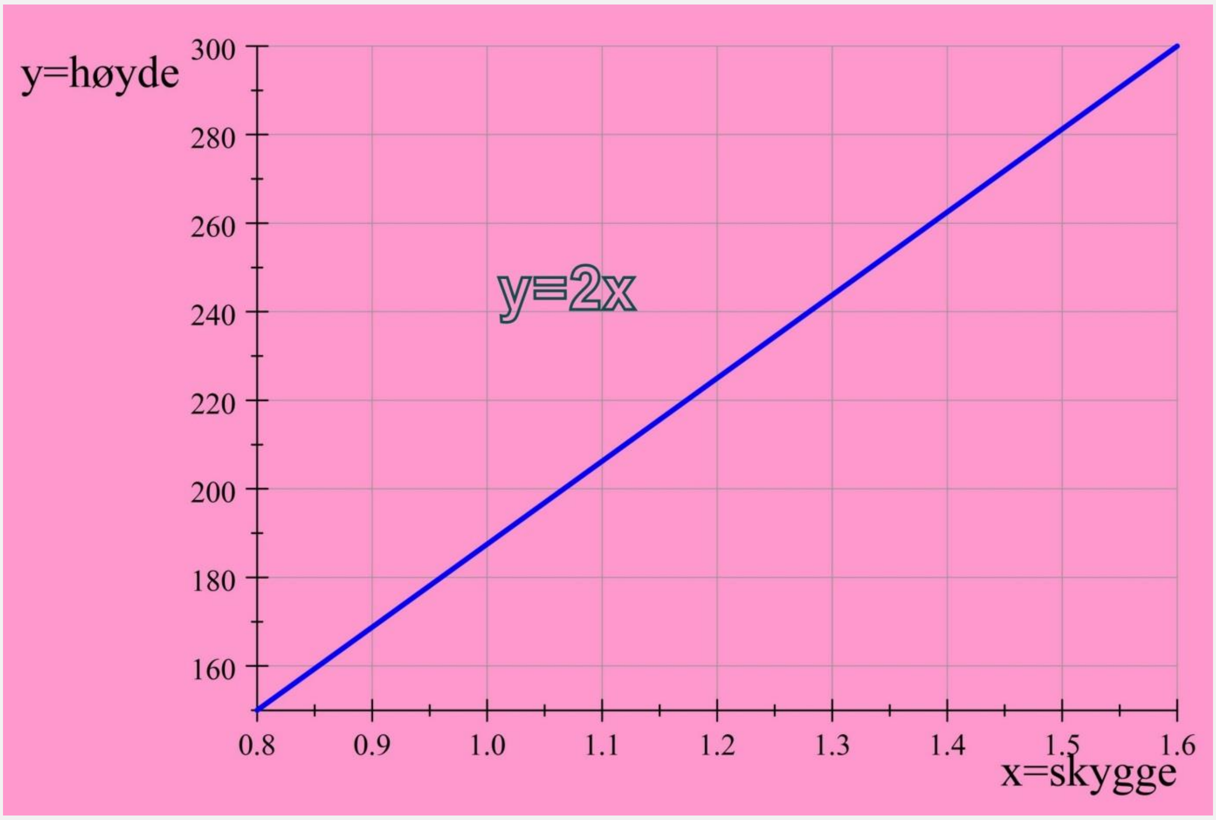
y = skygge

x = høyde

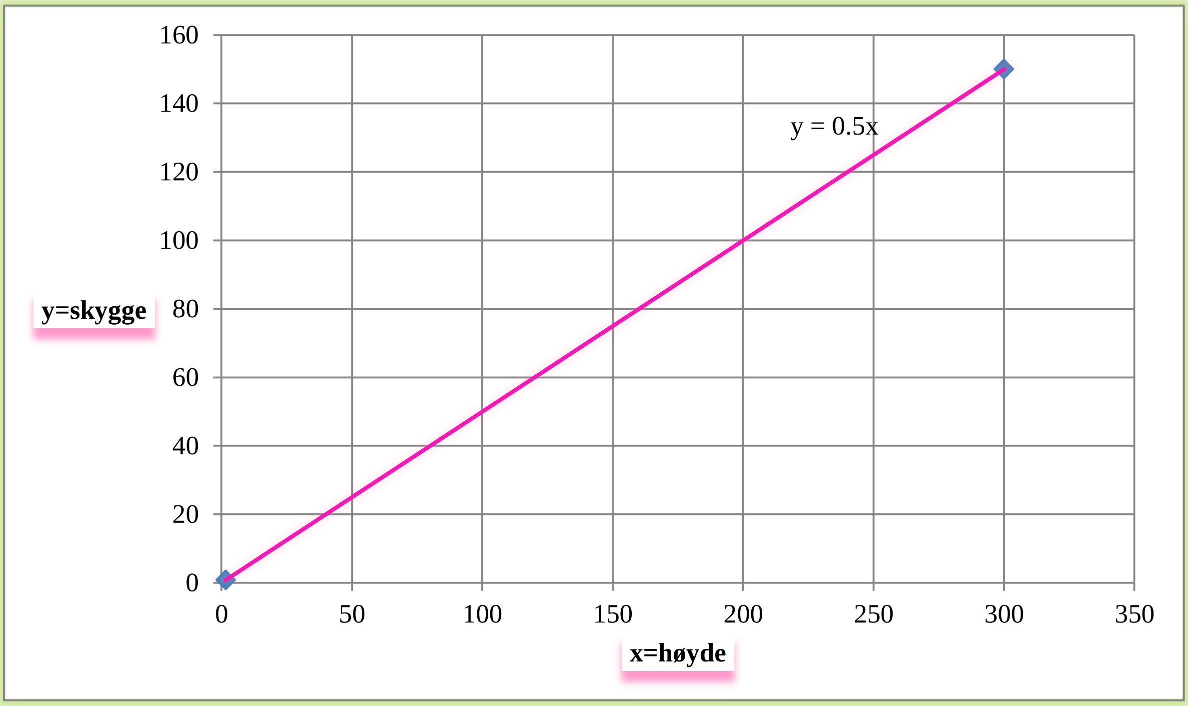
y	0.80	150
x	1.60	300

c.) Lag en graf av verdiene, og vis formel.

Løsning 1:



Løsning 2:



d.) Sjekk om grafen er proporsjonal, og beskriv i så fall hvorfor den er proporsjonal.

Grafen kan skrives på formen:

$y = a \cdot x$

der $a = \frac{y}{x}$

Forholdstallet a er fast, slik at verdiene varierer i takt.

Grafen går igjennom origo.

Altså er grafen proporsjonal.

Elevene har i sin matematikkundervisning hatt om formlikhet og proporsjonalitet i to ulike kapitler. Derfor ønsket jeg å starte oppgave 1 med å ta utgangspunkt i to formlike trekanter, som proporsjonale størrelser, for å se hvordan elevene satte kunnskapen i sammenheng når elevene kun hadde jobbet med formlikhet separat fra proporsjonalitetsbegrepet. I løsningsforslaget har jeg presentert tre ulike metoder for å komme fram til høyden på Eiffeltårnet. De to første metodene står presentert i teorien om formlikhet i læreboka (Gyldendal; Sigma medier og kommunikasjon) til elevene i forsøket som alle går på medier- og kommunikasjonslinja. Metode tre er ikke pensum for elevene i forsøket, men den står presentert i teorien om formlikhet i læreboka (Gyldendal; Sigma 1P) til elevene på studiespesialisering som velger 1P matematikk. Jeg valgte å ta med også denne metoden fordi jeg syntes den var relevant i forhold til oppgaven elevene fikk utdelt, og fordi jeg syntes de tre metodene til sammen skapte en god oversikt over begrepet proporsjonalitet. Videre er oppgaven en slags lureoppgave, der det finnes to løsninger (oppgave 1 c og d), som begge er like korrekte. Ingen av de to gruppene som var med på studien tenkte over at det kunne være to mulige svar på oppgaven, etter at de hadde fått ett av svarene på plass. Noe som i mine øyne virker ganske normalt, da elevene er trent opp til å finne svaret på en oppgave, og så gå videre til neste. Det er ikke spesifisert i oppgaveteksten om det er høyden eller skyggen som representer y, dermed er begge løsningene like riktige, og det blir to forskjellige tabeller, grafer og formeluttrykk. Siste del av oppgaven der elevene skulle vurdere om grafen var proporsjonal og i så fall hvorfor den var proporsjonal ble lik for begge løsningene, slik at det ikke hadde noen innvirkning om elevene fant den ene, den andre, eller begge løsningene på foregående spørsmål. Begge grafene går igjennom origo, og forholdet er fast hele veien, men de har ulikt forholdstall.

Utdrag 1:

Oppgave 1a – gruppe 1:

Erik leser oppgaveteksten til 1a og fortsetter videre med å lese oppgave 1b. Han ser en likhet med oppgave 1a og teorien som ble gjennomgått på tavle før de fikk utdelt oppgaven. Elevene blir sammen enige om å ta for seg en og en oppgave, uten å lese igjennom hele oppgaveteksten før de begynner på oppgavene. Aina foreslår rett etterpå at det kanskje er lurt å tegne opp figurer til oppgave 1a. Hun tegner så opp de to trekantene på PC'n.

> Joakim: [Utbryter raskt]. Skyggen er dobbelt så liten som høyda hennes.
>
> Erik: Hæ? [Ser spørrende på Joakim].
>
> Joakim: Hvis vi ganger skyggen med to så får vi høyden. [Joakim snakker mer rolig, samtidig som han peker langs skyggen og høyden på trekanten til Ida mens han forklarer].
>
> Erik: Ja, det stemmer.[Blikket åpner seg, og han peker selv på tallene på figuren de har tegnet opp, og nikker samtykkende].
>
> Joakim: Så da kan vi bare gange det med to.
>
> Aina: Okay… [Ser spørrende bort på Erik].
>
> Erik: Skjønte du det?
>
> Aina: Sånn delvis, ja, for skyggen hennes er halvparten av skyggen til tårnet?
>
> Erik: Nei, skyggen hennes er 0.80, og høyden hennes er 1.60, så skyggen hennes er dobbelt så liten.
>
> Aina: Okay! Fordi at den er… [Peker på figuren og ser sammenhengen mellom høyden og skyggen].
>
> Aina: Å,ja!
>
> Erik: Så hvis lengden på Eiffeltårnet også er dobbelt så lang, kan vi bare gange med to.
>
> Joakim: Men vi kan også sette inn i den formelen som ho viste på tavla i sta. [Jeg gjennomgikk kjapt hovedtrekkene om proporsjonalitet med et eksempel knyttet til

formlikhet, og et eksempel med utgangspunkt i en graf, før elevene fikk utdelt oppgavene. Formelen Joakim tenker på tilsvarer metode 1 i denne oppgaven].

Joakim: Eller finne forholdet mellom de to skyggene? [Smiler, og ser på de to andre på gruppa]

Erik: Ja, så klart! Hm, lurt. Blir det samme svar?

Joakim: Tror det skal bli det samme ja.

Aina: Kult! Men vi trenger kanskje ikke skrive det på flere måter hvis svaret blir det samme.

Joakim: Nei, det trenger vi ikke.

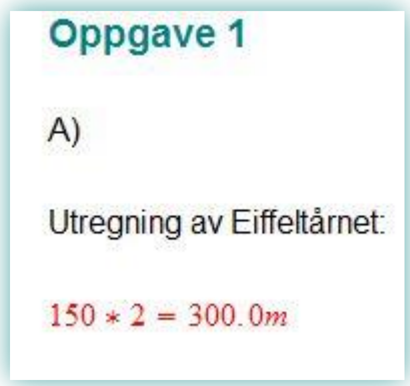
Erik: Det er uansett kjappere å gange med to.

Aina: Høyden på Eiffeltårnet.. skyggen gange med to? [Ser bort på Erik].

Erik: Ja, $150 \cdot 2 = 300m$

Aina fører så inn svaret, og de er enige om at Eiffeltårnet må være $300m$.

Gruppe 1 sin besvarelse på oppgave 1a:


Oppgave 1

A)

Utregning av Eiffeltårnet:

$150 * 2 = 300.0m$

Analyse av utdrag 1:

Joakim var først ute med et forslag for å finne høyden på Eiffeltårnet, metode 3. Svaret kom på plass så kjapt at de to andre på gruppa knapt hadde rukket å gjøre seg opp en formening. Erik gav uttrykk for at han ikke helt forsto resonnementet til Joakim, og han hadde samtidig et spørrende uttrykk i ansiktet. Det så ut til å gå kjapt opp for han, da han nikket samtykkende, og det spørrende uttrykket i ansiktet så ut til å forsvinne etter den andre forklaringen, som gikk for seg i et betraktelig roligere tempo. Samtidig satt Aina med sitt spørrende uttrykk. Det fanget Erik fort opp, i og med at han var i samme situasjon for kun et øyeblikk siden. Da forklaringen kom for tredje gang, var hele gruppa samstemte om løsningen. Synkront med den tredje utgaven av forklaringen, brukte Joakim tiden til å komme opp med flere ideer. Han la fram to nye teorier, som også gav samme svar. De andre på gruppa virket lettere imponert og en smule overrasket over innspillet hans, men de var mer enn nok fornøyde med et muntlig samtykke på at svarene ble like uansett hvilken metode de brukte. De var fornøyde med å ha funnet løsningen på problemet, og de to gjenstående teoriene Joakim kom opp med ble derfor ikke utregnet, eller sammenlignet med den første for å se om de fikk samme svar. Joakim viser god forståelse for problemet, da han raskt kom opp med første løsning på problemet, og undervis forstår at det er flere metoder som kan benyttes for å komme fram til riktig løsning.

Utdrag 2:

<u>Oppgave1a – gruppe 2:</u>

Elevene leser hver for seg første oppgave.

> Martin: Vi må jo regne ut det. Betyr det at det er to formlike trekanter, sider liksom? Så vi må bare finne forholdet til skyggen til Ida og høyden, i forhold til Eiffeltårnet.
>
> Celine: Ja.

Celine sitter ved PC'n men spør om Martin kan skrive inn svaret på første oppgave. Hun ser litt usikker ut, og lite komfortabel med å ta ansvaret for å skrive svaret på denne oppgaven. Det virker ikke som hun helt fikk med seg hvorfor det var slik. Sindre oppfatter at Celine ser usikker ut.

> Sindre: Du ser at høyden på Ida er dobbelt så mye som skyggen.

Det blir en kort pause, der Celine og Helen tenker igjennom Sindre sin forklaring.

> Celine: Mhm. [Ser over oppgaveteksten og de oppgitte tallene].
>
> Helen: [Nikker og viser at hun er enig].
>
> Martin: Trenger vi å regne ut det nå? Kan vi ikke bare skrive at den er dobbelt så høy?

Celine: Men vi bør kanskje skrive inn hva vi tenker?

Det blir stille, og elevene ser på hverandre og nikker, Celine fører inn svaret på PC'n likevel, og ser nå komfortable ut til å ta denne rollen.

Gruppe 2 sin besvarelse på oppgave 1a:

a)

Ida = $1.60\,\mathrm{m}$
Idas skygge=$0.80\,\mathrm{m}$

$\frac{1.60}{0.8} = 2.0$

Ida er dobbelt så høy som skyggen sin.

Eiffeltårnet = $x\,\mathrm{m}$
Eiffeltårnet skygge=$150\,\mathrm{m}$

$150 * 2 = 300\,\mathrm{m}$

Eiffeltårnet er ca. 300 meter høyt, dobbelt så høyt som skyggen sin.

Analyse av utdrag 2:

Elevene på gruppe 2 kom raskt opp med påstanden at trekantene var formlike, og ordet formlik ble til og med brukt. Alle elevene ble alle relativt fort fortrolige med påstanden om at forholdet mellom Ida sin trekant måtte gjelde for Eiffeltårnet sin trekant også. De brukte ikke lang tid på denne oppgaven, og det som var fint å se var at med en gang Celine så sammenhengen mellom de to trekantene forsvant all usikkerheten hun hadde i starten av oppgaven. Da var det ikke noe problem å påta seg ansvaret for å føre inn svaret på PC'n, og hun hadde heller ikke noen problemer med å føre inn forklarende tekst til utregningen.

Utdrag 3:

Oppgave 1b og c – gruppe 2:

For å løse denne oppgaven bruker elevene prøv og feil metoden. De startet med å markere tabellen de satte opp i oppgave 1b, og var klare til å lage en graf etter samme fremgangsmåte som de tidligere hadde brukt i undervisningen. Men det var da problemet startet. Det kom opp to linjer i stedet for én linje da de markerte tabellen, og det førte med seg noen utfordringer. Elevene forsto ikke helt hvorfor dette skjedde, og de ble dermed litt forvirret. De ble litt usikre på om de hadde forstått oppgaven riktig, og de startet en etter en med å dele sine ideer til de andre på gruppa. De forklarte for hverandre hva alle symbolene i formelen betydde, og hva den utregnede verdien fra oppgave 1a sto for. Elevene argumenterer sine påstander, og alle ble ivrige etter å finne ut hvorfor grafen ikke ble som de hadde trodd. De prøvde å få opp grafen utallige ganger, men de endte hver gang opp med to linjer. Da både Martin, Celine og Sindre hadde gjort et verdig forsøk på å få opp linjen, tok Helen ordet. Hun hadde underveis har vært ganske passiv og stille når utregningene av oppgave 1a og 1b pågikk, men tok til ordet da de andre elevene ikke kom noen vei, og forklarte de andre gruppemedlemmene hva hun tenkte, snudde PC'en mot seg, og gjorde noen endringer på tabellen. Da det var gjort snudde hun PC'en tilbake. [Hun var den eneste som satt slik til at hun ikke så hele dataskjermen. Jeg spurte før de begynte om hun ikke ville sitte litt nærmere, men det var ikke nødvendig sa hun. Det viste seg underveis at hun fulgte like godt med selv om hun bare hørte på til tider. Men hun snudde seg og tittet på dataskjermen innimellom]. Da tabellen var justert gjordet Sindre et nytt forsøk på å få opp grafen, og denne gangen med hell. Elevene virket lettet over at grafen endelig kom på plass, da denne prosessen tok sin tid.

Analyse av utdrag 3:

I løpet av denne oppgaven ble elevene godt samkjørte, da de satte seg fast. Det som var fint å se her var at elevene ble så engasjerte og ivrige på å få til oppgaven, selv om de prøvde og feilet opp til flere ganger uten hell. En etter en delte de sine ideer, og forsvarte sine standpunkt, men da de likevel ikke kom noen vei, tok de andre til ordet, og prøvde å jobbe videre ut i fra forrige forklaring med å fortelle hvorfor det kanskje ikke fungerte som først antatt. Det var ingen som sa til de andre at det de prøvde på var feil, men de hjalp hverandre med å forklare hvorfor det ikke fungerte, og bygget nye teorier ut i fra det. Det var en fin løsning, som gjorde at alle elevene hang med til en hver tid, der ingen datt av lasset når neste påstand kom opp.

Da jeg observerte elevene var jeg litt i tvil om Helen virkelig forsto de andres argumenter og løsninger på de foregående oppgavene, eller om hun bare nikket pent og ble en slags gratispassasjer. Det ble jeg fort overbevist om at ikke var tilfellet, når jeg fikk høre hennes versjon og argumentasjon i denne oppgaven. Det var nemlig hennes forsøk på å løse oppgaven som førte fram til riktig oppsett av tabellen, som så gav riktig graf. Det virket ikke som hun hadde noe behov for å dele tankene sine med de andre gruppemedlemmene før de sto fast.

4.2 Resultater fra oppgave 4

Elevene i undersøkelsen fikk utdelt oppgavene slik de står i **tabell 3, avsnitt 3.2.2.** Løsningsforslaget til oppgavene vises i tabellen under, før utdrag og analyse av resultatene presenteres.

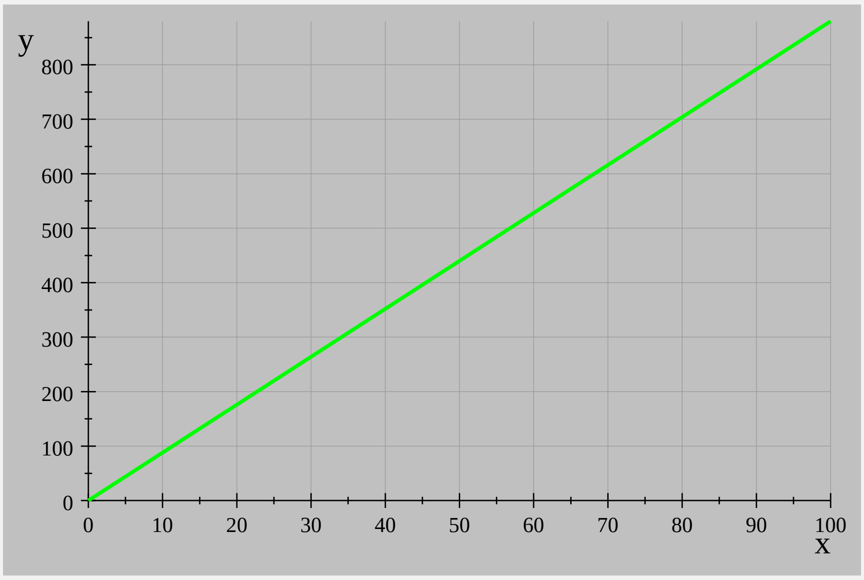
Tabell 5: Løsningsforslag til oppgave 4.

OPPGAVE 4 - løsningsforslag:
En bil bruker $0.80l$ bensin per mil på langkjøring. Bensin koster kr. 11 per liter. **a.)** Forklar at bensinkostnaden ved å kjøre x mil er $y = 8.8x$ y er avhengig av en konstant $a \cdot x$. $y = a \cdot x$ Finner a: $a = (0.80 \cdot 11)$ $a = 8.8$ $y = a \cdot x$ $\underline{\underline{y = 8.8x}}$

Bensinkostnaden ved å kjøre x mil er $y = 8.8x$, fordi det koster $\left(0.80l \cdot 11\frac{kr}{l}\right) = 8.8kr$ å kjøre én mil. Denne kostnaden må ganges med antall mil som kjøres.

b.) Tegn grafen til y for x- verdier mellom 0 og 100 mil.

$y = 8.8x$



c.) Finn grafisk hvor mye det koster å kjøre 50 mil.

Går fra 50 på x-aksen, og opp til vi treffer linja vår, og går så vannrett bort på y-aksen og ser at det vil koste 440 kr.

$y = 8.8 \cdot 50$

$y = 440.0\ kr$

Det koster 440 kr å kjøre 50 mil.

d.) Hvor langt kan vi kjøre for kr. 200?

Går fra 200 på y-aksen vår, og bort til vi treffer linja, så loddrett ned til x-aksen, og ser at verdien her er på 21-23mil.

Vi kan også regne ut dette eksakt:

$200 = 8.8 \cdot x$

$$x = \frac{200}{8.8}$$

$x = 22.727$

$x = 22.7\ mil$

Vi kan altså kjøre 22.7 mil for 200 kr.

Oppgave 4 er en ren oppgave om proporsjonalitet. Det er i hovedsak en tekstoppgave, der elevene blir oppfordret til å forklare med egne ord svaret på oppgavene. Denne oppgaven ble valgt ut fordi det var fin flyt og samtale mellom elevene i testrunden, og det viste deg seg å være for hovedrunden også. Oppgave 4d kan løses på to måter, og det er ikke spesifisert i oppgaveteksten hvilken fremgangsmåte som ønskes. Den kan løses både grafisk og den kan regnes ut eksakt.

Utdrag 4:

Oppgave 4b – gruppe 1:

Erik leser oppgaveteksten.

> Aina: Vi har jo formelen da, ehmm..også vet vi hvor mye bensinen koster og hvor mye den bruker per mil. [Har et konsentrert og vekslende blikk mellom skjermen og oppgaveteksten].
>
> Joakim: Trenger vi noe mer enn formelen for å tegne grafen? [Ser på Aina].
>
> Aina: Ehh, nei da tar vi bare 8.8 og ganger med hvor mye bilen kjører.
>
> Erik: Mhm, ja, så setter vi inn noen tall.
>
> Joakim: Hvilke tall lager vi nå? [Ser usikkert på de andre gruppemedlemmene].
>
> Aina: Hvor mye bilen bruker for 1, 5 og 11 mil. [Ser tilbake på Joakim].
>
> Erik: Også må vi sette inn hva y verdien er. [Peker på oppgaveteksten].

Aina sitter i midten og fører inn verdiene på PC’n, og tegner opp grafen.

> Joakim: Den er vel proporsjonal den?! [Senker øyenbrynene og ser avventende på de andre på gruppa].
>
> Aina: Ja, den er det for den går igjennom null, også er den rett, så.. [Føler seg først selvsikker, men blir så litt usikker da hun ikke helt vet hvordan hun skal begrunne påstanden sin].

Erik: Ja!

Aina leser så opp teksten til oppgave 4c, og alle på gruppa er klare for å gå videre.

Gry: Nå har dere tegna grafen mellom 0 og 11 mil. Var det ikke noe annet som sto i oppgaveteksten?

Aina: Å, jo! Det sto mellom 0 og 100.

Erik: Da kan vi lese c rett fra grafen. [Oppgave 4c].

Joakim: Mhm.

Elevene titter ned på oppgavearket, og leser oppgaven en gang til før Aina utvider tabellen til å gjelde mellom 0 og 100 mil. De andre elevene ser seg enige i resultatet Aina førte inn.

Analyse av utdrag 4:

Elevene finner fort ut at de må gange 8.8 med antall mil som kjøres for kunne tegne grafen til y. Men de glemmer seg bort og er nok litt hastige da de ser seg fornøyde med resultatet idet de kan konstatere at grafen er proporsjonal. Selv om Joakim stusset litt over hvilke verdier de hadde satte opp, ble det ikke utdypet nærmere. Etter hintet fra meg, forsto de hva de hadde gjort feil, og de rettet fort opp feilen.

Utdrag 5:

<u>Oppgave 4d – gruppe 1:</u>

Erik: Hvor langt kan vi kjøre for 200 kr?

Joakim: Vi kan gå opp fra grafen.

Aina: den går ikke lenger enn til 100

Joakim: Da burde vi skrive opp til 200 da?

Aina: Ja, eller så kan vi bare skrive opp.. ta $\frac{200}{8.8}$ kan vi ikke det? Fordi vi tok 8.8 ganger med hvor mange mil vi kjører, så da gjør vi bare det motsatte.

Erik: Haa.

Aina skriver opp formelen, og får riktig svar. Det så ut som det gikk litt fort for de andre på gruppa på slutten, derfor spurte jeg om Aina kunne forklare en gang til for de andre på gruppa hva hun nettopp gjorde.

Aina: Ja, ikke sant, fordi atte.. når vi skulle finne ut hvor mye..ehh, hvor mange km det ble, så tok vi 8.8 og ganget med hvor mange km vi skulle kjøre og da fikk vi prisen. Men nå hadde vi prisen.. eller hvor mange penger vi kunne kjøre for, så da kunne vi bare ta det og dele på hvor mye bensinen kosta, og så fant vi ut hvor langt vi kom for det.

Joakim: Aha..smart!

Jeg oppfordret så Erik til å forklare de andre hvordan han hadde tenkt å løse oppgaven, siden startet med å forklare en annen måte å løse oppgaven på aller først.

Erik: Hæ? Jeg? Jeg tenkte bare vi kunne fått satt inn opp til 200 på grafen. [Peker på x-aksen for mil).

Erik: Sånn at vi kunne gå ut i fra 200 og så bort.

Joakim: Det er det som er mil...[Peker på x-aksen].

Joakim: Det er her som er pris [Peker på y-aksen].

Erik: Å,ja.. [Ser bort på y-aksen, som er for pris]

Erik: Da har vi allerede for 200 her, så går vi bare ned og ser at det blir på cirka 20 eller noe.

Analyse av utdrag 5:

Erik leter i denne oppgaven etter å lese av svaret grafisk, men siden han hadde byttet om mil og pris på aksene, ble forslaget hans litt nedstemt av Joakim og Aina, da de måtte ha utvidet grafen for å finne løsningen. Det ville vært en mer tungvint løsning. Aina kom opp med forslaget om å regne ut svaret nøyaktig, og hun hadde tydelig lært seg sammenhengen mellom formelen og grafen fra forrige oppgave da det gikk som en lek og både regne ut svaret, og forklare underveis. Siden jeg skjønte hva Erik var inne på når han ville lese av svaret grafisk, slik de hadde gjort i forrige oppgave ville jeg gjerne at han skulle prøve å forklare de andre på gruppa en gang til. Da oppdaget Joakim at Erik tok feil av aksene i forklaringen sin, og da de ble byttet om slik de skulle være, så Erik at han tanken hans var riktig, og at svaret kunne leses av grafisk likevel.

Kapittel 5 – Diskusjon

5.1 Forståelse i matematikk

Jeg har valgt å fokusere på elevenes forståelse, med alt det innebærer av bruk av variabelbegrepet og strategifleksibilitet i lys av deres argumenter. Om elevene fikk utfordret sin begreps- eller resonnementsforståelse ved å offentliggjøre sine egne ideer og argumenter for de andre på gruppa, eller ved å høre på de andre gruppemedlemmene argumenter og dele sine ideer. Jeg så på elevenes forståelse for proporsjonalitetsbegrepet, og om forståelsen endret seg i takt med argumentasjonene på gruppa.

5.1.1 Begrepsforståelse og resonnementsforståelse

Oppgave 1a – gruppe 1 og gruppe 2:

For å sammenligne gruppe 1 og gruppe 2 sine resonneringer på oppgave 1a, så brukte elevene på gruppe 1 lenger tid på å komme fram til svaret, og det var heller ikke alle gruppemedlemmene som forsto sammenhengen mellom de to trekantene før det var forklart opp til flere ganger. Aina sin begrepsforståelse for proporsjonalitet ble utfordret av Joakim sin påstand om at forholdet mellom skyggen og høyden på trekanten var proporsjonalt. Aina sitt forhold til begrepet proporsjonalitet utviklet seg ved å høre på de andre elevenes forklaringer, og hun tenkte selv igjennom påstanden. For hun gjentok ikke påstanden som Joakim fortalte, men hun tenkte gjennom den inne i hodet sitt, pekte på figuren og målte den opp og ned, før hun så at påstanden var korrekt og hun var enig. Det at forklaringen ble gjentatt flere ganger på gruppe 1, og at elevene ble tvunget til å ordlegge seg på andre måter for å få Aina til å forstå hva de mente, var nok med på å hjelpe både Joakim og Erik til å bli mer sikre i sin sak. Det er vanskelig å si om Joakim hadde kommet opp med ideen om de to andre løsningsmetodene hvis han kun hadde forklart seg én gang for de andre på gruppa. Uansett viser Joakim en begrepsforståelse der han ikke bare ser fakta og en metode for å løse oppgaven, men han forstår til slutt alle de tre løsningsmetodene. Han har altså oppnådd forståelse for hvordan de alle henger i sammen (Kilpatrick et al. 2001). En relasjonsforståelse mellom metodene og begrepet formlikhet. I tillegg vil jeg si at Joakim i denne oppgaven benyttet seg av en strategifleksibilitet når han løste oppgaven. Dette fordi elevene kun hadde fått presentert to måter å løse slike oppgaver på i tidligere matematikkundervisning (metode 1 og 2). Jeg gjennomgikk i tillegg metode 1 på nytt i eksempelet jeg viste elevene før de fikk utdelt oppgavene. Joakim hadde fra før av kunnskap om flere løsningsmetoder (metode 1 og 2), og han benyttet seg av denne kunnskapen til å komme frem til den siste løsningsmetoden (metode 3), som var en nyskapende metode for disse elevene (Star & Seifert 2006). Det som forundret meg her, var at den første metoden som ble forklart var den de ikke hadde gjennomgått fra før av i matematikkundervisningen. Det var også naturlig at de andre elevene på gruppa hadde behov for flere forklaringer før de så sammenhengen mellom denne løsningsmetoden, og de to de var kjent med fra før. Det var tross alt en helt ny fremgangsmetode for dem. For meg virket det som Joakim hadde bakgrunnskunnskapen inne om metode 1 og 2, men at han ikke tenkte over dem med en gang. For det virket som han så metode 3 umiddelbart, mens metode 1 og 2 først kom tilbake etter hvert som metode 3 ble gjentatt. Da kom sammenhengen mellom metodene tydelig fram, og han brukte heller ikke lang tid på å se den, antageligvis fordi de to andre metodene var godt bearbeidet fra før av.

Elevene på gruppe 1 ordla seg på flere ulike måter da de snakket sammen om fremgangsmetoder i oppgave 1a, men det var den ingen av dem som nevnte ordet formlikhet. Gruppe 2 derimot ble raskt ferdig med oppgaven, og alle gruppemedlemmene viste forståelse for at de to trekantene var formlike, og de benyttet også uttrykket formlik når de samtalte seg i mellom. Det virket som elevene hadde en større begrepsforståelse fra før av enn gruppe 1. Det var ingen tvil om at trekantene var formlike, eller at det gikk an å bruke et forholdstall for å finne høyden på Eiffeltårnet. Siden de raskt kom frem til svaret ble ingen av de to gjenstående metodene nevnt. Det er derfor vanskelig å vite hvilket forhold elevene på gruppa hadde til disse metodene. Var disse metodene like kjent blant elevene, og kunne blitt benyttet på samme måte som den de valgte, eller ville de ikke kommet på de i det hele tatt? Det er vanskelig å si, men også på denne gruppen var det metode 3 som ble foreslått først. Metoden de ikke hadde gjennomgått i matematikkundervisningen. Tilfeldighet eller ikke? Uansett hadde begge gruppene forståelse for fakta og metode for hvordan oppgaven skulle løses, men det virket som gruppe 2 viste større forståelse for sammenhengen mellom de to, ut i fra den gjensidige selvsikkerheten de viste hverandre når løsningsmetoden ble foreslått. Samtidig som besvarelsen deres var mer utfyllende med tekst og forklaringer til utregningene. De hadde nok større forståelse for begrepet formlikhet fra før av, mens gruppe 1 fikk utviklet forholdet sitt til begrepet gjennom argumentasjonen på gruppa.

5.1.2 Strategifleksibilitet

Oppgave 1b og c – gruppe 2:

Elevene var i utgangspunktet selvsikre på hvordan oppsettet av tabellen skulle se ut, og hvordan grafen skulle lages, men når de støtte på problemer ble løsningsstrategien prøving og feiling av flere ulike ideer benyttet. Argumentasjonen elevene hadde baserte seg på var å forsvare seg med støtte i eksempler, der de kunne sette inn et forslag for å se om de stemte. Et slikt forsvar ved eksempel vil si at elevene har et ufullstendig svar, og at forståelsesnivået ikke er helt på øverste nivå (Carpenter et al. 2003). Elevene brukte lang tid på å få opp riktig tabell, og var lettet når de endelig fant en løsning.

Da tabellen var på plass, og oppgaven var klar for å løses, ble det ingen videre diskusjon om at det var mulig å løse oppgaven på enda en måte, selv om elevene var svært nærme temaet når de diskuterte og snudde rundt på tabellen i prøve- og feil prosessen sin. Det var heller ikke overraskende at elevene valgte å si seg ferdige med oppgaven da de fikk riktig svar, de hadde tross alt brukt lang tid på å få opp ett riktig svar, om de ikke skulle tenke videre på dette. De er ikke trent opp til å fundere utover svarene fra matematikkundervisningen, og jeg var selv fornøyd med at elevene ikke gav opp, de bare fortsatte å prøve seg fram, var ivrige etter å finne svaret under hele prosessen. I ettertid tenker jeg at det kanskje skapte mer forvirring enn utvikling av begrepsforståelsen for proporsjonalitet når oppgaven ikke presiserte nærmere x og y. Var det det som skapte så stor forvirring, eller var det også en tilfeldighet? Det var ingen av elevene som nevnte noe om dette under arbeidet med oppgaven. Kanskje tenkte de ikke over det, eller kanskje de gjorde det, de bare sa det bare ikke høyt til de andre på gruppa? Det er vanskelig å si noe sikkert om dette. Selv om elevene strebet lenge med å snu om på tabellen, og finne riktig linje inne på Excel, så behandlet de variablene x og y som ukjente, der de forklarte hverandre hva symbolene representerte i oppgaven. Det vil etter Küchemann (1981) si at elevene befant seg innenfor de to øverste nivåene for variabelforståelse, i og med at de var så tydelig på å gi alle tallene og variablene mening. Spesielt etter at de ikke umiddelbart fant noen løsning på oppgaven, ble forklaring av opplysningene i oppgaven satt i fokus. Elevene leste oppgaveteksten på nytt, og forklarte nøye de ukjente variablene, og følgeopplysningen fra forrige oppgave. De fikk prøvd ut sin resonnementsforståelse i denne oppgaven, de tenkte logisk og fikk testet ut om det var en logisk sammenheng mellom variablene og grafene de først fikk opp (Kilpatrick et al. 2001).

5.1.3 Variabelforståelse

Oppgave 4b – gruppe 1:

Elevene ser på de ukjente verdiene som ukjente da de setter inn ulike verdier for den ukjente variabelen x, for å få ut verdier av y de trengte for å tegne opp grafen. Det de derimot gjorde feil var å ikke lese oppgaven grundig nok. Det var helt klart meningen at de skulle sette inn verdier for x, slik at de fikk ut noen sentrale verdier for y, som igjen førte til at de kunne tegne opp grafen. Aina foreslo å sette inn verdier for 1,5 og 11 mil, for å tegne opp grafen. Disse verdiene virket tilfeldig valgt, da oppgaveteksten spesifikt hadde spurt om noen andre verdier, som elevene på gruppa hadde glemt helt bort. Det trengs selvsagt ikke flere enn to punkter for å tegne opp en proporsjonal graf. Så om elevene hadde valgt to punkter som var langt nok fra hverandre, ville de fått løsningen på oppgaven selv om de benyttet seg av to andre punkter enn de som ble nevnt i oppgaveteksten. Elevene hadde ikke løst oppgaven feil, de måtte bare utvide aksene sine for å kunne lese av svaret på oppgaven. Noe som var fort gjort når alle opplysningene var på plass. Aina sin påstand om at grafen var proporsjonal var riktig, men den var også litt vag. Hun fullførte ikke setningen sin med en god begrunnelse, mest sannsynlig fordi hun var litt usikker. Hun hadde begrepsforståelse for at grafen var proporsjonal når den var rett og gikk gjennom origo. Usikkerheten hennes avslørte at relasjonsforståelsen for begrepet ikke var helt på plass. Setningen virket mer tillært av pugging og repetisjon, heller enn forståelse for sammenhengen mellom grafen og begrepet proporsjonalitet.

Oppgave 4d – gruppe 1:

I oppgave 4, ser Erik en sammenheng mellom deloppgave c og d. I oppgave 4c ble de bedt om å finne løsningen grafisk, mens i oppgave 4d sto det ingenting om hvilken fremgangsmetode som skulle benyttes. Han tenker dermed at det er fullt mulig å lese av svaret grafisk som i forrige oppgave, men siden han roter med enhetene på aksene, fører ikke Eriks idé fram. Aina sitt forslag ble dermed regnet ut. Carpenter et al. (2003) mener det er viktig at elevene er tydelige på hva som støtter og knytter deres ideer til et begrep. På den måten kan elevene klare å se forskjeller i hva slags forståelse de har for det samme begrepet. Hvis elevene har ulike ideer til det samme begrepet, kan dette skape et behov for nærmere undersøkelse. Elevene kan gjennom å diskutere en slik ulikhet utfordre, altså sette ord på sin oppfatning av variablene noe som kan øke deres forståelse for problemet. I denne sammenhengen, oppdaget elevene etter oppfordring fra meg at det var to riktige veier til løsningen. Jeg så at Erik var inne på riktig spor, da han startet med å forklare de andre hvordan han ville ha løst oppgaven grafisk. Da han måtte gjenta sin idé for de andre elevene, oppdaget de feilen som førte til at forslaget ikke stemte første gangen, og de så dermed at de hadde to ulike fremgangsmåter for å finne ut hvor mange mil de kunne kjøre for 200 kr.

5.2 Matematikksamtale

Elevene hadde høye forventninger til seg selv, og det var tydelig at elevene var fast bestemt på å løse oppgavene på best mulig måte. Samtidig var de opptatt av å forklare hverandre ideene sine, slik at alle på gruppa til enhver tid forsto fremgangsmåtene som ble brukt. Kanskje var det deres egne forventninger som gjorde at denne gjensidige kommunikasjonen fant sted, og som gjorde at de samarbeidet så godt i lag. Elevene hadde på ingen måte fått noen instrukser om hvordan de skulle samarbeide på forhånd. Mellom de to gruppene var det en tydelig forskjell i språkbruken. Elevene på gruppe 1 hadde tydelig et mer hverdagslig språk med bruk av masse pauseord og uttrykk som; ehh, mhm, osv. Mens elevene på gruppe 2 var mer konsise i sine forklaringer. De brukte riktige matematiske uttrykk når de samtalte med hverandre. Som for eksempel da elevene jobbet med oppgave 1a, der snakket elevene på gruppe 1 om oppgaven over en lengre periode, og de brukte totalt sett lenger tid på å løse oppgaven, og ordet formlikhet kom aldri opp. Selv om elevene endte opp med samme løsningsmetode (metode3) som gruppe 2, og i tillegg nevnte på løsningsmetode 1 og 2, brukte de lite matematiske uttrykk i samtalen. De skjønte hva de andre mente, og det var ingen grunn til å bruke disse ordene da, eller så var de ikke så trygge på hva som lå i definisjonen til ordet formlikhet. Jeg kan si at elevene på gruppe 2 hadde utviklet en større relasjon mellom sitt 1. ordens og sitt 2. ordens språk, mens elevene på gruppe 1 utviklet assosiasjoner mellom de to språkene underveis. Ved å samtale om matematikk vil kommunikasjonen være med å forandre både måten matematikk blir undervist på (for lærerens del), og hvordan vi tenker om det vi lærer, og hva som blir lært (Sfard 2003).

Kapittel 6 – Konklusjon

Dette avsluttende kapittelet tar for seg hovedfunnene i **kapittel 5 Diskusjon**, i tillegg til noen refleksjoner omkring hvordan en lærer kan benytte seg av dem i skolehverdagen.

Elevene i studien fikk i oppgave om å jobbe sammen i grupper for å besvare et oppgavesett med temaet proporsjonalitet. Gjennom studien med blant annet analyse av videoobservasjon, fikk jeg bekreftet at elevene fikk utfordret sin forståelse for proporsjonalitet gjennom dialogen de skapte når de samarbeidet om å løse problemene. Det å filme elevene når de jobbet sammen gav meg som forsker detaljrik informasjon om hver enkelt elev. Det er følgelig elevene som gav mest av seg selv, og som delte sine tanker med medelevene som gav meg mest informasjon om deres forståelse til proporsjonalitet. Hovedfunnet i oppgaven fant jeg når eleven Aina gav meg et innblikk i hennes begrepsforståelse. Den synliggjorde hun ved å bli utfordret ved en påstand fra en av medelevene. Denne påstanden gikk ut på at forholdet mellom to av sidene i en trekant var proporsjonal, med sidene i en større trekant. Aina så ikke umiddelbart at denne påstanden holdt mål, eller rettere sagt hvorfor det var slik. Hun stilte oppfølgende spørsmål når hun mente hun var på sporet, men da dette ikke stemte forklarte de to medelevene på gruppa påstanden igjen. De fikk ordlagt seg på ulike måter, helt til Aina så logikken i oppgaven. Altså endret hun sin begrepsforståelse i takt med argumentasjonene på gruppa. Videre fikk jeg innsikt i hvordan eleven Joakim skapte relasjoner mellom ulike fremgangsmåter og på den måten resonnerte seg fram til en løsning. Han fikk synliggjort sin resonnementsforståelse gjennom sin forklaring til medeleven Aina. Fordi da Aina ikke så sammenhengen mellom to av sidene i trekanten, begynte Joakim å forske videre for å få sagt dette på en annen måte. Han ende da opp med å se to andre løsningsmetoder som alle førte til samme svar. Han så hvordan de ulike metodene hang i sammen, og fikk satt dem i system. Hans relasjonsforståelse mellom begrepet proporsjonalitet og formlikhet i trekanter ble utviklet betraktelig gjennom samtalen med medelevene.

Likevel var det ingen selvfølge at alle elever syntes det var like naturlig å snakke matematikk med andre. Altså vil det ha en innvirkning på hvordan gruppene deles inn, og det er heldigvis mange muligheter å gjøre det på. De kan deles inn etter nivå, muntlig aktivitet, tilfeldig, og så videre. Kanskje kan elevene finne en fast og god samarbeidspartner etter å ha kjørt igjennom flere ulike sammensetninger av elevgrupper. Dette kan ta tid, men å gjennomføre matematikksamtaler hos elevene gir mange fordeler, og det kan virke utfordrende og nytt for elevene. Elevene i studien var ivrige og samarbeidsvillige til å jobbe sammen for å diskutere proporsjonalitet og hva hver enkelt variabel sto for i denne sammenhengen. Det var nok et resultat av at elevene var trygge på de andre i klassen, og at elevene ble satt på gruppe med andre elever som var på omtrent samme kunnskapsnivå som dem selv. Dermed fungerte de godt i sammen, uten at noen på gruppa falt utenfor, eller tok over hele styringen. Diskusjonen falt naturlig på plass da elevene jobbet med å løse problemene, og de klarte å snakke sammen om matematikk, som igjen førte med seg flere fordeler, som nevnt i **kapittel 2 Teoretisk oversikt**. Dermed hadde elevene et godt startsted for å synliggjøre og utbedre sin forståelse for begrepene i proporsjonalitet. Elevenes relasjonsforståelse ble synliggjort når de snakket sammen om disse variablene, og de utfordret både seg selv og medelevenes forståelse for proporsjonalitetsbegrepet gjennom samtalene. Da elevene la fram sine tanker for proporsjonalitetsbegrepet for medelevene måtte de være presise og tydelige i sine argumenter for at de andre elevene skulle forstå deres tankegang, og hva begrepet betydde for dem personlig. Å la elevene presentere ulike begreper for hverandre vil også være betydningsfullt for andre temaer enn proporsjonalitet i matematikk. En lærer kan hjelpe til å synliggjøre elevenes forståelse gjennom aktiviteter som fremmer matematiske samtaler mellom elevene. Det vil antageligvis hjelpe noen elever til å se sammenhenger i et tema de jobber med der og da, mens andre elever vil oppleve denne dypere forståelsen senere. Uansett vil slike samtaler der elevene blir nødt til å synliggjøre tanker om begreper fremme engasjement hos elevene, de blir nødt til å tenke mer nøye igjennom begrepet, de skal tross alt fortelle det til medelevene på en forståelig måte. Her er det er viktig å ha matematisk kompetanse, slik som beskrevet i **Tabell 1: Fem ulike delkompetanser i matematisk kompetanse (Kilpatrick et al. 2001).** Da vil elevene oppleve fremgang i matematikk, de vil oppnå en gjennomført god forståelse på alle de fem punktene av matematisk kompetanse, som er så tett knyttet i sammen (Kilpatrick et al. 2001). Selv om jeg kun har tatt for meg to av disse punktene (begrepsforståelse og resonnementsforståelse), vil trolig samtale bidra til å fremme de tre gjenstående punktene av matematisk kompetanse også. Elevene får uttrykt sine meninger, som kan være med å skape en større helhet i matematikken, ved at elevene utvikler forståelse av grunnleggende begreper. Matematikken blir mer gøy for hvert begrep som faller på plass! Læreren får god innsikt over elevenes forståelse som kan benyttes i planlegging av undervisning, der de kan tilrettelegge for matematiske samtaler.

Litteratur

Alrø, H. & Kristiansen, M. (1997). Mediet er ikke budskabet. I: Alrø, H. & Dirckinck-Holmfeld, L. (red.) *Videoobservation*, s. s.73-99. Aalborg: Aalborg Universitetsforlag.

Alseth, B., Breiteig, T. & Brekke, G. (2003). *Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering: matematikkfaget som kasus*. Rapport, b. 02/2003. Notodden: Telemarksforsking. 198 s. s.

Baxter, P. & Jack, S. (2008). Qualitative Case Study Methodology: Study Design and Implementation for Novice Researchers. *Qualitative Report*, 13 (4): 527-547.

Brekke, G., Grønmo, L. S. & Rosén, B. (2000). *Veiledning til algebra: F, H og J*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter. 93 s. s.

Carpenter, S. J., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*. 361 Hanover Street, Portsmouth, NH 03801-3912: Heinemann.

Derry, S. J., Pea, R. D., Barron, B., Engle, R. A., Erickson, F., Goldman, R., Hall, R., Koschmann, T., Lemke, J. L., Sherin, M. G., et al. (2010). Conducting Video Research in the Learning Sciences: Guidance on Selection, Analysis, Technology, and Ethics. *Journal of the Learning Sciences*, 19 (1): 3-53.

Fuglestad, A. B. (2003). Konstruktivistisk perspektiv på datamaskiner i matematikkundervisning. I: *Matematikk for skolen*, s. s. 210-234. Bergen: Fagbokforl.

Fuglestad, A. B. (2007). Developing tasks and teaching with ICT in mathematics in an inquiry community. I: Congress of the European Society for Research in Mathematics, E., Pitta-Pantazi, D. & Philippou, G. (red.) *European Research in Mathematics Education: Proceedings of the Fifth Congress of the European Societyfor Research in Mathematics Education*, s. 1409-1418. Larnaca, Cyprus: University of Cyprus.

Grevholm, B. (2007). Å undersøke forbedret læring i matematikk. I: Jaworski, B. (red.) *Læringsfellesskap i matematikk*, s. 39-49. Bergen: Caspar.

Grønmo, L. S. (2004). *Hva i all verden har skjedd i realfagene?: norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2003*. Acta didactica, b. 5/2004. Oslo: Instituttet. 225 s. s.

Grønmo, L. S. & Onstad, T. (2009). *Tegn til bedring: norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007*. [Oslo]: Unipub. 292 s. s.

Grønmo, L. S., Onstad, T. & Pedersen, I. F. (2010). *Matematikk i motvind: TIMSS advanced 2008 i videregående skole*. [Oslo]: Unipub. 287 s. s.

Grønmo, L. S. & Onstad, T. (2012). *Mange og store utfordringer: Et nasjonalt og og internasjonalt perspektiv på utdanningav lærere i matematikk basert på data fra TEDS-M 2008*. Oslo: Unipub. s. s.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., Chui, A. M.-Y., Wearne, D., Smith, M., Kersting, N., et al. (2003). *Teaching Mathematics in Seven Countries. Results from the TIMSS 1999 Video Study.* National Center for Education Statistics: U.S. Department of Education.

Holme, I. M. & Solvang, B. K. (1996). *Metodevalg og metodebruk*. [Oslo]: TANO. 334 s. s.

Imsen, G. (2005). *Elevens verden: innføring i pedagogisk psykologi*. Oslo: Universitetsforlaget. 536 s. s.

Imsen, G. (2009). *Lærerens verden: innføring i generell didaktikk*. Oslo: Universitetsforl. 510 s. s.

Johannessen, A., Tufte, P. A. & Kristoffersen, L. (2004). *Forskningsmetode for økonomisk-administrative fag*. Oslo: Abstrakt forl. 424 s. s.

Johnson, D. W., Johnson, R. T., Haugaløkken, O. K. & Aakervik, A. O. (2006). *Samarbeid i skolen: pedagogisk utvikling - samspill mellom mennesker*. Namsos: Pedagogisk psykologisk forl. 170 s. s.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press. xvii, 454 s. s.

Kjærnsli, M. (2004). *Rett spor eller ville veier?: norske elevers prestasjoner i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2003*. Oslo: Universitetsforl. 301 s. s.

Koschmann, T. (1996). Paradigm Shifts and Instructional Technology: an Introduction. I: *CSCL: theory and practice of an emerging paradigm*, s. 1-23. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Kristiansen, S. & Krogstrup, H. K. (1999). *Deltagende observation: introduktion til en samfundsvidenskabelig metode*. København: Hans Reitzels Forlag. 235 s. s.

Kvale, S., Brinkmann, S., Anderssen, T. M. & Rygge, J. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju*. Oslo: Gyldendal akademisk. 344 s. s.

Küchemann, D. (1981). Algebra. I: Hart, K. (red.) *Children's understanding of Mathematics*, s. 102-119.

Lunde, O. (2004). Har eleven matematikkvansker- og hva skal vi gjøre for å oppnå mestring? *Skolepsykologi*, 39 (1).

Maher, C. A. (2005). How students structure their investigations and learn mathematics: insights from a long-term study. *The Journal of Mathematical Behavior*, 24 (1): 1-14.

Mellin-Olsen, S. (1984). *Eleven, matematikken og samfunnet: en undervisninglære*. Bekkestua: NKI-forl. 224 s. s.

Mercer, N. S., C. (2006). Teaching Children How To Use Language To Solve Maths Problems. *Language And Education*, 20 (6): 507-528.

Mertens, D. M. (2005). *Research and evaluation in education and psychology: integrating diversity with quantitative, qualitative, andmixed methods*. Thousand Oaks, Calif.: Sage. XXIII, 507 s. s.

Powell, A. B., Francisco, J. M. & Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior*, 22 (4): 405-435.

Ryen, A. (2002). *Det kvalitative intervjuet: fra vitenskapsteori til feltarbeid*. Bergen: Fagbokforl. 317 s. s.

Selvik, B. K., Rinvold, R. A. & Høines, M. J. (2007). Om oversettelsesledd. I: *Matematiske sammenhenger, Algebra og funksjonslære*, s. s.109-112. Bergen: Caspar forl.

Sfard, A. (2003). There is More to Diuscourse than Meets the Ears: Looking at Thinking as Communicating to Learn More About Mathematical Learning. I: Kieran, C., Forman, E. & Sfard, A. (red.) b. 13-57 *Learning Discourse*. Springer Netherlands.

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillesdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. ix, 218 s. s.

Skemp, R. R. (1989). *Mathematics in the primary school*. London: Routledge. Viii, 225 s. s.

Solvang, R. (1986). *Matematikk-didaktikk*. Rud: NKI-forlaget. 317 s. s.

Star, J. R. & Seifert, C. (2006). The development of flexibility in equation solving. *Contemporary Education Psychology*, 21: 280-300.

Star, J. R. & Newton, K. J. (2009). The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. *ZDM Mathematics Education*, 41: 557-567.

Weber, K., Maher, C., Powell, A. & Lee, H. (2008). Learning opportunities from group discussions: warrants become the objects of debate. . *Educational Studies in Mathematics*, 68 (3): 247-261.

Wells, C. G. (2001). The Development of a Community of Inquriers I: *Action, talk, and text: learning and teaching through inquiry*, s. VIII, 231 s. New York: Teachers College Press.

Internettadresser

Utdanningsdirektoratet (2012). Læreplan i matematikk fellesfag.

http://www.udir.no/Lareplaner/Grep/Modul/?gmid=0&gmi=158816&v=4 (Nedlastet 30.01.2012).

Utdanningsdirektoratet (2012). Den generelle delen av læreplanen.

http://www.udir.no/Upload/larerplaner/generell_del/generell_del_lareplanen_bm.pdf?epslanguage=no (Nedlastet 01.03.2012).

Ordtak (2012). Siterte sitater.

http://www.ordtak.no/index.php?fn=Piet&en=Hein (Nedlastet 06.02.2012)

Gjørup, J.B.A. (2006) Hvad er en samtale?

http://www.lederweb.dk/Personale/Medarbejdersamtaler-MUS/Artikel/79547/Hvad-er-en-samtale (Nedlastet 03.03.2012)

Norsk samfunnsvitenskapelige datatjeneste AS. Personvernombudet for forskning.

http://www.nsd.uib.no/personvern (Nedlastet 12.04.2012)

Vedlegg

Vedlegg 1 – godkjenning fra NSD om behandling av personopplysninger

Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS
NORWEGIAN SOCIAL SCIENCE DATA SERVICES

Harald Hårfagres gate 29
N-5007 Bergen
Norway
Tel: +47-55 58 21 17
Fax: +47-55 58 96 50
nsd@nsd.uib.no
www.nsd.uib.no
Org.nr. 985 321 884

Margrethe Naalsund
Institutt for matematiske realfag og teknologi, IMT
Universitetet for miljø og biovitenskap
Postboks 5003
1432 ÅS

Vår dato: 26.03.2012 Vår ref:29913 / 4 / LMR Deres dato: Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 20.02.2012. Meldingen gjelder prosjektet:

29913	*Matematisk forståelse og IKT*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet for miljø- og biovitenskap, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Margrethe Naalsund*
Student	*Gry Svantesvold*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, eventuelle kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/forsk_stud/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://www.nsd.uib.no/personvern/prosjektoversikt.jsp.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 15.05.2012, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Vigdis Namtvedt Kvalheim Linn-Merethe Rød

Linn-Merethe Rød tlf: 55 58 89 11
Vedlegg: Prosjektvurdering
Kopi: Gry Svantesvold, Jerpevegen 15, 3540 NESBYEN

Avdelingskontorer / *District Offices*
OSLO: NSD. Universitetet i Oslo, Postboks 1055 Blindern, 0316 Oslo. Tel: +47-22 85 52 11. nsd@uio.no
TRONDHEIM: NSD. Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim. Tel: +47-73 59 19 07. kyrre.svarva@svt.ntnu.no

Personvernombudet for forskning

Prosjektvurdering - Kommentar

Prosjektnr: 29913

Utvalget består av en yrkesfaglig Vg1-klasse. Data samles inn via observasjon.

Førstegangskontakt foretas via skolen. Det gis skriftlig og muntlig informasjon til utvalget. Personvernombudet finner informasjonsskrivet vedlagt meldeskjemaet tilfredsstillende. Ombudet finner videre at elever over 16 år selv kan avgi gyldig samtykke til deltakelse i dette prosjektet, uten signatur fra foreldre.

I henhold til prosjektmelding og informasjon som gis til utvalget, skal videoopptak slettes og øvrige opplysninger anonymiseres innen prosjektslutt 15.5.2012. Ombudet minner om at anonymisering innebærer at direkte personidentifiserende opplysninger som navn/navneliste slettes, og at indirekte personidentifiserende opplysninger (sammenstilling av bakgrunnsopplysninger som f. eks. sted, yrke, alder, kjønn) fjernes eller endres.

Vedlegg 2 – informasjonsbrev til elevene

Dato: 20.02.12

Til elevene

Informasjon om Mastergradsprosjektet "Matematisk forståelse og IKT"

Jeg skriver dette semesteret en masteroppgave i matematikkdidaktikk ved Universitetet for Miljø- og Biovitenskap (UMB). Oppgaven omhandler matematisk forståelse ved bruk av den dynamiske programvaren Scientific Notebook. I forbindelse med denne oppgaven ønsker jeg å samle inn relevant data ved hjelp av videoobservasjon.

Anonymitet og oppbevaring av data

Dette prosjektet er meldt inn til Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS. Jeg som forsker er underlagt taushetsplikt, og elevene det refereres til i prosjektoppgaven vil få fiktive navn, og vil derfor bli anonymisert. Etter prosjektslutt, 15.05.2012, vil opptakene bli slettet.

Elevenes rettigheter

Deltagelse på prosjektet er frivillig, og det er også mulig å trekke seg fra undersøkelsen under hele studien uten å måtte oppgi grunn. Svarslippen nederst på siden leveres tilbake til faglærer.

Vennlig hilsen

Gry Svantesvold

Mobil: 90506425

E-post: grys@student.umb.no

Samtykkeerklæring

Jeg samtykker til å delta på videoobservasjonen □

Underskrift:____

Vedlegg 3 – oppgavene elevene fikk utdelt

OPPGAVE 1:

a.) Ida er 1.60m høy. En solskinnsdag står hun ved siden av Eiffeltårnet i Paris og kaster en skygge på 0.80m. Hun skritter opp skyggen som tårnet kaster, og finner at den er ca. 150m. Hvor høyt er Eiffeltårnet?

b.) Sett verdiene inn i en tabell.

c.) Lag en graf av verdiene, og vis formel.

d.) Sjekk om grafen er proporsjonal, og i så fall hvorfor.

OPPGAVE 2:

Undersøk om x og y er proporsjonale størrelser. Finn y og x dersom størrelsene er proporsjonale.

a.)

x	10	15	25	30	40	50
y	118	178	304	354	450	598

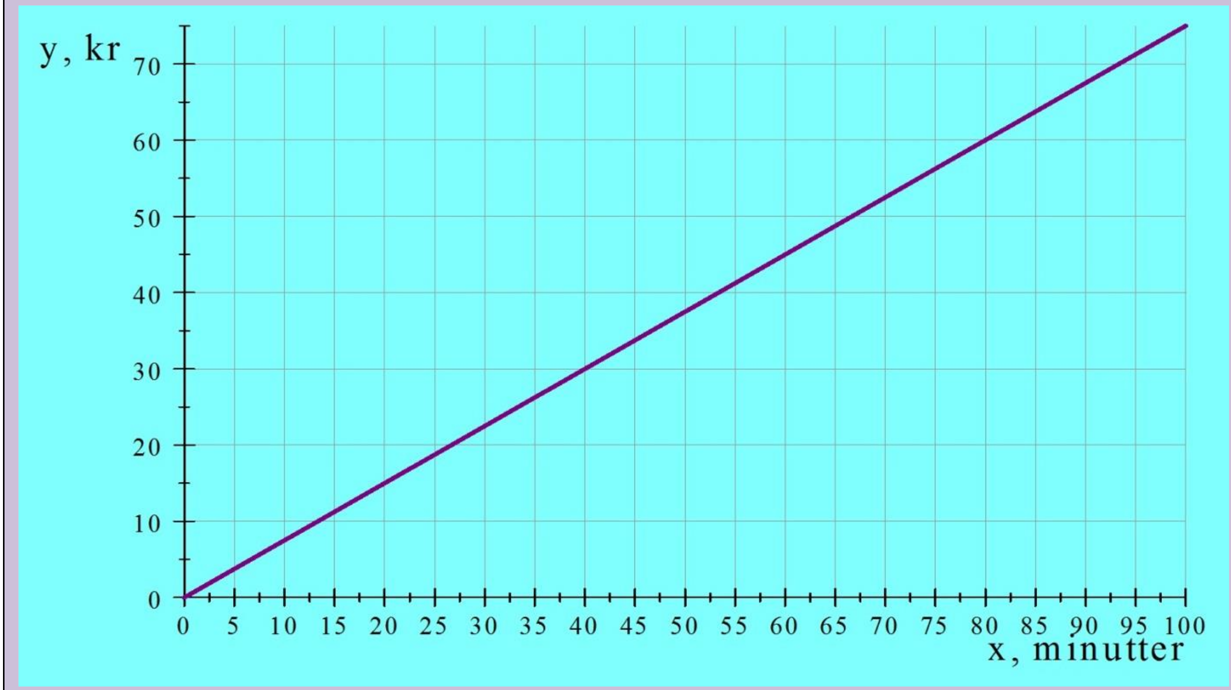
b.)

x	10	20	30	40	50	60
y	138	262	380	506	602	740

c.)

x	10	20	30	40	50
y	4	7.8	11.9	15.9	19.9

OPPGAVE 3:



Grafen viser hvor mange minutter vi ringer med en mobiltelefon og hvor mye vi må betale for samtalen.

a.) Forklar at antallet minutter i ringetid og prisen vi må betale, er proporsjonale størrelser.

b.) Finn en formel for sammenhengen mellom de to størrelsene.

OPPGAVE 4:

En bil bruker 0.80l bensin per mil på langkjøring. Bensin koster kr. 11 per liter.

a.) Forklar at bensinkostnaden ved å kjøre x mil er y=8.8x

b.) Tegn grafen til y for x- verdier mellom 0 og 100 mil.

c.) Finn grafisk hvor mye det koster å kjøre 50 mil.

d.) Hvor langt kan vi kjøre for kr. 200?