

UNIVERSITETET FOR MILJØ- OG BIOVITENSKAP



Forord

Denne masteroppgaven på 30 studiepoeng i anvendt matematikk er gjennomført ved Institutt for matematiske realfag og teknologi, Universitetet for miljø- og biovitenskap.

Masteroppgaven er skrevet i MiKTeX ved hjelp av WinEdt 7. Internett siden <http://no.wikipedia.org/wiki/LaTeX> var til hjelp i forbindelse med skriving av bokstavene æ, ø og å. Både programmet pplane (John C. Polking, Department of Mathematics, Rice University) og Studentversjon av MATLAB har vært benyttet i masteroppgaven.

Det er noen mennesker som nå fortjener en takk.

Først og fremst ønsker jeg å takke min veileder, professor Arkadi Ponossov ved Universitetet for miljø- og biovitenskap, for at han introduserte meg for masteroppgavens tema og for at han har delt med meg av sin store fagkunnskap. Jeg takker ham for at han underveis i arbeidet med masteroppgaven har gitt meg utfordringer å strekke meg etter, samt konstruktive tilbakemeldinger. Alt dette har vært til stor hjelp i arbeidet med masteroppgaven, og har i tillegg bidratt til å utvikle min matematiske kompetanse.

En stor takk går dessuten til doktorgradsstudent Valeriya Tafintseva ved Universitetet for miljø- og biovitenskap for at hun sa seg villig til å bistå meg ved eventuelt behov.

Videre takker jeg personalet ved Universitetsbiblioteket for miljø- og biovitenskap for meget god service i forbindelse med lån av litteratur.

Mine foreldre og min ektefelle fortjener stor takk for å ha støttet meg gjennom min utdanning. Og en helt spesiell takk går til min datter: Du er hver dag en kilde til inspirasjon i pappas liv.

Roger Digre

Sammen drag

Denne masteroppgaven i anvendt matematikk behandler kontinuerlige S-systemer og stykkevis kontinuerlige S-systemer, inkludert lokal stabilitetsanalyse av slike systemer. S-systemer er viktige i analyse av biokjemiske systemer, og vi beskriver hvilke trinn en analyse av biokjemiske systemer består av. Vi illustrerer konstruksjon av diagrammer og dertil hørende kontinuerlige S-systemer, med eksempler. Deretter viser vi at ethvert initialverdiproblem hvor differensiallikningene er et kontinuerlig S-system der samtlige variabler forutsettes positive, og der eventuelle uavhengige variabler er konstante, er velformulert. Vi redegjør for teori som gir viktige metoder til bruk i lokal stabilitetsanalyse. Deretter gir vi eksempler på lokal stabilitetsanalyse av kontinuerlige S-systemer. Egenutviklet MATLAB-kode brukes til å finne kritiske punkter og til å vurdere ustabilitet og lokal asymptotisk stabilitet. I behandlingen av stykkevis kontinuerlige S-systemer definerer vi viktige begreper, og vi gir eksempler med stykkevis kontinuerlige S-systemer hvor vi utfører lokal stabilitetsanalyse. Egenutviklet MATLAB-kode brukes til å analysere normalkomponenters variasjon langs en vegg. Vi demonstrerer at for stykkevis kontinuerlige S-systemer kan forskjellige områder av samme vegg være av forskjellig type (transparent, hvit eller svart). For ett av de stykkevis kontinuerlige S-systemene demonstrerer vi en lukket bane som gjennomløper samtlige virkeområder.

Abstract

This Master's thesis in applied mathematics treats continuous S-systems and piecewise continuous S-systems, including local stability analysis of such systems. S-systems are important in analysis of biochemical systems, and we describe which steps an analysis of biochemical systems consists of. Using examples, we illustrate the process of constructing maps and accompanying continuous S-systems. Then we show that every initial value problem where the differential equations are a continuous S-system in which all variables are assumed to be positive and any independent variables are constant, is well posed. We give an account of theory that gives important methods for use in local stability analysis. Subsequently we give examples of local stability analysis of continuous S-systems. MATLAB-code made by the master student himself is made use of to find critical points and to assess instability and local asymptotic stability. In the treatment of piecewise continuous S-systems we define important terms, and we give examples with piecewise continuous S-systems where we perform local stability analysis. MATLAB-code made by the master student himself is made use of to analyse variation of normal components along a wall. We demonstrate that for piecewise continuous S-systems, different parts of the same wall can be of different type (transparent, white or black). For one of the piecewise continuous S-systems we demonstrate a closed trajectory running through every operational domain.

Innledning

I denne masteroppgaven i anvendt matematikk skal vi se at matematikk er et viktig verktøy i analyse av biokjemiske systemer. Dette innebærer at matematikk spiller en sentral rolle innenfor områder som blant annet genteknologisk forskning, forskning på sykdommers biokjemiske årsakssammenhenger, og utvikling av nye medisiner. Dette er forskningsområder der resultatene kan ha direkte, og store, konsekvenser.

Temaet i masteroppgaven er kontinuerlige S-systemer og stykkevis kontinuerlige S-systemer. Et S-system er et system av en spesiell type differensiallikninger, og brukes i analyse av biokjemiske systemer. Ifølge professor Arkadi Ponossov ved Universitetet for miljø- og biovitenskap er kontinuerlige S-systemer godt utforsket, mens stykkevis kontinuerlige S-systemer hittil er lite studert.

Hovedproblemstillingene som er behandlet i masteroppgaven er:

- Er initialverdiproblemer med kontinuerlige S-systemer velformulerte?
- Lokal stabilitetsanalyse av kontinuerlige S-systemer, utført matematisk og numerisk.
- Lokal stabilitetsanalyse av stykkevis kontinuerlige S-systemer, utført matematisk og numerisk.

Innledningsvis er dessuten et eget kapittel viet temaet “Fra biokjemi til matematikk”. Det er tilsammen tyve eksempler i masteroppgaven, og samtlige av disse er egenutviklede.

Vi vil nå i korte trekk gjennomgå innholdet i hvert av kapitlene 1-4. Kapittel 1, 2, 3 og 4 i masteroppgaven velger vi å samlet kalle “hoveddelen”. Denne gjennomgangen av hoveddelen inkluderer stoff som bygger på, eller er hentet fra, kilder. *Referanser til disse kildene er oppgitt i hoveddelen.*

Kapittel 1, 2 og 3 dreier seg om kontinuerlige S-systemer, kapittel 4 dreier seg om stykkevis kontinuerlige S-systemer.

I kapittel 1 redegjør vi for en klassifisering av ulike bestanddeler i et biokjemisk system, samt for hvilke trinn en analyse av et biokjemisk system består av. Vi skal se at symbolske diagrammer er til stor hjelp i slik analyse. Vi gir eksempler på hvordan man setter opp, eller konstruerer, slike diagrammer. Deretter introduserer vi S-systemer. Dette er systemer av differensiallikninger på formen

$$\dot{X}_i = \alpha_i \prod_{j=1}^{n+m} X_j^{g_{ij}} - \beta_i \prod_{j=1}^{n+m} X_j^{h_{ij}} \quad i = 1, \dots, n,$$

der $\alpha_i, \beta_i, g_{ij}$ og h_{ij} er parametere. Vi ser altså at S-systemer hører inn under Power-Law Formalisme. Modeller som benytter S-systemer gir god overensstemmelse mellom eksperiment og modell, og S-systemer er godt egnet for matematisk og numerisk analyse. Det finnes også teoretiske grunner for å bruke S-systemer. Kapitlet avsluttes med at vi i eksempler omskriver diagrammer til S-systemer.

Kapittel 2 innledes med å forklare at et initialverdiproblem sies å være velformulert hvis det har en entydig løsning som avhenger kontinuerlig av initialbetingelsen, og dessuten redegjør vi for at et S-system der de såkalte uavhengige variablene er konstante, er et autonomt system, dvs. et system av differensiallikninger på formen

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= F_1(X_1, \dots, X_n) \\ &\vdots \\ \dot{X}_n &= F_n(X_1, \dots, X_n) \end{aligned} \tag{1}$$

Deretter forklarer vi forskjellen på et kontinuerlig og et stykkevis kontinuerlig S-system: La (1) betegne et S-system. Dersom definisjonsmengden, også kalt faserommet, til funksjonene $F_i, i = 1, \dots, n$, er delt opp i delområder av én eller flere flater eller kurver, og settet av parametere i S-systemet ikke varierer innenfor ett og samme delområde, men ikke nødvendigvis er det samme i hvert delområde, er S-systemet et stykkevis kontinuerlig S-system. Dersom faserommet ikke er delt opp, er S-systemet et kontinuerlig S-system. Vi viser at initialverdiproblemer med kontinuerlige S-systemer har minst én løsning. Deretter at disse initialverdiproblemene har høyst én løsning. Vi avslutter kapittel 2 med å vise at løsningen avhenger kontinuerlig av initialbetingelsen. Dermed er disse initialverdiproblemene velformulerte.

I kapittel 3 definerer vi begrepet “kritisk punkt” for autonome systemer, og vi forklarer at et kritisk punkt for et S-system tilsvarer en likevektstilstand i det biokjemiske systemet som S-systemet beskriver. Deretter formulerer vi, og gjennomfører et bevis for, et viktig resultat som gir en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for eksistens av et unikt kritisk punkt for S-systemer, og som også gir en metode for å finne dette unike kritiske punktet. Videre redegjør vi, i form av definisjoner, for hva det vil si at et kritisk punkt er stabilt, ustabilt, lokalt asymptotisk stabilt eller globalt asymptotisk stabilt. Vi gjengir et viktig resultat som gir tilstrekkelige betingelser for at et kritisk punkt for et autonomt system skal være lokalt asymptotisk stabilt, henholdsvis ustabilt, og vi viser, som et umiddelbart korollar, at et tilsvarende resultat gjelder for et unikt kritisk punkt for S-systemer. Sist i kapittel 3 gir vi fem eksempler på lokal stabilitetsanalyse av kontinuerlige S-systemer, hvilket innebærer å bestemme eventuelt unikt kritisk punkt, samt dette kritiske punktets lokale stabilitetsegenskaper. I tre av eksemplene, hvor S-systemene består av to differensiallikninger, gjør vi stabilitetsanalysen matematisk, samt numerisk ved hjelp av egenutviklet MATLAB-kode, og gir figurer som viser et utvalg av løsningskurver (baner). I to av eksemplene, hvor S-systemene består av fire differensiallikninger, gjør vi den kun numerisk ved hjelp av den egenutviklede MATLAB-koden.

Kapittel 4 dreier seg om stykkevis kontinuerlige S-systemer. Et stykkevis kontinuerlig S-system kan betraktes som bestående av flere kontinuerlige S-systemer, hvert med sitt eget definisjonsområde (virkeområde) i faserommet. Hvert av disse delsystemene ville isolert sett vært definert på hele faserommet. Her definerer vi begrepet “vegg” som en flate som deler faserommet inn i virkeområder, og vi redegjør for hva det vil si at en vegg er transparent, hvit eller svart, og hvilken betydning dette har for banene. Et eventuelt kritisk punkt for hvert av de kontinuerlige S-systemene kalles et fokuspunkt når de kontinuerlige S-systemene utgjør et stykkevis kontinuerlig S-system. Avslutningsvis i kapitlet gir vi eksempler på stykkevis kontinuerlige S-systemer. I disse eksemplene utfører vi lokal stabilitetsanalyse, og vi bruker egenutviklet MATLAB-kode for å undersøke og illustrere hvor en vegg er henholdsvis transparent, hvit eller svart. Vi gir figurer som illustrerer forskjellige baner, og for ett av de stykkevis kontinuerlige S-systemene demonstrerer vi en lukket bane som gjennomløper samtlige virkeområder. Vi demonstrerer dessuten at for stykkevis kontinuerlige S-systemer kan forskjellige områder av samme vegg være av forskjellig type (transparent, hvit eller svart).

Innhold

Forord	i
Sammendrag	ii
Abstract	iii
Innledning	iv
1 Fra biokjemi til matematikk	1
1.1 Analyse av biokjemiske systemer	1
1.2 Introduksjon av S-systemer	8
1.3 Fra diagram til S-system: Noen eksempler	11
2 Velformulerte initialverdiproblemer	17
2.1 Autonome systemer. Faserom	18
2.2 Eksistens	20
2.3 Entydighet	22
2.4 Kontinuerlig avhengighet av initialbetingelsen	31
3 Lokal stabilitetsanalyse av kontinuerlige S-systemer	33
3.1 Kritiske punkter	33
3.2 Kritiske punkters stabilitet	40
3.3 Eksempler på lokal stabilitetsanalyse av kontinuerlige S-systemer	44
4 Stykkevis kontinuerlige S-systemer	71
4.1 Introduksjon av stykkevis kontinuerlige S-systemer	71
4.2 Eksempler på stykkevis kontinuerlige S-systemer med lokal stabilitetsanalyse	75
Konklusjon	99

A	MATLAB-kode for lokal stabilitetsanalyse av S-system med to avhengige og ingen uavhengige variabler	101
B	MATLAB-kode for lokal stabilitetsanalyse av S-system med to avhengige og én uavhengig variabel	107
C	MATLAB-kode for lokal stabilitetsanalyse av S-system med fire avhengige og ingen uavhengige variabler	113
D	MATLAB-kode for lokal stabilitetsanalyse av S-system med fire avhengige og to uavhengige variabler	121
E	MATLAB-kode for beregning av todimensjonale S-systemers normalkomponent på en vegg	129
	Bibliografi	137

Figurer

1.1	Diagram med to avhengige variabler, samt hemning og aktivering.	6
1.2	Diagram med to avhengige variabler, samt to aktiverende modulasjoner.	7
1.3	Diagram med to avhengige variabler og én uavhengig variabel.	7
1.4	Diagram som viser et lukket system med resirkulering.	7
1.5	Diagram med fire avhengige variabler og to uavhengige variabler.	8
3.1	Faseportrett og retningsfelt i eksempel 3.3.1. Det kritiske punktet K er ustabil.	68
3.2	Faseportrett og retningsfelt i eksempel 3.3.2. Det kritiske punktet K er stabilt, men ikke LA-stabilt.	69
3.3	Faseportrett og retningsfelt i eksempel 3.3.3. Det kritiske punktet K er LA-stabilt.	70
4.1	Faseportrett og retningsfelt i eksempel 4.2.1. Veggen er gitt ved $X_1 = 1, X_2 > 0$. F_1 er et synlig fokuspunkt for S_1 , F_2 er et synlig fokuspunkt for S_2 . Både F_1 og F_2 er LA-stabile kritiske punkter for det stykkevis kontinuerlige S-systemet. (Figuren er laget ved hjelp av blant annet pplane og Studentversjon av MATLAB).	90
4.2	Grafisk fremstilling av normalkomponentene på veggen i eksempel 4.2.1, for S_1 og S_2 , som funksjon av X_2 . Normalkomponentene for S_1 og S_2 er like i ethvert punkt på veggen, hvilket medfører at grafene for normalkomponentene er sammenfallende. Veggen er gitt ved $X_1 = 1, X_2 > 0$	91
4.3	Faseportrett og retningsfelt i eksempel 4.2.2. Veggen er gitt ved $X_1 = 1, X_2 > 0$. F_1 og F_2 er usynlige fokuspunkter for henholdsvis S_1 og S_2 . Det stykkevis kontinuerlige S-systemet har ingen kritiske punkter. (Figuren er laget ved hjelp av blant annet pplane og Studentversjon av MATLAB).	92

4.4	Grafisk fremstilling av normalkomponentene på veggen i eksempel 4.2.2, for S_1 og S_2 , som funksjon av X_2 . Normalkomponentene for S_1 og S_2 er like i ethvert punkt på veggen, hvilket medfører at grafene for normalkomponentene er sammenfallende. Veggen er gitt ved $X_1 = 1, X_2 > 0$	93
4.5	Faseportrett og retningsfelt i eksempel 4.2.3. Veggen er gitt ved $X_1 > 0, X_2 = 1.4$. F_1 er et usynlig fokuspunkt for S_1 . F_2 er et synlig fokuspunkt for S_2 . F_2 er et LA-stabilt kritisk punkt for det stykkevis kontinuerlige S-systemet. (Figuren er laget ved hjelp av blant annet pplane og Studentversjon av MATLAB).	94
4.6	Grafisk fremstilling av normalkomponentene på veggen i eksempel 4.2.3, for S_1 og S_2 , som funksjon av X_1 . Veggen er gitt ved $X_1 > 0, X_2 = 1.4$	95
4.7	Faseportrett og retningsfelt i eksempel 4.2.4. Veggen er gitt ved $X_1 = 8, X_2 > 0$. $(8, 2)$ er et usynlig fokuspunkt for både S_1 og S_2 . (Figuren er laget ved hjelp av blant annet pplane og Studentversjon av MATLAB).	96
4.8	Grafisk fremstilling av normalkomponentene på veggen i eksempel 4.2.4, for S_1 og S_2 , som funksjon av X_2 . Veggen er gitt ved $X_1 = 8, X_2 > 0$	97
4.9	Faseportrett og retningsfelt i eksempel 4.2.5. Veggene er gitt ved $X_1 = 2.5, X_2 > 0$ og $X_1 > 0, X_2 = 2.5$. F_1, F_2, F_3 og F_4 er stabile, men ikke LA-stabile kritiske punkter for det stykkevis kontinuerlige S-systemet. (Figuren er laget ved hjelp av blant annet pplane og Studentversjon av MATLAB).	98

Kapittel 1

Fra biokjemi til matematikk

I dette kapitlet skal vi se på hva et biokjemisk system generelt består av, og få en oversikt over de forskjellige trinnene i analyse av et biokjemisk system. Vi skal dessuten se nærmere på de trinnene som går forut for den matematiske delen av slik analyse, og illustrere disse trinnene med eksempler. Deretter gir vi en beskrivelse av, og eksempler på, en spesiell type likningssystemer som brukes i analyse av biokjemiske systemer, nemlig S-systemer.

1.1 Analyse av biokjemiske systemer

Et biokjemisk system består av *avhengige variabler*, *uavhengige variabler* og *parametere*. (Voit [14], s. 21-22).

- *Avhengig Variabel*: En variabel som representerer en systemkomponent eller et forråd av komponenter, hvis verdi påvirkes av systemet. Typisk forandrer verdiene av avhengige variabler seg i løpet av et eksperiment.
- *Uavhengig Variabel*: En variabel som representerer en systemkomponent eller et forråd av komponenter, som selv er upåvirket av systemet. Typisk er uavhengige variabler konstante under ethvert gitt eksperiment eller de forandrer seg på en måte som kontrolleres av eksperimentatoren.
- *Parameter*: En størrelse med en konstant numerisk verdi som kvantifiserer en egenskap til systemet.

(Voit [14], s. 21-22, oversatt av Roger Digre).

En tredje type variabel er *tid*, som vanligvis betegnes med t . (Voit [14], s. 22).

I de fleste tilfeller representerer vi en avhengig eller uavhengig variabel med en stor X med én indeks, f. eks., X_1 , X_6 , X_i , eller X_j ; vi lister opp de avhengige variablene først og deretter de uavhengige variablene. For parametere vil vi bruke små latinske eller greske bokstaver uten en indeks eller med én eller to indekser, f. eks., α , β_i , g_{ij} , h_{12} , eller $f_{i,n+1}$.

(Voit [14], s. 23, oversatt av Roger Digre).

Analyse av et biokjemisk system er en sekstrinnsprosess (Voit [14], s. 14):

1. List opp alle komponenter eller forråd av komponenter som påvirker systemet.
2. List opp alle vekselvirkninger mellom disse komponentene og alle modulasjoner som komponenter påvirker systemet ved.
3. Still opp komponenter, forråd, vekselvirkninger, og modulasjoner i form av et diagram.
4. Omskriv diagrammet til matematiske symboler og likninger.
5. Analyser disse likningene.
6. Tolk resultatene.

(Voit [14], s. 14, oversatt av Roger Digre).

I dette kapitlet skal vi se nærmere på de fire første trinnene. I kapittel 3 går vi nærmere inn på femte trinn. Det sjette trinnet, som dreier seg om å formulere hva resultatene av analysen i trinn fem betyr for det konkrete, biokjemiske systemet, blir ikke behandlet i denne masteroppgaven.

De tre første av de seks trinnene i analyse av et biokjemisk system dreier seg om konstruksjon av et ekte diagram, og i første trinn avgjør man hvilke komponenter som skal være med i modellen. Avgjørelsen om hvilke komponenter som skal inngå er ofte et kompromiss: Få komponenter gjør analysen enklere, men samtidig må viktige komponenter inngå. Denne avgjørelsen kan skape splid om hvorvidt modellen er adekvat eller ikke. (Voit [14], s. 23-24)

I andre trinn er ikke poenget å beskrive prosessene i detalj, men å klarlegge hvilke variabler som påvirker de enkelte avhengige variablene. Det er to hovedtyper av prosesser: *Flyt av stoff* og *modulasjon*. Flyt av stoff kan f. eks. være omdanning av én substans til en annen. Modulasjon kan f. eks. være hemning av en prosess. I dette trinnet bør man dessuten påbegynne

en oversikt over all tilgjengelig informasjon som senere kan komme til nytte. Denne oversikten bør også inneholde en fortegnelse over kildene til informasjonen. (Voit [14], s. 24-25).

Diagrammet, som man setter opp i tredje trinn, utgjør bindeleddet mellom virkeligheten og den matematiske beskrivelsen. (Voit [14], s. 14). Diagrammet består av:

- Avhengige variabler og uavhengige variabler. Disse representerer altså systemkomponenter eller forråd av komponenter.
- Tykke piler, som symboliserer transport eller flyt av stoff. Disse pilene kaller vi *flytpiler*.
- Stiplede piler, som representerer modulasjon av de prosessene som symboliseres med tykke piler. Disse stiplede pilene kaller vi *modulasjonspiler*. En modulasjonspil som har en sirkel med et pluss-tegn ved pilspissen, symboliserer en *aktiverende* modulasjon. En modulasjonspil som har en sirkel med et minus-tegn ved pilspissen, symboliserer en *hemmende* modulasjon.

(Voit [14], kapittel 1). Vi henviser til s. 25-28 i Voit [14] for regler for hvordan man setter opp et diagram og figurer som illustrerer reglene.

Et system som tar opp eller avgir stoff sier vi er *åpent*. Et system som hverken tar opp eller avgir stoff sier vi er *lukket*. (Voit [14], s. 93).

Vi vil nå gi noen eksempler som illustrerer de tre første trinnene i analyse av et biokjemisk system.

Eksempel 1.1.1

1. Vi antar at det biokjemiske systemet består av to systemkomponenter, og at disse er representert ved de to avhengige variablene X_1 og X_2 .
2. Vi antar at det er følgende vekselvirkninger og modulasjoner:
Produksjon av X_1 skjer ved flyt av stoff inn i systemet.
Omdanning av X_1 til X_2 .
Omdanning av X_2 skjer ved flyt av stoff ut av systemet.
 X_2 hemmer produksjonen av X_1 .
 X_1 aktiverer omdanningen av X_2 .
3. Diagrammet blir som vist i figur 1.1 på side 6.

I figur 1.1 representerer flytpilen inn til X_1 produksjon av X_1 . Flytpilen fra X_1 til X_2 representerer omdanning av X_1 til X_2 , og flytpilen ut fra X_2 representerer omdanning (tømming) av X_2 . Modulasjonspilen fra X_2 som møter flytpilen inn til X_1 symboliserer at X_2 modulerer produksjonen av X_1 . Sirkelen med minus-tegnet betyr at modulasjonen er hemmende. Modulasjonspilen fra X_1 som møter flytpilen ut fra X_2 symboliserer at X_1 modulerer omdanningen av X_2 . Sirkelen med pluss-tegnet betyr at modulasjonen er aktiverende.

Dette er et åpent system som både tar opp og avgir stoff.

Eksempel 1.1.2

1. Avhengige variabler:

X_1
 X_2

Ingen uavhengige variabler.

2. Vekselvirkninger og modulasjoner:

Produksjon av X_1 (skjer ved flyt av stoff inn i systemet).

Omdanning av X_1 til X_2 .

Omdanning av X_2 (skjer ved flyt av stoff ut av systemet).

X_2 aktiverer produksjonen av X_1 .

X_1 aktiverer omdanningen av X_2 .

3. Diagrammet blir som vist i figur 1.2 på side 7.

Modulasjonspilen fra X_2 som møter flytpilen inn til X_1 symboliserer at X_2 modulerer produksjonen av X_1 . Sirkelen med pluss-tegnet betyr at modulasjonen er aktiverende. Modulasjonspilen fra X_1 som møter flytpilen ut fra X_2 symboliserer at X_1 modulerer omdanningen av X_2 . Også denne modulasjonen er aktiverende.

Dette er et åpent system som både tar opp og avgir stoff.

Eksempel 1.1.3

1. Avhengige variabler:

X_1
 X_2

Uavhengige variabler:

X_3

2. *Vekselvirkninger og modulasjoner:*

Omdanning av X_3 til X_1 .

Omdanning av X_1 til X_2 .

Omdanning av X_2 (skjer ved flyt av stoff ut av systemet).

X_1 aktiverer omdanningen av X_3 til X_1 .

X_1 hemmer omdanningen av X_2 .

X_2 aktiverer omdanningen av X_1 til X_2 .

X_2 hemmer omdanningen av X_3 til X_1 .

3. *Diagrammet blir som vist i figur 1.3 på side 7.*

Systemet avgir stoff, og er dermed åpent.

Eksempel 1.1.4

1. *Avhengige variabler:*

X_1

X_2

X_3

X_4

Ingen uavhengige variabler.

2. *Vekselvirkninger og modulasjoner:*

Omdanning av X_1 til X_2 .

Omdanning av X_2 til X_3 .

Omdanning av X_3 til X_4 .

Omdanning av X_4 til X_1 .

X_2 aktiverer omdanningen av X_3 til X_4 .

X_3 hemmer omdanningen av X_2 til X_3 .

3. *Diagrammet blir som vist i figur 1.4 på side 7.*

Systemet hverken tar opp eller avgir stoff, og er dermed lukket. I dette systemet resirkuleres X_4 .

Eksempel 1.1.5

1. Avhengige variabler:

X_1
 X_2
 X_3
 X_4

Uavhengige variabler:

X_5
 X_6

2. Vekselvirkninger og modulasjoner:

Omdanning av X_5 til X_1 .

Omdanning av X_1 til X_2 .

Omdanning av X_2 til X_3 .

Omdanning av X_3 til X_4 .

Omdanning av X_4 (skjer ved flyt av stoff ut av systemet).

X_3 aktiverer omdanningen av X_5 til X_1 .

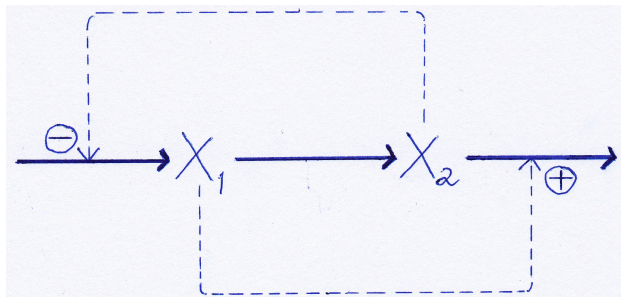
X_4 hemmer omdanningen av X_1 til X_2 .

X_4 hemmer omdanningen av X_3 til X_4 .

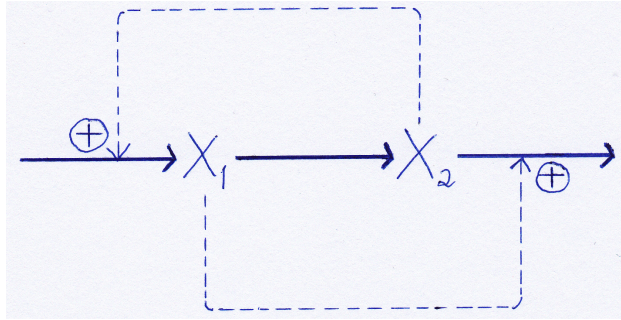
X_6 aktiverer omdanningen av X_3 til X_4 .

3. Diagrammet blir som vist i figur 1.5 på side 8.

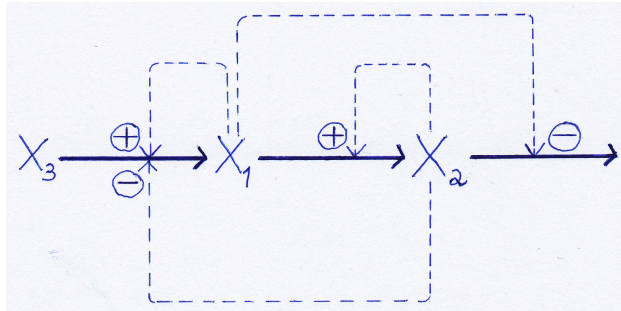
Systemet avgir stoff, og er dermed åpent.



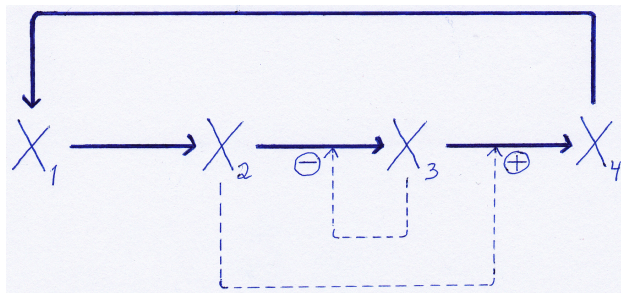
Figur 1.1: Diagram med to avhengige variabler, samt hemning og aktivering.



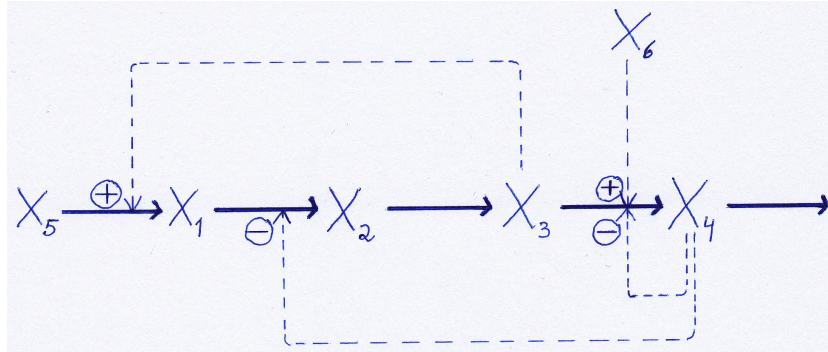
Figur 1.2: Diagram med to avhengige variabler, samt to aktiverende modulasjoner.



Figur 1.3: Diagram med to avhengige variabler og én uavhengig variabel.



Figur 1.4: Diagram som viser et lukket system med resirkulering.



Figur 1.5: Diagram med fire avhengige variabler og to uavhengige variabler.

1.2 Introduksjon av S-systemer

I tillegg til å være betegnelse på en variabel, kan X_i betegne en verdi knyttet til denne variabelen. Eksempelvis: Hvis X_i betegner en substans, kan X_i også betegne f. eks. konsentrasjonen av denne substansen. (På s. 44 i Voit [14] betegner X_1 både substrat og løpende konsentrasjon av substratet). I det følgende kommer begge betydningene (betegnelse på variabel og betegnelse på verdi knyttet til variabelen) til anvendelse.

Verdien X_i (av variabelen med samme navn) er en funksjon av tiden t . Vi lar \dot{X}_i betegne den deriverte av X_i med hensyn på tid. (Voit [14], s. 42). Forandringen i X_i over tid vil være sammensatt av én del som beskriver produksjon av X_i som funksjon av tid og én del som beskriver tømning av X_i som funksjon av tid. Dersom variablene som systemet består av er X_1, X_2, \dots, X_n , vil den delen som beskriver produksjon av X_i være en funksjon V_i^+ av X_1, X_2, \dots, X_n , dvs. $V_i^+(X_1, X_2, \dots, X_n)$, og den delen som beskriver tømning av X_i være en funksjon V_i^- av X_1, X_2, \dots, X_n , dvs. $V_i^-(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Vi får dermed følgende differensiallikning:

$$\dot{X}_i = V_i^+(X_1, X_2, \dots, X_n) - V_i^-(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (1.1)$$

(Voit [14], s. 47).

Det vil være én slik differensiallikning for hver av de avhengige variablene i systemet. Dersom det er n avhengige variabler og m uavhengige variabler i systemet vil det være n differensiallikninger av typen (1.1). Dersom de n avhengige variablene er X_1, X_2, \dots, X_n og de m uavhengige variablene er $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+m}$, så kan hele systemet av n differensiallikninger skrives

slik:

$$\begin{aligned}\dot{X}_i &= V_i^+(X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+m}) \\ &\quad - V_i^-(X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+m}) \quad i = 1, \dots, n.\end{aligned}\quad (1.2)$$

(Voit [14], s. 48-49). "Vi kaller disse n differensiallikningene *systemlikningene*, eller, samlet, *systemlikningen*, eller *systembeskrivelsen*." (Voit [14], s. 48, oversatt av Roger Digre).

Vi lar funksjonene V_i^+ og V_i^- ($i = 1, \dots, n$) være definert ved at

$$V_i^+(X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+m}) = \alpha_i X_1^{g_{i1}} X_2^{g_{i2}} \dots X_n^{g_{in}} X_{n+1}^{g_{i,n+1}} \dots X_{n+m}^{g_{i,n+m}} \quad (1.3)$$

og

$$V_i^-(X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+m}) = \beta_i X_1^{h_{i1}} X_2^{h_{i2}} \dots X_n^{h_{in}} X_{n+1}^{h_{i,n+1}} \dots X_{n+m}^{h_{i,n+m}}, \quad (1.4)$$

der $\alpha_i, \beta_i, g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{i,n+m}, h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{i,n+m}$ er parametere. (1.3) og (1.4) kan skrives slik:

$$V_i^+(X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+m}) = \alpha_i \prod_{j=1}^{n+m} X_j^{g_{ij}} \quad (1.5)$$

og

$$V_i^-(X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+m}) = \beta_i \prod_{j=1}^{n+m} X_j^{h_{ij}}. \quad (1.6)$$

Dersom vi setter (1.5) og (1.6) inn i systemet (1.2), så får vi:

$$\dot{X}_i = \alpha_i \prod_{j=1}^{n+m} X_j^{g_{ij}} - \beta_i \prod_{j=1}^{n+m} X_j^{h_{ij}} \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.7)$$

Systemet (1.7) av differensiallikninger kalles et *S-system*. (Voit [14], s. 50-51).

Leddet

$$\alpha_i \prod_{j=1}^{n+m} X_j^{g_{ij}}$$

beskriver altså produksjon av X_i , og leddet

$$\beta_i \prod_{j=1}^{n+m} X_j^{h_{ij}}$$

beskriver tømning av X_i .

Parameterne α_i og β_i er *hastighetskonstanter*. \dot{X}_i er større desto større α_i er, og \dot{X}_i er mindre desto større β_i er. Vi har at $\alpha_i \geq 0$ og $\beta_i \geq 0$. (Voit [14], s. 51-52).

På s. 53 i Voit [14] nevnes en reaksjon som involverer to molekyler X_1 og ett molekyl X_2 i dannelsen av X_3 og der man fra elementær kjemisk kinetikk har følgende sammenheng:

$$\dot{X}_3 = kX_1^2X_2.$$

I dette tilfellet sier man “at den kinetiske ordenen til reaksjonen med hensyn til det kjemiske stoffet X_1 er 2 og at den kinetiske ordenen til reaksjonen med hensyn til det kjemiske stoffet X_2 er 1.” (Voit [14], s. 53, oversatt av Roger Digre). I slike hastighetslover i elementær kjemisk kinetikk kan eksponentene ha verdiene 0, 1, 2, osv., og for visse biokjemiske reaksjoner antyder studier at lignende hastighetslover, men der eksponentene kan være ikke-heltallige, gjelder. (Voit [14], s. 53). Et eksempel, er ifølge Voit [14], s. 53, at det i Savageau [12] beskrives reaksjoner som har en kinetisk orden på 2.46. Tilsammen danner dette bakgrunnen for at vi kaller parameterne g_{ij} og h_{ij} *kinetiske ordener*, og for at det tillates at verdiene som g_{ij} og h_{ij} kan anta, er hvilke som helst reelle tall. (Voit [14], s. 53).

g_{ij} er den kinetiske ordenen som representerer hvordan X_j påvirker produksjonen av X_i . h_{ij} er den kinetiske ordenen som representerer hvordan X_j påvirker tømningen av X_i . $g_{ij} > 0$ betyr at X_j har en *aktiverende* påvirkning på produksjonen av X_i , og $g_{ij} < 0$ at X_j har en *hemmende* påvirkning på produksjonen av X_i . Tilsvarende betyr $h_{ij} > 0$ at X_j har en aktiverende påvirkning på tømningen av X_i , og $h_{ij} < 0$ at X_j har en hemmende påvirkning på tømningen av X_i . Videre innebærer $g_{ij} = 0$ at produksjonsleddet for X_i er uavhengig av X_j , og $h_{ij} = 0$ at tømingsleddet for X_i er uavhengig av X_j . (Voit [14], s. 55).

S-systemer er viktige av flere grunner: Med hensyn på endel egenskaper er det god overensstemmelse mellom biokjemiske systemer og S-systemer, det finnes teoretiske grunner for å bruke S-systemer i analyse av biokjemiske systemer, og dessuten har S-systemer en form som er godt egnet for matematisk og numerisk analyse. (Voit [14], s. 55-58).

1.3 Fra diagram til S-system: Noen eksempler

Vi så i seksjon 1.1 at det fjerde av de seks trinnene i analyse av et biokjemisk system går ut på å omskrive diagrammet som er satt opp i det tredje trinnet, til matematiske symboler og likninger. Likningene vi vil omskrive diagrammene til i denne masteroppgaven, er S-systemer. I Voit [14], kapittel 3, beskrives hvordan man omskriver diagrammer til S-systemer. Vi vil nå bruke dette ved omskriving av diagrammene i figurene 1.1-1.5 til S-systemer.

Når det gjelder fortegnet til de kinetiske ordenene, g_{ij} og h_{ij} , bruker vi at kinetiske ordener som er forbundet med flyt av stoff, er positive (Voit [14], s. 82 og s. 86), og i samsvar med seksjon 1.2 bruker vi at aktiverende modulasjon tilsvarer positiv kinetisk orden og at hemmende modulasjon tilsvarer negativ kinetisk orden. Hastighetskonstantene, α_i og β_i , er ikke-negative, som anført i seksjon 1.2.

Eksempel 1.3.1 *I dette eksempelet skal vi omskrive diagrammet som ble satt opp i eksempel 1.1.1, dvs. diagrammet i figur 1.1, til et S-system.*

Siden de avhengige variablene er X_1 og X_2 , og det ikke er noen uavhengige variabler, er S-systemet på formen

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= \alpha_1 X_1^{g_{11}} X_2^{g_{12}} - \beta_1 X_1^{h_{11}} X_2^{h_{12}} \\ \dot{X}_2 &= \alpha_2 X_1^{g_{21}} X_2^{g_{22}} - \beta_2 X_1^{h_{21}} X_2^{h_{22}}\end{aligned}\tag{1.8}$$

X_2 modulerer produksjonen av X_1 . Dette er den eneste variabelen som direkte påvirker produksjonen av X_1 . Siden modulasjonen er hemmende, er $g_{12} < 0$. Produksjonsleddet for X_1 blir $\alpha_1 X_2^{g_{12}}$.

X_1 er den eneste variabelen som direkte påvirker tømningen av X_1 . Siden h_{11} er forbundet med flyt av stoff, er $h_{11} > 0$. Tømmingsleddet for X_1 blir $\beta_1 X_1^{h_{11}}$.

X_1 er den eneste variabelen som direkte påvirker produksjonen av X_2 . Produksjonsleddet for X_2 er dermed $\alpha_2 X_1^{g_{21}}$. Siden produksjon av X_2 her er samme prosess som tømning av X_1 , er produksjonsleddet for X_2 og tømmingsleddet for X_1 like. Dermed må $\alpha_2 = \beta_1$ og $g_{21} = h_{11}$. Produksjonsleddet for X_2 er altså $\beta_1 X_1^{h_{11}}$.

X_1 og X_2 er de eneste variablene som direkte påvirker tømningen av X_2 . Siden X_1 aktiverer tømningen av X_2 , er $h_{21} > 0$. h_{22} er forbundet med flyt av stoff, følgelig er $h_{22} > 0$. Tømmingsleddet for X_2 blir $\beta_2 X_1^{h_{21}} X_2^{h_{22}}$.

S-systemet blir:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= \alpha_1 X_2^{g_{12}} - \beta_1 X_1^{h_{11}} & g_{12} < 0, h_{11} > 0 \\ \dot{X}_2 &= \beta_1 X_1^{h_{11}} - \beta_2 X_1^{h_{21}} X_2^{h_{22}} & h_{11}, h_{21}, h_{22} > 0\end{aligned}\tag{1.9}$$

Dette S-systemet er på formen (1.8), med $\alpha_2 = \beta_1, g_{11} = h_{12} = 0, g_{21} = h_{11}, g_{22} = 0$.

Ved hver av likningene i S-systemet (1.9) har vi angitt fortegnet til hver av de kinetiske ordenene som er forskjellig fra null. Dette er nyttig, med tanke på at vi senere i masteroppgaven skal sette inn spesifikke verdier for hastighetskonstantene og de kinetiske ordenene. Husk at hastighetskonstantene i et S-system alltid er ikke-negative.

Eksempel 1.3.2 *Vi setter opp S-systemet for diagrammet i figur 1.2 på helt tilsvarende måte som vi satt opp S-systemet for diagrammet i figur 1.1. De avhengige variablene er også her X_1 og X_2 , og det er ingen avhengige variabler, så S-systemet er på formen (1.8). Siden X_2 aktiverer produksjonen av X_1 , er $g_{12} > 0$.*

S-systemet blir:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= \alpha_1 X_2^{g_{12}} - \beta_1 X_1^{h_{11}} & g_{12}, h_{11} > 0 \\ \dot{X}_2 &= \beta_1 X_1^{h_{11}} - \beta_2 X_1^{h_{21}} X_2^{h_{22}} & h_{11}, h_{21}, h_{22} > 0\end{aligned}\tag{1.10}$$

Vedrørende h_{11} og h_{22} : Når vi senere i masteroppgaven skal sette inn spesifikke verdier for hastighetskonstantene og de kinetiske ordenene, kommer vi for S-systemet som hører til diagrammet i figur 1.2 til å bruke verdien null for h_{11} og h_{22} .

S-systemet (1.10) blir da:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= \alpha_1 X_2^{g_{12}} - \beta_1 & g_{12} > 0 \\ \dot{X}_2 &= \beta_1 - \beta_2 X_1^{h_{21}} & h_{21} > 0\end{aligned}\tag{1.11}$$

Tømmingen av X_1 er fremdeles lik produksjonen av X_2 , men begge er nå konstante.

(1.11) er på formen (1.8), med $\alpha_2 = \beta_1, g_{11} = h_{11} = h_{12} = g_{21} = g_{22} = h_{22} = 0$.

Eksempel 1.3.3 Vi skal nå omskrive diagrammet i figur 1.3 til et S -system. Med avhengige variabler X_1 og X_2 , samt uavhengig variabel X_3 , er S -systemet på formen

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= \alpha_1 X_1^{g_{11}} X_2^{g_{12}} X_3^{g_{13}} - \beta_1 X_1^{h_{11}} X_2^{h_{12}} X_3^{h_{13}} \\ \dot{X}_2 &= \alpha_2 X_1^{g_{21}} X_2^{g_{22}} X_3^{g_{23}} - \beta_2 X_1^{h_{21}} X_2^{h_{22}} X_3^{h_{23}}\end{aligned}\tag{1.12}$$

I diagrammet i figur 1.3 er det flere modulasjoner enn i diagrammene i figur 1.1 og figur 1.2. I tillegg må X_3 tas med i produksjonsleddet for X_1 . g_{13} er forbundet med flyt av stoff, og derfor er $g_{13} > 0$. Siden X_1 aktiverer omdanningen av X_3 til X_1 (og dermed produksjonen av X_1), og X_2 aktiverer omdanningen av X_1 til X_2 (og dermed tømningen av X_1), er $g_{11} > 0$ og $h_{12} > 0$. Siden X_1 hemmer omdanningen, og dermed tømningen, av X_2 , og X_2 hemmer omdanningen av X_3 til X_1 (og dermed produksjonen av X_1), er $h_{21} < 0$ og $g_{12} < 0$. $h_{11} > 0$ og $h_{22} > 0$, da begge er forbundet med flyt av stoff.

S -systemet blir:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= \alpha_1 X_1^{g_{11}} X_2^{g_{12}} X_3^{g_{13}} \\ &\quad - \beta_1 X_1^{h_{11}} X_2^{h_{12}} \quad g_{11}, g_{13}, h_{11}, h_{12} > 0, g_{12} < 0 \\ \dot{X}_2 &= \beta_1 X_1^{h_{11}} X_2^{h_{12}} \\ &\quad - \beta_2 X_1^{h_{21}} X_2^{h_{22}} \quad h_{11}, h_{12}, h_{22} > 0, h_{21} < 0\end{aligned}\tag{1.13}$$

Tømming av X_1 og produksjon av X_2 er samme prosess, tømingsleddet for X_1 og produksjonsleddet for X_2 er derfor like i S -systemet (1.13).

(1.13) er på formen (1.12), med $\alpha_2 = \beta_1, h_{13} = 0, g_{21} = h_{11}, g_{22} = h_{12}, g_{23} = h_{23} = 0$.

Eksempel 1.3.4 Et S -system med de avhengige variablene X_1, X_2, X_3 og X_4 , og ingen uavhengige variabler, er på formen

$$\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= \alpha_1 X_1^{g_{11}} X_2^{g_{12}} X_3^{g_{13}} X_4^{g_{14}} - \beta_1 X_1^{h_{11}} X_2^{h_{12}} X_3^{h_{13}} X_4^{h_{14}} \\
\dot{X}_2 &= \alpha_2 X_1^{g_{21}} X_2^{g_{22}} X_3^{g_{23}} X_4^{g_{24}} - \beta_2 X_1^{h_{21}} X_2^{h_{22}} X_3^{h_{23}} X_4^{h_{24}} \\
\dot{X}_3 &= \alpha_3 X_1^{g_{31}} X_2^{g_{32}} X_3^{g_{33}} X_4^{g_{34}} - \beta_3 X_1^{h_{31}} X_2^{h_{32}} X_3^{h_{33}} X_4^{h_{34}} \\
\dot{X}_4 &= \alpha_4 X_1^{g_{41}} X_2^{g_{42}} X_3^{g_{43}} X_4^{g_{44}} - \beta_4 X_1^{h_{41}} X_2^{h_{42}} X_3^{h_{43}} X_4^{h_{44}}
\end{aligned} \tag{1.14}$$

eller med notasjonen i (1.7):

$$\dot{X}_i = \alpha_i \prod_{j=1}^4 X_j^{g_{ij}} - \beta_i \prod_{j=1}^4 X_j^{h_{ij}} \quad i = 1, \dots, 4. \tag{1.15}$$

Diagrammet i figur 1.4 viser et lukket system der X_4 resirkuleres. Her må tømingsleddet for X_4 være lik produksjonsleddet for X_1 . Siden X_2 aktiverer omdanningen av X_3 til X_4 (og dermed tømningen av X_3), er $h_{32} > 0$. X_3 hemmer omdanningen av X_2 til X_3 (og dermed tømningen av X_2), så $h_{23} < 0$. De kinetiske ordenene som er forbundet med flyt av stoff, er positive.

S -systemet blir:

$$\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= \beta_4 X_4^{h_{44}} - \beta_1 X_1^{h_{11}} & h_{11}, h_{44} > 0 \\
\dot{X}_2 &= \beta_1 X_1^{h_{11}} - \beta_2 X_2^{h_{22}} X_3^{h_{23}} & h_{11}, h_{22} > 0, h_{23} < 0 \\
\dot{X}_3 &= \beta_2 X_2^{h_{22}} X_3^{h_{23}} - \beta_3 X_2^{h_{32}} X_3^{h_{33}} & h_{22}, h_{32}, h_{33} > 0, h_{23} < 0 \\
\dot{X}_4 &= \beta_3 X_2^{h_{32}} X_3^{h_{33}} - \beta_4 X_4^{h_{44}} & h_{32}, h_{33}, h_{44} > 0
\end{aligned} \tag{1.16}$$

(1.16) er på formen (1.15), med $\alpha_1 = \beta_4, \alpha_2 = \beta_1, \alpha_3 = \beta_2, \alpha_4 = \beta_3, g_{14} = h_{44}, g_{21} = h_{11}, g_{32} = h_{22}, g_{33} = h_{23}, g_{42} = h_{32}, g_{43} = h_{33}$. Ved omskriving av diagrammet i figur 1.4 til S -system, ser vi dessuten at endel av de kinetiske ordenene i (1.15) blir null.

Eksempel 1.3.5 Et S -system med avhengige variabler X_1, X_2, X_3 og X_4 , samt uavhengige variabler X_5 og X_6 , er på formen

$$\dot{X}_i = \alpha_i \prod_{j=1}^6 X_j^{g_{ij}} - \beta_i \prod_{j=1}^6 X_j^{h_{ij}} \quad i = 1, \dots, 4. \quad (1.17)$$

Omskriving av diagrammet i figur 1.5 til S -system gir:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= \alpha_1 X_3^{g_{13}} X_5^{g_{15}} - \beta_1 X_1^{h_{11}} X_4^{h_{14}} & g_{13}, g_{15}, h_{11} > 0, h_{14} < 0 \\ \dot{X}_2 &= \beta_1 X_1^{h_{11}} X_4^{h_{14}} - \beta_2 X_2^{h_{22}} & h_{11}, h_{22} > 0, h_{14} < 0 \\ \dot{X}_3 &= \beta_2 X_2^{h_{22}} - \beta_3 X_3^{h_{33}} X_4^{h_{34}} X_6^{h_{36}} & h_{22}, h_{33}, h_{36} > 0, h_{34} < 0 \\ \dot{X}_4 &= \beta_3 X_3^{h_{33}} X_4^{h_{34}} X_6^{h_{36}} - \beta_4 X_4^{h_{44}} & h_{33}, h_{36}, h_{44} > 0, h_{34} < 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

(1.18) er på formen (1.17), med $\alpha_2 = \beta_1, \alpha_3 = \beta_2, \alpha_4 = \beta_3, g_{21} = h_{11}, g_{24} = h_{14}, g_{32} = h_{22}, g_{43} = h_{33}, g_{44} = h_{34}, g_{46} = h_{36}$. Vi ser dessuten at endel av de kinetiske ordenene i (1.17) blir null.

Kapittel 2

Velformulerte initialverdiproblemer

En differensiallikning, f. eks.

$$\frac{dX}{dt} = F(X),$$

der variabelen X er en ukjent funksjon av en annen variabel (her t) og F er en gitt funksjon, sammen med en initialbetingelse, f. eks.

$$X(t_0) = X_0,$$

som en løsning $X(t)$ må oppfylle, utgjør tilsammen et *initialverdiproblem*.

For at et initialverdiproblem skal utgjøre en god matematisk modell av en reell situasjon, bør initialverdiproblemet ha en entydig løsning som avhenger kontinuerlig av initialbetingelsen. Et initialverdiproblem som oppfyller disse betingelsene, sier vi er *velformulert*. Dersom disse kravene ikke er oppfylt, er det stor sannsynlighet for betydelige uoverensstemmelser mellom modell og virkelighet. (Edwards & Penney [5], s. 725-726).

For at et initialverdiproblem skal være velformulert må altså tre krav være oppfylt:

- Det må eksistere *minst én* løsning av initialverdiproblemet.
- Det må eksistere *høyst én* løsning av initialverdiproblemet.
- Løsningen av initialverdiproblemet må avhenge kontinuerlig av initialbetingelsen.

I dette kapitlet skal vi se at ethvert initialverdiproblem som utgjøres av et S-system der samtlige variabelverdier forutsettes å være positive og eventuelle uavhengige variabler er konstante, sammen med et tilhørende sett av initialbetingelser, er velformulert. Vi begynner med et par definisjoner.

2.1 Autonome systemer. Faserom

Definisjon 2.1.1 La $X_1 = X_1(t), \dots, X_n = X_n(t)$ være n funksjoner av variabelen t . La F_1, \dots, F_n være n funksjoner av X_1, \dots, X_n . Systemet

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= F_1(X_1, \dots, X_n) \\ &\vdots \\ \dot{X}_n &= F_n(X_1, \dots, X_n) \end{aligned} \tag{2.1}$$

av differensiallikninger der variabelen t ikke forekommer eksplisitt, kalles et **autonomt system**.

(Definisjon 2.1.1 bygger på Edwards & Penney [5], s. 366). Det autonome systemet (2.1) kan skrives slik:

$$\dot{X}_i = F_i(X_1, \dots, X_n) \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.2}$$

I vektornotasjon, med $(X_1, \dots, X_n) = \mathbf{X}$, $(\dot{X}_1, \dots, \dot{X}_n) = \dot{\mathbf{X}}$ og $(F_1, \dots, F_n) = \mathbf{F}$, kan det autonome systemet (2.1) skrives slik:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}). \tag{2.3}$$

Dersom vi setter

$$F_i(X_1, \dots, X_n) = \alpha_i \prod_{j=1}^{n+m} X_j^{g_{ij}} - \beta_i \prod_{j=1}^{n+m} X_j^{h_{ij}} \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.4}$$

ser vi at ethvert S-system (1.7) med n avhengige variabler X_1, \dots, X_n og m konstante, uavhengige variabler X_{n+1}, \dots, X_{n+m} (m kan være null, hvilket tilsvarer at systemet ikke har noen uavhengige variabler) et et autonomt system. Dersom en uavhengig variabel X_j i S-systemet varierer som en funksjon av tiden (f. eks. $X_j = X_j(t) = kt$, for k en konstant), vil ikke S-systemet være autonomt. Vi forutsetter i denne masteroppgaven at eventuelle uavhengige variabler i S-systemer er konstante, og kan dermed benytte resultater som gjelder for autonome systemer.

Siden det autonome systemet (2.1) består av n differensiallikninger med n variabler sier vi at det autonome systemet (2.1) er n -dimensjonalt. Tilsvarende sier vi at et S-system med n avhengige variabler X_1, \dots, X_n , er n -dimensjonalt.

Definisjon 2.1.2 *La*

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$$

*være et n -dimensjonalt autonomt system. Den delmengden av \mathbb{R}^n der \mathbf{F} er definert kaller vi **faserommet** til det autonome systemet. For todimensjonale autonome systemer kaller vi faserommet også **faseplanet**.*

X_i kan, som bemerket innledningsvis i seksjon 1.2, betegne konsentrasjon. Konsentrasjoner ikke kan være negative. Dersom den kinetiske ordenen g_{ij} eller h_{ij} i et S-system er negativ, må dessuten $X_j \neq 0$ for å unngå å dele på null. Dette er noe av bakgrunnen for at vi i denne masteroppgaven lar faserommet til et n -dimensjonalt S-system være

$$D = \{(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n \mid X_i > 0, i = 1, \dots, n\}. \quad (2.5)$$

Av ovennevnte grunner forutsetter vi i denne masteroppgaven dessuten at verdien også til eventuelle uavhengige variabler er større enn null. I beviset for korollar 2.2.2 og i beviset for korollar 2.3.10 vil vi se enda en grunn til at vi ikke lar faserommet for S-systemer inkludere de positive halvaksene og origo.

La

$$\dot{X}_i = F_i(X_1, \dots, X_n) \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

betegne et n -dimensjonalt S-system med faserom gitt ved (2.5). Dersom faserommet til S-systemet er delt opp i delområder av én eller flere flater (for todimensjonale S-systemer: Kurver), og settet av parametere (hastighetskonstanter og kinetiske ordener) ikke varierer innenfor ett og samme delområde, men ikke nødvendigvis er det samme i hvert delområde, sier vi at S-systemet er *stykkevis kontinuerlig*. Dersom faserommet ikke er delt opp, sier vi at S-systemet er kontinuerlig, for i så fall er for hver $i = 1, \dots, n$, funksjonen F_i kontinuerlig på faserommet. Fram til kapittel 4 lar vi “S-system” bety “kontinuerlig S-system”.

2.2 Eksistens

I denne seksjonen skal vi se på eksistens av løsninger av S-systemer med tilhørende initialbetingelser. Et sett initialbetingelser

$$\begin{aligned} X_1(t_0) &= X_{1,0} \\ &\vdots \\ X_n(t_0) &= X_{n,0}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

skriver vi i vektornotasjon slik:

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0.$$

Vi begynner med følgende eksistensteorem:

Teorem 2.2.1 (Lokal eksistens av løsninger) *La funksjonen $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Hvis alle de førsteordens partieltderiverte av \mathbf{f} eksisterer og er kontinuertlige i en omegn om punktet (\mathbf{X}_0, t_0) der $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 \in \mathbb{R}$, så har initialverdi-problemet*

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \tag{2.8}$$

en løsning på et åpent intervall som inneholder punktet $t = t_0$.

Bevis: Teoremet er hentet fra Edwards & Penney [5], s. 723. Der henvises det for beviset til kapittel 6 i Birkhoff & Rota [3]. \square

Korollar 2.2.2 *La*

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \tag{2.9}$$

være et n -dimensjonalt S-system der eventuelle uavhengige variabler er konstante. For enhver \mathbf{X}_0 i faserommet (2.5) og enhver $t_0 \in \mathbb{R}$ har initialverdi-problemet

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \tag{2.10}$$

en løsning på et åpent intervall som inneholder t_0 .

Bevis: La S-systemet være gitt ved at

$$F_i(X_1, \dots, X_n) = \alpha_i \prod_{j=1}^{n+m} X_j^{g_{ij}} - \beta_i \prod_{j=1}^{n+m} X_j^{h_{ij}} \quad i = 1, \dots, n,$$

der de avhengige variablene er X_1, \dots, X_n . Da er

$$\frac{\partial F_i}{\partial X_k} = \alpha_i g_{ik} \prod_{j=1}^{n+m} X_j^{g'_{ij}} - \beta_i h_{ik} \prod_{j=1}^{n+m} X_j^{h'_{ij}} \quad i, k = 1, \dots, n \tag{2.11}$$

der

$$g'_{ij} = \begin{cases} g_{ij} & j \neq k \\ g_{ij} - 1 & j = k \end{cases}$$

og

$$h'_{ij} = \begin{cases} h_{ij} & j \neq k \\ h_{ij} - 1 & j = k. \end{cases}$$

Da ingen av de avhengige variablene i S-systemet antar verdien null på faserommet D (2.5), vil hver av de partieltderiverte (2.11) eksistere og være kontinuerlige på D selv om én eller flere g'_{ij} eller h'_{ij} eventuelt er mindre enn null. Siden faserommet D gitt ved (2.5) er en åpen mengde, finnes det for enhver $\mathbf{X}_0 = (X_{1,0}, \dots, X_{n,0}) \in D$ en åpen omegn O om \mathbf{X}_0 slik at $O \subset D$. Følgelig: For enhver $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \in O$ er $X_i \neq 0$ for hver $i = 1, \dots, n$. Dermed har vi at samtlige førsteordens partieltderiverte (2.11) både eksisterer og er kontinuerlige på O selv om én eller flere g'_{ij} eller h'_{ij} eventuelt er mindre enn null. La nå funksjonen

$$\mathbf{f} : D \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{være definert ved at} \quad \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}).$$

Da vil den førsteordens partieltderiverte av hver av de n komponentfunksjonene til \mathbf{f} med hensyn på hver av X_1, \dots, X_n eksistere og være kontinuerlig på $O \times \mathbb{R} = \{(\mathbf{X}, t) | \mathbf{X} \in O, t \in \mathbb{R}\}$. Den førsteordens partieltderiverte av hver av de n komponentfunksjonene til \mathbf{f} med hensyn på t er lik null, så også disse eksisterer og er kontinuerlige på $O \times \mathbb{R}$. For enhver \mathbf{X}_0 i faserommet og enhver $t_0 \in \mathbb{R}$ er $O \times \mathbb{R}$ en omegn om punktet (\mathbf{X}_0, t_0) . Dermed gir teorem 2.2.1 at

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$$

har en løsning på et åpent intervall som inneholder punktet $t = t_0$, altså at

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$$

har en løsning på et åpent intervall som inneholder t_0 . □

Merknad til beviset for korollar 2.2.2: Eventuelle førsteordens partieltderiverte (av \mathbf{F}) der eksponenten til minst én av de avhengige variablene er negativ, eksisterer ikke i punkter der den eller de aktuelle avhengige variablene er null. Dette er enda en grunn til at vi i denne masteroppgaven velger å ikke inkludere de positive halvaksene og origo i S-systemers faserom.

Vi har i denne seksjonen sett at ethvert S-system der eventuelle uavhengige variabler er konstante, med faserom gitt ved (2.5), og med tilhørende initialbetingelser, har minst én løsning.

2.3 Entydighet

Vi ser nå på entydighet av løsninger av initialverdiproblemer som består av et S-system og et sett initialbetingelser. For $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$, lar vi $|\mathbf{X}|$ betegne den euklidske normen til \mathbf{X} , dvs.

$$|\mathbf{X}| = \sqrt{X_1^2 + \dots + X_n^2}.$$

Teorem 2.3.1 (Entydighet av løsninger) *Anta at funksjonen $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ er kontinuerlig på et område $R \subset A$ og tilfredsstiller følgende Lipschitz-betingelse på R :*

Det finnes en konstant $L > 0$ slik at dersom

$$(\mathbf{X}_1, t), (\mathbf{X}_2, t) \in R \tag{2.12}$$

så er

$$|\mathbf{f}(\mathbf{X}_1, t) - \mathbf{f}(\mathbf{X}_2, t)| \leq L|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|. \tag{2.13}$$

Dersom $\mathbf{X}_1(t)$ og $\mathbf{X}_2(t)$ er to løsninger av initialverdiproblemet

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \tag{2.14}$$

på et åpent intervall I som inneholder punktet $t = t_0$, slik at dersom $(\mathbf{X}_1(t), t), (\mathbf{X}_2(t), t) \in R$ for alle $t \in I$, så er $\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{X}_2(t)$ for alle $t \in I$.

Bevis: Teoremet er hentet fra Edwards & Penney [5], s. 724. Der henvises det for beviset til kapittel 6 i Birkhoff & Rota [3]. I Edwards & Penney [5], s. 724-725, bevises teoremet for det tilfellet at X er en reell variabel. \square

Eksempel 2.3.2, som bygger på et eksempel hentet fra s. 407-408 i Davidson & Donsig [4], viser at de andre premissene i teorem 2.3.1 enn Lipschitz-betingelsen, ikke er tilstrekkelig til å garantere entydighet.

Eksempel 2.3.2 $X_1(t) = 0$ er en løsning av initialverdiproblemet

$$\dot{X} = X^{2/3}, \quad X(0) = 0. \tag{2.15}$$

En annen løsning er $X_2(t) = t^3/27$, siden det gir $\dot{X}_2 = t^2/9 = (t^3/27)^{2/3} = [X_2(t)]^{2/3}$ og $X_2(0) = 0$. Både $X_1(t)$ og $X_2(t)$ er løsninger på hele \mathbb{R} .

La $R = \{(X, t) | X \in \mathbb{R}, t \in I\}$, der I er et fast, men vilkårlig, åpent intervall som inneholder 0. Funksjonen $f(X, t) = X^{2/3}$ er kontinuerlig på R . Både $X_1(t)$ og $X_2(t)$ er løsninger av (2.15) på I . Dessuten er for alle $t \in I$ både $(X_1(t), t)$ og $(X_2(t), t)$ elementer i R .

Anta at $f(X, t) = X^{2/3}$ oppfyller Lipschitz-betingelsen i teorem 2.3.1 på R . Da finnes en $L > 0$ slik at

$$|f(X_1, t) - f(X_2, t)| \leq L|X_1 - X_2|$$

for alle punkter $(X_1, t), (X_2, t) \in R$. Spesielt er da

$$|f(X_1, 0) - f(0, 0)| \leq L|X_1 - 0|,$$

dvs.

$$|X_1^{2/3}| \leq L|X_1|,$$

for alle $X_1 \in \mathbb{R}$. Dermed er

$$\frac{|X_1^{2/3}|}{|X_1|} \leq L,$$

og følgelig

$$\frac{1}{|X_1^{1/3}|} \leq L,$$

for alle $X_1 \in \mathbb{R}$. Dette er usant, siden

$$\lim_{X_1 \rightarrow 0} \frac{1}{|X_1^{1/3}|} = \infty.$$

Vi får altså at $f(X, t) = X^{2/3}$ ikke oppfyller Lipschitz-betingelsen i teorem 2.3.1 på R .

Siden $X_1(t) = X_2(t)$ hvis og bare hvis $t = 0$, er $X_1(t)$ og $X_2(t)$ ikke like for alle $t \in I$. Samlet viser dette at de andre premissene i teorem 2.3.1 enn Lipschitz-betingelsen, ikke er tilstrekkelig til å garantere entydighet.

Vi vil nå vise at ethvert S-system oppfyller Lipschitz-betingelsen i teorem 2.3.1. Dette vil vi gjøre ved å bruke blant annet middelverdisetningen og ekstremalverdisetningen. (Davidson & Donsig [4], s. 405, ga ideen om å bruke middelverdisetningen og ekstremalverdisetningen). Vi begynner med følgende teorem:

Teorem 2.3.3 La $A \subset \mathbb{R}^n$ være åpen og $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Anta at $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$. Hvis hver av de partieltderiverte $\partial f_j / \partial X_i$ eksisterer og er kontinuerlige på A , så er \mathbf{f} deriverbar på A .

Bevis: Se Marsden & Hoffman [7], s. 370. □

Dersom $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, lar vi $\mathbf{Jf}(\mathbf{X}) = \mathbf{Jf}(X_1, \dots, X_n)$ betegne *Jacobimatrisen* til \mathbf{f} , beregnet i $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, dvs.

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{X}) = \mathbf{Jf}(X_1, \dots, X_n) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial X_n} \end{array} \right] \bigg|_{(X_1, \dots, X_n)} \quad (2.16)$$

Teorem 2.3.4 (Middelverdisetningen)

(i) Anta at $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ er deriverbar på en åpen mengde A . For hver $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in A$ slik at linjestykket som forbinder \mathbf{X} og \mathbf{Y} ligger i A (hvilket ikke nødvendigvis er tilfelle for alle \mathbf{X} og \mathbf{Y}), finnes det et punkt \mathbf{c} på det linjestykket slik at

$$f(\mathbf{Y}) - f(\mathbf{X}) = \mathbf{Jf}(\mathbf{c}) \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{X}).$$

(ii) Anta at $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ er deriverbar på den åpne mengden A . Anta at linjestykket som forbinder \mathbf{X} og \mathbf{Y} ligger i A og at $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$. Da finnes det punkter $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m$ på det linjestykket slik at

$$f_i(\mathbf{Y}) - f_i(\mathbf{X}) = \mathbf{Jf}_i(\mathbf{c}_i)(\mathbf{Y} - \mathbf{X}), \quad i = 1, \dots, m.$$

Bevis: Se Marsden & Hoffman [7], s. 373. □

Definisjon 2.3.5 En delmengde A av et normert vektorrom V er **kompakt** hvis enhver følge av punkter i A har en delfølge som konvergerer mot et punkt i A .

(Davidson & Donsig [4], s. 186).

Følgende teorem gir en svært nyttig karakterisering av kompakte mengder i \mathbb{R}^n :

Teorem 2.3.6 (Heine-Borel teoremet) En delmengde av \mathbb{R}^n er kompakt hvis og bare hvis den er lukket og begrenset.

Bevis: Se Davidson & Donsig [4], s. 102-103. □

Teorem 2.3.7 (Ekstremalverdisetningen) La A være en kompakt delmengde av \mathbb{R}^n , og $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ være kontinuert. Da finnes det punkter $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ slik at

$$f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{X}) \leq f(\mathbf{b}) \quad \text{for alle} \quad \mathbf{X} \in A.$$

Bevis: Se Davidson & Donsig [4], s. 125. \square

Definisjon 2.3.8 En delmengde A av \mathbb{R}^n kalles **konveks** hvis $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in A$ medfører at linjestykket som forbinder \mathbf{X} og \mathbf{Y} ligger i A .

(Marsden & Hoffman [7], s. 354).

Vi er nå klare til å formulere og bevise følgende proposisjon:

Proposisjon 2.3.9 La $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, og la C være en kompakt delmengde av A . Anta at $\text{int}C$ (interiøret av C) er konveks. Anta også at de førsteordens partieltderiverte av \mathbf{f} eksisterer og er kontinuert på C . Da tilfredsstiller \mathbf{f} følgende Lipschitz-betingelse på $\text{int}C$:

Det finnes en konstant $L > 0$ slik at dersom

$$\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \text{int}C \quad \text{så er} \quad |\mathbf{f}(\mathbf{X}) - \mathbf{f}(\mathbf{Y})| \leq L|\mathbf{X} - \mathbf{Y}|.$$

Bevis: Siden alle de førsteordens partieltderiverte eksisterer og er kontinuert på C , så eksisterer de og er kontinuert på $\text{int}C$. Teorem 2.3.3 gir da at \mathbf{f} er deriverbar på $\text{int}C$. La $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \text{int}C$. Siden $\text{int}C$ er en konveks mengde, ligger linjestykket som forbinder \mathbf{X} og \mathbf{Y} i $\text{int}C$. Siden $\text{int}C$ er åpen, gir teorem 2.3.4 (ii) at det finnes punkter $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m$ på det linjestykket slik at

$$f_i(\mathbf{Y}) - f_i(\mathbf{X}) = \mathbf{J}f_i(\mathbf{c}_i)(\mathbf{Y} - \mathbf{X}), \quad i = 1, \dots, m,$$

dvs. slik at

$$f_i(\mathbf{Y}) - f_i(\mathbf{X}) = \left. \frac{\partial f_i}{\partial X_1} \right|_{\mathbf{c}_i} (Y_1 - X_1) + \dots + \left. \frac{\partial f_i}{\partial X_n} \right|_{\mathbf{c}_i} (Y_n - X_n) \quad (2.17)$$

Siden linjestykket ligger i $\text{int}C$, er $\mathbf{c}_i \in \text{int}C$ for hver $i = 1, \dots, m$.

Velg en vilkårlig, men fast $i \in \{1, \dots, m\}$ og en vilkårlig, men fast $j \in \{1, \dots, n\}$. Siden alle de førsteordens partieltderiverte er kontinuert på C , er spesielt $\left. \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right|_{\mathbf{c}_i}$, og dermed $\left| \left. \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right|_{\mathbf{c}_i} \right|$, kontinuert på C . Siden C er kompakt, gir dermed teorem 2.3.7 at det finnes en $\mathbf{b}_{ij} \in C$ slik at

$$\left| \left. \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right|_{\mathbf{b}_{ij}} \right| = \sup_{\mathbf{x} \in C} \left| \left. \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right|_{\mathbf{x}} \right| \quad (2.18)$$

For hver $i \in \{1, \dots, m\}$, sett

$$K_i = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \left| \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \Big|_{\mathbf{b}_{ij}} \right| \quad (2.19)$$

(2.17) gir

$$|f_i(\mathbf{Y}) - f_i(\mathbf{X})| = \left| \frac{\partial f_i}{\partial X_1} \Big|_{\mathbf{c}_i} (Y_1 - X_1) + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial X_n} \Big|_{\mathbf{c}_i} (Y_n - X_n) \right| \quad (2.20)$$

Trekantulikheten gir da

$$|f_i(\mathbf{Y}) - f_i(\mathbf{X})| \leq \left| \frac{\partial f_i}{\partial X_1} \Big|_{\mathbf{c}_i} (Y_1 - X_1) \right| + \dots + \left| \frac{\partial f_i}{\partial X_n} \Big|_{\mathbf{c}_i} (Y_n - X_n) \right| \quad (2.21)$$

Dermed får vi

$$|f_i(\mathbf{Y}) - f_i(\mathbf{X})| \leq \left| \frac{\partial f_i}{\partial X_1} \Big|_{\mathbf{c}_i} \right| |(Y_1 - X_1)| + \dots + \left| \frac{\partial f_i}{\partial X_n} \Big|_{\mathbf{c}_i} \right| |(Y_n - X_n)| \quad (2.22)$$

Siden $\text{int}C \subset C$ er

$$\sup_{\mathbf{x} \in \text{int}C} \left| \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \Big|_{\mathbf{x}} \right| \leq \sup_{\mathbf{x} \in C} \left| \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \Big|_{\mathbf{x}} \right| \quad (2.23)$$

Ved (2.18) får vi at

$$\sup_{\mathbf{x} \in \text{int}C} \left| \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \Big|_{\mathbf{x}} \right| \leq \left| \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \Big|_{\mathbf{b}_{ij}} \right| \quad (2.24)$$

Dessuten, siden $\mathbf{c}_i \in \text{int}C$, er

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \Big|_{\mathbf{c}_i} \right| \leq \sup_{\mathbf{x} \in \text{int}C} \left| \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \Big|_{\mathbf{x}} \right| \quad (2.25)$$

som sammen med (2.24) gir

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \Big|_{\mathbf{c}_i} \right| \leq \left| \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \Big|_{\mathbf{b}_{ij}} \right| \quad (2.26)$$

(2.19) medfører at for hver $j \in \{1, \dots, n\}$ er

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \Big|_{\mathbf{b}_{ij}} \right| \leq K_i, \quad (2.27)$$

så for hver $j \in \{1, \dots, n\}$ er

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \Big|_{\mathbf{c}_i} \right| \leq K_i. \quad (2.28)$$

Dermed gir (2.22)

$$|f_i(\mathbf{Y}) - f_i(\mathbf{X})| \leq K_i(|(Y_1 - X_1)| + \dots + |(Y_n - X_n)|). \quad (2.29)$$

For hver $j \in \{1, \dots, n\}$ er

$$|Y_j - X_j| \leq \sqrt{(Y_1 - X_1)^2 + \dots + (Y_n - X_n)^2} = |\mathbf{Y} - \mathbf{X}|, \quad (2.30)$$

så

$$|Y_1 - X_1| + \dots + |Y_n - X_n| \leq n|\mathbf{Y} - \mathbf{X}|. \quad (2.31)$$

(2.29) medfører dermed at

$$|f_i(\mathbf{Y}) - f_i(\mathbf{X})| \leq K_i n |\mathbf{Y} - \mathbf{X}|. \quad (2.32)$$

Vi har

$$|\mathbf{f}(\mathbf{Y}) - \mathbf{f}(\mathbf{X})| = |(f_1(\mathbf{Y}) - f_1(\mathbf{X}), \dots, f_m(\mathbf{Y}) - f_m(\mathbf{X}))|, \quad (2.33)$$

altså

$$|\mathbf{f}(\mathbf{Y}) - \mathbf{f}(\mathbf{X})| = \sqrt{(f_1(\mathbf{Y}) - f_1(\mathbf{X}))^2 + \dots + (f_m(\mathbf{Y}) - f_m(\mathbf{X}))^2}. \quad (2.34)$$

Siden $i \in \{1, \dots, m\}$ var vilkårlig, gir (2.32) at for hver $i \in \{1, \dots, m\}$ er

$$(f_i(\mathbf{Y}) - f_i(\mathbf{X}))^2 \leq K_i^2 n^2 |\mathbf{Y} - \mathbf{X}|^2. \quad (2.35)$$

Sett

$$K = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} K_i. \quad (2.36)$$

(2.35) gir da at for hver $i \in \{1, \dots, m\}$ er

$$(f_i(\mathbf{Y}) - f_i(\mathbf{X}))^2 \leq K^2 n^2 |\mathbf{Y} - \mathbf{X}|^2. \quad (2.37)$$

Dermed er

$$\sum_{i=1}^m (f_i(\mathbf{Y}) - f_i(\mathbf{X}))^2 \leq K^2 n^2 m |\mathbf{Y} - \mathbf{X}|^2, \quad (2.38)$$

hvilket gir

$$\left[\sum_{i=1}^m (f_i(\mathbf{Y}) - f_i(\mathbf{X}))^2 \right]^{1/2} \leq K n \sqrt{m} |\mathbf{Y} - \mathbf{X}|, \quad (2.39)$$

dvs.

$$|\mathbf{f}(\mathbf{Y}) - \mathbf{f}(\mathbf{X})| \leq Kn\sqrt{m}|\mathbf{Y} - \mathbf{X}|. \quad (2.40)$$

Siden $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \text{int}C$ var vilkårlige, har vi for enhver $L \geq Kn\sqrt{m}$ følgende at

$$\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \text{int}C \quad \text{medfører} \quad |\mathbf{f}(\mathbf{X}) - \mathbf{f}(\mathbf{Y})| \leq L|\mathbf{X} - \mathbf{Y}|.$$

□

For $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{R}^n$ og $\varepsilon > 0$, lar vi $B_\varepsilon(\mathbf{X}_0) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{X} - \mathbf{X}_0| < \varepsilon\}$. Siden faserommet D (2.5) for et S-system er en åpen mengde, finnes for enhver $\mathbf{X}_0 \in D$ en $\varepsilon > 0$ slik at $B_\varepsilon(\mathbf{X}_0) \subset D$. For enhver ε_1 med $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ er dermed $\overline{B_{\varepsilon_1}(\mathbf{X}_0)} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{X} - \mathbf{X}_0| \leq \varepsilon_1\} \subset D$.

For $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$, er linjestykket som forbinder \mathbf{X} og \mathbf{Y} mengden $\{\mathbf{X} + t(\mathbf{Y} - \mathbf{X}) \mid t \in [0, 1]\}$.

For enhver $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{R}^n$ og enhver $\varepsilon > 0$, er $\overline{B_\varepsilon(\mathbf{X}_0)}$ en konveks delmengde av \mathbb{R}^n : La $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \overline{B_\varepsilon(\mathbf{X}_0)}$ og $t \in [0, 1]$. Da er $|\mathbf{X} + t(\mathbf{Y} - \mathbf{X}) - \mathbf{X}_0| = |t(\mathbf{Y} - \mathbf{X}_0) + (1-t)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)| \leq t|\mathbf{Y} - \mathbf{X}_0| + (1-t)|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0| \leq t\varepsilon + (1-t)\varepsilon = \varepsilon$. Dermed er $\mathbf{X} + t(\mathbf{Y} - \mathbf{X}) \in \overline{B_\varepsilon(\mathbf{X}_0)}$. (Davidson & Donsig [4], s. 558).

Tilsvarende får vi at $B_\varepsilon(\mathbf{X}_0)$ er konveks: La $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in B_\varepsilon(\mathbf{X}_0)$, og $t \in (0, 1)$. Da er $|\mathbf{X} + t(\mathbf{Y} - \mathbf{X}) - \mathbf{X}_0| = |t(\mathbf{Y} - \mathbf{X}_0) + (1-t)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)| \leq t|\mathbf{Y} - \mathbf{X}_0| + (1-t)|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0| < t\varepsilon + (1-t)\varepsilon = \varepsilon$. $t = 0$ gir $|\mathbf{X} + t(\mathbf{Y} - \mathbf{X}) - \mathbf{X}_0| = |\mathbf{X} - \mathbf{X}_0| < \varepsilon$. $t = 1$ gir $|\mathbf{X} + t(\mathbf{Y} - \mathbf{X}) - \mathbf{X}_0| = |\mathbf{Y} - \mathbf{X}_0| < \varepsilon$.

Vi har dermed følgende korollar av proposisjon 2.3.9:

Korollar 2.3.10 *La $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ være et n -dimensjonalt S-system med faserom D (2.5), og anta at eventuelle uavhengige variabler er konstante. Anta at $\mathbf{X}_0 \in D$, og la $\varepsilon > 0$ være slik at $B_\varepsilon(\mathbf{X}_0) \subset D$. Da finnes det en konstant $L > 0$ slik at dersom*

$$\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in B_\varepsilon(\mathbf{X}_0) \quad \text{så er} \quad |\mathbf{F}(\mathbf{X}) - \mathbf{F}(\mathbf{Y})| \leq L|\mathbf{X} - \mathbf{Y}|.$$

Bevis: Siden S-systemet er n -dimensjonalt, har vi at $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. $\overline{B_\varepsilon(\mathbf{X}_0)}$ er en lukket og begrenset delmengde av \mathbb{R}^n , og ved teorem 2.3.6 dermed kompakt. $\text{int}\overline{B_\varepsilon(\mathbf{X}_0)} = B_\varepsilon(\mathbf{X}_0)$ er konveks. Dessuten har vi at de førsteordens partieltderiverte av \mathbf{F} eksisterer og er kontinuerlige på $\overline{B_\varepsilon(\mathbf{X}_0)}$ (siden de førsteordens partieltderiverte av \mathbf{F} eksisterer og er kontinuerlige på D). Da gir proposisjon 2.3.9 at det finnes en konstant $L > 0$ slik at dersom

$$\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in B_\varepsilon(\mathbf{X}_0) \quad \text{så er} \quad |\mathbf{F}(\mathbf{X}) - \mathbf{F}(\mathbf{Y})| \leq L|\mathbf{X} - \mathbf{Y}|.$$

□

Merknad til beviset for korollar 2.3.10: Eventuelle førsteordens partieltderiverte (av \mathbf{F}) der eksponenten til minst én av de avhengige variablene er negativ, eksisterer ikke i punkter der den eller de aktuelle avhengige variablene er null. Dette er enda en grunn til at vi i denne masteroppgaven velger å ikke inkludere de positive halvaksene og origo i S-systemers faserom.

Vi får:

Proposisjon 2.3.11 *La $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ være et n -dimensjonalt S-system der eventuelle uavhengige variabler er konstante. For hver \mathbf{X}_0 i faserommet (2.5) finnes en $\varepsilon > 0$ slik at dersom $\mathbf{X}_1(t)$ og $\mathbf{X}_2(t)$ er to løsninger av initialverdi-problemet*

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \quad (2.41)$$

på et åpent intervall I som inneholder t_0 , og $\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t) \in B_\varepsilon(\mathbf{X}_0)$ for alle $t \in I$, så er $\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{X}_2(t)$ for alle $t \in I$.

Bevis: Siden S-systemet er n -dimensjonalt, har vi at $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, der D er faserommet (2.5). La funksjonen

$$\mathbf{f} : D \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{være definert ved at} \quad \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}).$$

Anta at $\mathbf{X}_0 \in D$. Som bemerket på side 28, finnes en $\varepsilon > 0$ slik at $B_\varepsilon(\mathbf{X}_0) \subset D$. Da vet vi, ved korollar 2.3.10 at det finnes en konstant $L > 0$ slik at dersom

$$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in B_\varepsilon(\mathbf{X}_0) \quad \text{så er} \quad |\mathbf{F}(\mathbf{X}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{X}_2)| \leq L|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|.$$

Altså finnes det en konstant $L > 0$ slik at dersom

$$(\mathbf{X}_1, t), (\mathbf{X}_2, t) \in R \quad \text{så er} \quad |\mathbf{f}(\mathbf{X}_1, t) - \mathbf{f}(\mathbf{X}_2, t)| \leq L|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|,$$

der $R = B_\varepsilon(\mathbf{X}_0) \times \mathbb{R} \subset D \times \mathbb{R}$. Siden \mathbf{F} er kontinuerlig på D , er \mathbf{f} kontinuerlig på $D \times \mathbb{R}$. Dermed er \mathbf{f} kontinuerlig på R . Da gir teorem 2.3.1 at dersom $\mathbf{X}_1(t)$ og $\mathbf{X}_2(t)$ er to løsninger av initialverdi-problemet

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0,$$

på et åpent intervall I som inneholder punktet $t = t_0$, og $(\mathbf{X}_1(t), t), (\mathbf{X}_2(t), t) \in R$ for alle $t \in I$, så er $\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{X}_2(t)$ for alle $t \in I$. Altså får vi at dersom $\mathbf{X}_1(t)$ og $\mathbf{X}_2(t)$ er to løsninger av initialverdi-problemet

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$$

på et åpent intervall I som inneholder t_0 , og $\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t) \in B_\varepsilon(\mathbf{X}_0)$ for alle $t \in I$, så er $\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{X}_2(t)$ for alle $t \in I$. □

Lemma 2.3.12 Hvis $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ er deriverbar i \mathbf{X}_0 , så er \mathbf{f} kontinuerlig i \mathbf{X}_0 .

Bevis: Se Marsden & Tromba [8], s. 158. □

Vi avslutter denne seksjonen med følgende proposisjon om entydighet av løsninger av S-systemer:

Proposisjon 2.3.13 La $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ være et n -dimensjonalt S-system der eventuelle uavhengige variabler er konstante. Anta at \mathbf{X}_0 er i faserommet (2.5). Dersom $\mathbf{X}_1(t)$ er en løsning av initialverdiproblemet

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \quad (2.42)$$

på det åpne intervallet I_1 , og $\mathbf{X}_2(t)$ er en løsning på det åpne intervallet I_2 , så finnes det et åpent intervall I slik at $t_0 \in I \subset I_1 \cap I_2$ og $\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{X}_2(t)$ for alle $t \in I$.

Bevis: Ifølge proposisjon 2.3.11 eksisterer det en $\varepsilon_1 > 0$ slik at dersom $\mathbf{X}_1(t)$ og $\mathbf{X}_2(t)$ er to løsninger av (2.42) på et åpent intervall I som inneholder t_0 , og $\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t) \in B_{\varepsilon_1}(\mathbf{X}_0)$ for alle $t \in I$, så er $\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{X}_2(t)$ for alle $t \in I$. Dersom $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1(t)$ er en løsning av (2.42) på I_1 og $\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2(t)$ er en løsning av (2.42) på I_2 , så er \mathbf{X}_1 deriverbar på I_1 og \mathbf{X}_2 deriverbar på I_2 . Spesielt er \mathbf{X}_1 og \mathbf{X}_2 deriverbare i t_0 . Lemma 2.3.12 gir dermed at \mathbf{X}_1 og \mathbf{X}_2 er kontinuerlige i t_0 , så

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{X}_1(t) = \mathbf{X}_1(t_0) = \mathbf{X}_0,$$

dvs.

for hver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at $t \in I_1$ og $|t - t_0| < \delta$ medfører $|\mathbf{X}_1(t) - \mathbf{X}_0| < \varepsilon$,

og

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{X}_2(t) = \mathbf{X}_2(t_0) = \mathbf{X}_0,$$

dvs.

for hver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at $t \in I_2$ og $|t - t_0| < \delta$ medfører $|\mathbf{X}_2(t) - \mathbf{X}_0| < \varepsilon$.

Det følger at det eksisterer en δ_1 slik at $t \in I_1$ og $|t - t_0| < \delta_1$ medfører $\mathbf{X}_1(t) \in B_{\varepsilon_1}(\mathbf{X}_0)$, og at det eksisterer en δ_2 slik at $t \in I_2$ og $|t - t_0| < \delta_2$ medfører $\mathbf{X}_2(t) \in B_{\varepsilon_1}(\mathbf{X}_0)$. Sett $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ og $I = I_1 \cap I_2 \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset I_1 \cap I_2$. Siden $\mathbf{X}_1(t)$ og $\mathbf{X}_2(t)$ er løsninger av (2.42) på det åpne intervallet I som inneholder t_0 , og $\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t) \in B_{\varepsilon_1}(\mathbf{X}_0)$ for alle $t \in I$, får vi at $\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{X}_2(t)$ for alle $t \in I$. □

Vi har i denne seksjonen sett at ethvert S -system $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ der eventuelle uavhengige variabler er konstante, med faserom gitt ved (2.5), og med tilhørende initialbetingelser $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$, har høyst én løsning, i den forstand at dersom to funksjoner er løsninger på hvert sitt åpne intervall som inneholder t_0 , så er de *like* på et åpent intervall som inneholder t_0 .

2.4 Kontinuerlig avhengighet av initialbetingelsen

I praktiske anvendelser, der man oftest kjenner verdien av \mathbf{X}_0 i initialbetingelsen $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$ kun med begrenset nøyaktighet, er det av stor betydning at en liten unøyaktighet i \mathbf{X}_0 ikke gir stor unøyaktighet i løsningen $\mathbf{X}(t)$ når t er nær t_0 . I slike anvendelser er det derfor viktig at løsningen avhenger kontinuerlig av initialbetingelsen. (Edwards & Penney [5], s. 725).

I tillegg til å være en funksjon av t , vil løsningen $\mathbf{X}(t)$ av initialverdi-problemet

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$$

avhenge av \mathbf{X}_0 . Vi kan derfor betegne løsningen som $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0)$. (Hirsch, Smale & Devaney [6], s. 12).

Fra Hirsch, Smale & Devaney [6], s. 392, har vi følgende resultat:

Proposisjon 2.4.1 *La $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0)$ betegne løsningen av initialverdi-problemet*

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0.$$

Anta at alle førsteordens partieltderiverte av \mathbf{F} eksisterer og er kontinuerlige. Da er $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0)$ en kontinuerlig funksjon av \mathbf{X}_0 .

Vi får umiddelbart:

Korollar 2.4.2 *Anta at $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ er et n -dimensjonalt S -system der eventuelle uavhengige variabler er konstante. Anta at \mathbf{X}_0 er i faserommet (2.5). La $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0)$ betegne løsningen av initialverdi-problemet*

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0.$$

Da er $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0)$ en kontinuerlig funksjon av \mathbf{X}_0 .

Bevis: Dersom $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ er et S-system, vet vi at alle førsteordens partieltderiverte av \mathbf{F} eksisterer og er kontinuerlige i faserommet (2.5). Dermed følger dette direkte fra proposisjon 2.4.1. \square

Løsningen av et S-system der eventuelle uavhengige variabler er konstante, med faserom gitt ved (2.5), og med tilhørende initialbetingelser, avhenger altså kontinuerlig av initialbetingelsen. Sammen med eksistens (seksjon 2.2) og entydighet (seksjon 2.3) gir dette at disse initialverdiproblemene er velformulerte.

Kapittel 3

Lokal stabilitetsanalyse av kontinuerlige S-systemer

I kapittel 1 så vi at analyse av et biokjemisk system er en sekstrinnsprosess. Vi så at de tre første trinnene dreide seg om å sette opp et diagram, og i det fjerde trinnet omskrev vi diagrammet til likninger, nærmere bestemt et S-system. I dette kapitlet skal vi se nærmere på det femte trinnet: Analyse av likningene.

3.1 Kritiske punkter

I Voit [14] forklares på s. 52 begrepet *likevektstilstand* (*steady state*) til et biokjemisk system, som en tilstand det biokjemiske systemet er i når ingen av de avhengige variablene endrer seg med tiden, og produksjon og tømming følgelig er i balanse for hver av de avhengige variablene. De fleste biokjemiske systemer i naturen virker nær en likevektstilstand, og undersøkelse av likevektstilstander er derfor viktig i analyse av biokjemiske systemer. (Voit [14], s. 193). I en likevektstilstand vil altså funksjonene V_i^+ og V_i^- i systemlikningene (1.2) være like. Høyresidene i systemlikningene vil da være lik null. I denne seksjonen skal vi se hvordan man bestemmer verdier av de avhengige variablene som er slik at dette er oppfylt for S-systemer.

Definisjon 3.1.1 *Et kritisk punkt for det autonome systemet*

$$\dot{X}_i = F_i(X_1, \dots, X_n) \quad i = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

er et punkt (X_1^, \dots, X_n^*) i faserommet slik at*

$$F_i(X_1^*, \dots, X_n^*) = 0$$

for hver $i = 1, \dots, n$.

(Definisjon 3.1.1 bygger på Edwards & Penney [5], s. 366). I vektornotasjon får vi at et kritisk punkt for det autonome systemet

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$$

er et punkt \mathbf{X}^* i faserommet slik at

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}^*) = \mathbf{0}.$$

Et kritisk punkt for S-systemet (1.7) er altså et punkt $\mathbf{X}^* = (X_1^*, \dots, X_n^*)$ i faserommet slik at høyresiden i hver likning i S-systemet blir lik null, dvs. slik at

$$\alpha_i \prod_{j=1}^n (X_j^*)^{g_{ij}} \prod_{j=n+1}^{n+m} X_j^{g_{ij}} - \beta_i \prod_{j=1}^n (X_j^*)^{h_{ij}} \prod_{j=n+1}^{n+m} X_j^{h_{ij}} = 0 \quad i = 1, \dots, n.$$

Dersom (X_1^*, \dots, X_n^*) er et kritisk punkt for det autonome systemet (3.1), vil funksjonene

$$\begin{aligned} X_1(t) &\equiv X_1^* \\ &\vdots \\ X_n(t) &\equiv X_n^* \end{aligned}$$

være en løsning av (3.1). (Edwards & Penney [5], s. 366-367). Dette fordi vi for hver $i = 1, \dots, n$ får $\dot{X}_i = \dot{X}_i^* = 0$ og dessuten har $F_i(X_1^*, \dots, X_n^*) = 0$. Dette danner bakgrunnen for følgende definisjon:

Definisjon 3.1.2 Dersom (X_1^*, \dots, X_n^*) er et kritisk punkt for det autonome systemet

$$\dot{X}_i = F_i(X_1, \dots, X_n) \quad i = 1, \dots, n,$$

så kalles løsningen gitt ved

$$\begin{aligned} X_1(t) &\equiv X_1^* \\ &\vdots \\ X_n(t) &\equiv X_n^* \end{aligned} \tag{3.2}$$

en **likevektsløsning** av systemet.

(Definisjon 3.1.2 bygger på Edwards & Penney [5], s. 366-367). I vektornotasjon får vi at dersom \mathbf{X}^* er et kritisk punkt for det autonome systemet

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}),$$

så er

$$\mathbf{X}(t) \equiv \mathbf{X}^* \quad (3.3)$$

en likevektsløsning av systemet. Da ethvert S-system der eventuelle uavhengige variabler er konstante er et autonomt system, får vi at dersom \mathbf{X}^* er et kritisk punkt for et slikt S-system, så er $\mathbf{X}(t) \equiv \mathbf{X}^*$ en likevektsløsning av S-systemet.

Siden en likevektstilstand i et biokjemisk system kjennetegnes ved at ingen av de avhengige variablene endrer seg med tiden, vil det at (X_1^*, \dots, X_n^*) er et kritisk punkt for et S-system (etter definisjon 3.1.1), og dermed at (3.2) er en likevektsløsning av S-systemet, være ensbetydende med at differensiallikningene (S-systemet) i den matematiske modellen forutsier at det biokjemiske systemet har en likevektstilstand der konsentrasjonene av X_1, \dots, X_n er henholdsvis X_1^*, \dots, X_n^* .

Teoremet vi skal gi for å finne kritiske punkter til S-systemer involverer lineæralgebra.

Lemma 3.1.3 *Dersom A er en $n \times n$ -matrise så er følgende utsagn ekvivalente:*

- (i) A er invertibel.
- (ii) $\det(A) \neq 0$.
- (iii) Likningen $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$ har bare den trivielle løsningen.
- (iv) For hver $n \times 1$ -matrise \mathbf{b} har likningen $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ nøyaktig én løsning.
- (v) Det finnes en $n \times 1$ -matrise \mathbf{b} slik at likningen $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ har nøyaktig én løsning.

Dersom utsagnene er sanne, er den entydige løsningen i (iv) og (v) gitt ved $\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Bevis: (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv): Se Anton [1], s. 53-54, s. 59-60, s. 62 og s. 95.

(iv) \Rightarrow (v): Dette er opplagt.

(v) \Rightarrow (iii): Anta at (v) er sann. Anta dessuten at \mathbf{y}_0 er en løsning av likningen $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$, altså at $A\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$ ($\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$ gir $A\mathbf{y}_0 = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, så en slik \mathbf{y}_0 eksisterer). Siden (v) er sann, eksisterer det en \mathbf{b} slik at likningen $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ har nøyaktig én løsning. Vi kaller denne løsningen \mathbf{y}_1 . Dermed blir

$A\mathbf{y}_0 + A\mathbf{y}_1 = \mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b}$. Dermed får vi $A(\mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_1) = \mathbf{b}$. Siden \mathbf{y}_1 er eneste løsning av likningen $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$, må $\mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_1$. Følgelig får vi at $\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$. Altså har likningen $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$ kun den trivielle løsningen.

Dersom utsagnene er sanne, er A invertibel. Da får vi at $A\mathbf{y} = \mathbf{b} \Rightarrow A^{-1}A\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{b}$. □

Lemma 3.1.4 *Ethvert system av lineære likninger har enten ingen løsninger, nøyaktig én løsning, eller uendelig mange løsninger.*

Bevis: Se Anton [1], s. 59. □

Lemma 3.1.5 *Anta at A er en $n \times n$ -matrise. Dersom $\det(A) = 0$, så har for hver $n \times 1$ -matrise \mathbf{b} , likningen $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ enten ingen løsninger, eller uendelig mange løsninger.*

Bevis: Anta at $\det(A) = 0$. Implikasjonen $(v) \Rightarrow (ii)$ i lemma 3.1.3 gir da at for hver $n \times 1$ -matrise \mathbf{b} har likningen $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ ikke nøyaktig én løsning. Siden likningen $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ er et system av lineære likninger, gir dermed lemma 3.1.4 at for hver $n \times 1$ -matrise \mathbf{b} , har likningen $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ enten ingen løsninger, eller uendelig mange løsninger. □

Vi er nå klare til å formulere, og bevise, et viktig resultat om kritiske punkter for S-systemer:

Teorem 3.1.6 *La*

$$\dot{X}_i = \alpha_i \prod_{j=1}^{n+m} X_j^{g_{ij}} - \beta_i \prod_{j=1}^{n+m} X_j^{h_{ij}} \quad i = 1, \dots, n$$

være et S-system med n avhengige variabler X_1, \dots, X_n , m konstante uavhengige variabler X_{n+1}, \dots, X_{n+m} (m kan være null, hvilket tilsvarer at systemet ikke har noen uavhengige variabler) og faserom gitt ved (2.5). Anta at $\alpha_i > 0$ og $\beta_i > 0$ for hver $i = 1, \dots, n$, samt at eventuelle uavhengige variabler er positive, altså at $X_j > 0$ for hver $j = n + 1, \dots, n + m$.

La

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

der $a_{ij} = g_{ij} - h_{ij}$ for hver $i = 1, \dots, n$ og hver $j = 1, \dots, n$.

Hvis $\det(A) \neq 0$, så har S -systemet nøyaktig ett kritisk punkt (X_1^*, \dots, X_n^*) .

Dette kritiske punktet er i så fall $(X_1^*, \dots, X_n^*) = (e^{y_1}, \dots, e^{y_n})$ der

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = A^{-1}\mathbf{b} \quad \text{med} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

hvor for hver $i = 1, \dots, n$

$$b_i = \begin{cases} \ln \frac{\beta_i}{\alpha_i} & \text{dersom } m = 0 \\ \ln \frac{\beta_i}{\alpha_i} - \sum_{j=n+1}^{n+m} (g_{ij} - h_{ij}) \ln X_j & \text{dersom } m \neq 0. \end{cases}$$

Hvis $\det(A) = 0$, så har S -systemet enten ingen, eller uendelig mange, kritiske punkter (X_1^*, \dots, X_n^*) .

Bevis (Voit [14], s. 196-198, s. 200-201 og s. 203-206. I Voit [14] henvises det til Savageau [10] og Savageau [11] i fremstillingen av noe av dette. I beviset bruker vi dessuten lemma 3.1.3 og lemma 3.1.5.): At (X_1, \dots, X_n) er et kritisk punkt for S -systemet

$$\dot{X}_i = \alpha_i \prod_{j=1}^{n+m} X_j^{g_{ij}} - \beta_i \prod_{j=1}^{n+m} X_j^{h_{ij}} \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.4)$$

betyr at (X_1, \dots, X_n) er element i faserommet og at

$$0 = \alpha_i \prod_{j=1}^{n+m} X_j^{g_{ij}} - \beta_i \prod_{j=1}^{n+m} X_j^{h_{ij}} \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

(3.5) er ekvivalent med

$$\alpha_i \prod_{j=1}^{n+m} X_j^{g_{ij}} = \beta_i \prod_{j=1}^{n+m} X_j^{h_{ij}} \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

Siden vi antar at $\alpha_i > 0$ og $\beta_i > 0$ for hver $i = 1, \dots, n$ og vi (ved premiss i teoremet, samt ved at vi bare søker løsninger i faserommet (2.5)) kan anta at $X_j > 0$ for hver $j = 1, \dots, n+m$, får vi at (3.6) er ekvivalent med

$$\ln \left(\alpha_i \prod_{j=1}^{n+m} X_j^{g_{ij}} \right) = \ln \left(\beta_i \prod_{j=1}^{n+m} X_j^{h_{ij}} \right) \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.7)$$

som er ekvivalent med

$$\ln\alpha_i + \sum_{j=1}^{n+m} \ln(X_j^{g_{ij}}) = \ln\beta_i + \sum_{j=1}^{n+m} \ln(X_j^{h_{ij}}) \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.8)$$

(3.8) er ekvivalent med

$$\ln\alpha_i + \sum_{j=1}^{n+m} g_{ij} \ln X_j = \ln\beta_i + \sum_{j=1}^{n+m} h_{ij} \ln X_j \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.9)$$

som i sin tur er ekvivalent med

$$\sum_{j=1}^{n+m} (g_{ij} - h_{ij}) \ln X_j = \ln \frac{\beta_i}{\alpha_i} \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.10)$$

For hver $i = 1, \dots, n$ deler vi opp summen i (3.10) i to delsummer: Én delsum for de avhengige variablene X_1, \dots, X_n og én delsum, s_i , for eventuelle uavhengige variabler X_{n+1}, \dots, X_{n+m} . Da får vi at (3.10) er ekvivalent med

$$\sum_{j=1}^n (g_{ij} - h_{ij}) \ln X_j + s_i = \ln \frac{\beta_i}{\alpha_i} \quad i = 1, \dots, n \quad (3.11)$$

der

$$s_i = \begin{cases} 0 & \text{dersom } m = 0 \\ \sum_{j=n+1}^{n+m} (g_{ij} - h_{ij}) \ln X_j & \text{dersom } m \neq 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Vi setter nå $g_{ij} - h_{ij} = a_{ij}$ for $i = 1, \dots, n$ og $j = 1, \dots, n$. Dessuten setter vi $\ln X_j = y_j$ for $j = 1, \dots, n$ og $\ln \frac{\beta_i}{\alpha_i} - s_i = b_i$ for $i = 1, \dots, n$. (3.11) blir da ekvivalent med

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = b_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.13)$$

der

$$b_i = \begin{cases} \ln \frac{\beta_i}{\alpha_i} & \text{dersom } m = 0 \\ \ln \frac{\beta_i}{\alpha_i} - \sum_{j=n+1}^{n+m} (g_{ij} - h_{ij}) \ln X_j & \text{dersom } m \neq 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Vi gjenkjenner (3.13) som et lineært likningssystem. Fra lineær algebra vet vi da at (3.13) er ekvivalent med matriselikningen

$$A\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (3.15)$$

der

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Under de antakelser som er gjort, er altså (X_1, \dots, X_n) et kritisk punkt for (3.4) hvis og bare hvis \mathbf{y} er en løsning av (3.15). Følgelig vil, under antakelsene som er gjort, antallet kritiske punkter for (3.4) og antallet løsninger \mathbf{y} av (3.15) være likt. Dersom $\det(A) \neq 0$ gir implikasjonen $(ii) \Rightarrow (iv)$ i lemma 3.1.3 at antallet løsninger av (3.15) er nøyaktig én. Under de antakelser som er gjort får vi altså at (3.4) har nøyaktig ett kritisk punkt hvis $\det(A) \neq 0$. Vi lar nå (X_1^*, \dots, X_n^*) betegne det unike kritiske punktet. $\ln X_j = y_j$ for $j = 1, \dots, n$ medfører at $(X_1^*, \dots, X_n^*) = (e^{y_1}, \dots, e^{y_n})$. Siste del av lemma 3.1.3 gir at den entydige løsningen av (3.15) er gitt ved $\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{b}$. Altså er $y_j, j = 1, \dots, n$, bestemt ved at

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

der $a_{ij} = g_{ij} - h_{ij}$ for $i = 1, \dots, n$ og $j = 1, \dots, n$, og

$$b_i = \begin{cases} \ln \frac{\beta_i}{\alpha_i} & \text{dersom } m = 0 \\ \ln \frac{\beta_i}{\alpha_i} - \sum_{j=n+1}^{n+m} (g_{ij} - h_{ij}) \ln X_j & \text{dersom } m \neq 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

for $i = 1, \dots, n$.

Dersom $\det(A) = 0$, gir lemma 3.1.5 at (3.15) enten har ingen løsninger, eller uendelig mange løsninger. Dermed har S-systemet enten ingen, eller uendelig mange, kritiske punkter (X_1^*, \dots, X_n^*) . \square

Matrisen A i teorem 3.1.6 kalles S-systemets *systemmatrise*. (Voit [14], s. 200-201).

Legg merke til at teorem 3.1.6 gir en metode for bestemmelse av et S-systems eventuelle unike kritiske punkt, og som dermed er nyttig i stabilitetsanalyse av S-systemer.

3.2 Kritiske punkters stabilitet

Vil et biokjemisk system som befinner seg i en likevektstilstand, og som utsettes for en midlertidig påvirkning som er slik at balansen mellom produksjon og tømning forstyrres, returnere til den opprinnelige likevektstilstanden etter at påvirkningen har opphørt? Dette er et eksempel på et spørsmål som dreier seg om *stabilitetsegenskapene* til likevektstilstanden. (Voit [14], s. 208-209). I seksjon 3.1 så vi at en likevektstilstand for et biokjemisk system der verdiene av de avhengige variablene X_1, \dots, X_n er henholdsvis X_1^*, \dots, X_n^* , tilsvarer at (X_1^*, \dots, X_n^*) er et kritisk punkt for S-systemet. *Stabilitetsanalyse* av et autonomt system er en todelt prosess: Først må man finne eventuelle kritiske punkter for systemet, deretter forsøker man å bestemme stabilitetsegenskapene til de kritiske punktene. I denne seksjonen skal vi se nærmere på bestemmelse av lokale stabilitetsegenskaper til et S-systems eventuelle unike kritiske punkt.

Dersom $\mathbf{X}(t)$ er en løsning av det autonome systemet

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (3.18)$$

med initialbetingelsen

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \quad (3.19)$$

så vil likningen $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ beskrive en parametrisert løsningskurve som går gjennom punktet \mathbf{X}_0 . Denne kurven kalles en **bane** til systemet (3.18). Hvis \mathbf{X}^* er et kritisk punkt for (3.18), så vil banen til likevektsløsningen $\mathbf{X}(t) \equiv \mathbf{X}^*$ være punktet \mathbf{X}^* . (Bygger på Edwards & Penney [5], s. 366-367).

Proposisjon 3.2.1 *La*

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (3.20)$$

være et autonomt system. Dersom alle de førsteordens partieltderiverte av \mathbf{F} eksisterer og er kontinuertlige på faserommet, så går det gjennom hvert punkt i faserommet nøyaktig én bane til systemet (3.20).

Bevis: Se Arnold [2], s. 69. □

Merk: I fotnote på s. 69 i Arnold [2] bemerkes det at banene dette gjelder for, er maksimale baner, og det forklares at en *maksimal bane* er en bane som gis av en løsning som ikke kan utvides på et større intervall.

Korollar 3.2.2 *Gjennom hvert punkt i faserommet (2.5) til et S-system, går det nøyaktig én bane til S-systemet.*

Bevis: La S-systemet være $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$. Da vet vi at alle de førsteordens partieltderiverte av \mathbf{F} eksisterer og er kontinuerlige på faserommet (2.5). \square

Gitt et autonomt system

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$$

som oppfyller premissene i proposisjon 3.2.1, f. eks. et S-system, og initialbetingelsen

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0,$$

kan vi altså snakke om banen til systemet, gjennom \mathbf{X}_0 .

Vi gir nå stabilitetsbegrepet et presist innhold. I definisjon 3.2.3 - definisjon 3.2.5 betegner \mathbf{X}^* et kritisk punkt for et autonomt system

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \tag{3.21}$$

og $\mathbf{X}(t)$ betegner løsningen av initialverdiproblemet

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0. \tag{3.22}$$

Vi antar altså at (3.22) har en entydig løsning.

Definisjon 3.2.3 \mathbf{X}^* er et **stabilt** kritisk punkt for det autonome systemet (3.21) hvis det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at dersom \mathbf{X}_0 oppfyller

$$|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}^*| < \delta,$$

så er

$$|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}^*| < \varepsilon \text{ for alle } t > t_0.$$

Et kritisk punkt er **ustabilt** dersom det ikke er stabilt.

(Definisjon 3.2.3 bygger på Edwards & Penney [5], s. 370).

Et kritisk punkt er altså stabilt hvis enhver bane som går gjennom et punkt nær nok det kritiske punktet, forblir nær det kritiske punktet.

Anta at det for en $\varepsilon_1 > 0$ finnes en $\delta_1 > 0$ slik at $|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}^*| < \delta_1$ medfører $|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}^*| < \varepsilon_1$ for alle $t > t_0$. For enhver $\varepsilon > \varepsilon_1$ og enhver $\delta > 0$ slik at $\delta \leq \delta_1$, har vi da: $|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}^*| < \delta$ og $t > t_0$ medfører $|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}^*| < \delta_1$ og $t > t_0$, som medfører $|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}^*| < \varepsilon_1$, hvilket i sin tur gir $|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}^*| < \varepsilon$. Dermed er stabilitet, som definert i definisjon 3.2.3, et *lokalt* begrep.

Definisjon 3.2.4 \mathbf{X}^* er et *lokalt asymptotisk stabilt* kritisk punkt for det autonome systemet (3.21) hvis det er stabilt, og det finnes en $\delta > 0$ slik at dersom \mathbf{X}_0 oppfyller

$$|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}^*| < \delta,$$

så er

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}^*.$$

(Definisjon 3.2.4 bygger på Edwards & Penney [5], s. 372).

Vi vil ofte bruke forkortelsen “LA-stabilitet” for lokal asymptotisk stabilitet, og tilsvarende benevne et kritisk punkt som er lokalt asymptotisk stabilt, som et “LA-stabilt kritisk punkt”.

Et kritisk punkt er altså LA-stabilt dersom det er stabilt, og enhver bane som går gjennom et punkt nær nok det kritiske punktet, går mot det kritiske punktet.

Definisjon 3.2.5 \mathbf{X}^* er et *globalt asymptotisk stabilt* kritisk punkt for det autonome systemet (3.21) hvis det er stabilt, og

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}^*$$

for enhver \mathbf{X}_0 i faserommet.

Et kritisk punkt er altså globalt asymptotisk stabilt dersom det er stabilt, og enhver bane som går gjennom et punkt i faserommet går mot det kritiske punktet.

At en funksjon er to ganger kontinuerlig deriverbar betyr at alle dens førsteordens og andreordens partieltderiverte eksisterer og er kontinuerlige. Vi minner om at $\mathbf{JF}(\mathbf{X})$ betegner Jacobimatrisen til funksjonen \mathbf{F} , beregnet i \mathbf{X} , se s. 24.

Følgende viktige resultat for bestemmelse av stabilitetsegenskaper til autonome systemers kritiske punkter, er hentet fra s. 3 i et notat av Wyller¹:

Teorem 3.2.6 *La*

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \tag{3.23}$$

være et autonomt system, der $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Anta at delmengden R av A er åpen i \mathbb{R}^n , at \mathbf{F} er minst to ganger kontinuerlig deriverbar på R , og at

¹Resultatet er hentet fra s. 3 i et notat av John Wyller om blant annet stabilitet. Notatet brukes i emnet MATH310 ved Universitetet for miljø- og biovitenskap.

$\mathbf{X}^* \in R$ er et kritisk punkt for (3.23).

Da er \mathbf{X}^*

- (i) Lokalt asymptotisk stabilt dersom alle egenverdiene til $\mathbf{JF}(\mathbf{X}^*)$ har negativ realdel.
- (ii) Ustabilt dersom minst én egenverdi til $\mathbf{JF}(\mathbf{X}^*)$ har positiv realdel.

Definisjon 3.2.7 \mathbf{X}^* kalles et **isolert kritisk punkt** for det autonome systemet (3.21) dersom \mathbf{X}^* er et kritisk punkt for (3.21), og det finnes en omegn om \mathbf{X}^* som ikke inneholder noe annet kritisk punkt for (3.21).

(Definisjon 3.2.7 bygger på Edwards & Penney [5], s. 378).

Dersom et S-system har nøyaktig ett kritisk punkt \mathbf{X}^* i faserommet D gitt ved (2.5), så er \mathbf{X}^* et isolert kritisk punkt, siden D er en åpen mengde, og det følgelig finnes en åpen omegn $O \subset D$ om \mathbf{X}^* . O inneholder ingen andre kritiske punkter enn \mathbf{X}^* , siden \mathbf{X}^* er eneste kritiske punkt i D .

Dersom

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \tag{3.24}$$

er et S-system, kaller vi Jacobimatrisen til \mathbf{F} , beregnet i \mathbf{X} , *S-systemets Jacobimatrise beregnet i \mathbf{X}* . Vi lar $\mathbf{J}(\mathbf{X})$ betegne denne. Dersom S-systemet (3.24) er n -dimensjonalt, er altså S-systemets Jacobimatrise beregnet i $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ gitt ved

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}) = \mathbf{J}(X_1, \dots, X_n) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial X_n} \end{array} \right] \bigg|_{(X_1, \dots, X_n)} \tag{3.25}$$

Teorem 3.2.6 gir følgende korollar:

Korollar 3.2.8 Anta at \mathbf{X}^* er et isolert kritisk punkt for et S-system. Da er \mathbf{X}^*

- (i) Lokalt asymptotisk stabilt dersom alle egenverdiene til $\mathbf{J}(\mathbf{X}^*)$ har negativ realdel.
- (ii) Ustabilt dersom minst én egenverdi til $\mathbf{J}(\mathbf{X}^*)$ har positiv realdel.

Bevis: La S -systemet være $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$. Da vil samtlige førsteordens og andreordens partiellderiverte av \mathbf{F} eksistere og være kontinuerlige på hele faserommet D (2.5). Altså er \mathbf{F} to ganger deriverbar på D . Siden D er en åpen mengde, finnes for ethvert punkt $\mathbf{X} \in D$ en åpen omegn O om \mathbf{X} med $O \subset D$. Dette gjelder følgelig også for ethvert isolert kritisk punkt. Siden $O \subset D$, er \mathbf{F} to ganger kontinuerlig deriverbar på O . \square

Legg merke til at teorem 3.2.6/korollar 3.2.8 gir en metode som kan benyttes i lokal stabilitetsanalyse av S -systemer.

3.3 Eksempler på lokal stabilitetsanalyse av kontinuerlige S -systemer

I lokal stabilitetsanalyse av et kontinuerlig S -system bestemmer man et eventuelt unikt kritisk punkt, samt det kritiske punktets lokale stabilitetsegenskaper, ikke eventuell global asymptotisk stabilitet. Vi vil nå gi noen eksempler på lokal stabilitetsanalyse av kontinuerlige S -systemer.

For å illustrere løsninger av et todimensjonalt autonomt system, og stabilitetsegenskapene til et kritisk punkt for et slikt system grafisk, kan vi bruke et *faseportrett* kombinert med et *retningsfelt*. Et faseportrett for et todimensjonalt autonomt system, er en grafisk fremstilling av et utsnitt av faseplanet som viser de kritiske punktene og et utvalg baner (i tillegg til banene som beskrives av likevektsløsninger) for det autonome systemet. Et retningsfelt for et todimensjonalt autonomt system $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$, er en grafisk fremstilling av et utsnitt av faseplanet der det ut fra relativt mange punkter \mathbf{X} som er jevnt fordelt i utsnittet, er tegnet en vektor som peker i samme retning som $\mathbf{F}(\mathbf{X})$. (Edwards & Penney [5], s. 368).

Faseportrettene og retningsfeltene i denne seksjonen er laget ved å bruke `pplane6.m` sammen med Studentversjon av MATLAB. I denne seksjonen er initialpunktene for hver av banene markert med en liten sort prikk. Banenes retning (med økende t), er markert med en pil på hver av banene.

Dersom $z = a + ib$ er et komplekst tall med $a, b \in \mathbb{R}$, lar vi $\text{Re}(z)$ betegner vi realdelen til z , dvs. $\text{Re}(z) = a$.

Eksempel 3.3.1 *Dette eksemplet bygger på eksemplene 1.1.1 og 1.3.1. Vi begynner med å gi hastighetskonstantene og de kinetiske ordenene i S -systemet*

(1.9) numeriske verdier. Fortegnet til de kinetiske ordenene må være i samsvar med fortegnsgivelsene som er angitt i (1.9).

Hastighetskonstanter: $\alpha_1 = 1.5, \beta_1 = 1.3, \beta_2 = 1$.

Kinetiske ordener: $g_{12} = -2, h_{11} = 0.4, h_{21} = 1.47, h_{22} = 3$.

S-systemet (1.9) blir dermed

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= 1.5X_2^{-2} - 1.3X_1^{0.4} \\ \dot{X}_2 &= 1.3X_1^{0.4} - X_1^{1.47}X_2^3\end{aligned}\tag{3.26}$$

Systemmatrisen (se teorem 3.1.6) er gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

der $a_{ij} = g_{ij} - h_{ij}$ for $i = 1, 2$ og $j = 1, 2$.

$$\begin{aligned}a_{11} &= g_{11} - h_{11} = 0 - 0.4 = -0.4 \\ a_{12} &= g_{12} - h_{12} = -2 - 0 = -2 \\ a_{21} &= g_{21} - h_{21} = 0.4 - 1.47 = -1.07 \\ a_{22} &= g_{22} - h_{22} = 0 - 3 = -3\end{aligned}$$

gir

$$A = \begin{bmatrix} -0.4 & -2 \\ -1.07 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = (-0.4)(-3) - (-2)(-1.07) = -0.94 \neq 0.$$

Dermed gir teorem 3.1.6 at S-systemet (3.26) har nøyaktig ett kritisk punkt, og at dette er $(X_1^*, X_2^*) = (e^{y_1}, e^{y_2})$ der

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = A^{-1}\mathbf{b} \quad \text{med} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

hvor

$$b_1 = \ln \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \ln \frac{1.3}{1.5} = -0.14310$$

$$b_2 = \ln \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \ln \frac{1}{1.3} = -0.26236$$

(her har vi brukt at $\alpha_2 = \beta_1$).

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{-0.94} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1.07 & -0.4 \end{bmatrix}.$$

Dette gir

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-0.94} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1.07 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.14310 \\ -0.26236 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.10151 \\ 0.051248 \end{bmatrix}.$$

Det unike kritiske punktet blir dermed

$$(X_1^*, X_2^*) = (e^{0.10151}, e^{0.051248}) = (1.10684, 1.05258) \approx (1.11, 1.05).$$

Vi definerer nå

$$F_1(X_1, X_2) = 1.5X_2^{-2} - 1.3X_1^{0.4}$$

$$F_2(X_1, X_2) = 1.3X_1^{0.4} - X_1^{1.47}X_2^3.$$

S -systemets Jacobimatrise beregnet i det kritiske punktet blir

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(X_1^*, X_2^*) &= \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} \right|_{(X_1^*, X_2^*)} \\ &= \left. \begin{bmatrix} -0.52X_1^{-0.6} & -3X_2^{-3} \\ 0.52X_1^{-0.6} - 1.47X_1^{0.47}X_2^3 & -3X_1^{1.47}X_2^2 \end{bmatrix} \right|_{(1.10684, 1.05258)} \\ &= \begin{bmatrix} -0.48927 & -2.5725 \\ -1.3088 & -3.8587 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Egenverdiene til Jacobimatrisen er røttene i den karakteristiske likningen

$$\det(\mathbf{J}(X_1^*, X_2^*) - \lambda I) = 0$$

der

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Den karakteristiske likningen blir

$$\left| \begin{bmatrix} -0.48927 - \lambda & -2.5725 \\ -1.3088 & -3.8587 - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

dvs.

$$(-0.48927 - \lambda)(-3.8587 - \lambda) - (-2.5725)(-1.3088) = 0$$

som er ekvivalent med

$$\lambda^2 + 4.34797\lambda - 1.4789 = 0.$$

Eigenverdiene blir

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-4.34797 + \sqrt{(4.34797)^2 - 4(-1.4789)}) = 0.31702$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(-4.34797 - \sqrt{(4.34797)^2 - 4(-1.4789)}) = -4.6650.$$

Siden $\text{Re}(\lambda_1) = 0.31702 > 0$ gir korollar 3.2.8 (ii) at det unike kritiske punktet (1.11, 1.05) er ustabilt.

Vi gjennomfører nå stabilitetsanalysen av (3.26) ved å bruke MATLAB-koden i Tillegg A sammen med MATLAB.

Under kjøring av koden oppgir vi hastighetskonstantene og de kinetiske ordenene:

S-system med avhengige variabler X1 og X2,
ingen uavhengige variabler.

Beregning av systemmatrisen, eventuelt unikt kritisk punkt der verdien til hver av de avhengige variablene er positiv, Jacobimatrisen i det kritiske punktet, samt Jacobimatrisens egenverdier.

Om mulig, bestemmelse av det kritiske punktets stabilitet ved hjelp av fortegnet til egenverdienes realdel.

Angi hastighetskonstantene (må være positive).

```
alfa1 = 1.5  
beta1 = 1.3  
alfa2 = 1.3
```

beta2 = 1

Angi de kinetiske ordenene, også de som eventuelt er lik null. Alle reelle tall er tillatt.

g11 = 0
g12 = -2
h11 = 0.4
h12 = 0
g21 = 0.4
g22 = 0
h21 = 1.47
h22 = 3

Dette gir:

Systemmatrisen er

A =

-4.0000e-001 -2.0000e+000
-1.0700e+000 -3.0000e+000

Systemmatrisen har determinant forskjellig fra null, og er følgelig invertibel. S-systemet har dermed et unikt kritisk punkt der verdien til hver av de avhengige variablene er positiv.

Dette er $X^* = (X1^*, X2^*)$, der

X1* = 1.106849e+000
X2* = 1.052583e+000

S-systemets Jacobimatrise beregnet i X^* er

J(X^*) =

-4.8927e-001 -2.5725e+000
-1.3088e+000 -3.8587e+000

Eigenverdiene til J(X^*) er

lambda1 = 0.31702
lambda2 = -4.665

Siden realdelen til minst en av egenverdiene er positiv, er det kritiske punktet X^* ustabilt.

Vi ser at det er overensstemmelse mellom den matematiske og den numeriske stabilitetsanalysen. Figur 3.1 på side 68 viser et faseportrett og retningsfelt for S -systemet. Det unike kritiske punktet er markert rett til venstre for bokstaven "K".

Eksempel 3.3.2

(i) Vi begynner dette eksemplet med å finne et todimensjonalt S -system med et unikt kritisk punkt og der alle andre baner enn den som gis av likevektsløsningen, er ellipser. La

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1(t) = a \cos t + b \\ X_2 &= X_2(t) = c \sin t + d \end{aligned} \tag{3.27}$$

der $a, c \neq 0$. Da er

$$\left(\frac{X_1 - b}{a}\right)^2 + \left(\frac{X_2 - d}{c}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \tag{3.28}$$

som er likningen for en ellipse i X_1X_2 -planet med sentrum i (b, d) og halv-akser $|a|$ og $|c|$. (3.27) gir

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= -a \sin t = -a \left(\frac{X_2 - d}{c}\right) \\ \dot{X}_2 &= c \cos t = c \left(\frac{X_1 - b}{a}\right) \end{aligned}$$

altså

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= -\frac{a}{c}X_2 - \left(-\frac{ad}{c}\right) \\ \dot{X}_2 &= -\frac{bc}{a} - \left(-\frac{c}{a}\right)X_1 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Anta at

$$-\frac{a}{c} > 0, \text{ og dermed } -\frac{c}{a} > 0, \text{ samt at } b > 0 \text{ og } d > 0. \tag{3.30}$$

Dersom vi setter

$$\alpha_1 = -\frac{a}{c}, \alpha_2 = -\frac{bc}{a}, \beta_1 = -\frac{ad}{c}, \beta_2 = -\frac{c}{a}, \quad (3.31)$$

så kan (3.29) skrives slik:

$$\dot{X}_1 = \alpha_1 X_2 - \beta_1 \quad (3.32)$$

$$\dot{X}_2 = \alpha_2 - \beta_2 X_1$$

der $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$. Med betingelsene i (3.30) er altså (3.29) et S-system. Anta at produksjonsleddet for X_2 og tømmingsleddet for X_1 er like, dvs. $\alpha_2 = \beta_1$. Da blir (3.32)

$$\dot{X}_1 = \alpha_1 X_2 - \beta_1 \quad (3.33)$$

$$\dot{X}_2 = \beta_1 - \beta_2 X_1$$

som er et S-system på formen (1.11) i eksempel 1.3.2, med $g_{12} = h_{21} = 1$. $\alpha_2 = \beta_1$ er ekvivalent med

$$-\frac{bc}{a} = -\frac{ad}{c}, \quad (3.34)$$

dvs.

$$c = \pm a \sqrt{\frac{d}{b}}. \quad (3.35)$$

Antagelsen $-\frac{a}{c} > 0$, altså $\frac{a}{c} < 0$, medfører at a og c må ha motsatt fortegn. Sammen med (3.35) gir dette at

$$c = -a \sqrt{\frac{d}{b}}. \quad (3.36)$$

Med (3.31) og (3.36) blir (3.33)

$$\dot{X}_1 = -\frac{a}{-a\sqrt{\frac{d}{b}}} X_2 - \left(-\frac{ad}{-a\sqrt{\frac{d}{b}}} \right) \quad (3.37)$$

$$\dot{X}_2 = -\frac{ad}{-a\sqrt{\frac{d}{b}}} - \left(-\frac{-a\sqrt{\frac{d}{b}}}{a} \right) X_1$$

som gir

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= \sqrt{\frac{b}{d}}X_2 - \sqrt{bd} \\ \dot{X}_2 &= \sqrt{bd} - \sqrt{\frac{d}{b}}X_1\end{aligned}\tag{3.38}$$

Faseplanet til S -systemet (3.38) er $D = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 | X_i > 0, i = 1, 2\}$. Anta at (X_1^*, X_2^*) er et kritisk punkt for (3.38), altså at

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{b}{d}}X_2^* - \sqrt{bd} &= 0 \\ \sqrt{bd} - \sqrt{\frac{d}{b}}X_1^* &= 0.\end{aligned}\tag{3.39}$$

(3.39) er ekvivalent med $X_1^* = b, X_2^* = d$. Siden vi antar at $b > 0$ og $d > 0$, og punktet (b, d) dermed ligger i faseplanet til (3.38), har dermed (3.38) et unikt kritisk punkt, nemlig $(X_1^*, X_2^*) = (b, d)$. (b, d) er sentrum i enhver ellipse gitt ved (3.27).

(3.36) innsatt i (3.27) gir

$$\begin{aligned}X_1 &= X_1(t) = a \cos t + b \\ X_2 &= X_2(t) = -a\sqrt{\frac{d}{b}} \sin t + d.\end{aligned}\tag{3.40}$$

(3.40) er en løsning av (3.38) for enhver $a \in \mathbb{R}$:

For $a \neq 0$ gir (3.40)

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= -a \sin t = -a \left(\frac{X_2 - d}{-a\sqrt{\frac{d}{b}}} \right) = \sqrt{\frac{b}{d}}X_2 - \sqrt{bd} \\ \dot{X}_2 &= -a\sqrt{\frac{d}{b}} \cos t = -a\sqrt{\frac{d}{b}} \left(\frac{X_1 - b}{a} \right) = \sqrt{bd} - \sqrt{\frac{d}{b}}X_1.\end{aligned}$$

For $a = 0$ blir (3.40)

$$X_1(t) = b$$

$$X_2(t) = d$$

som innsatt i (3.38) gir at både venstre og høyre side i begge likningene blir null.

Vi holder b og d fast, og undersøker nå om det for et vilkårlig, men fast, punkt $(X_{1,0}, X_{2,0})$ i faseplanet finnes en a slik at løsningen av (3.38) gitt ved (3.40) oppfyller

$$X_1(t_0) = X_{1,0} \tag{3.41}$$

$$X_2(t_0) = X_{2,0}$$

for en t_0 . (3.41) er ekvivalent med

$$a \cos t_0 + b = X_{1,0} \tag{3.42}$$

$$-a\sqrt{\frac{d}{b}} \sin t_0 + d = X_{2,0}$$

som, hvis $a \neq 0$, er ekvivalent med

$$\cos t_0 = \frac{X_{1,0} - b}{a} \tag{3.43}$$

$$\sin t_0 = -\frac{(X_{2,0} - d)\sqrt{\frac{b}{d}}}{a}.$$

La nå a være gitt ved

$$a = \sqrt{(X_{1,0} - b)^2 + \frac{b}{d}(X_{2,0} - d)^2}. \tag{3.44}$$

Anta at $(X_{1,0}, X_{2,0}) \neq (b, d)$. Da blir $a \neq 0$, og

$$\left(\frac{X_{1,0} - b}{a}\right)^2 + \left(-\frac{(X_{2,0} - d)\sqrt{\frac{b}{d}}}{a}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2} = 1,$$

så punktet

$$\left(\frac{X_{1,0} - b}{a}, -\frac{(X_{2,0} - d)\sqrt{\frac{b}{d}}}{a}\right)$$

ligger på enhetssirkelen. Følgelig finnes en $t_0 \in [0, 2\pi)$ slik at (3.43), og dermed (3.41), er oppfylt. Dersom $(X_{1,0}, X_{2,0}) = (b, d)$ så gir (3.44) at $a = 0$, som innsatt i (3.40) gir

$$X_1(t) = b$$

$$X_2(t) = d$$

og dermed er (3.41) oppfylt for alle $t_0 \in \mathbb{R}$.

Vi har altså at for ethvert punkt $(X_{1,0}, X_{2,0})$ i faseplanet gir (3.40), med a gitt ved (3.44), en bane til S -systemet (3.38) som går gjennom $(X_{1,0}, X_{2,0})$. Siden det, ved korollar 3.2.2, går nøyaktig én bane for S -systemet (3.38) gjennom hvert punkt i faseplanet, får vi at (3.40), med a gitt ved (3.44), gir samtlige baner til (3.38).

Vi oppsummerer:

Vi har sett at S -systemet

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= \sqrt{\frac{b}{d}}X_2 - \sqrt{bd} \\ \dot{X}_2 &= \sqrt{bd} - \sqrt{\frac{d}{b}}X_1 \end{aligned} \tag{3.45}$$

der $b, d > 0$, har et unikt kritisk punkt $(X_1^*, X_2^*) = (b, d)$, og at S -systemets bane gjennom $(X_{1,0}, X_{2,0})$ er gitt ved

$$X_1(t) = a \cos t + b$$

$$X_2(t) = -a\sqrt{\frac{d}{b}} \sin t + d$$

der

$$a = \sqrt{(X_{1,0} - b)^2 + \frac{b}{d}(X_{2,0} - d)^2}.$$

Med unntak av banen som gis av likevektsløsningen, er samtlige baner ellipser med sentrum i (b, d) og halvaksler a og $a\sqrt{\frac{d}{b}}$. Dersom $b = d$, er $a = a\sqrt{\frac{d}{b}}$, så de elliptiske banene er sirkler.

(ii) Vi vil nå begrunne at det unike kritiske punktet (b, d) for S -systemet (3.45) er stabilt, men ikke LA-stabilt. Gitt $\varepsilon > 0$, velger vi $(X_{1,0}, X_{2,0})$ nær nok (b, d) til at hele banen gjennom $(X_{1,0}, X_{2,0})$ ligger i faseplanet og til at $\max\{a, a\sqrt{\frac{d}{b}}\} < \varepsilon$. Da vil hele banen gjennom $(X_{1,0}, X_{2,0})$ være inneholdt i $B_\varepsilon(b, d) = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |(X_1, X_2) - (b, d)| < \varepsilon\}$. La $\delta = \min\{a, a\sqrt{\frac{d}{b}}\}$. Dersom $(\tilde{X}_{1,0}, \tilde{X}_{2,0}) \in B_\delta(b, d)$ vil $(\tilde{X}_{1,0}, \tilde{X}_{2,0})$ ligge innenfor banen gjennom $(X_{1,0}, X_{2,0})$. Da må banen gjennom $(\tilde{X}_{1,0}, \tilde{X}_{2,0})$ ligge innenfor banen gjennom $(X_{1,0}, X_{2,0})$ (siden forskjellige baner ikke skjærer hverandre). Dermed vil banen gjennom $(\tilde{X}_{1,0}, \tilde{X}_{2,0})$ i sin helhet være inneholdt i $B_\varepsilon(b, d)$. Dette viser at det kritiske punktet (b, d) er stabilt.

Dersom $b = d$, slik at de elliptiske banene er sirkler, vil $\max\{a, a\sqrt{\frac{d}{b}}\} = \min\{a, a\sqrt{\frac{d}{b}}\}$. Begge gir da radien til (den sirkulære) banen gjennom $(X_{1,0}, X_{2,0})$, men argumentet er fremdeles gyldig.

Siden banen til enhver annen løsning av (3.45) enn likevektsløsningen er en ellipse, finnes ingen $\delta > 0$ slik at

$$|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}^*| < \delta \quad \text{medfører} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}^*$$

der \mathbf{X}^* er det kritiske punktet (b, d) . Det kritiske punktet (b, d) er altså stabilt, men ikke LA-stabilt.

(iii) Vi setter nå $b = 8, d = 2$. S -systemet (3.45) blir

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= 2X_2 - 4 \\ \dot{X}_2 &= 4 - 0.5X_1 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Dermed har dette S -systemet et unikt kritisk punkt, nemlig $(b, d) = (8, 2)$, som er stabilt, men ikke LA-stabilt. (3.46) er på formen (1.11) i eksempel 1.3.2, med $g_{12} = h_{21} = 1$.

Vi undersøker nå S -systemet (3.46) ved å bruke MATLAB-koden i Tillegg A sammen med MATLAB. Vi oppgir hastighetskonstantene og de kinetiske ordenene.

S -system med avhengige variabler X_1 og X_2 , ingen uavhengige variabler.

Beregning av systemmatrisen, eventuelt unikt kritisk punkt der verdien til hver av de avhengige variablene er positiv, Jacobimatrisen i det kritiske punktet, samt Jacobimatrises egenverdier.
Om mulig, bestemmelse av det kritiske punktets stabilitet ved hjelp av fortegnet til egenverdiens realdel.

Angi hastighetskonstantene (må være positive).

alfa1 = 2
beta1 = 4
alfa2 = 4
beta2 = 0.5

Angi de kinetiske ordenene, også de som eventuelt er lik null. Alle reelle tall er tillatt.

g11 = 0
g12 = 1
h11 = 0
h12 = 0
g21 = 0
g22 = 0
h21 = 1
h22 = 0

Dette gir følgende resultater:

Systemmatrisen er

A =

$$\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}$$

Systemmatrisen har determinant forskjellig fra null, og er følgelig invertibel. S-systemet har dermed et unikt kritisk punkt der verdien til hver av de avhengige variablene er positiv.

Dette er $X^* = (X1^*, X2^*)$, der

$$X1^* = 8.000000e+000$$

$$X2^* = 2.000000e+000$$

S-systemets Jacobimatrise beregnet i X^* er

$J(X^*) =$

$$\begin{array}{cc} 0 & 2.0000e+000 \\ -5.0000e-001 & 0 \end{array}$$

Eigenverdiene til $J(X^*)$ er

$$\text{lambda1} = 0+1i$$

$$\text{lambda2} = 0-1i$$

Bestemmelse av stabilitetsegenskapene til det kritiske punktet X^* krever nærmere analyse.

Det er overensstemmelse mellom resultatene av den matematiske og den numeriske analysen for bestemmelse av kritisk punkt. Siden korollar 3.2.8 gir tilstrekkelige betingelser kun for LA-stabilitet samt ustabilitet, kunne vi ikke brukt dette korollaret for å bestemme stabilitetsegenskapene til det kritiske punktet for (3.46). Siden testen som MATLAB-koden i tilleggene A, B, C og D bruker for å avgjøre stabilitet er en implementering av korollar 3.2.8, kan disse MATLAB-kodene ikke klassifisere et kritisk punkt som stabilt, men

ikke LA-stabilt. Figur 3.2 på side 69 viser et faseportrett og retningsfelt for S -systemet (3.46).

Eksempel 3.3.3 Dette eksemplet bygger på eksemplene 1.1.3 og 1.3.3. Vi gir hastighetskonstantene og de kinetiske ordenene i S -systemet (1.13) numeriske verdier. Fortegnet til hver av de kinetiske ordenene er i samsvar med fortegnsgivelsene som er angitt i (1.13). I tillegg må vi angi en verdi for den uavhengige variabelen, X_3 .

Hastighetskonstanter: $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 2.1, \beta_2 = 1$.

Kinetiske ordener: $g_{11} = 2, g_{12} = -1, g_{13} = 0.5, h_{11} = 3, h_{12} = 2, h_{21} = -1.7, h_{22} = 1.6$.

Uavhengig variabel: $X_3 = 4$.

S -systemet (1.13) blir dermed

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= X_1^2 X_2^{-1} X_3^{0.5} - 2.1 X_1^3 X_2^2 \\ \dot{X}_2 &= 2.1 X_1^3 X_2^2 - X_1^{-1.7} X_2^{1.6}\end{aligned}\tag{3.47}$$

der $X_3 = 4$.

Systemmatrisen er gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

der $a_{ij} = g_{ij} - h_{ij}$ for $i = 1, 2$ og $j = 1, 2$.

$$\begin{aligned}a_{11} &= g_{11} - h_{11} = 2 - 3 = -1 \\ a_{12} &= g_{12} - h_{12} = -1 - 2 = -3 \\ a_{21} &= g_{21} - h_{21} = 3 - (-1.7) = 4.7 \\ a_{22} &= g_{22} - h_{22} = 2 - 1.6 = 0.4\end{aligned}$$

gir

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4.7 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = (-1)(0.4) - (-3)4.7 = 13.7 \neq 0.$$

Dermed gir teorem 3.1.6 at S -systemet (3.47) har nøyaktig ett kritisk punkt, og at dette er $(X_1^*, X_2^*) = (e^{y_1}, e^{y_2})$ der

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = A^{-1}\mathbf{b} \quad \text{med} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

hvor

$$b_1 = \ln \frac{\beta_1}{\alpha_1} - (g_{13} - h_{13})\ln X_3 = \ln \frac{2.1}{1} - (0.5 - 0)\ln 4 = 0.048790$$

$$b_2 = \ln \frac{\beta_2}{\alpha_2} - (g_{23} - h_{23})\ln X_3 = \ln \frac{1}{2.1} - (0 - 0)\ln 4 = -0.74194$$

(her har vi brukt at $\alpha_2 = \beta_1, h_{13} = g_{23} = h_{23} = 0$).

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{13.7} \begin{bmatrix} 0.4 & 3 \\ -4.7 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dette gir

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{13.7} \begin{bmatrix} 0.4 & 3 \\ -4.7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.048790 \\ -0.74194 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.16104 \\ 0.037418 \end{bmatrix}.$$

Det unike kritiske punktet blir dermed

$$(X_1^*, X_2^*) = (e^{-0.16104}, e^{0.037418}) = (0.85126, 1.0381) \approx (0.851, 1.04).$$

Vi definerer nå

$$F_1(X_1, X_2) = X_1^2 X_2^{-1} X_3^{0.5} - 2.1 X_1^3 X_2^2$$

$$F_2(X_1, X_2) = 2.1 X_1^3 X_2^2 - X_1^{-1.7} X_2^{1.6},$$

der altså $X_3 = 4$. S -systemets Jacobimatrise beregnet i det kritiske punktet blir

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(X_1^*, X_2^*) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} \Big|_{(X_1^*, X_2^*)} \\ &= \begin{bmatrix} 2X_1 X_2^{-1} X_3^{0.5} - 6.3 X_1^2 X_2^2 & -X_1^2 X_2^{-2} X_3^{0.5} - 4.2 X_1^3 X_2 \\ 6.3 X_1^2 X_2^2 + 1.7 X_1^{-2.7} X_2^{1.6} & 4.2 X_1^3 X_2 - 1.6 X_1^{-1.7} X_2^{0.6} \end{bmatrix} \Big|_{(0.85126, 1.0381)} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} -1.6397 & -4.0344 \\ 7.7076 & 0.53794 \end{bmatrix}.$$

Eigenverdiene til Jacobimatrisen er røttene i den karakteristiske likningen

$$\det(\mathbf{J}(X_1^*, X_2^*) - \lambda I) = 0$$

der

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Den karakteristiske likningen blir

$$\left| \begin{bmatrix} -1.6397 - \lambda & -4.0344 \\ 7.7076 & 0.53794 - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

dvs.

$$(-1.6397 - \lambda)(0.53794 - \lambda) - (-4.0344)7.7076 = 0$$

som er ekvivalent med

$$\lambda^2 + 1.10176\lambda + 30.213 = 0.$$

Eigenverdiene blir

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-1.10176 + \sqrt{(1.10176)^2 - 4(30.213)}) = -0.55088 + 5.4690i$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(-1.10176 - \sqrt{(1.10176)^2 - 4(30.213)}) = -0.55088 - 5.4690i.$$

Siden $\text{Re}(\lambda_1) < 0$ og $\text{Re}(\lambda_2) < 0$ gir korollar 3.2.8 (i) at det unike kritiske punktet $(0.851, 1.04)$ er LA-stabilt.

Vi gjennomfører nå stabilitetsanalysen av (3.47) ved å bruke MATLAB-koden i Tillegg B sammen med MATLAB.

Vi oppgir hastighetskonstantene, de kinetiske ordenene og verdien av den uavhengige variabelen:

S-system med avhengige variabler X1 og X2,
samt uavhengig variabel X3.

Beregning av systemmatrisen, eventuelt unikt kritisk punkt der verdien til hver av de avhengige variablene er positiv, Jacobimatrisen i det kritiske punktet,

samt Jacobimatrixens egenverdier.
Om mulig, bestemmelse av det kritiske punktets stabilitet ved hjelp av fortegnet til egenverdiens realdel.

Angi hastighetskonstantene (må være positive).

alfa1 = 1
beta1 = 2.1
alfa2 = 2.1
beta2 = 1

Angi de kinetiske ordenene, også de som eventuelt er lik null. Alle reelle tall er tillatt.

g11 = 2
g12 = -1
g13 = 0.5
h11 = 3
h12 = 2
h13 = 0
g21 = 3
g22 = 2
g23 = 0
h21 = -1.7
h22 = 1.6
h23 = 0

Angi verdien til den uavhengige variabelen (må være positiv).

X3 = 4

Vi får følgende resultater:

Systemmatrisen er

A =

-1.0000e+000 -3.0000e+000
4.7000e+000 4.0000e-001

Systemmatrisen har determinant forskjellig fra null, og er følgelig invertibel. S-systemet har dermed et unikt kritisk punkt der verdien til hver av de avhengige variablene er positiv. Dette er $X^* = (X1^*, X2^*)$, der

$$X1^* = 8.512550e-001$$

$$X2^* = 1.038127e+000$$

S-systemets Jacobimatrise beregnet i X^* er

$$J(X^*) =$$

$$\begin{array}{cc} -1.6400e+000 & -4.0343e+000 \\ 7.7079e+000 & 5.3791e-001 \end{array}$$

Eigenverdiene til $J(X^*)$ er

$$\text{lambda1} = -0.55104+5.469i$$

$$\text{lambda2} = -0.55104-5.469i$$

Siden realdelen til hver av egenverdiene er negativ, er det kritiske punktet X^* lokalt asymptotisk stabilt.

Det er overensstemmelse mellom den matematiske og den numeriske stabilitetsanalysen. Figur 3.3 på side 70 viser et faseportrett og retningsfelt for S-systemet.

Eksempel 3.3.4 Dette eksemplet bygger på eksemplene 1.1.4 og 1.3.4. I (1.16) setter vi

$$\text{Hastighetskonstanter: } \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1.$$

$$\text{Kinetiske ordener: } h_{44} = 1, h_{11} = 1.2, h_{22} = 1, h_{23} = -0.8, h_{32} = 0.5, h_{33} = 0.7.$$

S-systemet (1.16) blir:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= X_4 - X_1^{1.2} \\ \dot{X}_2 &= X_1^{1.2} - X_2 X_3^{-0.8} \\ \dot{X}_3 &= X_2 X_3^{-0.8} - X_2^{0.5} X_3^{0.7} \\ \dot{X}_4 &= X_2^{0.5} X_3^{0.7} - X_4\end{aligned}\tag{3.48}$$

Siden S-systemet (3.48) er 4-dimensjonalt, undersøker vi dette S-systemet kun numerisk, ved å bruke MATLAB-koden i Tillegg C sammen med MATLAB. Vi begynner med å oppgi hastighetskonstantene og de kinetiske ordenene.

S-system med avhengige variabler X1, X2, X3 og X4, ingen uavhengige variabler.

Beregning av systemmatrisen, eventuelt unikt kritisk punkt der verdien til hver av de avhengige variablene er positiv, Jacobimatrisen i det kritiske punktet, samt Jacobimatrises egenverdier.

Om mulig, bestemmelse av det kritiske punktets stabilitet ved hjelp av fortegnet til egenverdiens realdel.

Angi hastighetskonstantene (må være positive).

```
alfa1 = 1
beta1 = 1
alfa2 = 1
beta2 = 1
alfa3 = 1
beta3 = 1
alfa4 = 1
beta4 = 1
```

Angi de kinetiske ordenene, også de som eventuelt er lik null. Alle reelle tall er tillatt.

```
g11 = 0
```

g12 = 0
g13 = 0
g14 = 1
h11 = 1.2
h12 = 0
h13 = 0
h14 = 0
g21 = 1.2
g22 = 0
g23 = 0
g24 = 0
h21 = 0
h22 = 1
h23 = -0.8
h24 = 0
g31 = 0
g32 = 1
g33 = -0.8
g34 = 0
h31 = 0
h32 = 0.5
h33 = 0.7
h34 = 0
g41 = 0
g42 = 0.5
g43 = 0.7
g44 = 0
h41 = 0
h42 = 0
h43 = 0
h44 = 1

Vi får følgende resultat:

Systemmatrisen er

A =

-1.2000e+000	0	0	1.0000e+000
1.2000e+000	-1.0000e+000	8.0000e-001	0
0	5.0000e-001	-1.5000e+000	0
0	5.0000e-001	7.0000e-001	-1.0000e+000

Systemmatrisen har determinant lik null, og er følgelig ikke invertibel. Dette medfører at S-systemet enten har ingen, eller uendelig mange, kritiske punkter der verdien til hver av de avhengige variablene er positiv.

I (3.48) ser vi at med $X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 1$ blir hver av høyresidene i S-systemet lik null. Dermed er $\mathbf{X}^* = (1, 1, 1, 1)$ et kritisk punkt for (3.48). Da systemmatrisens determinant er null, gir siste del av teorem 3.1.6 at (3.48) har uendelig mange kritiske punkter.

Eksempel 3.3.5 Dette eksemplet bygger på eksemplene 1.1.5 og 1.3.5. I (1.18) setter vi:

Hastighetskonstanter: $\alpha_1 = 1.4, \beta_1 = 0.9, \beta_2 = 1.82, \beta_3 = 1.68, \beta_4 = 1.5$.

Kinetiske ordener: $g_{13} = 0.2, g_{15} = 1.53, h_{11} = 1.2, h_{14} = -0.7, h_{22} = 1, h_{33} = 2, h_{34} = -1.09, h_{36} = 1.3, h_{44} = 1.9$.

Uavhengige variabler: $X_5 = 3, X_6 = 1.75$

S-systemet (1.18) blir dermed

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= 1.4X_3^{0.2}X_5^{1.53} - 0.9X_1^{1.2}X_4^{-0.7} \\ \dot{X}_2 &= 0.9X_1^{1.2}X_4^{-0.7} - 1.82X_2 \\ \dot{X}_3 &= 1.82X_2 - 1.68X_3^2X_4^{-1.09}X_6^{1.3} \\ \dot{X}_4 &= 1.68X_3^2X_4^{-1.09}X_6^{1.3} - 1.5X_4^{1.9} \end{aligned} \tag{3.49}$$

der $X_5 = 3, X_6 = 1.75$.

Også S-systemet (3.49) er 4-dimensjonalt, så vi gjør stabilitetsanalysen kun numerisk. Vi bruker MATLAB-koden i Tillegg D sammen med MATLAB. Vi oppgir hastighetskonstantene og de kinetiske ordenene, samt verdien til hver av de uavhengige variablene.

S-system med avhengige variabler X_1, X_2, X_3 og X_4 ,

samt uavhengige variabler X_5 og X_6 .
Beregning av systemmatrisen, eventuelt unikt kritisk punkt der verdien til hver av de avhengige variablene er positiv, Jacobimatrisen i det kritiske punktet, samt Jacobimatrisesens egenverdier.
Om mulig, bestemmelse av det kritiske punktets stabilitet ved hjelp av fortegnet til egenverdiene realdel.

Angi hastighetskonstantene (må være positive).

alfa1 = 1.4
beta1 = 0.9
alfa2 = 0.9
beta2 = 1.82
alfa3 = 1.82
beta3 = 1.68
alfa4 = 1.68
beta4 = 1.5

Angi de kinetiske ordenene, også de som eventuelt er lik null. Alle reelle tall er tillatt.

g11 = 0
g12 = 0
g13 = 0.2
g14 = 0
g15 = 1.53
g16 = 0
h11 = 1.2
h12 = 0
h13 = 0
h14 = -0.7
h15 = 0
h16 = 0
g21 = 1.2
g22 = 0
g23 = 0
g24 = -0.7
g25 = 0

g26 = 0
h21 = 0
h22 = 1
h23 = 0
h24 = 0
h25 = 0
h26 = 0
g31 = 0
g32 = 1
g33 = 0
g34 = 0
g35 = 0
g36 = 0
h31 = 0
h32 = 0
h33 = 2
h34 = -1.09
h35 = 0
h36 = 1.3
g41 = 0
g42 = 0
g43 = 2
g44 = -1.09
g45 = 0
g46 = 1.3
h41 = 0
h42 = 0
h43 = 0
h44 = 1.9
h45 = 0
h46 = 0

Angi verdiene til de uavhengige variablene
(må være positive).

X5 = 3
X6 = 1.75

Dette gir:

Systemmatrisen er

A =

```
-1.2000e+000      0  2.0000e-001  7.0000e-001
 1.2000e+000 -1.0000e+000      0 -7.0000e-001
                0  1.0000e+000 -2.0000e+000  1.0900e+000
                0                0  2.0000e+000 -2.9900e+000
```

Systemmatrisen har determinant forskjellig fra null, og er følgelig invertibel. S-systemet har dermed et unikt kritisk punkt der verdien til hver av de avhengige variablene er positiv.

Dette er $X^* = (X1^*, X2^*, X3^*, X4^*)$, der

$X1^* = 1.210106e+001$

$X2^* = 5.051873e+000$

$X3^* = 2.735277e+000$

$X4^* = 2.596798e+000$

S-systemets Jacobimatrise beregnet i X^* er

$J(X^*) =$

```
-9.1176e-001      0  6.7228e-001  2.4785e+000
 9.1176e-001 -1.8200e+000      0 -2.4785e+000
                0  1.8200e+000 -6.7228e+000  3.8593e+000
                0                0  6.7228e+000 -1.0587e+001
```

Eigenverdiene til $J(X^*)$ er

$\lambda_1 = -0.43953$

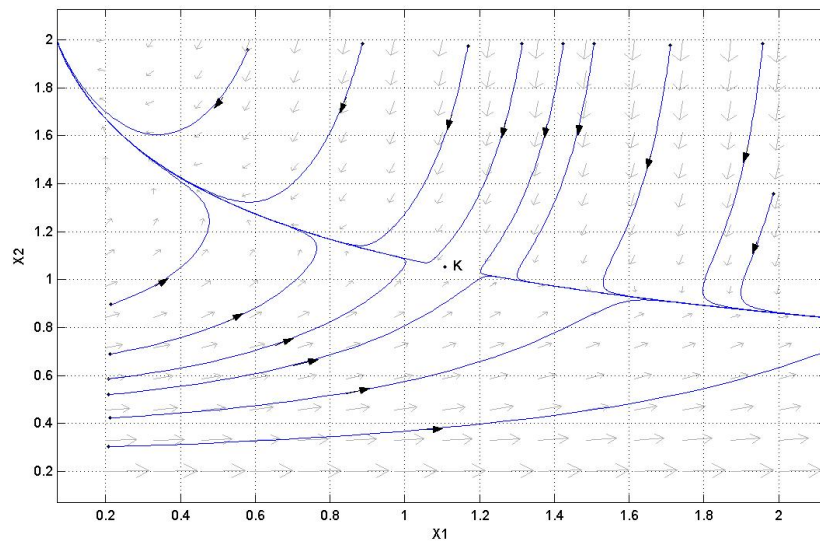
$\lambda_2 = -2.6344+1.7601i$

$\lambda_3 = -2.6344-1.7601i$

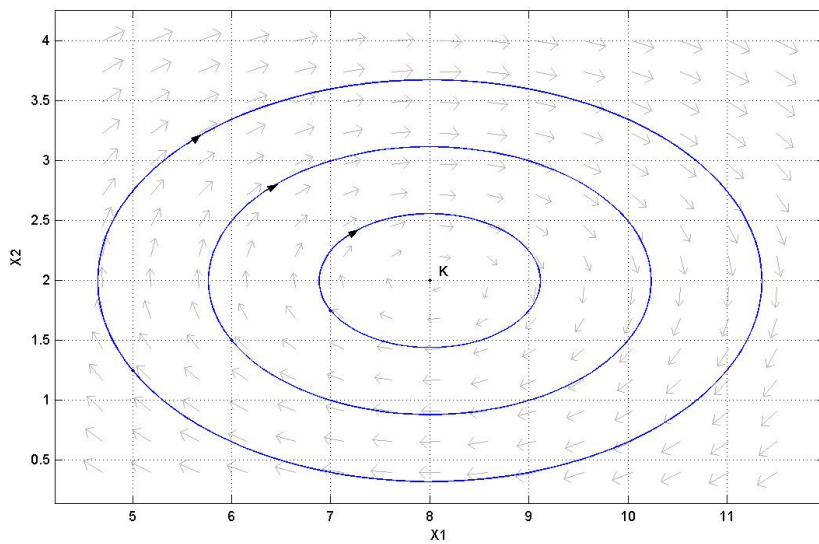
$\lambda_4 = -14.3328$

Siden realdelen til hver av egenverdiene er negativ, er det kritiske punktet X^*

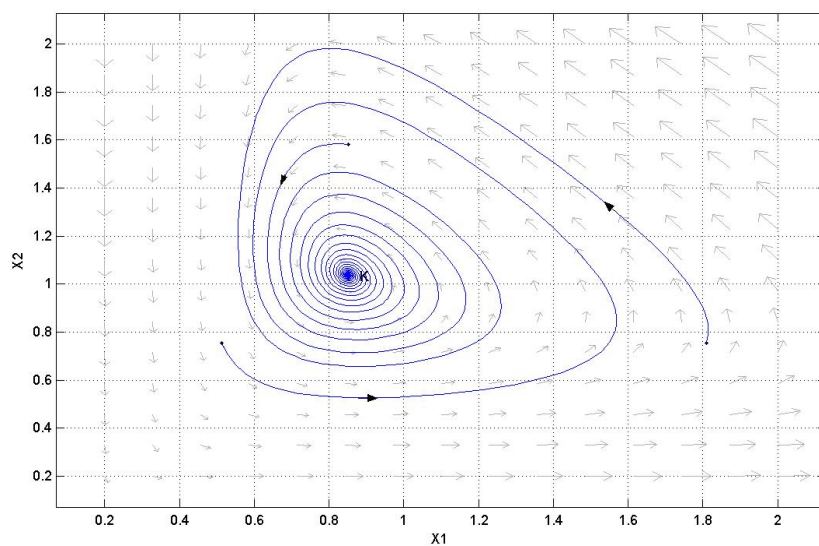
lokalt asymptotisk stabilt.



Figur 3.1: Faseportrett og retningsfelt i eksempel 3.3.1. Det kritiske punktet K er ustabil.



Figur 3.2: Faseportrett og retningsfelt i eksempel 3.3.2. Det kritiske punktet K er stabilt, men ikke LA-stabilt.



Figur 3.3: Faseportrett og retningsfelt i eksempel 3.3.3. Det kritiske punktet K er LA-stabilt.

Kapittel 4

Stykkevis kontinuerlige S-systemer

Vi skal nå gå inn på stykkevis kontinuerlige S-systemer.

Professor Arkadi Ponossov ved Universitetet for miljø- og biovitenskap har vært en svært viktig kilde i arbeidet med dette kapitlet. Der annet ikke er opplyst, bygger fakta og definisjoner i dette kapitlet på samtaler med ham.

Stykkevis kontinuerlige S-systemer er viktige i anvendelser fordi de i mange tilfeller beskriver virkeligheten bedre enn kontinuerlige S-systemer.

4.1 Introduksjon av stykkevis kontinuerlige S-systemer

Vi begynner denne seksjonen med å definere begrepet *vegg*, som er svært sentralt i behandlingen av stykkevis kontinuerlige S-systemer.

Definisjon 4.1.1 *La faserommet være gitt som*

$D = \{(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n \mid X_i > 0, i = 1, \dots, n\}$, og la $V \subset D$ være en $n - 1$ -dimensjonal sammenhengende flate som deler faserommet inn i et endelig antall disjunkte, ikketomme områder R_1, \dots, R_m slik at $V \cap R_i = \emptyset$ for hver $i = 1, \dots, m$ og $V \cup \left(\bigcup_{i=1}^m R_i \right) = D$. Da kalles V en *vegg*.

Dersom $n = 2$, vil V være en sammenhengende *kurve* i faseplanet. Faserommet kan også deles opp av fler enn én vegg samtidig.

Definisjon 4.1.2 *Anta at én eller flere vegger deler faserommet i områdene R_1, \dots, R_m . Et S-system hvis sett av parametere (hastighetskonstanter og*

*kinetiske ordener) ikke varierer innenfor ett og samme område R_i (for hver $i = 1, \dots, m$), kalles et **stykkevis kontinuerlig S-system**.*

Et par kommentarer er på sin plass her. For det første: Det er viktig å merke seg at definisjon 4.1.2 tillater at settet av parametere i et stykkevis kontinuerlig S-system ikke er det samme i hvert område R_i . For det andre: Definisjon 4.1.1 kan utvides til å tillate at en vegg deler faserommet inn i *uendelig mange* områder R_i . Også definisjon 4.1.2 kan utvides til å omfatte det tilfellet at veggene deler faserommet inn i uendelig mange områder R_i . I denne masteroppgaven forutsetter vi dog at antallet områder R_i er endelig.

Dersom én eller flere vegger deler faserommet i områdene R_1, \dots, R_m , så kan et stykkevis kontinuerlig S-system skrives slik:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{cases} \mathbf{F}_1(\mathbf{X}) & , \mathbf{X} \in R_1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_m(\mathbf{X}) & , \mathbf{X} \in R_m \end{cases}$$

eller slik:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{F}_1(\mathbf{X}) & , \mathbf{X} \in R_1 \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{F}_m(\mathbf{X}) & , \mathbf{X} \in R_m \end{aligned}$$

der, for hver $i = 1, \dots, m$, differensiallikningen $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_i(\mathbf{X})$ er et kontinuerlig S-system, S_i , hvor \mathbf{F}_i isolert sett er definert på hele faserommet, men i kombinasjon med de andre kontinuerlige S-systemene kun er definert på R_i (vi utelukker dog ikke at S_i kan ha samme sett parametere som S_k for én eller flere k forskjellig fra i). Dersom én eller flere vegger deler faserommet i områdene R_1, \dots, R_m , kan man altså betrakte det stykkevis kontinuerlige S-systemet som bestående av m kontinuerlige S-systemer S_1, \dots, S_m , der S_i (eller, rettere sagt, \mathbf{F}_i) kun er definert på R_i , for hver $i = 1, \dots, m$. Vi kaller R_i *virkeområdet* til S_i .

Anta at V er en vegg som skiller faserommet i nabovirkeområdene R_j for det kontinuerlige S-systemet S_j og R_k for det kontinuerlige S-systemet S_k . Anta at S_j er gitt ved $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_j(\mathbf{X})$ og at S_k er gitt ved $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_k(\mathbf{X})$. La punktet $\mathbf{X}_P = (X_1^P, \dots, X_n^P) \in V$. Anta at \mathbf{X}_P ikke er et skjæringspunkt mellom V og en annen vegg, og anta at V har et veldefinert tangentplan T (en veldefinert tangent T hvis V er en kurve) i \mathbf{X}_P . La N være normalen på T gjennom \mathbf{X}_P . Vi dekomponerer nå vektoren $\mathbf{F}_j(\mathbf{X}_P)$ i én komponent som er parallell med N , $\mathbf{F}_{j,N}(\mathbf{X}_P)$, og én komponent normalt på N . Likeledes dekomponerer vi vektoren $\mathbf{F}_k(\mathbf{X}_P)$ i én komponent som er parallell med N , $\mathbf{F}_{k,N}(\mathbf{X}_P)$, og

én komponent normalt på N . Legg merke til at vi regner som om både \mathbf{F}_j og \mathbf{F}_k er definert i \mathbf{X}_P .

Definisjon 4.1.3 Anta at $\mathbf{F}_{j,N}(\mathbf{X}_P) \neq \mathbf{0}$ og at $\mathbf{F}_{k,N}(\mathbf{X}_P) \neq \mathbf{0}$. Vi sier at veggene V er

- (i) **transparent** i \mathbf{X}_P dersom det finnes en $s > 0$ slik at $\mathbf{F}_{j,N}(\mathbf{X}_P) = s\mathbf{F}_{k,N}(\mathbf{X}_P)$.
- (ii) **hvit** i \mathbf{X}_P dersom det finnes en $s < 0$ slik at $\mathbf{F}_{j,N}(\mathbf{X}_P) = s\mathbf{F}_{k,N}(\mathbf{X}_P)$ og hvis vektoren $\mathbf{F}_{j,N}(\mathbf{X}_P)$ plassert slik at den utgår fra \mathbf{X}_P peker inn i R_j .
- (iii) **svart** i \mathbf{X}_P dersom det finnes en $s < 0$ slik at $\mathbf{F}_{j,N}(\mathbf{X}_P) = s\mathbf{F}_{k,N}(\mathbf{X}_P)$ og hvis vektoren $\mathbf{F}_{j,N}(\mathbf{X}_P)$ plassert slik at den utgår fra \mathbf{X}_P peker inn i R_k .

Dersom \mathbf{X}_P er et skjæringspunkt mellom V og en annen vegg, V ikke har et veldefinert tangentplan (en veldefinert tangent) i \mathbf{X}_P , $\mathbf{F}_{j,N}(\mathbf{X}_P) = \mathbf{0}$ eller $\mathbf{F}_{k,N}(\mathbf{X}_P) = \mathbf{0}$, er veggene hverken transparent, hvit eller svart i \mathbf{X}_P .

I følgende definisjon betegner \bar{A} tillukningen av mengden A .

Definisjon 4.1.4 La (X, ρ) være et metrisk rom, og $A \subset X$. Hvis $\text{int}(\bar{A}) = \emptyset$, sier vi at A er **ingensteds tett**.

(Davidson & Donsig [4], s. 254).

Definisjon 4.1.5 La V være en vegg.

- (i) Dersom V er transparent i ethvert punkt, unntatt for punkter i en ingensteds tett mengde, sier vi at veggene er transparent.
- (ii) Dersom V er hvit i ethvert punkt, unntatt for punkter i en ingensteds tett mengde, sier vi at veggene er hvit.
- (iii) Dersom V er svart i ethvert punkt, unntatt for punkter i en ingensteds tett mengde, sier vi at veggene er svart.

(Ponosov [9], s. 133).

Følgende er også svært nyttig om de tre veggtypene:

- **transparent**, når baner krysser veggen;
- **svart**, når baner går mot veggen fra begge sider; og
- **hvit**, når baner går bort fra veggen på begge sider.

(Tafintseva, Ponosov & Machina [13], s. 11, oversatt av Roger Digre).

Definisjon 4.1.6 *La*

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{cases} \mathbf{F}_1(\mathbf{X}) & , \mathbf{X} \in R_1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_m(\mathbf{X}) & , \mathbf{X} \in R_m \end{cases} \quad (4.1)$$

være et stykkevis kontinuertlig S-system. For hver $i = 1, \dots, m$ er altså $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_i(\mathbf{X})$ et kontinuertlig S-system, S_i , med virkeområde R_i . Anta at \mathbf{X}^* er et kritisk punkt for $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_i(\mathbf{X})$ når vi lar \mathbf{F}_i være definert på hele faserommet gitt ved (2.5). Da sier vi at \mathbf{X}^* er et **fokalpunkt** for S_i . Dersom i tillegg $\mathbf{X}^* \in R_i$, sier vi at \mathbf{X}^* er et **synlig** fokalpunkt for S_i . Dersom i stedet $\mathbf{X}^* \notin R_i$, sier vi at \mathbf{X}^* er et **usynlig** fokalpunkt for S_i .

La

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{cases} \mathbf{F}_1(\mathbf{X}) & , \mathbf{X} \in R_1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_m(\mathbf{X}) & , \mathbf{X} \in R_m \end{cases} \quad (4.2)$$

være et stykkevis kontinuertlig S-system. Da er $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{F}_i(\mathbf{X}) = 0$ og $\mathbf{X} \in R_i$ for en $i = 1, \dots, m$. Altså har vi at \mathbf{X}^* er et kritisk punkt for (4.2) hvis og bare hvis $\mathbf{F}_i(\mathbf{X}^*) = 0$ og $\mathbf{X}^* \in R_i$ for en $i = 1, \dots, m$. Med S_i gitt som $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_i(\mathbf{X})$, følger det at \mathbf{X}^* er et kritisk punkt for (4.2) hvis og bare hvis \mathbf{X}^* er et synlig fokalpunkt for S_i , for en $i = 1, \dots, m$. Dersom \mathbf{X}^* er et kritisk punkt for (4.2), er de lokale stabilitetsegenskapene til \mathbf{X}^* som kritisk punkt for (4.2) gitt ved de lokale stabilitetsegenskapene til \mathbf{X}^* som kritisk punkt for det kontinuertlige S-systemet $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_i(\mathbf{X})$.

Dersom vi for en $i = 1, \dots, m$, har $\mathbf{F}_i(\mathbf{X}^*) = \mathbf{0}$ og $\mathbf{X}^* \in R_i$, og \mathbf{X}^* dermed er et kritisk punkt for (4.2), vil eventuell global asymptotisk stabilitet for \mathbf{X}^* avhenge av hvordan banene arter seg i virkeområdene som grenser til R_i (Tafintseva, Ponosov & Machina [13], s. 11), og dessuten i alle andre virkeområder. Dette fordi global asymptotisk stabilitet forutsetter, i tillegg til stabilitet, at enhver bane som går gjennom et punkt i faserommet går mot det kritiske punktet.

4.2 Eksempler på stykkevis kontinuerlige S-systemer med lokal stabilitetsanalyse

I denne seksjonen skal vi gi noen eksempler på todimensjonale stykkevis kontinuerlige S-systemer. I eksemplene vil vi gjøre lokal stabilitetsanalyse samt gi figurer med faseportrett og retningsfelt. I faseportrettene for stykkevis kontinuerlige S-systemer inkluderer vi en fremstilling av fokalpunkter og vegg(e). Pil(er) på banene markerer banenes retning (med økende t).

Figurene med faseportrett og retningsfelt er laget ved hjelp av pplane6.m og Studentversjon av MATLAB, samt papirskjæreutstyr, tape, linjal, blyant og multifunksjonsskriver.

Eksempel 4.2.1 Vi betrakter det stykkevis kontinuerlige S-systemet med S_1 og S_2 gitt ved

$$S_1 : \begin{cases} \dot{X}_1 = 2X_1^2X_2^{-1} - 2.1X_1^3X_2^2, & 0 < X_1 < 1, X_2 > 0 \\ \dot{X}_2 = 2.1X_1^3X_2^2 - X_1^{-1.7}X_2^{1.6}, & 0 < X_1 < 1, X_2 > 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

$$S_2 : \begin{cases} \dot{X}_1 = 2X_1^2X_2^{-1} - 2.1X_1^3X_2^2, & X_1 > 1, X_2 > 0 \\ \dot{X}_2 = 0.3X_1^3X_2^2 - X_1^{-1.7}X_2^{1.6}, & X_1 > 1, X_2 > 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Virkeområdet til S_1 er

$$R_1 = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < X_1 < 1, X_2 > 0\}.$$

Virkeområdet til S_2 er

$$R_2 = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 \mid X_1 > 1, X_2 > 0\}.$$

Veggen mellom R_1 og R_2 er $V = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 \mid X_1 = 1, X_2 > 0\}$.

Vi gjenkjenner differensiallikningene i (4.3) som (3.47) der vi nå i stedet for å spesifisere $X_3 = 4$, lar $X_3^{0.5} = 4^{0.5} = 2$ inngå i α_1 . Vi har fra eksempel 3.3.3 at S_1 (betraktet som definert på hele faseplanet (2.5)) har et unikt kritisk punkt, nemlig $(0.8512550, 1.038127)$, som er LA-stabilt. Dette punktet kaller vi F_1 . Siden $F_1 \in R_1$ er F_1 et synlig fokalpunkt for S_1 . Dermed er F_1 et LA-stabilt kritisk punkt for det stykkevis kontinuerlige S-systemet.

Vi bruker nå MATLAB-koden i Tillegg A sammen med MATLAB til å gjøre lokal stabilitetsanalyse av S_2 .

S-system med avhengige variabler X_1 og X_2 ,
ingen uavhengige variabler.

Beregning av systemmatrisen, eventuelt unikt kritisk
punkt der verdien til hver av de avhengige variablene
er positiv, Jacobimatrisen i det kritiske punktet,
samt Jacobimatrises egenverdier.

Om mulig, bestemmelse av det kritiske punktets
stabilitet ved hjelp av fortegnet til
egenverdiens realdel.

Angi hastighetskonstantene (må være positive).

alfa1 = 2
beta1 = 2.1
alfa2 = 0.3
beta2 = 1

Angi de kinetiske ordenene, også de som eventuelt
er lik null. Alle reelle tall er tillatt.

g11 = 2
g12 = -1
h11 = 3
h12 = 2
g21 = 3
g22 = 2
h21 = -1.7
h22 = 1.6

Dette gir:

Systemmatrisen er

A =

-1.0000e+000 -3.0000e+000
4.7000e+000 4.0000e-001

Systemmatrisen har determinant forskjellig fra null,
og er følgelig invertibel. S-systemet har dermed et

unikt kritisk punkt der verdien til hver av de avhengige variablene er positiv.

Dette er $X^* = (X_1^*, X_2^*)$, der

$$X_1^* = 1.303520e+000$$

$$X_2^* = 9.006672e-001$$

S-systemets Jacobimatrise beregnet i X^* er

$J(X^*) =$

$$\begin{pmatrix} -2.8946e+000 & -1.2568e+001 \\ 1.9435e+000 & 2.3939e-001 \end{pmatrix}$$

Eigenverdiene til $J(X^*)$ er

$$\lambda_1 = -1.3276 + 4.6872i$$

$$\lambda_2 = -1.3276 - 4.6872i$$

Siden realdelen til hver av egenverdiene er negativ, er det kritiske punktet X^* lokalt asymptotisk stabilt.

S_2 (betraktet som definert på hele faseplanet (2.5)) har altså et unikt kritisk punkt, nemlig $(1.303520, 0.9006672)$, som er LA-stabilt. Dette punktet kaller vi F_2 . Siden $F_2 \in R_2$ er F_2 et synlig fokuspunkt for S_2 . Dermed er F_2 et LA-stabilt kritisk punkt for det stykkevis kontinuerte S-systemet.

Figur 4.1 viser F_1 og F_2 , en del av veggen som deler faseplanet i R_1 og R_2 , samt et utvalg baner for det stykkevis kontinuerte S-systemet. Én av banene som er vist starter i R_1 , men går over i R_2 , hvor den går mot F_2 . To av banene starter i R_2 , men går over i R_1 , hvor de går mot F_1 . Én av banene starter i R_2 , holder seg der, og går mot F_2 .

Vi vil nå undersøke hvordan normalkomponentene til S_1 og S_2 på veggen varierer med varierende verdier for X_2 , altså hvordan $\mathbf{F}_{1,N}(\mathbf{X}_P)$ og $\mathbf{F}_{2,N}(\mathbf{X}_P)$ (se avsnittet før definisjon 4.1.3) varierer når punktet \mathbf{X}_P i veggen varierer. Her er dette enkelt, siden normalkomponenten både for S_1 og S_2 i punktet (X_1, X_2) på veggen er gitt ved $\dot{\mathbf{X}}_1 = 2X_1^2 X_2^{-1} - 2.1X_1^3 X_2^2$. Normalkomponentene for S_1 og S_2 er altså like i ethvert punkt på veggen. I ethvert punkt på veggen er $X_1 = 1$, og i punktet $(1, X_2)$ er normalkomponenten

$2 \cdot 1^2 X_2^{-1} - 2.1 \cdot 1^3 X_2^2 = 2X_2^{-1} - 2.1X_2^2$, som har nøyaktig ett nullpunkt, nemlig

$$X_2 = \left(\frac{2}{2.1} \right)^{1/3} \approx 0.984.$$

Det følger at veggen er transparent. Figur 4.1 gjenspeiler dette.

Vi kan også bruke MATLAB-koden i Tillegg E sammen med MATLAB, til å undersøke hvordan normalkomponentene til S_1 og S_2 på veggen varierer med varierende verdier for X_2 . Ved kjøring ber MATLAB-koden om informasjon:

Beregning av normalkomponenten for hvert av to todimensjonale S-systemer S1 og S2 på veggen som skiller deres virkeområder.
Veggen er enten gitt ved $X_1=k$, eller $X_2=k$ for en $k>0$.

Angi hastighetskonstantene for S1 (må være positive).

```
alfa1 = 2  
beta1 = 2.1  
alfa2 = 2.1  
beta2 = 1
```

Angi de kinetiske ordenene for S1, også de som eventuelt er lik null. Alle reelle tall er tillatt.

```
g11 = 2  
g12 = -1  
h11 = 3  
h12 = 2  
g21 = 3  
g22 = 2  
h21 = -1.7  
h22 = 1.6
```

Angi hastighetskonstantene for S2 (må være positive).

```
alfa1_ = 2  
beta1_ = 2.1
```

alfa2_ = 0.3
beta2_ = 1

Angi de kinetiske ordenene for S_2 , også de som eventuelt er lik null. Alle reelle tall er tillatt.

g11_ = 2
g12_ = -1
h11_ = 3
h12_ = 2
g21_ = 3
g22_ = 2
h21_ = -1.7
h22_ = 1.6

Oppgi om veggen er gitt ved $X_1=k$ (skriv tallet "1") eller $X_2=k$ (skriv tallet "2")

Veggtype: 1

Veggen er altså på formen $X_1=k$. Oppgi en $k>0$.

$k = 1$

Oppgi minste verdi for X_2 .

Minste verdi for $X_2 = 0.1$

Oppgi største verdi for X_2 .

Største verdi for $X_2 = 2$

Dette resulterer i figur 4.2. At figuren kun viser én graf, gjenspeiler at normalkomponentene for S_1 og S_2 er like. Vi ser dessuten at normalkomponentene har et nullpunkt nær $X_2 = 1$. Dette er i overensstemmelse med det vi fant tidligere i eksemplet. Grafen viser dessuten at for verdier av X_2 mindre enn nullpunktet, er normalkomponentene positive, hvilket innebærer at deres retning går fra venstre til høyre i figur 4.1. For verdier av X_2 større enn nullpunktet, viser grafen at normalkomponentene er negative, og det medfører at normalkomponentenes retning er fra høyre til venstre i figur 4.1.

Eksempel 4.2.2 *Et stykkevis kontinuertlig S-system er gitt ved*

$$S_1 : \begin{cases} \dot{X}_1 = 2X_1^2X_2^{-1} - 2.1X_1^3X_2^2, & X_1 > 1, X_2 > 0 \\ \dot{X}_2 = 2.1X_1^3X_2^2 - X_1^{-1.7}X_2^{1.6}, & X_1 > 1, X_2 > 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$S_2 : \begin{cases} \dot{X}_1 = 2X_1^2X_2^{-1} - 2.1X_1^3X_2^2, & 0 < X_1 < 1, X_2 > 0 \\ \dot{X}_2 = 0.3X_1^3X_2^2 - X_1^{-1.7}X_2^{1.6}, & 0 < X_1 < 1, X_2 > 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Virkeområdet til S_1 er altså

$$R_1 = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 | X_1 > 1, X_2 > 0\},$$

og virkeområdet til S_2 er

$$R_2 = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 | 0 < X_1 < 1, X_2 > 0\}.$$

Veggen mellom R_1 og R_2 er $V = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 | X_1 = 1, X_2 > 0\}$.

Differensiallikningene i S_1 og S_2 er de samme som i eksempel 4.2.1, men virkeområdene er nå byttet om. $F_1 = (0.8512550, 1.038127) \notin R_1$ så F_1 er et usynlig fokuspunkt for S_1 , og $F_2 = (1.303520, 0.9006672) \notin R_2$, så F_2 er et usynlig fokuspunkt for S_2 . Siden hverken S_1 eller S_2 har et synlig fokuspunkt, får vi at det stykkevis kontinuertlige S-systemet ikke har noen kritiske punkter.

Også i dette eksemplet er normalkomponenten til både S_1 og S_2 i punktet (X_1, X_2) på veggen like, og gitt som $\dot{X}_1 = 2X_1^2X_2^{-1} - 2.1X_1^3X_2^2$. Dermed er V transparent, hvilket figur 4.3 gjenspeiler. Figur 4.3 illustrerer en bane som på en spiralliknende måte nærmer seg veggen.

Vi bruker igjen MATLAB-koden i Tillegg E sammen med MATLAB, til å illustrere hvordan normalkomponentene til S_1 og S_2 på veggen varierer med varierende verdier for X_2 .

Beregning av normalkomponenten for hvert av to todimensjonale S-systemer S_1 og S_2 på veggen som skiller deres virkeområder.

Veggen er enten gitt ved $X_1=k$, eller $X_2=k$ for en $k>0$.

Angi hastighetskonstantene for S_1 (må være positive).

alfa1 = 2
beta1 = 2.1
alfa2 = 2.1
beta2 = 1

Angi de kinetiske ordenene for S1, også de som eventuelt er lik null. Alle reelle tall er tillatt.

g11 = 2
g12 = -1
h11 = 3
h12 = 2
g21 = 3
g22 = 2
h21 = -1.7
h22 = 1.6

Angi hastighetskonstantene for S2 (må være positive).

alfa1_ = 2
beta1_ = 2.1
alfa2_ = 0.3
beta2_ = 1

Angi de kinetiske ordenene for S2, også de som eventuelt er lik null. Alle reelle tall er tillatt.

g11_ = 2
g12_ = -1
h11_ = 3
h12_ = 2
g21_ = 3
g22_ = 2
h21_ = -1.7
h22_ = 1.6

Oppgi om veggen er gitt ved $X_1=k$ (skriv tallet "1") eller $X_2=k$ (skriv tallet "2")

Veggtype: 1

Veggen er altså på formen $X_1=k$. Oppgi en $k>0$.

$k = 1$

Oppgi minste verdi for X_2 .

Minste verdi for $X_2 = 0.1$

Oppgi største verdi for X_2 .

Største verdi for $X_2 = 2$

Dette gir figur 4.4. Grafene i figur 4.2 og figur 4.4 er like, siden uttrykket for normalkomponentene er det samme i eksempel 4.2.1 og dette eksemplet.

Eksempel 4.2.3 *Det stykkevis kontinuertlige S-systemet er gitt ved*

$$S_1 : \begin{cases} \dot{X}_1 = 2X_1^2X_2^{-1} - 2.1X_1^3X_2^2, & X_1 > 0, X_2 > 1.4 \\ \dot{X}_2 = 2.1X_1^3X_2^2 - X_1^{-1.7}X_2^{1.6}, & X_1 > 0, X_2 > 1.4 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$S_2 : \begin{cases} \dot{X}_1 = 2X_1^2X_2^{-1} - 2.1X_1^3X_2^2, & X_1 > 0, 0 < X_2 < 1.4 \\ \dot{X}_2 = 0.3X_1^3X_2^2 - X_1^{-1.7}X_2^{1.6}, & X_1 > 0, 0 < X_2 < 1.4 \end{cases} \quad (4.8)$$

Virkeområdet til S_1 er altså

$$R_1 = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 | X_1 > 0, X_2 > 1.4\},$$

og virkeområdet til S_2 er

$$R_2 = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 | X_1 > 0, 0 < X_2 < 1.4\}.$$

Veggen mellom R_1 og R_2 er $V = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 | X_1 > 0, X_2 = 1.4\}$.

Differensiallikningene i S_1 og S_2 er de samme som i eksemplene 4.2.1 og 4.2.2. $F_1 = (0.8512550, 1.038127) \notin R_1$ så F_1 er et usynlig fokalpunkt for S_1 . $F_2 = (1.303520, 0.9006672) \in R_2$, så F_2 er et synlig fokalpunkt for S_2 . Dermed er F_2 et unikt kritisk punkt for det stykkevis kontinuertlige S-systemet. I eksempel 4.2.1 fant vi at F_2 er et LA-stabilt kritisk punkt for S_2 . Det følger

at F_2 er et LA-stabilt kritisk punkt for det stykkevis kontinuertlige S-systemet.

Figur 4.5 viser noen baner for det stykkevis kontinuertlige S-systemet. Ved å bruke MATLAB-koden i Tillegg E sammen med MATLAB undersøker vi nå hvordan normalkomponentene til S_1 og S_2 varierer langs V , dvs. for forskjellige verdier av X_1 på V .

Beregning av normalkomponenten for hvert av to todimensjonale S-systemer S_1 og S_2 på veggen som skiller deres virkeområder. Veggen er enten gitt ved $X_1=k$, eller $X_2=k$ for en $k>0$.

Angi hastighetskonstantene for S_1 (må være positive).

```
alfa1 = 2
beta1 = 2.1
alfa2 = 2.1
beta2 = 1
```

Angi de kinetiske ordenene for S_1 , også de som eventuelt er lik null. Alle reelle tall er tillatt.

```
g11 = 2
g12 = -1
h11 = 3
h12 = 2
g21 = 3
g22 = 2
h21 = -1.7
h22 = 1.6
```

Angi hastighetskonstantene for S_2 (må være positive).

```
alfa1_ = 2
beta1_ = 2.1
alfa2_ = 0.3
beta2_ = 1
```

Angi de kinetiske ordenene for S_2 , også de som eventuelt er lik null. Alle reelle tall er tillatt.

g11_ = 2
g12_ = -1
h11_ = 3
h12_ = 2
g21_ = 3
g22_ = 2
h21_ = -1.7
h22_ = 1.6

Oppgi om veggen er gitt ved $X_1=k$ (skriv tallet "1") eller $X_2=k$ (skriv tallet "2")

Veggtype: 2

Veggen er altså på formen $X_2=k$. Oppgi en $k>0$.

$k = 1.4$

Oppgi minste verdi for X_1 .

Minste verdi for $X_1 = 0.2$

Oppgi største verdi for X_1 .

Største verdi for $X_1 = 2$

Resultatet er vist i figur 4.6. Vi ser at både normalkomponenten til S_1 og normalkomponenten til S_2 har et nullpunkt. Siden normalkomponenten i dette eksemplet er gitt ved \dot{X}_2 , er normalkomponenten til S_1 lik $2.1X_1^3X_2^2 - X_1^{-1.7}X_2^{1.6}$, som med $X_2 = 1.4$ har nullpunktet

$$X_1 = \left(\frac{1.4^{-0.4}}{2.1} \right)^{1/4.7} \approx 0.83.$$

Normalkomponenten til S_2 er $0.3X_1^3X_2^2 - X_1^{-1.7}X_2^{1.6}$, som med $X_2 = 1.4$ har nullpunktet

$$X_1 = \left(\frac{1.4^{-0.4}}{0.3} \right)^{1/4.7} \approx 1.26.$$

Figur 4.6 viser dermed at for

$$X_1 < \left(\frac{1.4^{-0.4}}{2.1} \right)^{1/4.7}$$

er begge normalkomponentene negative. For disse verdiene av X_1 er veggen altså transparent, med normalkomponentene pekende inn i R_2 . Videre viser figur 4.6 at for

$$\left(\frac{1.4^{-0.4}}{2.1} \right)^{1/4.7} < X_1 < \left(\frac{1.4^{-0.4}}{0.3} \right)^{1/4.7}$$

er normalkomponenten til S_1 positiv, dvs. pekende inn i R_1 , og normalkomponenten til S_2 negativ, dvs. pekende inn i R_2 . Dette betyr at her er veggen hvit. For

$$X_1 > \left(\frac{1.4^{-0.4}}{0.3} \right)^{1/4.7}$$

er begge normalkomponentene positive. Her er altså veggen transparent, med normalkomponentene pekende inn i R_1 . Alt dette er i overensstemmelse med figur 4.5.

Eksempel 4.2.4 La et stykkevis kontinuertlig S -system være sammensatt av de kontinuertlige S -systemene S_1 og S_2 gitt ved

$$S_1 : \begin{cases} \dot{X}_1 = 2X_2 - 4, & 0 < X_1 < 8, X_2 > 0 \\ \dot{X}_2 = 4 - 0.5X_1, & 0 < X_1 < 8, X_2 > 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

$$S_2 : \begin{cases} \dot{X}_1 = 4 - 2X_2, & X_1 > 8, X_2 > 0 \\ \dot{X}_2 = 0.5X_1 - 4, & X_1 > 8, X_2 > 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Virkeområdet til S_1 er

$$R_1 = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < X_1 < 8, X_2 > 0\}.$$

Virkeområdet til S_2 er

$$R_2 = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 \mid X_1 > 8, X_2 > 0\}.$$

Vi gjenkjenner differensiallikningene i (4.9) som (3.46). Dermed vet vi fra eksempel (3.3.2) at (4.9) har et unikt kritisk punkt $(8, 2)$ og at banene som ikke beskrives av likevektsløsningen er ellipser med sentrum i $(8, 2)$. Siden

høyresidene i S_2 fremkommer ved å multiplisere høyresidene i S_1 med -1 vil S_2 ha samme unike kritiske punkt som S_1 , og banene til S_2 vil være ellipser som kun skiller seg fra banene til S_1 ved retningen (med økende t). (Dette ser vi slik: Anta at $\mathbf{X}(t)$ er en løsning av $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$. Da er $\frac{d}{dt}(\mathbf{X}(-t)) = \frac{d}{d(-t)}(\mathbf{X}(-t)) \cdot \frac{d(-t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}(-t)) \cdot (-1) = -\mathbf{F}(\mathbf{X}(-t))$. Dermed er $\mathbf{X}(-t)$ en løsning av $\dot{\mathbf{X}} = -\mathbf{F}(\mathbf{X})$).

Veggen som deler faseplanet i R_1 og R_2 , er $V = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 | X_1 = 8, X_2 > 0\}$. Siden det felles kritiske punktet $(8, 2)$ for S_1 og S_2 er element i V , og altså hverken ligger i R_1 eller R_2 , er $(8, 2)$ et usynlig fokuspunkt for både S_1 og S_2 . Følgelig har det stykkevis kontinuerlige S -systemet ingen kritiske punkter.

Figur 4.7 viser en del av V , samt et utvalg baner for det stykkevis kontinuerlige S -systemet.

Vi undersøker, ved hjelp av MATLAB-koden i Tillegg E sammen med MATLAB, hvordan normalkomponentene til S_1 og S_2 på veggen varierer med varierende verdier for X_2 .

Beregning av normalkomponenten for hvert av to todimensjonale S -systemer S_1 og S_2 på veggen som skiller deres virkeområder.

Veggen er enten gitt ved $X_1=k$, eller $X_2=k$ for en $k>0$.

Angi hastighetskonstantene for S_1 (må være positive).

```

alfa1 = 2
beta1 = 4
alfa2 = 4
beta2 = 0.5

```

Angi de kinetiske ordenene for S_1 , også de som eventuelt er lik null. Alle reelle tall er tillatt.

```

g11 = 0
g12 = 1
h11 = 0
h12 = 0

```

g21 = 0
g22 = 0
h21 = 1
h22 = 0

Angi hastighetskonstantene for S2 (må være positive).

alfa1_ = 4
beta1_ = 2
alfa2_ = 0.5
beta2_ = 4

Angi de kinetiske ordenene for S2, også de som eventuelt er lik null. Alle reelle tall er tillatt.

g11_ = 0
g12_ = 0
h11_ = 0
h12_ = 1
g21_ = 1
g22_ = 0
h21_ = 0
h22_ = 0

Oppgi om veggen er gitt ved $X_1=k$ (skriv tallet "1") eller $X_2=k$ (skriv tallet "2")

Veggtype: 1

Veggen er altså på formen $X_1=k$. Oppgi en $k>0$.

$k = 8$

Oppgi minste verdi for X_2 .

Minste verdi for $X_2 = 0.01$

Oppgi største verdi for X_2 .

Største verdi for $X_2 = 4$

I figur 4.8 viser den sorte linjen normalkomponenten til S_1 som funksjon av X_2 , mens den røde linjen viser normalkomponenten til S_2 som funksjon av X_2 . Vi ser at for $0 < X_2 < 2$ er normalkomponenten til S_1 negativ, og peker følgelig inn i R_1 , mens normalkomponenten til S_2 er positiv, og peker følgelig inn i R_2 . Dette medfører at for $0 < X_2 < 2$ er veggen hvit. For $X_2 > 2$ er normalkomponenten til S_1 positiv, og peker følgelig inn i R_2 , mens normalkomponenten til S_2 er negativ, og peker følgelig inn i R_1 . Dette medfører at for $X_2 > 2$ er veggen svart. Retningsfeltet og baneretningene i figur 4.7 gjenspeiler dette. I punktet på veggen der $X_2 = 2$, er begge normalkomponentene lik null, og veggen er derfor hverken transparent, hvit eller svart der.

Eksempel 4.2.5 I dette eksemplet lar vi det stykkevis kontinuerlige S -systemet bestå av fire kontinuerlige S -systemer på formen (3.45). Vi bruker følgende verdier for b og d : $S_1 : b = d = 3$, $S_2 : b = 2, d = 3$, $S_3 : b = d = 2$, $S_4 : b = 3, d = 2$.

Vi lar veggene gitt ved $V_1 = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 | X_1 = 2.5, X_2 > 0\}$ og $V_2 = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 | X_1 > 0, X_2 = 2.5\}$ dele faseplanet inn i de fire virkeområdene

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 | X_1 > 2.5, X_2 > 2.5\} \\ R_2 &= \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 | 0 < X_1 < 2.5, X_2 > 2.5\} \\ R_3 &= \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 | 0 < X_1 < 2.5, 0 < X_2 < 2.5\} \\ R_4 &= \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 | X_1 > 2.5, 0 < X_2 < 2.5\} \end{aligned}$$

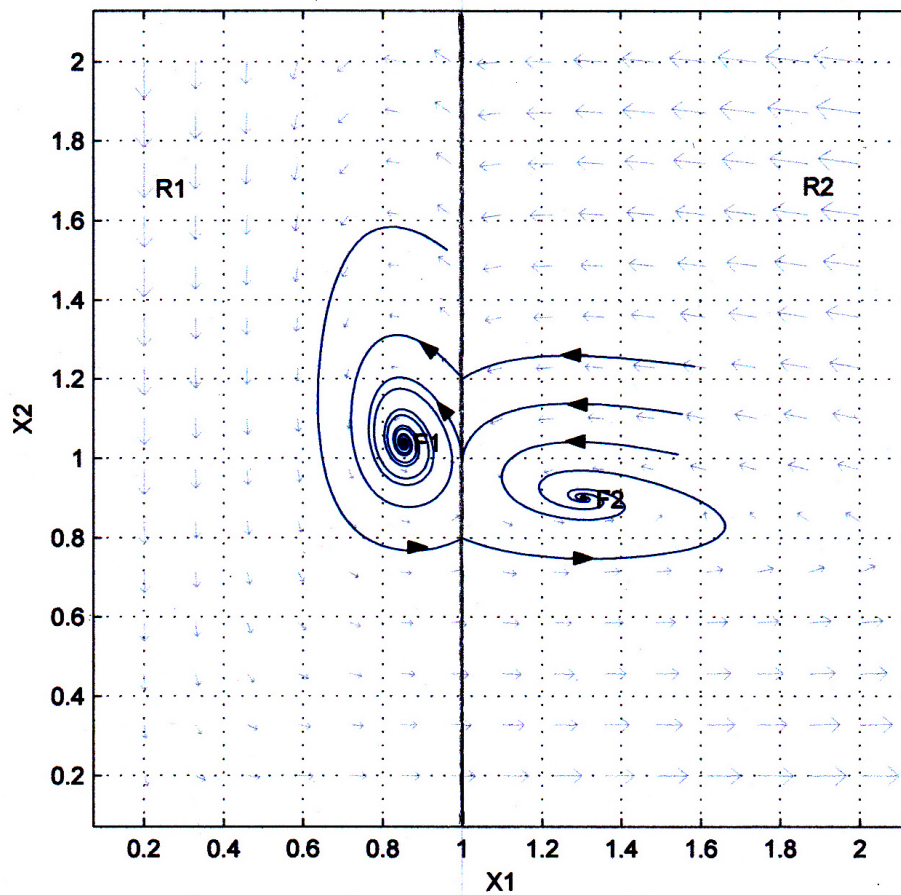
Vi har altså

$$\begin{aligned} S_1 &: \begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 - 3, & X_1 > 2.5, X_2 > 2.5 \\ \dot{X}_2 = 3 - X_1, & X_1 > 2.5, X_2 > 2.5 \end{cases} \\ S_2 &: \begin{cases} \dot{X}_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}X_2 - \sqrt{6}, & 0 < X_1 < 2.5, X_2 > 2.5 \\ \dot{X}_2 = \sqrt{6} - \sqrt{\frac{3}{2}}X_1, & 0 < X_1 < 2.5, X_2 > 2.5 \end{cases} \\ S_3 &: \begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 - 2, & 0 < X_1 < 2.5, 0 < X_2 < 2.5 \\ \dot{X}_2 = 2 - X_1, & 0 < X_1 < 2.5, 0 < X_2 < 2.5 \end{cases} \\ S_4 &: \begin{cases} \dot{X}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}X_2 - \sqrt{6}, & X_1 > 2.5, 0 < X_2 < 2.5 \\ \dot{X}_2 = \sqrt{6} - \sqrt{\frac{2}{3}}X_1, & X_1 > 2.5, 0 < X_2 < 2.5 \end{cases} \end{aligned}$$

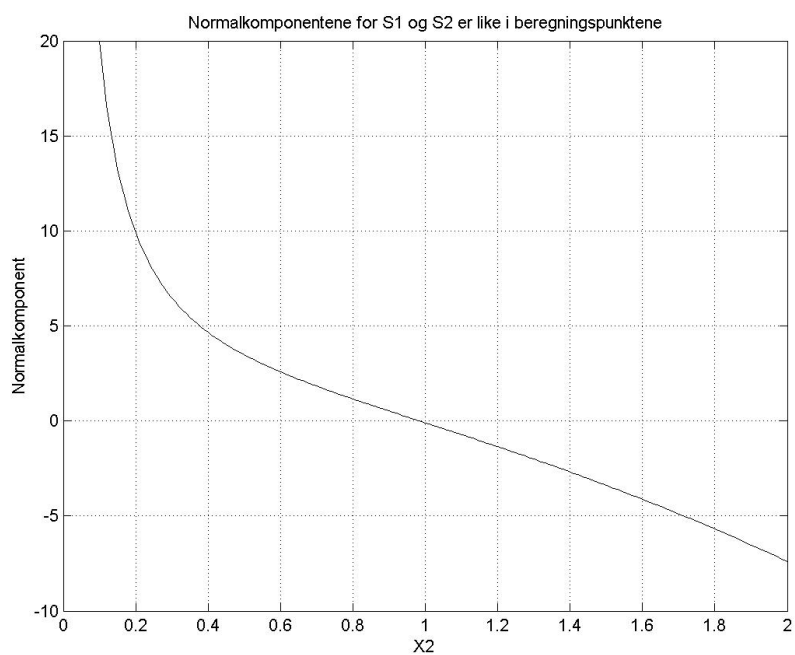
Fra eksempel 3.3.2 får vi at banene (som ikke gis av likevektsløsning) til både S_1, S_2, S_3 og S_4 er ellipser med sentrum i (b, d) , og at banene til S_1 og S_3 er sirkler. Eksempel 3.3.2 gir dessuten at $F_1 = (3, 3)$ er et kritisk punkt for S_1 . Siden $(3, 3) \in R_1$ er F_1 et synlig fokalpunkt for S_1 , og dermed et kritisk punkt for det stykkevis kontinuertlige S -systemet. For S_1 gir eksempel 3.3.2 videre at det kritiske punktet $(3, 3)$ er stabilt, men ikke LA-stabilt. Dermed er F_1 et stabilt, men ikke LA-stabilt, kritisk punkt for det stykkevis kontinuertlige S -systemet. Helt tilsvarende får vi at $F_2 = (2, 3), F_3 = (2, 2)$ og $F_4 = (3, 2)$ er synlige fokalpunkter for de respektive kontinuertlige S -systemene, og stabile, men ikke LA-stabile, kritiske punkter for det stykkevis kontinuertlige S -systemet.

Figur 4.9 illustrerer veggene som deler faseplanet i de ulike virkeområdene, fokalpunktene, samt et utvalg baner for det stykkevis kontinuertlige S -systemet. Legg spesielt merke til at figuren demonstrerer en lukket bane som gjennomløper alle de fire virkeområdene.

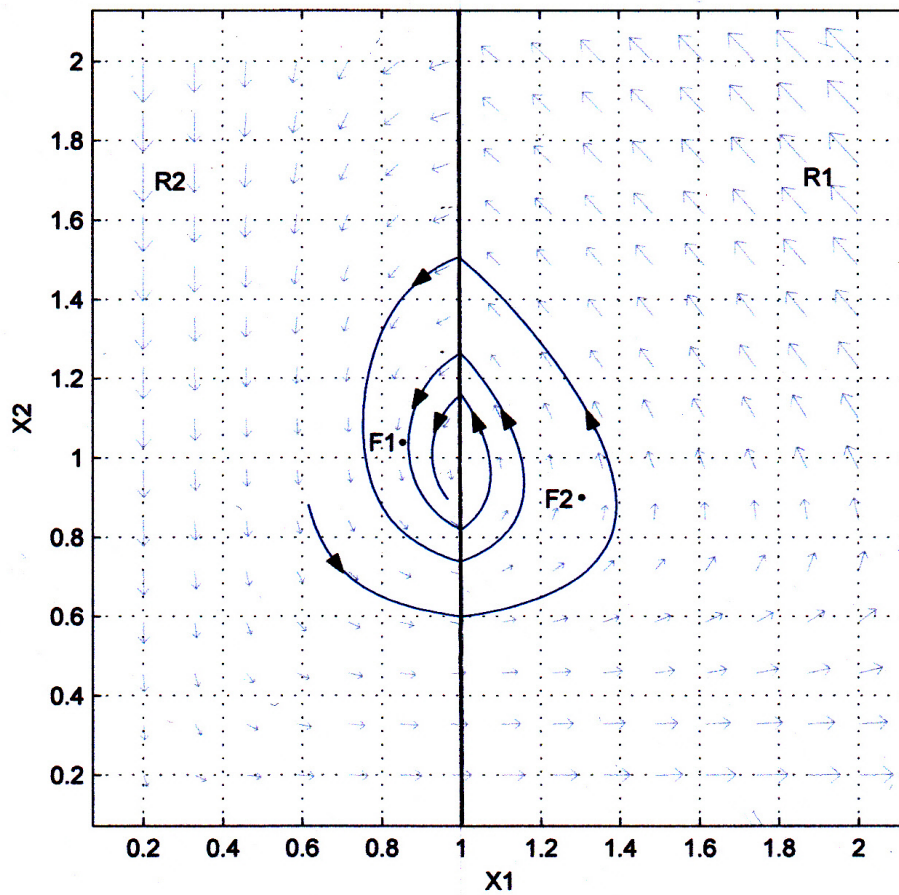
I krysningspunktet mellom V_1 og V_2 , dvs. $(2.5, 2.5)$, samt i veggpunktene hvor normalkomponentene er lik null, dvs. $(3, 2.5), (2.5, 3), (2, 2.5), (2.5, 2)$, er veggene hverken transparente, hvite eller svarte. I alle andre punkter er veggene transparente. Begge veggene er dermed transparente: Dette illustreres av faseportrettet og retningsfeltet i figur 4.9.



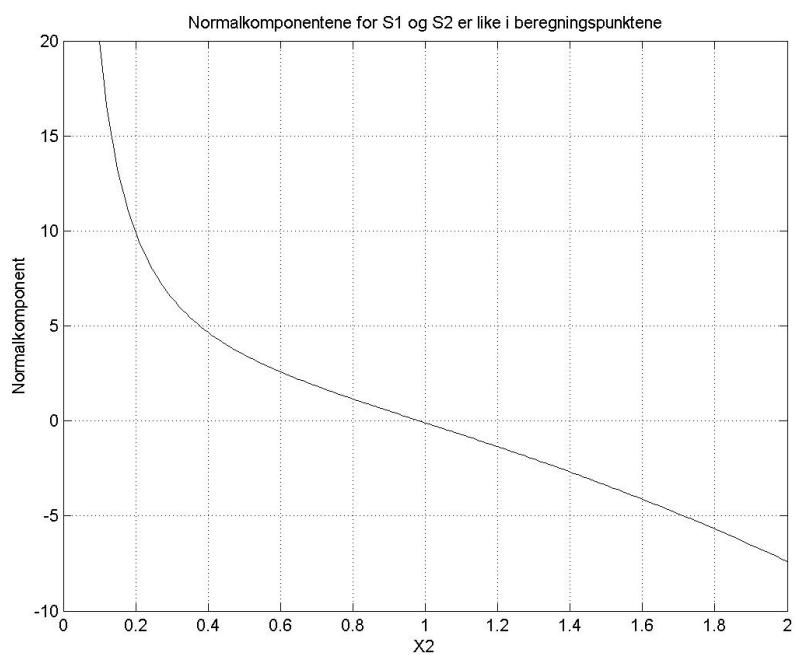
Figur 4.1: Faseportrett og retningsfelt i eksempel 4.2.1. Vegg er gitt ved $X_1 = 1, X_2 > 0$. F_1 er et synlig fokuspunkt for S_1 , F_2 er et synlig fokuspunkt for S_2 . Både F_1 og F_2 er LA-stabile kritiske punkter for det stykkevis kontinuerlige S-systemet. (Figuren er laget ved hjelp av blant annet pplane og Studentversjon av MATLAB).



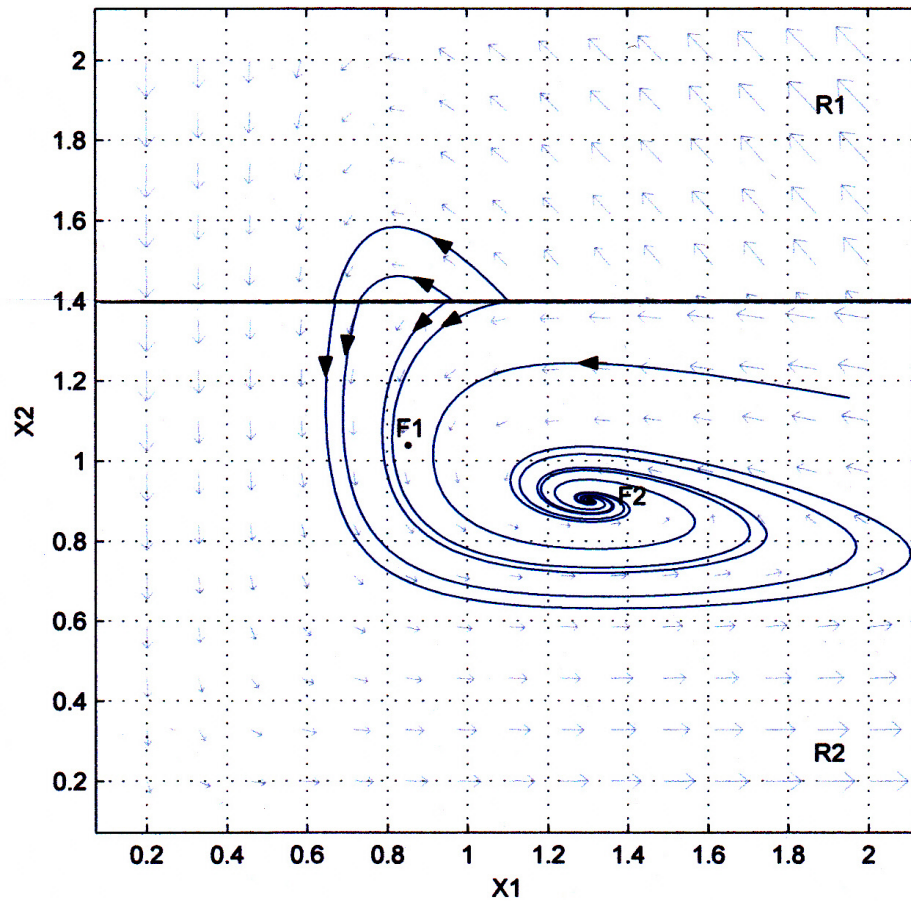
Figur 4.2: Grafisk fremstilling av normalkomponentene på veggen i eksempel 4.2.1, for S_1 og S_2 , som funksjon av X_2 . Normalkomponentene for S_1 og S_2 er like i ethvert punkt på veggen, hvilket medfører at grafene for normalkomponentene er sammenfallende. Veggen er gitt ved $X_1 = 1, X_2 > 0$.



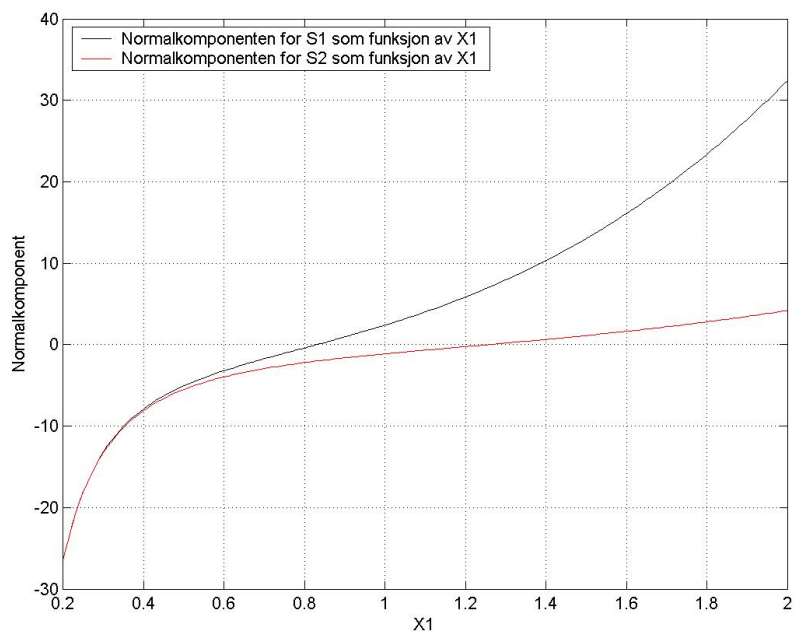
Figur 4.3: Faseportrett og retningsfelt i eksempel 4.2.2. Veggen er gitt ved $X_1 = 1, X_2 > 0$. F_1 og F_2 er usynlige fokalpunkter for henholdsvis S_1 og S_2 . Det stykkevis kontinuerlige S-systemet har ingen kritiske punkter. (Figuren er laget ved hjelp av blant annet pplane og Studentversjon av MATLAB).



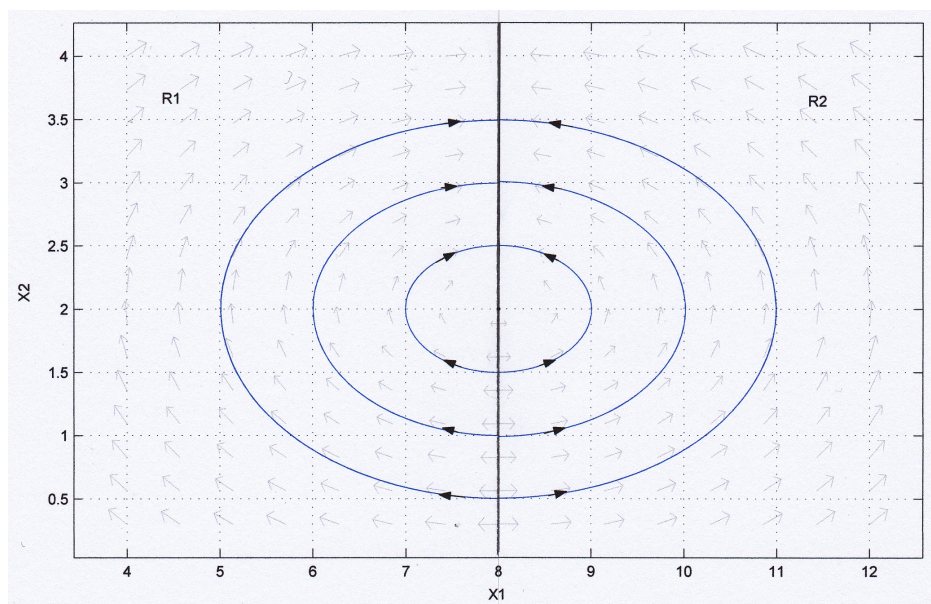
Figur 4.4: Grafisk fremstilling av normalkomponentene på veggen i eksempel 4.2.2, for S_1 og S_2 , som funksjon av X_2 . Normalkomponentene for S_1 og S_2 er like i ethvert punkt på veggen, hvilket medfører at grafene for normalkomponentene er sammenfallende. Veggen er gitt ved $X_1 = 1, X_2 > 0$.



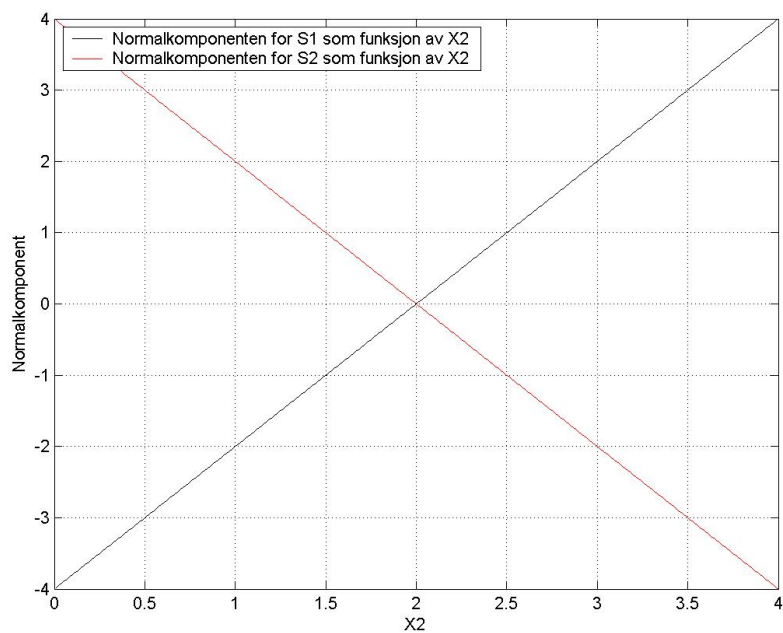
Figur 4.5: Faseportrett og retningsfelt i eksempel 4.2.3. Vegg er gitt ved $X_1 > 0, X_2 = 1.4$. F_1 er et usynlig fokuspunkt for S_1 . F_2 er et synlig fokuspunkt for S_2 . F_2 er et LA-stabilt kritisk punkt for det stykkevis kontinuerlige S-systemet. (Figuren er laget ved hjelp av blant annet pplane og Studentversjon av MATLAB).



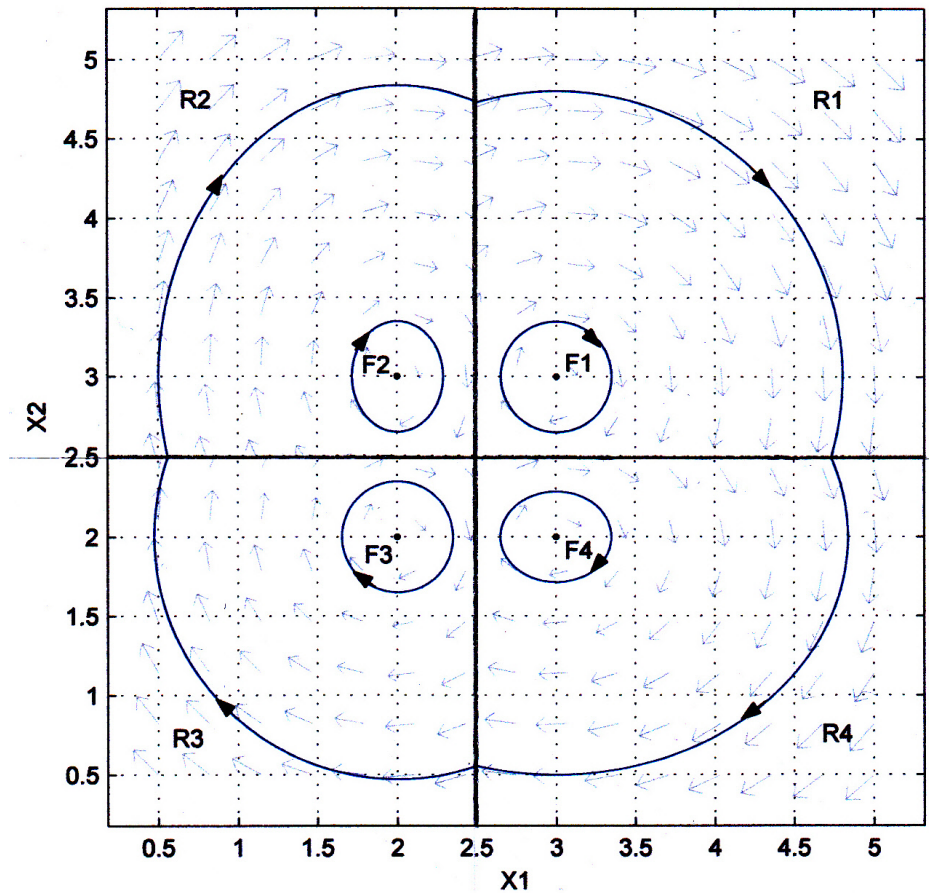
Figur 4.6: Grafisk fremstilling av normalkomponentene på veggen i eksempel 4.2.3, for S_1 og S_2 , som funksjon av X_1 . Veggen er gitt ved $X_1 > 0, X_2 = 1.4$.



Figur 4.7: Faseportrett og retningsfelt i eksempel 4.2.4. Vegg er gitt ved $X_1 = 8, X_2 > 0$. $(8, 2)$ er et usynlig fokuspunkt for både S_1 og S_2 . (Figuren er laget ved hjelp av blant annet pplane og Studentversjon av MATLAB).



Figur 4.8: Grafisk fremstilling av normalkomponentene på veggen i eksempel 4.2.4, for S_1 og S_2 , som funksjon av X_2 . Veggen er gitt ved $X_1 = 8, X_2 > 0$.



Figur 4.9: Faseportrett og retningsfelt i eksempel 4.2.5. Veggene er gitt ved $X_1 = 2.5, X_2 > 0$ og $X_1 > 0, X_2 = 2.5$. F_1, F_2, F_3 og F_4 er stabile, men ikke LA-stabile kritiske punkter for det stykkevis kontinuerte S-systemet. (Figuren er laget ved hjelp av blant annet pplane og Studentversjon av MATLAB).

Konklusjon

Denne konklusjonsdelen inkluderer stoff fra hoveddelen (kapittel 1, 2, 3 og 4) som bygger på, eller er hentet fra, kilder. *Referanser til disse kildene er oppgitt i hoveddelen.*

I denne masteroppgaven har vi sett at analyse av et biokjemisk system er en sekstrinnsprosess, og at konstruksjon av et diagram er meget viktig i slik analyse. På basis av diagrammet kan man sette opp et S-system. Vi har illustrert konstruksjon av diagrammer og dertil hørende S-systemer med egenutviklede eksempler. Deretter viste vi at ethvert initialverdiproblem hvor differensiallikningene utgjøres av et kontinuerlig S-system der samtlige variabler forutsettes positive, og der eventuelle uavhengige variabler er konstante, er velformulert. Dette bidrar til å støtte opp om at kontinuerlige S-systemer kan være godt egnet som matematisk modeller. For stabilitetsanalyse av kontinuerlige S-systemer har vi redegjort for to viktige metoder: Én for å finne et eventuelt unikt kritisk punkt. Den andre gir tilstrekkelige betingelser for lokal asymptotisk stabilitet, henholdsvis ustabilitet, for et unikt (og dermed isolert) kritisk punkt for et S-system. Vi har gitt egenutviklede eksempler på lokal stabilitetsanalyse, både matematisk og numerisk, ved hjelp av egenutviklet MATLAB-kode. For stykkevis kontinuerlige S-systemer definerte vi sentrale begreper, og gjorde lokal stabilitetsanalyse. Metodene for lokal stabilitetsanalyse av kontinuerlige S-systemer måtte da suppleres med ett trinn, nemlig at et fokalpunkt er et kritisk punkt hvis og bare hvis fokalpunktet er synlig. Vi ga egenutviklede eksempler på lokal stabilitetsanalyse av stykkevis kontinuerlige S-systemer, hvor vi delvis brukte den egenutviklede MATLAB-koden for stabilitetsanalyse, og delvis også brukte egenutviklet MATLAB-kode for å undersøke normalkomponentenes variasjon langs en vegg. Vi demonstrerte at for stykkevis kontinuerlige S-systemer kan forskjellige områder av samme vegg være av forskjellig type (transparent, hvit, eller svart). Dessuten demonstrerte vi for ett av de undersøkte stykkevis kontinuerlige S-systemene en lukket bane som gjennomløper samtlige (alle fire) virkeområdene.

En interessant utfordring videre kunne dreie seg om å forsøke å finne nødvendige og/eller tilstrekkelige betingelser for at stykkevis kontinuerlige S-systemer skal utvise lukkede baner som går i flere enn ett virkeområde.

En annen interessant mulighet videre kunne være å lage MATLAB-kode eller annen programkode for stykkevis kontinuerlige S-systemer som finner synlige og usynlige fokuspunkter, bestemmer lokale stabilitetsegenskaper for disse (som kritiske punkter for de respektive kontinuerlige S-systemene) så langt det lar seg gjøre, samt beregner normalkomponentenes variasjon langs mer generelle typer vegger. Eventuelt kunne man tenke seg koden laget slik at den avgjør om et vilkårlig, brukerdefinert, punkt er transparent, hvitt eller svart. Dette kunne man tenke seg gjort slik at koden kan behandle stykkevis kontinuerlige S-systemer som består av opptil et “stort” antall kontinuerlige S-systemer, samt ikke bare for stykkevis kontinuerlige S-systemer av “lave” dimensjoner.

I eksempel 3.3.2 så vi S-systemer med elliptiske baner. Selv om initialpunktet ligger i faserommet $D = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^n \mid X_i > 0, i = 1, 2\}$, kan disse banene forlate faserommet. En åpen problemstilling om S-systemer er, ifølge professor Arkadi Ponossov ved Universitetet for miljø- og biovitenskap, det å finne betingelser for at løsninger hvis initialpunkt ligger i faserommet (altså med positive variabelverdier), ikke forlater faserommet.

Tillegg A

MATLAB-kode for lokal stabilitetsanalyse av S-system med to avhengige og ingen uavhengige variabler

MATLAB-koden i dette tillegget er laget for S-systemer med to avhengige og ingen uavhengige variabler. Ved kjøring blir man bedt om å oppgi hastighetskonstantene for S-systemet. Koden tester om hver oppgitte hastighetskonstant er mindre enn eller lik null, gir beskjed hvis så er tilfelle, og ber i så fall om ny, positiv hastighetskonstant. Deretter blir man bedt om å oppgi S-systemets kinetiske ordener. Koden beregner, og viser, systemmatrisen. Koden tester om systemmatrisens determinant er lik null: Hvis så er tilfelle, gir koden beskjed om dette og at systemmatrisen følgelig ikke er invertibel, samt at dette innebærer at S-systemet enten har ingen, eller uendelig mange, kritiske punkter der verdien til hver av de avhengige variablene er positiv, hvorpå koden avsluttes. Hvis derimot systemmatrisens determinant er forskjellig fra null, og systemmatrisen følgelig er invertibel, gir koden beskjed om dette, samt beregner og viser S-systemets unike kritiske punkt der verdien til hver av de avhengige variablene er positiv, Jacobimatrisen i det kritiske punktet, og Jacobimatrises egenverdier. Deretter tester koden fortegnet til egenverdiene realdel. Dersom alle realdelene er negative, gir koden beskjed om dette, samt at det kritiske punktet dermed er lokalt asymptotisk stabilt. Dersom minst én realdel er positiv, gir koden beskjed om dette, samt at det kritiske punktet dermed er ustabilt. I alle andre tilfeller gir koden beskjed om at bestemmelse av stabilitetsegenskapene til det kritiske punktet krever nærmere analyse.


```

disp(' ')
disp('S-system med avhengige variabler X1 og X2,')
disp('ingen uavhengige variabler.')
```

disp('Beregning av systemmatrisen, eventuelt unikt kritisk')

disp('punkt der verdien til hver av de avhengige variablene')

disp('er positiv, Jacobimatrisen i det kritiske punktet,')

disp('samt Jacobimatrisens egenverdier.')

disp('Om mulig, bestemmelse av det kritiske punktets')

disp('stabilitet ved hjelp av fortegnet til')

disp('egenverdiens realdel.')

```

disp(' ')
disp(' ')
disp('Angi hastighetskonstantene (må være positive).')
```

```

disp(' ')
alfa1=input('alfa1 = ');
while alfa1<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for alfa1 er mindre enn')
```

disp('eller lik null.')

disp('Verdien som angis for alfa1 må være større enn null.')

```

disp(' ')
    alfa1=input('alfa1 = ');
end
beta1=input('beta1 = ');
while beta1<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for beta1 er mindre enn')
```

disp('eller lik null.')

disp('Verdien som angis for beta1 må være større enn null.')

```

disp(' ')
    beta1=input('beta1 = ');
end
alfa2=input('alfa2 = ');
while alfa2<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for alfa2 er mindre enn')
```

disp('eller lik null.')

disp('Verdien som angis for alfa2 må være større enn null.')

```

disp(' ')

```

```

    alfa2=input('alfa2 = ');
end
beta2=input('beta2 = ');
while beta2<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for beta2 er mindre enn')
    disp('eller lik null.')
    disp('Verdien som angis for beta2 må være større enn null.')
    disp(' ')
    beta2=input('beta2 = ');
end
disp(' ')
disp('Angi de kinetiske ordenene, også de som eventuelt')
disp('er lik null. Alle reelle tall er tillatt.')
disp(' ')
g11=input('g11 = ');
g12=input('g12 = ');
h11=input('h11 = ');
h12=input('h12 = ');
g21=input('g21 = ');
g22=input('g22 = ');
h21=input('h21 = ');
h22=input('h22 = ');
syms X1 X2
f1=alfa1*X1^g11*X2^g12-beta1*X1^h11*X2^h12;
f2=alfa2*X1^g21*X2^g22-beta2*X1^h21*X2^h22;
J=[diff(f1,X1),diff(f1,X2);diff(f2,X1),diff(f2,X2)];
a11=g11-h11;
a12=g12-h12;
a21=g21-h21;
a22=g22-h22;
b1=log(beta1/alfa1);
b2=log(beta2/alfa2);
disp(' ')
disp(' ')
disp('Systemmatrisen er')
format short e
A=[a11,a12;a21,a22]
format short
b=[b1;b2];
if det(A)==0

```

```

disp(' ')
disp('Systemmatrisen har determinant lik null,')
disp('og er følgelig ikke invertibel.')
```

Dette medfører at S-systemet enten har ingen,')
disp('eller uendelig mange, kritiske punkter der verdien')
disp('til hver av de avhengige variablene er positiv.')

```

disp(' ')
disp(' ')
else
y=A\b;
y1=y(1,1);
y2=y(2,1);
X1=exp(y1);
X2=exp(y2);
disp(' ')
disp('Systemmatrisen har determinant forskjellig fra null,')
disp('og er følgelig invertibel. S-systemet har dermed et')
disp('unikt kritisk punkt der verdien til hver av de')
disp('avhengige variablene er positiv.')
```

Dette er $X^* = (X1^*, X2^*)$, der')

```

disp(' ')
fprintf('X1* = %.6e \n',X1)
fprintf('X2* = %.6e \n',X2)
Jacobimatrisen=eval(J);
disp(' ')
disp('S-systemets Jacobimatrise beregnet i X* er')
disp(' ')
disp('J(X*) =')
```

```

disp(' ')
format short e
disp(Jacobimatrisen)
format short
Egenverdier=eig(Jacobimatrisen);
lambda1=Egenverdier(1,1);
lambda2=Egenverdier(2,1);
disp('Egenverdiene til J(X*) er')
```

```

disp(' ')
disp(['lambda1 = ',num2str(lambda1)])
disp(['lambda2 = ',num2str(lambda2)])
relambda1=real(lambda1);
relambda2=real(lambda2);
```

```

if (relambda1<0)&(relambda2<0)
    disp(' ')
    disp('Siden realdelen til hver av egenverdiene')
    disp('er negativ, er det kritiske punktet X*')
    disp('lokalt asymptotisk stabilt.')
```

```
elseif (relambda1>0)|(relambda2>0)
    disp(' ')
    disp('Siden realdelen til minst en av egenverdiene')
    disp('er positiv, er det kritiske punktet X* ustabilt.')
```

```
else
    disp(' ')
    disp('Bestemmelse av stabilitetsegenskapene til')
    disp('det kritiske punktet X* krever nærmere analyse.')
```

```
end
disp(' ')
disp(' ')
end
```


Tillegg B

MATLAB-kode for lokal stabilitetsanalyse av S-system med to avhengige og én uavhengig variabel

MATLAB-koden i dette tillegget er laget for S-systemer med to avhengige og én uavhengig variabel. Ved kjøring blir man bedt om å oppgi hastighetskonstantene for S-systemet. Koden tester om hver oppgitte hastighetskonstant er mindre enn eller lik null, gir beskjed hvis så er tilfelle, og ber i så fall om ny, positiv hastighetskonstant. Deretter blir man bedt om å oppgi S-systemets kinetiske ordener. Man blir så bedt om å oppgi verdien til den uavhengige variabelen, hvorpå koden tester om denne er mindre enn eller lik null. Koden gir beskjed hvis verdien til den uavhengige variabelen er mindre enn eller lik null, og ber i så fall om ny, positiv verdi for den uavhengige variabelen. Koden beregner, og viser, systemmatrisen. Koden tester om systemmatrisens determinant er lik null: Hvis så er tilfelle, gir koden beskjed om dette og at systemmatrisen følgelig ikke er invertibel, samt at dette innebærer at S-systemet enten har ingen, eller uendelig mange, kritiske punkter der verdien til hver av de avhengige variablene er positiv, hvorpå koden avsluttes. Hvis derimot systemmatrisens determinant er forskjellig fra null, og systemmatrisen følgelig er invertibel, gir koden beskjed om dette, samt beregner og viser S-systemets unike kritiske punkt der verdien til hver av de avhengige variablene er positiv, Jacobimatrisen i det kritiske punktet, og Jacobimatrises egenverdier. Deretter tester koden fortegnet til egenverdiens realdel. Dersom alle realdelene er negative, gir koden beskjed om dette, samt at det kritiske punktet dermed er lokalt asymptotisk stabilt. Dersom minst én realdel er positiv, gir koden beskjed om dette, samt at det kritiske punktet dermed er

ustabilt. I alle andre tilfeller gir koden beskjed om at bestemmelse av stabilitetsegenskapene til det kritiske punktet krever nærmere analyse.

```
disp(' ')
disp('S-system med avhengige variabler X1 og X2,')
disp('samt uavhengig variabel X3.')
```

disp('Beregning av systemmatrisen, eventuelt unikt kritisk')
disp('punkt der verdien til hver av de avhengige variablene')
disp('er positiv, Jacobimatrisen i det kritiske punktet,')
disp('samt Jacobimatrises egenverdier.')

disp('Om mulig, bestemmelse av det kritiske punktets')
disp('stabilitet ved hjelp av fortegnet til')
disp('egenverdiens realdel.')

```
disp(' ')
disp(' ')
disp('Angi hastighetskonstantene (må være positive).')
disp(' ')
alfa1=input('alfa1 = ');
while alfa1<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for alfa1 er mindre enn')
    disp('eller lik null.')
```

disp('Verdien som angis for alfa1 må være større enn null.')

```
disp(' ')
alfa1=input('alfa1 = ');
end
beta1=input('beta1 = ');
while beta1<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for beta1 er mindre enn')
    disp('eller lik null.')
```

disp('Verdien som angis for beta1 må være større enn null.')

```
disp(' ')
beta1=input('beta1 = ');
end
alfa2=input('alfa2 = ');
while alfa2<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for alfa2 er mindre enn')
```

```

        disp('eller lik null.')
        disp('Verdien som angis for alfa2 må være større enn null.')
        disp(' ')
        alfa2=input('alfa2 = ');
end
beta2=input('beta2 = ');
while beta2<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for beta2 er mindre enn')
    disp('eller lik null.')
    disp('Verdien som angis for beta2 må være større enn null.')
    disp(' ')
    beta2=input('beta2 = ');
end
disp(' ')
disp('Angi de kinetiske ordenene, også de som eventuelt')
disp('er lik null. Alle reelle tall er tillatt.')
disp(' ')
g11=input('g11 = ');
g12=input('g12 = ');
g13=input('g13 = ');
h11=input('h11 = ');
h12=input('h12 = ');
h13=input('h13 = ');
g21=input('g21 = ');
g22=input('g22 = ');
g23=input('g23 = ');
h21=input('h21 = ');
h22=input('h22 = ');
h23=input('h23 = ');
disp(' ')
disp('Angi verdien til den uavhengige variabelen')
disp('(må være positiv).')
disp(' ')
X3=input('X3 = ');
while X3<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for X3 er mindre enn')
    disp('eller lik null.')
    disp('Verdien som angis for X3 må være større enn null.')
    disp(' ')

```



```

        X3=input('X3 = ');
end
syms X1 X2
f1=alfa1*X1^g11*X2^g12*X3^g13-beta1*X1^h11*X2^h12*X3^h13;
f2=alfa2*X1^g21*X2^g22*X3^g23-beta2*X1^h21*X2^h22*X3^h23;
J=[diff(f1,X1),diff(f1,X2);diff(f2,X1),diff(f2,X2)];
a11=g11-h11;
a12=g12-h12;
a21=g21-h21;
a22=g22-h22;
b1=log(beta1/alfa1)-((g13-h13)*log(X3));
b2=log(beta2/alfa2)-((g23-h23)*log(X3));
disp(' ')
disp(' ')
disp('Systemmatrisen er')
format short e
A=[a11,a12;a21,a22]
format short
b=[b1;b2];
if det(A)==0
    disp(' ')
    disp('Systemmatrisen har determinant lik null,')
    disp('og er følgelig ikke invertibel.')
    disp('Dette medfører at S-systemet enten har ingen,')
    disp('eller uendelig mange, kritiske punkter der verdien')
    disp('til hver av de avhengige variablene er positiv.')
    disp(' ')
    disp(' ')
else
y=A\b;
y1=y(1,1);
y2=y(2,1);
X1=exp(y1);
X2=exp(y2);
disp(' ')
disp('Systemmatrisen har determinant forskjellig fra null,')
disp('og er følgelig invertibel. S-systemet har dermed et')
disp('unik kritisk punkt der verdien til hver av de')
disp('avhengige variablene er positiv.')
disp('Dette er X* = (X1*,X2*), der')
disp(' ')

```

```

fprintf('X1* = %.6e \n',X1)
fprintf('X2* = %.6e \n',X2)
Jacobimatrisen=eval(J);
disp(' ')
disp('S-systemets Jacobimatrise beregnet i X* er')
disp(' ')
disp('J(X*) =')
disp(' ')
format short e
disp(Jacobimatrisen)
format short
Egenverdier=eig(Jacobimatrisen);
lambda1=Egenverdier(1,1);
lambda2=Egenverdier(2,1);
disp('Egenverdiene til J(X*) er')
disp(' ')
disp(['lambda1 = ',num2str(lambda1)])
disp(['lambda2 = ',num2str(lambda2)])
relambda1=real(lambda1);
relambda2=real(lambda2);
if (relambda1<0)&(relambda2<0)
    disp(' ')
    disp('Siden realdelen til hver av egenverdiene')
    disp('er negativ, er det kritiske punktet X*')
    disp('lokalt asymptotisk stabilt.')
elseif (relambda1>0)|(relambda2>0)
    disp(' ')
    disp('Siden realdelen til minst en av egenverdiene')
    disp('er positiv, er det kritiske punktet X* ustabilt.')
else
    disp(' ')
    disp('Bestemmelse av stabilitetsegenskapene til')
    disp('det kritiske punktet X* krever nærmere analyse.')
end
disp(' ')
disp(' ')
end

```


Tillegg C

MATLAB-kode for lokal stabilitetsanalyse av S-system med fire avhengige og ingen uavhengige variabler

MATLAB-koden i dette tillegget er laget for S-systemer med fire avhengige og ingen uavhengige variabler. Ved kjøring blir man bedt om å oppgi hastighetskonstantene for S-systemet. Koden tester om hver oppgitte hastighetskonstant er mindre enn eller lik null, gir beskjed hvis så er tilfelle, og ber i så fall om ny, positiv hastighetskonstant. Deretter blir man bedt om å oppgi S-systemets kinetiske ordener. Koden beregner, og viser, systemmatrisen. Koden tester om systemmatrisens determinant er lik null: Hvis så er tilfelle, gir koden beskjed om dette og at systemmatrisen følgelig ikke er invertibel, samt at dette innebærer at S-systemet enten har ingen, eller uendelig mange, kritiske punkter der verdien til hver av de avhengige variablene er positiv, hvorpå koden avsluttes. Hvis derimot systemmatrisens determinant er forskjellig fra null, og systemmatrisen følgelig er invertibel, gir koden beskjed om dette, samt beregner og viser S-systemets unike kritiske punkt der verdien til hver av de avhengige variablene er positiv, Jacobimatrisen i det kritiske punktet, og Jacobimatrises egenverdier. Deretter tester koden fortegnet til egenverdiene realdel. Dersom alle realdelene er negative, gir koden beskjed om dette, samt at det kritiske punktet dermed er lokalt asymptotisk stabilt. Dersom minst én realdel er positiv, gir koden beskjed om dette, samt at det kritiske punktet dermed er ustabil. I alle andre tilfeller gir koden beskjed om at bestemmelse av stabilitetsegenskapene til det kritiske punktet krever nærmere analyse.

```

disp(' ')
disp('S-system med avhengige variabler X1, X2, X3 og X4,')
disp('ingen uavhengige variabler.')
```

disp('Beregning av systemmatrisen, eventuelt unikt kritisk')

disp('punkt der verdien til hver av de avhengige variablene')

disp('er positiv, Jacobimatrisen i det kritiske punktet,')

disp('samt Jacobimatrisens egenverdier.')

disp('Om mulig, bestemmelse av det kritiske punktets')

disp('stabilitet ved hjelp av fortegnet til')

disp('egenverdiens realdel.')

```

disp(' ')
disp(' ')
disp('Angi hastighetskonstantene (må være positive).')
```

disp(' ')
alfa1=input('alfa1 = ');
while alfa1<=0
 disp(' ')
 disp('Den angitte verdien for alfa1 er mindre enn')

disp('eller lik null.')

disp('Verdien som angis for alfa1 må være større enn null.')

disp(' ')
 alfa1=input('alfa1 = ');
end
beta1=input('beta1 = ');
while beta1<=0
 disp(' ')
 disp('Den angitte verdien for beta1 er mindre enn')

disp('eller lik null.')

disp('Verdien som angis for beta1 må være større enn null.')

disp(' ')
 beta1=input('beta1 = ');
end
alfa2=input('alfa2 = ');
while alfa2<=0
 disp(' ')
 disp('Den angitte verdien for alfa2 er mindre enn')

disp('eller lik null.')

disp('Verdien som angis for alfa2 må være større enn null.')

disp(' ')

```

    alfa2=input('alfa2 = ');
end
beta2=input('beta2 = ');
while beta2<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for beta2 er mindre enn')
    disp('eller lik null.')
    disp('Verdien som angis for beta2 må være større enn null.')
    disp(' ')
    beta2=input('beta2 = ');
end
alfa3=input('alfa3 = ');
while alfa3<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for alfa3 er mindre enn')
    disp('eller lik null.')
    disp('Verdien som angis for alfa3 må være større enn null.')
    disp(' ')
    alfa3=input('alfa3 = ');
end
beta3=input('beta3 = ');
while beta3<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for beta3 er mindre enn')
    disp('eller lik null.')
    disp('Verdien som angis for beta3 må være større enn null.')
    disp(' ')
    beta3=input('beta3 = ');
end
alfa4=input('alfa4 = ');
while alfa4<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for alfa4 er mindre enn')
    disp('eller lik null.')
    disp('Verdien som angis for alfa4 må være større enn null.')
    disp(' ')
    alfa4=input('alfa4 = ');
end
beta4=input('beta4 = ');
while beta4<=0
    disp(' ')

```

```

        disp('Den angitte verdien for beta4 er mindre enn')
        disp('eller lik null.')
        disp('Verdien som angis for beta4 må være større enn null.')
        disp(' ')
        beta4=input('beta4 = ');
    end
    disp(' ')
    disp('Angi de kinetiske ordenene, også de som eventuelt')
    disp('er lik null. Alle reelle tall er tillatt.')
    disp(' ')
    g11=input('g11 = ');
    g12=input('g12 = ');
    g13=input('g13 = ');
    g14=input('g14 = ');
    h11=input('h11 = ');
    h12=input('h12 = ');
    h13=input('h13 = ');
    h14=input('h14 = ');
    g21=input('g21 = ');
    g22=input('g22 = ');
    g23=input('g23 = ');
    g24=input('g24 = ');
    h21=input('h21 = ');
    h22=input('h22 = ');
    h23=input('h23 = ');
    h24=input('h24 = ');
    g31=input('g31 = ');
    g32=input('g32 = ');
    g33=input('g33 = ');
    g34=input('g34 = ');
    h31=input('h31 = ');
    h32=input('h32 = ');
    h33=input('h33 = ');
    h34=input('h34 = ');
    g41=input('g41 = ');
    g42=input('g42 = ');
    g43=input('g43 = ');
    g44=input('g44 = ');
    h41=input('h41 = ');
    h42=input('h42 = ');
    h43=input('h43 = ');

```

```

h44=input('h44 = ');
syms X1 X2 X3 X4
r1=alfa1*X1^g11*X2^g12*X3^g13*X4^g14;
s1=beta1*X1^h11*X2^h12*X3^h13*X4^h14;
r2=alfa2*X1^g21*X2^g22*X3^g23*X4^g24;
s2=beta2*X1^h21*X2^h22*X3^h23*X4^h24;
r3=alfa3*X1^g31*X2^g32*X3^g33*X4^g34;
s3=beta3*X1^h31*X2^h32*X3^h33*X4^h34;
r4=alfa4*X1^g41*X2^g42*X3^g43*X4^g44;
s4=beta4*X1^h41*X2^h42*X3^h43*X4^h44;
f1=r1-s1;
f2=r2-s2;
f3=r3-s3;
f4=r4-s4;
J=[diff(f1,X1),diff(f1,X2),diff(f1,X3),diff(f1,X4)
    diff(f2,X1),diff(f2,X2),diff(f2,X3),diff(f2,X4)
    diff(f3,X1),diff(f3,X2),diff(f3,X3),diff(f3,X4)
    diff(f4,X1),diff(f4,X2),diff(f4,X3),diff(f4,X4)];
a11=g11-h11;
a12=g12-h12;
a13=g13-h13;
a14=g14-h14;
a21=g21-h21;
a22=g22-h22;
a23=g23-h23;
a24=g24-h24;
a31=g31-h31;
a32=g32-h32;
a33=g33-h33;
a34=g34-h34;
a41=g41-h41;
a42=g42-h42;
a43=g43-h43;
a44=g44-h44;
b1=log(beta1/alfa1);
b2=log(beta2/alfa2);
b3=log(beta3/alfa3);
b4=log(beta4/alfa4);
disp(' ')
disp(' ')
disp('Systemmatrisen er')

```



```

format short e
A=[a11,a12,a13,a14
    a21,a22,a23,a24
    a31,a32,a33,a34
    a41,a42,a43,a44]
format short
b=[b1;b2;b3;b4];
if det(A)==0
    disp(' ')
    disp('Systemmatrisen har determinant lik null,')
    disp('og er følgelig ikke invertibel.')
```

disp('Dette medfører at S-systemet enten har ingen,')

disp('eller uendelig mange, kritiske punkter der verdien')

disp('til hver av de avhengige variablene er positiv.')

disp(' ')

disp(' ')

```

else
y=A\b;
y1=y(1,1);
y2=y(2,1);
y3=y(3,1);
y4=y(4,1);
X1=exp(y1);
X2=exp(y2);
X3=exp(y3);
X4=exp(y4);
disp(' ')
disp('Systemmatrisen har determinant forskjellig fra null,')
disp('og er følgelig invertibel. S-systemet har dermed et')
disp('unikt kritisk punkt der verdien til hver av de')
disp('avhengige variablene er positiv.')
```

disp('Dette er $X^* = (X1^*, X2^*, X3^*, X4^*)$, der')

disp(' ')

```

fprintf('X1* = %.6e \n',X1)
fprintf('X2* = %.6e \n',X2)
fprintf('X3* = %.6e \n',X3)
fprintf('X4* = %.6e \n',X4)
Jacobimatrisen=eval(J);
disp(' ')
disp('S-systemets Jacobimatrise beregnet i X* er')
disp(' ')
```

```

disp('J(X*) =')
disp(' ')
format short e
disp(Jacobimatrisen)
format short
Egenverdier=eig(Jacobimatrisen);
lambda1=Egenverdier(1,1);
lambda2=Egenverdier(2,1);
lambda3=Egenverdier(3,1);
lambda4=Egenverdier(4,1);
disp('Egenverdiene til J(X*) er')
disp(' ')
disp(['lambda1 = ',num2str(lambda1)])
disp(['lambda2 = ',num2str(lambda2)])
disp(['lambda3 = ',num2str(lambda3)])
disp(['lambda4 = ',num2str(lambda4)])
relambda1=real(lambda1);
relambda2=real(lambda2);
relambda3=real(lambda3);
relambda4=real(lambda4);
if (relambda1<0)&(relambda2<0)&(relambda3<0)&(relambda4<0)
    disp(' ')
    disp('Siden realdelen til hver av egenverdiene')
    disp('er negativ, er det kritiske punktet X*')
    disp('lokalt asymptotisk stabilt.')
```

```
elseif (relambda1>0)|(relambda2>0)|(relambda3>0)|(relambda4>0)
    disp(' ')
    disp('Siden realdelen til minst en av egenverdiene')
    disp('er positiv, er det kritiske punktet X* ustabilt.')
```

```
else
    disp(' ')
    disp('Bestemmelse av stabilitetsegenskapene til')
    disp('det kritiske punktet X* krever nærmere analyse.')
```

```
end
disp(' ')
disp(' ')
end
```


Tillegg D

MATLAB-kode for lokal stabilitetsanalyse av S-system med fire avhengige og to uavhengige variabler

MATLAB-koden i dette tillegget er laget for S-systemer med fire avhengige og to uavhengige variabler. Ved kjøring blir man bedt om å oppgi hastighetskonstantene for S-systemet. Koden tester om hver oppgitte hastighetskonstant er mindre enn eller lik null, gir beskjed hvis så er tilfelle, og ber i så fall om ny, positiv hastighetskonstant. Deretter blir man bedt om å oppgi S-systemets kinetiske ordener. Man blir så bedt om å oppgi verdiene til de uavhengige variablene. Koden tester om den oppgitte verdien til hver av de uavhengige variablene er mindre enn eller lik null, gir beskjed hvis så er tilfelle, og ber i så fall om ny, positiv verdi. Koden beregner, og viser, systemmatrisen. Koden tester om systemmatrisens determinant er lik null: Hvis så er tilfelle, gir koden beskjed om dette og at systemmatrisen følgelig ikke er invertibel, samt at dette innebærer at S-systemet enten har ingen, eller uendelig mange, kritiske punkter der verdien til hver av de avhengige variablene er positiv, hvorpå koden avsluttes. Hvis derimot systemmatrisens determinant er forskjellig fra null, og systemmatrisen følgelig er invertibel, gir koden beskjed om dette, samt beregner og viser S-systemets unike kritiske punkt der verdien til hver av de avhengige variablene er positiv, Jacobimatrisen i det kritiske punktet, og Jacobimatrises egenverdier. Deretter tester koden fortegnet til egenverdiens realdel. Dersom alle realdelene er negative, gir koden beskjed om dette, samt at det kritiske punktet dermed er lokalt asymptotisk stabilt. Dersom minst én realdel er positiv, gir koden beskjed om dette, samt at det kritiske punktet dermed er ustabil. I alle andre tilfeller gir koden beskjed

om at bestemmelse av stabilitetsegenskapene til det kritiske punktet krever nærmere analyse.

```
disp(' ')
disp('S-system med avhengige variabler X1, X2, X3 og X4,')
disp('samt uavhengige variabler X5 og X6.')
```

disp('Beregning av systemmatrisen, eventuelt unikt kritisk')
disp('punkt der verdien til hver av de avhengige variablene')
disp('er positiv, Jacobimatrisen i det kritiske punktet,')
disp('samt Jacobimatrises egenverdier.')

disp('Om mulig, bestemmelse av det kritiske punktets')
disp('stabilitet ved hjelp av fortegnet til')
disp('egenverdiens realdel.')

```
disp(' ')
disp(' ')
disp('Angi hastighetskonstantene (må være positive).')
disp(' ')
alfa1=input('alfa1 = ');
while alfa1<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for alfa1 er mindre enn')
    disp('eller lik null.')
```

disp('Verdien som angis for alfa1 må være større enn null.')

```
disp(' ')
    alfa1=input('alfa1 = ');
end
beta1=input('beta1 = ');
while beta1<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for beta1 er mindre enn')
    disp('eller lik null.')
```

disp('Verdien som angis for beta1 må være større enn null.')

```
disp(' ')
    beta1=input('beta1 = ');
end
alfa2=input('alfa2 = ');
while alfa2<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for alfa2 er mindre enn')
```

```

        disp('eller lik null.')
        disp('Verdien som angis for alfa2 må være større enn null.')
        disp(' ')
        alfa2=input('alfa2 = ');
    end
    beta2=input('beta2 = ');
    while beta2<=0
        disp(' ')
        disp('Den angitte verdien for beta2 er mindre enn')
        disp('eller lik null.')
        disp('Verdien som angis for beta2 må være større enn null.')
        disp(' ')
        beta2=input('beta2 = ');
    end
    alfa3=input('alfa3 = ');
    while alfa3<=0
        disp(' ')
        disp('Den angitte verdien for alfa3 er mindre enn')
        disp('eller lik null.')
        disp('Verdien som angis for alfa3 må være større enn null.')
        disp(' ')
        alfa3=input('alfa3 = ');
    end
    beta3=input('beta3 = ');
    while beta3<=0
        disp(' ')
        disp('Den angitte verdien for beta3 er mindre enn')
        disp('eller lik null.')
        disp('Verdien som angis for beta3 må være større enn null.')
        disp(' ')
        beta3=input('beta3 = ');
    end
    alfa4=input('alfa4 = ');
    while alfa4<=0
        disp(' ')
        disp('Den angitte verdien for alfa4 er mindre enn')
        disp('eller lik null.')
        disp('Verdien som angis for alfa4 må være større enn null.')
        disp(' ')
        alfa4=input('alfa4 = ');
    end
end

```

```

beta4=input('beta4 = ');
while beta4<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for beta4 er mindre enn')
    disp('eller lik null.')
    disp('Verdien som angis for beta4 må være større enn null.')
    disp(' ')
    beta4=input('beta4 = ');
end
disp(' ')
disp('Angi de kinetiske ordenene, også de som eventuelt')
disp('er lik null. Alle reelle tall er tillatt.')
disp(' ')
g11=input('g11 = ');
g12=input('g12 = ');
g13=input('g13 = ');
g14=input('g14 = ');
g15=input('g15 = ');
g16=input('g16 = ');
h11=input('h11 = ');
h12=input('h12 = ');
h13=input('h13 = ');
h14=input('h14 = ');
h15=input('h15 = ');
h16=input('h16 = ');
g21=input('g21 = ');
g22=input('g22 = ');
g23=input('g23 = ');
g24=input('g24 = ');
g25=input('g25 = ');
g26=input('g26 = ');
h21=input('h21 = ');
h22=input('h22 = ');
h23=input('h23 = ');
h24=input('h24 = ');
h25=input('h25 = ');
h26=input('h26 = ');
g31=input('g31 = ');
g32=input('g32 = ');
g33=input('g33 = ');
g34=input('g34 = ');

```

```

g35=input('g35 = ');
g36=input('g36 = ');
h31=input('h31 = ');
h32=input('h32 = ');
h33=input('h33 = ');
h34=input('h34 = ');
h35=input('h35 = ');
h36=input('h36 = ');
g41=input('g41 = ');
g42=input('g42 = ');
g43=input('g43 = ');
g44=input('g44 = ');
g45=input('g45 = ');
g46=input('g46 = ');
h41=input('h41 = ');
h42=input('h42 = ');
h43=input('h43 = ');
h44=input('h44 = ');
h45=input('h45 = ');
h46=input('h46 = ');
disp(' ')
disp('Angi verdiene til de uavhengige variablene')
disp('(må være positive).')
disp(' ')
X5=input('X5 = ');
while X5<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for X5 er mindre enn')
    disp('eller lik null.')
    disp('Verdien som angis for X5 må være større enn null.')
    disp(' ')
    X5=input('X5 = ');
end
X6=input('X6 = ');
while X6<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for X6 er mindre enn')
    disp('eller lik null.')
    disp('Verdien som angis for X6 må være større enn null.')
    disp(' ')
    X6=input('X6 = ');

```



```

end
syms X1 X2 X3 X4
r1=alfa1*X1^g11*X2^g12*X3^g13*X4^g14*X5^g15*X6^g16;
s1=beta1*X1^h11*X2^h12*X3^h13*X4^h14*X5^h15*X6^h16;
r2=alfa2*X1^g21*X2^g22*X3^g23*X4^g24*X5^g25*X6^g26;
s2=beta2*X1^h21*X2^h22*X3^h23*X4^h24*X5^h25*X6^h26;
r3=alfa3*X1^g31*X2^g32*X3^g33*X4^g34*X5^g35*X6^g36;
s3=beta3*X1^h31*X2^h32*X3^h33*X4^h34*X5^h35*X6^h36;
r4=alfa4*X1^g41*X2^g42*X3^g43*X4^g44*X5^g45*X6^g46;
s4=beta4*X1^h41*X2^h42*X3^h43*X4^h44*X5^h45*X6^h46;
f1=r1-s1;
f2=r2-s2;
f3=r3-s3;
f4=r4-s4;
J=[diff(f1,X1),diff(f1,X2),diff(f1,X3),diff(f1,X4)
    diff(f2,X1),diff(f2,X2),diff(f2,X3),diff(f2,X4)
    diff(f3,X1),diff(f3,X2),diff(f3,X3),diff(f3,X4)
    diff(f4,X1),diff(f4,X2),diff(f4,X3),diff(f4,X4)];
a11=g11-h11;
a12=g12-h12;
a13=g13-h13;
a14=g14-h14;
a21=g21-h21;
a22=g22-h22;
a23=g23-h23;
a24=g24-h24;
a31=g31-h31;
a32=g32-h32;
a33=g33-h33;
a34=g34-h34;
a41=g41-h41;
a42=g42-h42;
a43=g43-h43;
a44=g44-h44;
b1=log(beta1/alfa1)-(((g15-h15)*log(X5))+((g16-h16)*log(X6)));
b2=log(beta2/alfa2)-(((g25-h25)*log(X5))+((g26-h26)*log(X6)));
b3=log(beta3/alfa3)-(((g35-h35)*log(X5))+((g36-h36)*log(X6)));
b4=log(beta4/alfa4)-(((g45-h45)*log(X5))+((g46-h46)*log(X6)));
disp(' ')
disp(' ')
disp('Systemmatrisen er')

```

```

format short e
A=[a11,a12,a13,a14
    a21,a22,a23,a24
    a31,a32,a33,a34
    a41,a42,a43,a44]
format short
b=[b1;b2;b3;b4];
if det(A)==0
    disp(' ')
    disp('Systemmatrisen har determinant lik null,')
    disp('og er følgelig ikke invertibel.')
```

disp('Dette medfører at S-systemet enten har ingen,')

disp('eller uendelig mange, kritiske punkter der verdien')

disp('til hver av de avhengige variablene er positiv.')

disp(' ')

disp(' ')

```

else
y=A\b;
y1=y(1,1);
y2=y(2,1);
y3=y(3,1);
y4=y(4,1);
X1=exp(y1);
X2=exp(y2);
X3=exp(y3);
X4=exp(y4);
disp(' ')
disp('Systemmatrisen har determinant forskjellig fra null,')
disp('og er følgelig invertibel. S-systemet har dermed et')
disp('unikt kritisk punkt der verdien til hver av de')
disp('avhengige variablene er positiv.')
```

disp('Dette er $X^* = (X1^*, X2^*, X3^*, X4^*)$, der')

disp(' ')

```

fprintf('X1* = %.6e \n',X1)
fprintf('X2* = %.6e \n',X2)
fprintf('X3* = %.6e \n',X3)
fprintf('X4* = %.6e \n',X4)
Jacobimatrisen=eval(J);
disp(' ')
disp('S-systemets Jacobimatrise beregnet i X* er')
```

disp(' ')

```

disp('J(X*) =')
disp(' ')
format short e
disp(Jacobimatrisen)
format short
Egenverdier=eig(Jacobimatrisen);
lambda1=Egenverdier(1,1);
lambda2=Egenverdier(2,1);
lambda3=Egenverdier(3,1);
lambda4=Egenverdier(4,1);
disp('Egenverdiene til J(X*) er')
disp(' ')
disp(['lambda1 = ',num2str(lambda1)])
disp(['lambda2 = ',num2str(lambda2)])
disp(['lambda3 = ',num2str(lambda3)])
disp(['lambda4 = ',num2str(lambda4)])
relambda1=real(lambda1);
relambda2=real(lambda2);
relambda3=real(lambda3);
relambda4=real(lambda4);
if (relambda1<0)&(relambda2<0)&(relambda3<0)&(relambda4<0)
    disp(' ')
    disp('Siden realdelen til hver av egenverdiene')
    disp('er negativ, er det kritiske punktet X*')
    disp('lokalt asymptotisk stabilt.')
```

```
elseif (relambda1>0)|(relambda2>0)|(relambda3>0)|(relambda4>0)
    disp(' ')
    disp('Siden realdelen til minst en av egenverdiene')
    disp('er positiv, er det kritiske punktet X* ustabilt.')
```

```
else
    disp(' ')
    disp('Bestemmelse av stabilitetsegenskapene til')
```

```
disp(' ')
disp(' ')
end
```

Tillegg E

MATLAB-kode for beregning av todimensjonale S-systemers normalkomponent på en vegg

Denne MATLAB-koden beregner normalkomponenten for hvert av to todimensjonale S-systemer S_1 og S_2 på en vegg som skiller deres virkeområder. Koden gjør dette for vegger gitt ved $X_1 = k$ eller $X_2 = k$, $k > 0$. For vegger gitt ved $X_1 = k$ fremstilles normalkomponenten til hvert av S-systemene grafisk som en funksjon av X_2 . For vegger gitt ved $X_2 = k$ fremstilles normalkomponenten til hvert av S-systemene grafisk som en funksjon av X_1 . Dersom normalkomponentene til S_1 og S_2 ikke er like i beregningspunktene, gir koden én graf for normalkomponenten til S_1 og én graf for normalkomponenten til S_2 . Dersom normalkomponentene til S_1 og S_2 er like i beregningspunktene, gir koden en felles graf for normalkomponenten til S_1 og S_2 . Parameterne i det ene av S-systemene, S_1 , er navngitt på vanlig måte, mens parameterne i det andre S-systemet, S_2 , er navngitt ved å føye til en “_”. For S_1 ber MATLAB-koden f. eks. om verdiene for “alfa1” og “g11”, og for S_2 ber MATLAB-koden f. eks. om verdiene for “alfa1_” og “g11_”.

```
disp(' ')
disp('Beregning av normalkomponenten for hvert av')
disp('to todimensjonale S-systemer S1 og S2 på veggen')
disp('som skiller deres virkeområder.')
```

```
disp('Veggen er enten gitt ved X1=k, eller X2=k')
disp('for en k>0.')
```

```
disp(' ')
disp(' ')
disp('Angi hastighetskonstantene for S1 (må være positive).')
```

```

disp(' ')
alfa1=input('alfa1 = ');
while alfa1<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for alfa1 er mindre enn')
    disp('eller lik null.')
    disp('Verdien som angis for alfa1 må være større enn null.')
    disp(' ')
    alfa1=input('alfa1 = ');
end
beta1=input('beta1 = ');
while beta1<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for beta1 er mindre enn')
    disp('eller lik null.')
    disp('Verdien som angis for beta1 må være større enn null.')
    disp(' ')
    beta1=input('beta1 = ');
end
alfa2=input('alfa2 = ');
while alfa2<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for alfa2 er mindre enn')
    disp('eller lik null.')
    disp('Verdien som angis for alfa2 må være større enn null.')
    disp(' ')
    alfa2=input('alfa2 = ');
end
beta2=input('beta2 = ');
while beta2<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for beta2 er mindre enn')
    disp('eller lik null.')
    disp('Verdien som angis for beta2 må være større enn null.')
    disp(' ')
    beta2=input('beta2 = ');
end
disp(' ')
disp('Angi de kinetiske ordenene for S1, også de som eventuelt')
disp('er lik null. Alle reelle tall er tillatt.')
disp(' ')

```

```

g11=input('g11 = ');
g12=input('g12 = ');
h11=input('h11 = ');
h12=input('h12 = ');
g21=input('g21 = ');
g22=input('g22 = ');
h21=input('h21 = ');
h22=input('h22 = ');
disp(' ')
disp(' ')
disp('Angi hastighetskonstantene for S2 (må være positive).')
disp(' ')
alfa1_=input('alfa1_ = ');
while alfa1_<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for alfa1_ er mindre enn')
    disp('eller lik null.')
    disp('Verdien som angis for alfa1_ må være større enn null.')
    disp(' ')
    alfa1_=input('alfa1_ = ');
end
beta1_=input('beta1_ = ');
while beta1_<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for beta1_ er mindre enn')
    disp('eller lik null.')
    disp('Verdien som angis for beta1_ må være større enn null.')
    disp(' ')
    beta1_=input('beta1_ = ');
end
alfa2_=input('alfa2_ = ');
while alfa2_<=0
    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for alfa2_ er mindre enn')
    disp('eller lik null.')
    disp('Verdien som angis for alfa2_ må være større enn null.')
    disp(' ')
    alfa2_=input('alfa2_ = ');
end
beta2_=input('beta2_ = ');
while beta2_<=0

```

```

    disp(' ')
    disp('Den angitte verdien for beta2_ er mindre enn')
    disp('eller lik null.')
```

disp('Verdien som angis for beta2_ må være større enn null.')

```

    disp(' ')
    beta2_=input('beta2_ = ');
end
disp(' ')
disp('Angi de kinetiske ordenene for S2, også de som eventuelt')
disp('er lik null. Alle reelle tall er tillatt.')
```

disp(' ')

```

g11_=input('g11_ = ');
g12_=input('g12_ = ');
h11_=input('h11_ = ');
h12_=input('h12_ = ');
g21_=input('g21_ = ');
g22_=input('g22_ = ');
h21_=input('h21_ = ');
h22_=input('h22_ = ');
disp(' ')
disp(' ')
disp('Oppgi om veggen er gitt ved X1=k (skriv tallet "1"')
disp('eller X2=k (skriv tallet "2"')
disp(' ')
Veggtype=input('Veggtype: ');
while (Veggtype~=1)&(Veggtype~=2)
    disp(' ')
    disp('Du må skrive inn tallet "1" eller tallet "2".')
```

disp(' ')

```

    Veggtype=input('Veggtype: ');
end
if Veggtype==1
    disp(' ')
    disp('Veggen er altså på formen X1=k. Oppgi en k>0.')
```

disp(' ')

```

    k=input('k = ');
    while k<=0
        disp(' ')
        disp('k må være større enn null.')
```

disp(' ')

```

        k=input('k = ');
```

```

end
X1=k;
disp(' ')
disp('Oppgi minste verdi for X2.')
```

disp(' ')
X2min=input('Minste verdi for X2 = ');
while X2min<=0
 disp(' ')
 disp('Minste verdi for X2 må være større enn null.')

disp(' ')
X2min=input('Minste verdi for X2 = ');
end
disp(' ')
disp('Oppgi største verdi for X2.')

disp(' ')
X2max=input('Største verdi for X2 = ');
while X2max<=X2min
 disp(' ')
 disp('Største verdi for X2 må være større enn')

disp('minste verdi for X2.')

disp(' ')
X2max=input('Største verdi for X2 = ');
end
disp(' ')
disp(' ')
X2=X2min:0.01:X2max;
f1=alfa1*X1.^g11*X2.^g12-beta1*X1.^h11*X2.^h12;
f1_=alfa1_*X1.^g11_*X2.^g12_-beta1_*X1.^h11_*X2.^h12_;
if f1==f1_
 T1='Normalkomponentene for S1 og S2';
 T2=' er like i beregningspunktene';
 T=[T1 T2];
 plot(X2,f1,'k'),...
 title(T),...
 xlabel('X2'),...
 ylabel('Normalkomponent'),grid
else
plot(X2,f1,'k',X2,f1_,'r'),xlabel('X2'),...
 ylabel('Normalkomponent'),grid
v=legend('Normalkomponenten for S1 som funksjon av X2',...
 'Normalkomponenten for S2 som funksjon av X2',2);


```

        end
else
disp(' ')
disp('Veggen er altså på formen X2=k. Oppgi en k>0.')
```

$$k = \text{input('k = ')};$$

```

while k<=0
    disp(' ')
    disp('k må være større enn null.')
```

$$k = \text{input('k = ')};$$

```

end
X2=k;
disp(' ')
disp('Oppgi minste verdi for X1.')
```

$$X1_{\min} = \text{input('Minste verdi for X1 = ')};$$

```

while X1min<=0
    disp(' ')
    disp('Minste verdi for X1 må være større enn null.')
```

$$X1_{\min} = \text{input('Minste verdi for X1 = ')};$$

```

end
disp(' ')
disp('Oppgi største verdi for X1.')
```

$$X1_{\max} = \text{input('Største verdi for X1 = ')};$$

```

while X1max<=X1min
    disp(' ')
    disp('Største verdi for X1 må være større enn')
```

$$X1_{\max} = \text{input('Største verdi for X1 = ')};$$

```

end
disp(' ')
disp(' ')
X1=X1min:0.01:X1max;
f2=alfa2*X1.^g21*X2.^g22-beta2*X1.^h21*X2.^h22;
f2_=alfa2_*X1.^g21_*X2.^g22_-beta2_*X1.^h21_*X2.^h22_;
if f2==f2_
    T1='Normalkomponentene for S1 og S2';
```

```

    T2=' er like i beregningspunktene';
    T=[T1 T2];
    plot(X1,f2,'k'),...
    title(T),...
    xlabel('X1'),...
    ylabel('Normalkomponent'),grid
else
plot(X1,f2,'k',X1,f2_,'r'),xlabel('X1'),...
    ylabel('Normalkomponent'),grid
v=legend('Normalkomponenten for S1 som funksjon av X1',...
    'Normalkomponenten for S2 som funksjon av X1',2);
end
end
end

```


Bibliografi

- [1] Anton, H. (1994). *Elementary Linear Algebra*. 7th ed. New York(?), John Wiley & Sons, Inc.
- [2] Arnold, V.I. (1973). *Ordinary Differential Equations*. Massachusetts(?), The Massachusetts Institute of Technology.
- [3] Birkhoff, G. & G.-C. Rota. (1969). *Ordinary Differential Equations*. 2nd ed. New York, John Wiley. (Referert via Edwards & Penney [5]).
- [4] Davidson, K.R. & A.P. Donsig. (2002). *Real Analysis with Real Applications*. Upper Saddle River, Prentice Hall, Inc.
- [5] Edwards, C.H. & D.E. Penney. (2004). *Differential Equations and Boundary Value Problems. Computing and Modeling*. 3rd ed. Upper Saddle River, Pearson Education, Inc.
- [6] Hirsch, M.W., S. Smale & R.L. Devaney. (2004). *Differential Equations, Dynamical Systems, and An Introduction to Chaos*. 2nd ed. San Diego(?), Elsevier.
- [7] Marsden, J.E. & M.J. Hoffman. (1995). *Elementary Classical Analysis*. 2nd ed. Fourth printing. New York, W. H. Freeman and Company.
- [8] Marsden, J.E. & A.J. Tromba. (1996). *Vector Calculus*. 4th ed. First printing. New York, W. H. Freeman and Company.
- [9] Ponosov, A. (2005). Gene Regulatory Networks and Delay Differential Equations. *Electronic Journal of Differential Equations*. 12. pp. 117-141. Lokalisert 24.03.2013 på World Wide Web: <http://www.emis.de/journals/EJDE/conf-proc/12/p1/ponosov.pdf>.
- [10] Savageau, M.A. (1969). Biochemical Systems Analysis, II. The steady-state solutions for an n -pool system using a power-law approximation. *J. Theor. Biol.* **25**: 370-379. (Referert via Voit [14]).

- [11] Savageau, M.A. (1971). Concepts relating the behavior of biochemical systems to their underlying molecular properties. *Arch. Biochem. Biophys.* **145**: 612-621. (Referert via Voit [14]).
- [12] Savageau, M.A. (1995). Michaelis-Menten mechanism reconsidered: implications of fractal kinetics. *J. Theor. Biol.* **176**: 115-124. (Referert via Voit [14]).
- [13] Tafintseva, V., A. Ponosov & A. Machina. (2013). *Piecewise power-law representations in Systems Biology*. Manuscript.
- [14] Voit, E.O. (2000). *Computational Analysis of Biochemical Systems. A Practical Guide for Biochemists and Molecular Biologists*. Cambridge, Cambridge University Press.