# Elevenes misoppfatninger i algebra kan avsløres og avklares i introduksjonen?

## Students' misconceptions in algebra can be revealed and clarified in the introduction?

Soheila Sheshkalani

UNIVERSITETET FOR MILJØ- OG BIOVITENSKAP
Institutt for matematiske realfag og teknologi (imt)
Masteroppgave 30 stp. Høst 2012

# Forord

Læreren skrev en del tall, bokstaver og notasjoner på tavla og forklarte mens han skrev med ansiktet mot tavla. Deler av oppgaven klarte jeg å se og deler av oppgaven ble dekket av hans kropp. Det å sitte bakerst i klasserommet gjorde det heller ikke lettere å høre hans forklaringer. Etter at han endelig snudde seg og jeg klarte å se mer av det som ble skrevet på tavla, prøvde jeg å finne sammenhenger mellom tallene, bokstavene og notasjonene, og jeg prøvde å koble alt dette til noe som jeg kunne tilføye til mine kunnskaper i matematikk. Noen sammenhenger oppdaget jeg, men de ikke var fullstendige nok til å lyse opp det helhetsbildet av hva alle tallene, bokstavene og notasjonene egentlig dreide seg om. Før mine undringer ble avklart, visket læreren bort alt som sto på tavla og begynte igjen å skrive samme bokstaver med nye tall og notasjoner. Jeg lente meg bakover og sukket innvendig. Matematikk er sikkert et spennende fag og en verden av glede, tenkte jeg, men læreren tar ikke meg med inn i denne verden.

Hvor mange elever satt den gangen i denne klassen og følte akkurat det samme som meg? Hvor mange elever sitter i dag i dagens klasserom eller base og føler akkurat det samme jeg følte for førti år siden i matemtikktimene?

I dag jobber jeg som lærer og underviser i matematikk på en ungdomskole. Jeg er interessert i å tilrettelegge undervisningen min slik at de fleste av elevene klarer å utvikle kunnskapene sine gjennom undervisningstimene.

Da jeg begynte på masterstudiet i matematikk fagdidaktikk på universitetet i Ås, ønsket jeg å skrive en oppgave som har forankring i mine interesser. Det var absolutt ikke en enkel oppgave å kaste lys på en liten del av en stor sammenhengende nettverk av faktorer som forårsaker læring hos elevene.

Uten hjelp og veiledning av Margrethe Naalsund og hennes tålmodighet, hadde det ikke vært enkelt for meg å slippe løs den store sammenhengen i matematikkforståelsen, og å bare kunne fokusere på en liten bit av den helheten. Akkurat denne biten har stor påvirkning i elevenes matematikkforståelse og videre i undervisningstimene. Nøkkelordene i denne sammenhengen er introduksjon av algebra, diskusjon, lærerens rolle, aritmetikk og misoppfatninger og avklaring av dem, i undervisningstimen.

Mine misoppfatninger i algebra ble ikke avklart og oppryddet i undervisningstimen da jeg gikk på ungdomskolen. Nå ønsker jeg å finne ut hvordan undervisningen i introduksjon av algebra kan legge best mulig til rette for å fremheve misoppfatninger og avklare dem.

Oslo, mai 2012-05-01

Soheila Sheshkalani

# Sammendrag

Denne oppgaven prøver å kaste lys på et svært viktig fenomen i læringsprosessen av temaet algebra, nemlig misoppfatninger i algebra. Det er naturlig at misoppfatninger eksisterer når man skal lære noe nytt og skal koble den nye kunnskapen til den nettverkskunnskapen man har fra før. Introduksjon av et nytt tema påvirker mengde, art og hvor lenge misoppfatninger overlever i nettverkskunnskapen, før de blir avslørt, avklart og ryddet opp. Forskningsspørsmålet er *"Hvordan kan introduksjon av algebra legges best mulig til rette for å fremheve misoppfatninger og rydde dem opp?"*. Lærerens rolle og klassediskusjon velges som elementene for best mulig å tilrettelegge og å fremheve misoppfatninger i algebra. Elevenes tidligere kunnskap i matematikk (aritmetikken) velges for å rydde opp eller avklare misoppfatninger.

Masteroppgaven ser på introduksjonstimen av algebra som en viktig time i igangsettingen av læringsprosessen i temaet algebra hos elevene. Temaet blir interessant for elevene når de får svar på sine undringer og skaper forståelse av temaet hos dem. Temaet algebra blir introdusert via en ferd gjennom elevenes misoppfatninger og avklaring av dem, ved hjelp av verktøyene aritmetikk, diskusjon og lærerens rolle. Intuitive misoppfatninger lyser også opp utfordringer læreren har i planlegging av introduksjonen. Ved å ha mest mulig oversikt over elevenes misoppfatninger, prioriterer læreren avklaring av dem i passende rekkefølge i forhold til presentasjon av temaet algebra. Elevenes misoppfatninger er basert på generalisering av tidligere kunnskap som ikke fungerer helt i de nye sammenhengene. Elevenes tidligere kunnskap for temaet algebra, er aritmetikken som er et av nøkkelordene. Aritmetikken er både fundamentet til temaet algebra og nøkkelen til å avklare elevenes misoppfatninger. Aritmetikken kobles til elevenes nye kunnskap som er algebra, ved bruk av selve aritmetikken som verktøy.

Diskusjonens rolle i introduksjon av algebra er for å fremheve og avklare misoppfatninger. Lærerens planlegging og styring av undervisningen starter med forutsatte intuitive misoppfatninger som elevene har i temaet algebra og fortsetter med stimulering av elevenes engasjement og deltagelse i diskusjon. Dette gjøres for å oppdage skjulte misoppfatninger. Selv om lærer har en nøkkelrolle i introduksjon av algebra, så er undervisningen langt fra tradisjonell undervisning eller tavleundervisning. I introduksjon av algebra starter læreren undervisningen men lar elevene styre prosessen så lenge de ligger på riktig kurs og læreren

stepper inn ved behov for korrigering og veiledning. Lærerens rolle kan sammenlignes med en voksen person som vil lære et barn å sykle uten støttehjul.

Algebra introduseres ved å presentere bokstavene som generaliserte tall og som spesifikke ukjente tall, gjennom stadig tilkobling mellom aritmetikken og algebra. Læreren styrer timen ved å stille spørsmål basert på elevenes forutsatte misoppfatninger som presenterer en grunnlegende algebraisk regneregel. Lærerens åpenbare interesse for alle svarforslag til forskjellige oppgaver stimulerer elevene til diskusjon. Elevene forsvarer først sine svaralternativer i en diskusjon seg imellom i noen minutter, deretter argumenterer de om hvorfor deres svaralternativ kan være riktige i en klassediskusjon. Diskusjonsformene veksler mellom lærer og elevene, eller elev og elev. Elevene argumenterer og forsvarer sine meninger om hvilke svar som kan være riktig. Konklusjon trekkes når ingen har motargumentasjon til et av svaralternativene. Timen starter med diskusjon og forsetter med diskusjon om den ene oppgaven etter den andre med følgende konklusjon til hver diskusjonsøkt som presenterer en algebraisk regneregel.

Forskningsmetoden som ble valgt i denne masteroppgaven er å gjennomføre en test både før og etter introduksjonen av algebra og observasjon av introduksjonstimen. Testen har noen få diagnostiske oppgaver som kan avsløre misoppfatninger. Grunnen til at testen ble tatt før introduksjonstimen, var å kartlegge elevenes intuitive misoppfatninger, i møte med temaet algebra. Intensjonen med å gjennomføre testen etter introduksjonstimen var å ha grunnlag nok til å indikere at en del av elevenes misoppfatninger er avklart, ryddet opp eller utviklet seg positiv mot avklaring av dem. Selve introduksjonstimen ble observert ved hjelp av videokamera for å registrere alle misoppfatninger som dukket opp i undervisningstimen.

Hovedfokuset i denne timen er å introdusere et nytt tema (algebra) ved å avsløre elevenes misoppfatninger og avklare dem via et samspill mellom lærerens rolle, klassediskusjoner og aritmetikk som elevenes tidligere kunnskap. Aritmetikk og diskusjon blir brukt som verktøy av læreren for å avsløre og avklare misoppfatninger og presentere temaet algebra. Lærerens rolle som koordinator og veileder er avgjørende for gjennomføring av denne timen.

# Abstract

This paper tries to shed light on a very important phenomenon in the learning process of the topic algebra, which are misconceptions in algebra. It is natural that misconceptions exist when learning something new and trying to connect the new knowledge to the network knowledge one has before. The introduction of a new subject affects the quantity, nature and duration of the misconceptions that survive in the knowledge network, before they are revealed, clarified and cleared up. The research question is "How can the introduction of algebra, as far as it is possible, highlight misconceptions and clarify them?" The teacher's role and class discussion is elected as the elements to prepare the best possible way and to highlight misconceptions in algebra. The students' prior knowledge of mathematics (arithmetic) is chosen to clear up or clarify misconceptions.

The thesis looks to the introduction lesson of algebra as an important lesson in the initiation of the learning process in the topic algebra among the students. The theme is interesting for students when they get answers to their wonderings and create understanding of the subject. The theme algebra is introduced by a journey through student misconceptions and clarifies them by using the tools arithmetic, discussion and role of the teacher. Intuitive misconceptions also lights up challenges that the teacher has while in planning the introduction. By having the best possible overview of the students' misconceptions, the teacher prioritizes the clarification of them in the proper sequence in according relation to the presentation of the topic algebra. Students' misconceptions are based on generalization of previous knowledge which did not work in the new contexts. The students' prior knowledge of the topic algebra is arithmetic which is one of the key words. Arithmetic is both the foundation of algebra topic and key to clarifying students' misconceptions. Arithmetic connected to the Students' new knowledge which is algebra, using the arithmetic as a tool.

The role of discussion in the introduction of algebra is to emphasize and clarify misconceptions. The teachers planning and managing of the lesson starts with presumed intuitive misconceptions those students have regarding the topic algebra and continue the stimulation of student involvement and participation in discussion. This is used to detect hidden misconceptions. Although the teacher has a key role in the introduction of algebra, the lesson is far from traditional teaching on the blackboard. In the introduction of algebra the teacher starts the lesson but allows students to manage the process while they are on the right course and the teacher stepped in when in need of correction and guidance. The teacher's role

can be compared with an adult who would teach a child to ride a bike without training wheels. Algebra is introduced by presenting the letters as generalized numbers and as specific unknown numbers through increasing connection between arithmetic and algebra.

Algebra is introduced by presenting letter as generalized number and as specific unknown numbers through constant connection between arithmetic and algebra. The teacher controls the lesson by asking questions based on the student's predicted misconceptions that presents a basic algebraic calculation rule. The teacher's obvious interest for any suggestions for different assignments encourages the pupils to discuss. Students defend their first answers in a discussion among themselves for a few minutes, and then they argue about why their alternative answer may be right in a class discussion. The discussion forms switches between teacher and student, or student and student. Students argue and defend their opinions on what answers can correct. The conclusion is drawn when no one has counter arguments that can defend one of the alternatives. The class starts with a discussion and then continues with discussion regarding one task after the other with the conclusion of each discussion session that presents an algebraic calculation rule.

The research method that was chosen in this thesis is to conduct a test before and after the introduction of algebra and observation of introduction lesson. The test has a few diagnostic tasks that can reveal misconceptions. The reason why the test was taken before the introduction lesson was to examine the pupil's intuitive misconceptions, in the encounter with the subject algebra. The intention to conduct the test after the introduction lesson was to have grounds enough to indicate that a number of the pupil's misconceptions are cleared up or developed positive to clarification of them. The introductory lesson was observed using a video camera to record any misconceptions that appeared in the lesson. The main focus of this class is to introduce a new topic (algebra) by revealing the pupils misconceptions and clarifying them through interaction between the teacher's role, class discussions and arithmetic that students' prior knowledge. Arithmetic and discussion are used as tools by the teacher to reveal and clarify misconceptions and present the topic algebra. The teacher's role as coordinator and supervisor is essential for the completion of this session.

# Innholdsfortegnelse

# 1. Innledning

*Matematikk er ikke en tilfeldig samling av regler og formler, men et elegant byggverk hvor nye sammenhenger blir begrunnet ved hjelp av logikk og tidligere kjente sammenhenger* (Rinvold s.9. 2009), allikevel tyder mye forskning på at elevene ikke viser interesse for det elegante byggeverket eller har vanskeligheter for å lære seg dette faget, særlig temaet algebra. Algebra er et viktig emne som brukes i mange fag i forskjellige sammenhenger. *Algebra is a powerful tool that helps students makes connections in varied mathematical representations ...,* (Naalsund, 2011 s. 19). Vanskeligheter med å lære grunnleggende aspekter av algebra er godt dokumentert, for eksempel Assessment of performance Unit (1985), Booth (1984), Education (1985), Cambridge Institute of Education (1985), Herscovics (1989), Küchemann (1981), Robitaille and Garden (1989). Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) er en internasjonal studie som måler ferdigheter og kunnskaper i naturfag og matematikk. Selv om TIMSS viser en økning *på 8 poeng både i tall og i algebra* (Grønmo, 2012 s. 27), ligger elevenes algebrakunnskap fortsatt under gjennomsnittet.

Hva kan være grunnen til at elevene mener at temaet algebra er vanskelig? En Studie av Hadjidemetriou og Williams (2002) tar opp spørsmålet om lærerens kunnskap om hva elevene finner lett eller vanskelig i algebra og et gap mellom elevenes vansker og læreres oppfatning av disse vanskelighetene (lester. Jr, 1992 s. 740). James J. Kaput retter oppmerksomheten mot den tradisjonelle undervisningen av algebra som en av grunnene. S*chool algebra has traditionally been taught and learned as a set of procedures disconnected both from other mathematical knowledge and from students ' real worlds* (Fennema & A. Romberg, 1999 p. 133).

Forskernes oppmerksomhet, i jakt etter kilder til elevenes vanskeligheter med å lære algebra og feiltolkninger av algebraiske oppgaver, ble i lang tid rettet mot elevenes kognitive utvikling. Concepts in Secondary Mathematics and Science [CSMS] knyttet elevenes nivå av forståelse av algebraiske oppgaver til Piagets stadier av kognitiv utvikling. Andre eventuelle faktorer i denne konteksten fikk mindre eller ikke oppmerksomhet. Nyere forskning fokuserer på kilder eller faktorer til elevenes feiltolkninger som er blitt oversett i litteraturen og er mindre knyttet til kognitive nivåer. Noen av disse faktorene er analogi med kjente symbolsystemer, og å sammenlikne bokstaver i algebra med bokstaver som er i bruk i andre fag, eller effekten av villedende undervisningsmateriale. *We show that some common misinterpretations can be explained by considering factors more accessible than cognitive level to* *diagnosis and possible remediation.* (Macgregor & Stacey, 1997 s. 2). En del av elevenes feiltolkninger og misoppfatninger i introduksjon av algebra er knyttet til kognitive nivåer. Mens andre misoppfatninger er mer eller mindre knyttet til hvordan algebra blir introdusert, eller hvordan man setter opp algebraiske regnestykker med tanke på notasjoner og konvensjoner. Nyere forskning viser at fokus på beregning faktisk kan føre til mange misforståelser i elevenes sinn, som i sin tur vil gjøre læring av algebra vanskeligere.

Det er mange viktige spørsmål angående undervisning og læring av algebra. For eksempel, hvilke del av temaet algebra skal elevene lære og ved hvilken alder og hvilket nivå? I lys av tilgjengeligheten av avansert teknologi, hva bør elevene lære og hvordan skal det undervises? Hva er det elevene ikke forstår? Hva er egentlig algebra og tilhørende misoppfatninger? *"Vi kan si at algebra er et språk der vi kort og konsist uttrykker matematiske sammenhenger og resultater. Skal vi kommunisere, må vi forstå språket"* (Breiteig & Venheim, 2005). Hvordan kan dette språket undervises for elevene, slik at de forstår det?
Det finnes ikke mye forskning rundt lærerens algebraundervisning eller måten algebra blir introdusert på for først gang. *The research community knows very little about algebra teachers teach algebra and what their conceptions are of their own student's learning,* (Kieran, 1992, p. 395). Lærerens ulike beslutninger som valg av innhold og undervisningsmetode kan være avgjørende for elevenes læring av et temaet. *Research has also begun to address the question of teachers' knowledge of mathematical links between lessons* (Lester Jr., 1992 s. 340). Mange kreative lærere har et hav av alternative metoder for å håndtere et bredt spekter av klasserommets situasjoner. Lærerens rolle som et filter for å bestemme hva som passer og hva som ikke gjør det, i forhold til enkelte undervisningstema, kan påvirke på elevens læring.

Det finnes mange viktige spørsmål rundt introduksjon av algebra. For eks. hvordan knytter introduksjon av algebra elevenes matematiske kunnskaper til bruk av bokstaver i matematikk for alle første gang? Hvilke metode blir brukt for å introdusere algebra? Hva er introduksjonens mål og hensikt eller fokus? Blir algebra introdusert i det hele tatt? Hva er elevenes misoppfatninger i introduksjon av algebra? Hvert av disse spørsmålene skaper en teori, og hver teori som Postholm sier, leder frem mot forskjellige undersøkelsesspørsmål (Postholm 2005). Denne oppgaven vil kaste lys på misoppfatninger i introduksjon av algebra og måter til oppryding av dem.

Problemstilling er hvordan kan introduksjon av algebra legges best mulig til rette for å fremheve misoppfatninger og avsløre dem?

## 2. Misoppfatninger

For å lære kunnskaper, ferdigheter, beholde dem, å være i stand til å bruke dem til å løse problemer, må elevene lære med forståelse (Carpenter, Fennema, Fuson, Hiebert, Human og Wearne, 1999). I denne prosessen blir elevenes læring og forståelse ufordret av misoppfatninger, men hva er fenomenet misoppfatninger? Og hvorfor det er viktig å fremheve dem og rydde dem opp?

*Misoppfatninger er ufullstendige tanker knyttet til begreper* (Brekke, 2002). Når en riktig tenkemåte i spesielle situasjoner og tilfeller overføres til tilfeller der tenkemåten ikke holder lenger, oppstår misoppfatninger. Misoppfatninger er trolig naturlige når en vil danne begreper i nye områder og bruker sine erfaringer av en riktig tankemåte for å tolke nye ideer og trekker uriktige slutninger. Et av elevenes tidligere erfaringer er for eks. at når et tall deles på annet tall, blir svaret alltid mindre, eller produktet til en multiplikasjon blir et stort tall. Men når de møter desimaler som er et nytt område, stemmer ikke de tidligere erfaringene lenger. 2a + 5b = 7ab er en vanlig misoppfatning i algebra blant elevene.

Vi må akseptere at elevene kommer til å gjøre noen generaliseringer som ikke er riktige *Frequently, a 'misconception' is not wrong thinking but is a concept in embryo or a local generalization that the pupil has made. It may in fact be a natural stage of development.* (Swan, 2001 s.154). Mange av disse misoppfatningene blir holdt skjult hos elevene med mindre læreren gjør konkrete tiltak for å avdekke dem. Dette utdypes i avsnitt 3.2.

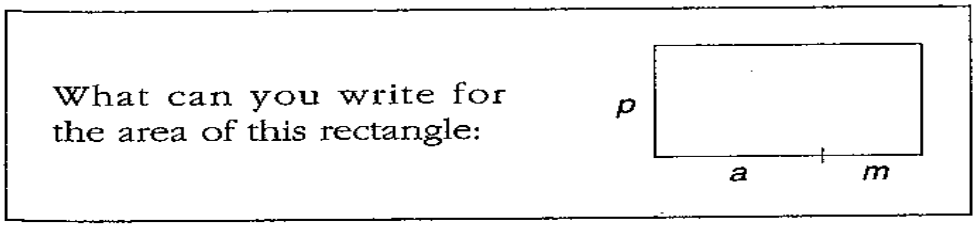
Det er forskjell på misoppfatninger og feil. En feil er tilfeldig og skjer ikke konsekvent. For eksempel kan eleven ha oversett noen tegn, ikke lest selve oppgaven så nøye eller brukt feil størrelser istedenfor den som er gitt i oppgaven og brukt den ukorrekte informasjonen til å løse oppgaven. Men en misoppfatning er ikke tilfeldig og eleven gjentar misoppfatningen konsekvent *Misoppfatninger er ikke tilfeldige. Bak dem ligger det en bestemt tenkning en idé som en bruker nokså konsekvent* (Brekke, 2002 s. 10).

Misoppfatninger kan som sagt kan være et produkt av elevenes generalisering fra sine tidligere erfaringer. Et eksempel på generalisering av tidligere erfaringer i algebra er ett slikt regnestykke 2m + 3 =. Elevene tolker addisjon, subtraksjon, divisjon og multiplikasjon tegnene som opperasjoner der sluttsvaret er et ledd. Elevene ser ikke på 2m + 3 som det endelige svaret og de regner dette 2m + 3 videre til 5m som er ett ledd.

Elevene kan også misoppfatte bokstaven (m) som forkortelse av meter. Da betyr regnestykket for dem 2 meter pluss 3 meter blir 5 meter. Hvis 3 var 3m, så var elevens tankegang riktig og tolke bokstaven (m) som et objekt. Men de overser at 3, ikke er 3m, for få det til å stemme.

Misoppfatninger er ikke alltid et produkt av elevenes generalisering av tidligere erfaringer. De kan også være et produkt av undervisningen. 2 : 5 = 2/5 er ett eksempel på misoppfatninger som et produkt av undervisningen. Den venstre siden av ligningen oppfattes av elevene som spørsmålet, "hva er 2 delt på 5?". Dette kan regnes ut. Men høyre siden av eksempelet er bare en brøk som betyr tofemtedel og det er ikke ett spørsmål. For elevene er venstre side av ligningen ikke lik som høyre side av ligningen. Dette tyder på at de to emnene, deling og brøk ble presentert som to separerte emner uten å vise elevene sammenhenger mellom dem.
Et annet eksempel på misoppfatninger produsert av undervisningsmetoden er å introdusere bokstaver i algebra som objekter. En "fruktsalat" tilnærming (Tirosh et al. 1998). Denne tilnærmingen innebærer å lese 3a + 2b + b + 4a som 3 epler 2 bananer pluss en banan pluss 4 epler, som naturligvis blir 7 epler pluss 3 bananer eller 7a + 3b, noe som er riktig. Misoppfatningen oppstår når elevene vil lære om produkt av bokstaver. Hvis a og b representerer epler og bananer, så hva betyr ab?

En annen kilde til misoppfatninger er konvensjoner og bruk av notasjoner i algebra. I aritmetikken 2 ganger 3 skrives 2*3, men i algebra (a) ganger (b) skrives ab, uten å skrive gangetegnet mellom (a) og (b). Hvis elevene hadde brukt samme måte på å skrive 2 * 3=, i aritmetikken, da hadde regnestykket sett slik ut 23=. Det er viktig å presentere tydelig bruk av konvensjoner i algebra for å forebygge eventuelle misoppfattninger basert på det. Bruk av parenteser i algebra er et annet eksempel i denne sammenhengen. 2( 3 + 4) = 2 (7) = 14 her er tallet 2 multiplisert med summen av tallene i parentes, som er tallet 7. I algebra svarer elevene slik p (a + m) = pa + m.




**Figur 6**

Booth rydde opp denne misoppfatningen med å vise figur 6 til den 15 åring Niel,

Neil: P times ... a plus m. [Writes p x a + m]

I;  Right, so you've written down p x a + m. And what would you actually do, what would you need to do first?

N; I'm not with you.

I; Right, why did you say p times a plus m?

N; because you're time sing that side [p] by that side [a and m], and that side [a and m] you can't do, so you've got to add that [a] onto that [m], to times the two sides together.

I; Right, so which bit would you do first?

N; ... I'd add those two up [a and m], and then I'd times it by p.

I; And is that what you've written?

N; yes.

I; suppose I said I thought that [p x a + m] meant p times a. And then plus m.

N; Oh no, it can't be that. If you did p times a, you'd only get a bit of it [areal]. You've got to do the a plus m to get the whole length, and then times p. You've got to add a and m first.

(Booth 1984, p. 22)

En slik diskusjon kan brukes i klasserommet. Det er sikkert flere elever deler i utgangspunktet samme mening som Niel.

I dette eksempelet går Neil gjennom en kognitiv prosess og får klarhet på sin misoppfatning gjennom diskusjon med læreren. Uansett hvilke kilder misoppfatninger har, er de en naturlig del av læringsprosessen og det er vanskelig å unngå dem. *Although we can and should steer*

*clear of activities and examples that might encourage them, misconceptions cannot simply be avoided* (Swan, 2001 s. 150).
Det viktigste er å unngå misoppfatninger som er et produkt av undervisningen og å ha strategier for å fremheve elevenes misoppfatninger og rette dem opp. Slike undervisninger kalles diagnostiske undervisninger. *Diagnostisk undervisning baserer seg således på at det i prinsippet er mulig å identifisere hvilke tanker elevene har gjort seg om det kommende lærestoffet, og hvilke misoppfatninger og hindringer elevene vanligvis møter når de utvikler ulike begreper i matematikken*". (Gard Brekke, 2002, s. 19).

Hva betyr det å avklare misoppfatninger? Bør avklaring av misoppfatninger kobles til læring av regneoperasjoner med bokstaver eller forståelse av bokstavenes rolle i algebra? Opprydding av misoppfatninger kan starte med lærerens forståelse av hvilke del av elevenes tanker som ikke stemmer med virkeligheten. Hvor i forståelses prosess ligger elevenes misoppfatninger.
Carpenter & Lehrer (1999) sier at forståelse prosessen med mental aktivitet består av fem deler:

1. Konstruere et forhold
2. utvide og anvende matematisk kunnskap
3. reflektere over erfaringer
4. artikulere hva man vet
5. gjør matematisk kunnskap ens egen

Misoppfatninger kan tre frem i første, andre og tredje del av denne prosessen. Opprydding av misoppfatninger kan skje i fjerde og femte del av prosessen. Misoppfatningene kan være av forskjellige arter. De kan også ha progresjon i forhold til hvor elevene ligger i forståelsesprosesser. Misoppfatninger kan enten bli avklart og ryddet opp gjennom undervisningstimen eller bli utviklet. Forståelse av regneoperasjoner og forståelse av bokstavenes rolle er to sider av samme strategi som kan avklare misoppfatninger.

*Understanding by Design* (UbD) er et rammeverk for å bedre elevprestasjoner. Dette er utviklet av nasjonalt anerkjente pedagoger Grant Wiggins og Jay McTighe (1998), og produsert av Association for Supervision and Curriculum Development (ASCD).(UbD) er basert på seks prinsipper. Første og femte prinsipper er:
*1. A primary goal of education is the development and deepening of student understanding.*

*5. Teachers provide opportunities for students to explain, interpret, apply, shift perspective, empathize, and self-assess. These "six facets" provide conceptual lenses through which students reveal their understanding. (Wiggins & McTighe, 1998).*
Metoden for opprydding av misoppfatninger i denne oppgaven i likhet med første og femte prinsipp i (UbD) fokuserer på utvikling og utdyping av elevenes kunnskaps forståelse og de muligheter læreren gir elevene til å forklare, tolke, søke, skifte perspektiv, innlevelse og selv vurdering. De to prinsippene virker som grunnsteiner for programmene CGI, CBI, PCMP og STST som **utdypes i avsnitt 3.1.** De fire programmene brukes som strategier for avsløring av og opprydding av misoppfatninger i introduksjon av algebra.

**Oppsummering:** Misoppfatninger er ufullstendige tanker knyttet til læring av nye begreper. Kilder til misoppfatninger er overgeneralisering av tidligere erfaringer eller undervisningen. Misoppfatninger er en naturlig del av læringsprosessen. Misoppfatninger dreier seg om nye temaer der det er vanskelig for elevene å generalisere den tidligere kunnskapen, derfor gjetter elevene intuitivt og danner misoppfattninger. Misoppfatningene er i hovedsak basert på gjetting. Avklaring eller oppryddings metoder av misoppfatninger er basert på første og femte prinsipp i (UbD).

# 3. Hva menenes med introduksjon av algebra

Det som gjør introduksjon av algebra og algebra læring så viktig er at dette temaet er fundamentet for de fleste beregninger i alle realfag. Hvis undervisningen ikke klarer å legge til rette for læring av algebra kan dette føre til et negativt forhold til realfag, *of all, their experiences in algebra too often drive them away from mathematics...* J. Kaput *Worst* (Fennema & A. Romberg, 1999 p. 135).
Introduksjon betyr å introdusere eller presentere noe nytt. I denne konteksten er algebra det nye stoffet i faget matematikk som blir presentert for første gang til ungdomskoleelever. Introduksjon av algebra skjer via en pedagogisk prosess. Even (1990) antyder at pedagogiske opplegg må omfatte minst følgene; *Different representations, alternative ways of approaching the concept, strength of conceptual knowledge, a basic repertoire of the concept, and knowledge of mathematics.* (Lester.Jr., 1992 s. 739). Fokusområder i denne prosessen er elevenes undring i form av "hvorfor" og "hvordan" for å avsløre og avklare de intuitive og ikke intuitive misoppfatninger i algebra. Avklaring av misoppfatninger kan føre til forståelse

hos elevene. Kilpatrick, Swafford, og Findell (2001) har presentert forståelse som en nødvendig ferdighet i sammenheng med læring av matematikk. De mener at elevene utvikler en forståelse av forholdet mellom "hvorfor" og "hvordan" i matematikkfaget. Programmene Cognitively Guided Instruction, Conceptually Based Instruction, Supporting Teten-Structured Thinking og Problem-Centered Mathematics Project som fordypes i neste avsnitt, er valgt som ramme for introduksjonstimen som skaper en arena for diskusjon om forholdene "hvorfor" og "hvordan".

## 3.1 Strategier for avsløring og avklaring av misoppfatninger

Rammene rundt introduksjon av algebra i denne oppgaven er preget av fire programmer som ble beskrevet av P. Carpenter & Fennema, Hiebert & Wearne, Fuson og Human, Olivier & Murray (Fennema & A. Romberg, 1999). Forskere samarbeidet med skoler og lærere for å lage og studere tilnærminger som støtter og forbedrer elevenes forståelse av matematikk.

1. *Cognitively Guided Instruction (CGI),* (Fennema & A. Romberg, 1999 p. 50).
   (CGI) er utviklet av Carpenter, Fennema og Franke (1996). CGI opererer fra et perspektiv om at lærernes forståelse av barns matematiske tenkning er en kritisk faktor til å hjelpe elevene å lære matematikk med forståelse. Læreren forstår elevenes tankegang ved å tilbringe mye av tiden til undervisning til å diskutere alternative strategier som elevene har laget for å løse hvert problem, i stedet for å demonstrere måter å løse problemer på. En viktig konsekvens av CGI programmet er at det ikke er rådende strategier alle elever skal bruke på et bestem tidspunkt. Elevene har handlingsrom til å bruke en strategi som gir mening for dem på den tiden. Diskusjonene fungerer som modeller for andre barn, og de gir en mulighet for elever til å reflektere over sine egne løsninger og lære mer avanserte strategier ved å samhandle med andre elver. Den kontinuerlige drøftingen av flere representasjoner og det å flytte frem og tilbake mellom representasjonsformer hjelper læreren å forstå elevenes tanker og andre elever til å se sammenhengene mellom ulike representasjoner. *A primary goal is to help students become comfortable with different forms of representation and build relationships among those forms.* (Fennema & Romberg, 1999 p. 52). I en slik undervisningsmetode har misoppfatninger ikke noe valg enn å gjøre seg synliggjort.
2. *Conceptually Based Instruction (CBI),* (Fennema & A. Romberg, 1999 p. 52).
   CBI regissert av Hiebert og Wearne (1993, 1996), fokuserer på å bygge relasjoner med ulike representasjoner, som brukes som verktøy for å løse problemer og

kommunisere sine strategier. Dette programmet hjelper elevene med å være komfortabel med forskjellige former av løsningsforslag til samme oppgave og å bygge relasjoner ved å utfordre elevene til å reflektere over likheter og forskjeller som er fremhevet av de ulike representasjoner.

3. *Supporting Teten-Structured Thinking (STST)*, (Fennema & A. Romberg, 1999 p.53). Dette prosjektet er utført av Fuson & Smith (1995) og gir støtte for å lage forbindelser mellom representasjoner. Programmet STST som de andre tre har fokus på prosedyrer konstruert av elevene selv, enten enkeltvis eller samlet slik at innlæringsprosedyren av nye tema blir sett på som problemløsning snarere enn som etablerte ferdige forklaringer. Det gir spesifikk begrepsmessig støtte til elevene gjennom hvert innledende trinn for å gi mening til deres problemløsningstrategier.
4. *Problem-Centered Mathematics Project (PCMP).* (Fennema & A. Romberg, 1999 p. 55). Dette programmet fokuserer på beregningsorienterte prosedyrer som bygger direkte på elevenes antall konsepter og deres kunnskap om tema. Læreren tilbringer mye tid på å lytte til elevene, akseptere deres forklaringer og begrunnelser i en ikke evaluerende måte. Formålet med det er å forstå og tolke elevenes tilgjengelige kognitive strukturer. Dette gjør at læreren gir riktig læringsopplevelse som forenkler elevenes utvikling. De fire programmene blir gjennomført via problemløsningsteknikken som blir mer **utdypet i avsnitt 4.2.1.**

Disse programmene danner rammer for introduksjonstimen for å skape et læringsmiljø der misoppfatninger kan blir oppdaget. Shulman (1987) sier at *the blending of content and pedagogy into an understanding of how particular topics, problems, or issues are organized, represented, and adapted to the diverse interests and abilities of learners, and presented for inspection …*(Lster Jr, 1992 s. 239).
Disse programmene ble gjennomført mest på barneskolenivå og på det konkrete plan. Introduksjon av algebra beveger seg fra det konkrete til det abstrakte plan. Allikevel det ikke er noen hindringer for at de programmene blir tilpasset til introduksjon av algebra. Tilpassningen skjer slik at læreren prøver å forstå elevenes tankegang og misoppfatninger ved å lytte på elevenes løsningsforslag til gitte oppgaver og deres forklaringer til besvarelsene. Dette er et eksempel på gjennomføring av programmet CGI. Ved å diskutere alle foreslåtte løsningsforslagene, finne likheter og ulikheter mellom løsningsforslagene og bygge relasjoner, blir programmet CBI brukt i introduksjons av algebra. Løsningsforslagene undersøkes via problemløsningsorienterte måter. Ved å strukturere den siste besvarelsen som

er en algebraisk regneregel blir programmene STST og PCMP gjennomført. Ved bruk av disse programmene og lærerens rolle via sine beslutninger som blir diskutert **i avsnitt 3.3**, designes introduksjonstimen av algebra.

Læreren skaper med full kontroll en arena for synliggjøring av misoppfatninger via gjennomføring av disse programmene. En algebraisk regneregel blir presentert ved avklaring og opprydding av misoppfatninger. *The teachers understand children's thinking so that they are able to help children extend their knowledge by connecting new knowledge to it* (Fennema & A. Romberg, 1999 p. 60).

## 3. 2 Introduksjonens faglig fokus områder

Introduksjon av algebra fokuserer på misoppfatninger relatert til bokstavenes rolle som generaliserte tall eller som spesifikke ukjente. Forståelse av bokstaver som et spesifikt ukjent tall er avhengig av forståelse av likhetstegnet. *Concepts of equivalence and understanding of the equal sign are essential to algebraic understanding (Freiman & Lee, 2004; Knuth et al., 2006).* Dette kan vises tydelig gjennom oppgaver i introduksjon av algebra.
For eksempel denne regneoppgaven, 2 + 2 + 5 + 2 + 5 = 16 skrives på tavla og det spørres elevene om det kan stå et annet tall bortsett fra 16 på andre side av likhetstegnet? Denne diskusjonen kan kobles til en algebraisk oppgave ved å skjule tallet 5 bak en lapp som det står (a) på. Da forvandles oppgaven til 2 + 2 + a + 2 + a = 16. Forståelsen av likhetstegnets rolle er vesentlig for opprydding av en del misoppfatninger innen algebra temaet. *Understanding of the equality symbol as a sign of relational equivalence is a hallmark of the transition between arithmetic to algebraic thinking* (Carpenter et al., 2005). Altså overgangen fra strukturell numerisk resonnering til algebraiske resonnement er det nødvendig at elevene forstår likhetstegnet relasjon som et likeverdig symbol som betyr " samme som".

Küchemann (1981) oppsummerte elevenes vanskeligheter i forståelse av symboler eller bokstaver som blir brukt i algebra på to nivåer, som ble senere anvendt av booth(1988) og Fujii (2003). Elevene ble spurt, når er uttalelsen L + M + N = L + P + N sant? (alltid, aldri eller noen ganger). Omtrent halvparten av i utvalget elevene til Fujii svarte aldri. En slik problemstilling tas ikke opp i introduksjonen av algebra.

Aritmetikk ble brukt bevisst i introduksjon av algebra. Algebraiske regneoperasjoner presenteres via aritmetiske regneoppgaver, for eksempel. 4 + 4+ 4 = 3*4 og n + n + n = 3 * n, der svaret også kan skrives som 3n. Det er viktig å synliggjøre bruk av notasjoner i algebra for å fremheve tilhørende misoppfatninger. Elevene har en tendens til å se på svaret 3n som en sum, snarere enn et produkt *To indicate that its introduction should be delayed and that the product should be written in full (nx3 or 3xn) for a substantial period of the students' early work in algebra* (Booth*, 1988 p.302).*

## 3.3 Lærerens rolle i introduksjon av algebra

Læreren har en unik og avgjørende rolle i fremheving av elevenes misoppfatninger i introduksjonstimen. Lærerens oppfatninger, vurderinger og beslutninger av faktorer som bidrar til valg av emner og metoder til gjennomføring av undervisningsopplegg, utgjør deres rolle. J. Cooney (1991) sammenligner lærere med skuespillere på scenen. De begeistrer for å fange fantasien til publikum. Det er to faser, preaktive og interaktive i undervisningen. Den preaktive fasen er det som foregår før læreren begynner samspillet med elevene. Det innebærer vanligvis leksjonsplanlegging. Den interaktive fasen innebærer klasserommets samspill mellom elever og lærer. Undervisning er en prosess med å samle informasjon, lage en diagnose og konstruere et svar basert på den diagnosen.

Lærerens rolle er spesifikk i introduksjon av algebra for å diagnostisere misoppfatninger, og presentere algebraiske regler gjennom avklaring av misoppfatninger. J. Cooney (1991) skriver dette om læreres beslutninger i undervisningen, *Teachers make different types of decisions. Some are related to the content, including its selection, and the selection of teaching methods. Other decisions relate to the more interpersonal aspects of teaching... Still other decisions involve management considerations, including the allocation of time.* ((Pimm, 1991 p.175). I denne oppgaven blir lærerens beslutninger i undervisningen delt i tre kategorier.

### 3.3.1 lærerens kognitive avgjørelser i introduksjonen av algebra

Kognitive beslutninger blir først gjort i den preaktive fasen av undervisningen. Læreren gjør stadig vurderinger av elevenes misoppfatninger og de ulike undervisningsmetodene for å avklare dem. Kognitive beslutninger i den interaktive fasen er fokusert på identifisering av misoppfatninger i de mulige svaralternativene til spørsmålet. Gjennom svaralternativene blir misoppfatningene avklart. som blir fordypet i 5.2.

### 3.3.2 Lærerens affektive avgjørelser i introduksjon av algebra

*Teacher need to be sensitive to students and provide ample affective support for them* (Pimm, 1991 p. 280). Lærerens forklaringer er basert på deres oppfatning av hvordan elevene er i samspill med innholdet. Spørsmålet "hvorfor må vi lære algebra?" er et typisk spørsmål elevene stiller. Måten slike spørsmål blir håndtert avhenger av hva læreren oppfatter som grunnen for en slik kommentar. Hvis elevene spør, "hvordan hjelper algebra å løse problemer i den virkelige verden?" Da har spørsmålet en kognitiv natur og besvarelsen fokuserer på temaets hensiktsmessige bruk i praksis. Hvis eleven spør "hvorfor klarer jeg ikke å lære dette bedre", da står læreren ovenfor en instruksjonsavgjørelse.

### 3.3.3 Lærerens ledelsesmessige beslutninger

Ledelsesmessige beslutninger forholder seg til tidsbruk, organisering av klasseromsaktiviteter, og kontroll av forstyrrende atferd. Noen av disse beslutningene kan gjøres i den preaktive fasen av algebra undervisningen for å kontrollere problemer relatert til klasseledelse. Læreren leder klassediskusjonen til fremheving av elevenes misoppfatninger.

I introduksjon av algebra prøver læreren å forutsi elevenes misoppfatninger. I den preaktive fasen fatter læreren beslutninger i henhold til hvilken rekkefølge spørsmålene bør blir stilt for å sette i gang diskusjonen og undervisningen. Hvilke metoder som bør anvendes for å avklare misoppfatninger, og hvilke del i algebra kan bli presentert i denne fasen. Dette kaller Shulman (1987) for pedagogical content knowledge.

**Oppsummering:**

I den preaktive fasen planlegger læreren undervisningen basert på elevenes intuitive misoppfatninger som **ble fordypet i avsnitt 2** og forutser elevenes misoppfatninger i læring av algebra for å forberede metoder til å avklare dem. Slik som er forklart under CGI programmet. Lærerens kognitive avgjørelser bidrar til valg av oppgaver som skal styre hele undervisningen. Introduksjonen skjer trinn for trinn. Lærerens oppgaver avgjør progresjonen i undervisningen og hvilke del av temaet algebra som blir presentert gjennom oppgavene. Elevenes refleksjon via diskusjon synliggjør misoppfatninger og avgjør innholdet i diskusjonen. Læreren bruker programmet PCMP for å lytte konsekvent på elevenes forklaringer om hvordan de løser oppgavene. Dette bidrar til å forme en modell som etablerer en klassenorm der alles tenkning blir respektert (CBI og STST programmer), og gjør det lettere for at misoppfatninger blir synliggjort og avklart.

# 4. Diskusjonens og aritmetikkens rolle i avsløring og avklaring av misoppfatninger

For å tilrettelegge best mulig for synliggjøring og avklaring av misoppfatninger ble diskusjon og aritmetikk valgt som verktøy. Diskusjon mellom lærer og elev, og elev og elev er aktuelle former for fremheving av misoppfatninger. Aritmetikken brukes som fundament til algebra og verktøy for å rydde opp misoppfatninger. Det bør undersøkes i hvor stor grad, de tidligere forskninger støtter opp under denne teorien.

## 4.1 Aritmetikkens rolle i å rydde opp misoppfatninger i algebra

I hvilken kontekst står aritmetikken i forhold til misoppfatninger i algebra? Vi starter med aritmetikkens rolle som algebras fundament.

Historien om algebra med tre ulike stadier, retorisk algebra, synkopert algebra og symbolsk algebra peket på et felles ønske, som var grunnlaget for utvikling av algebra, nemlig å løse ligninger eller finne verdien til det ukjente. Algebra er blitt definert fra forskjellige vinkler, for eksempel en funksjonell variabel, generaliserte nummer og bokstaver som ukjente tall. Fellestegnet i de forskjellige definisjonene er at bokstaver presenterer verdier. Med generalisering av aritmetikken ble algebra skapt som et verktøy for å løse problemer. Aritmetikken er den strukturerte kunnskapen av elementer som algebra består av.

Elevene danner gjennom en struktureringsprosess i barnehagen og barneskolen et nettverk av mentalrepresentasjoner om aritmetikken. Den nye relasjonen, altså algebra, blir koblet til det eksisterende nettverket gjennom introduksjonen. Hiebert og Carpenter har definert forståelse av nye relasjoner på en metaforisk måte *Networks of mental representations are built gradually as new information is connected to existing networks or as new relationships are constructed between previously disconnected information. Understanding grows as the networks become larger and more organized"* (Grouws, 1992, p. 69).

Elevens forkunnskap som er basert på de strukturelle egenskapene til matematiske operasjoner og relasjoner gjennom hele barneskole, regnes som deres forkunnskaper som brukes til å forstå algebraiske operasjoner på ungdomskolen. Booth (1989) argumenterte *our ability to manipulate algebraic symbols successfully requires that we first understand the structural properties of mathematical operations and relations which distinguish allowable transformations from those that are not.* (Kieran, 2007, p. 711).

Det å bruke elevenes aritmetiske forkunnskaper gir elevene knagger til å feste det nye temaet algebra på, og slik vokser elevenes kunnskapsnettverk i matematikk. Temaet algebra blir mer meningsfullt også når elevene oppdager sammenhenger mellom aritmetikken og algebra. *In generalized arithmetic this suggests that the extent to which the letters are meaningful to children will be of vital importance in determining item difficulty.* (Küchemann, 1981),

Hvis undervisning av aritmetikk på barneskolen og algebra på ungdomskolen ikke oppfattes som et helhetsopplegg i matematikk, kan elevenes aritmetiske kunnskap fra barneskolen skaper misoppfatninger. For eks. når elevene må bruke rasjonell tenkning for å løse ekvivalens oppgaver. I barneskolen er fokuset på å utvikle effektive beregningsorienterte strategier, noe som forårsaker misoppfatninger i beregning av ekvivalens oppgaver i algebra. Falkner, Levis og Carpenter (1999) spurte 145 amerikanske 6. klassinger om å løse følgende problem 8+4=□+5. Alle elever mente at 12 eller 17 bør stå i boksen. Blair (2005) rapporterte med henvisning til den samme undersøkelsen at elevene hadde ikke lært at likhetstegnet uttrykker sammenheng mellom tallene og dermed utførte ikke operasjonen. *This is usually attributed to the fact that in the students' experience, the equal sign always "comes at the end of an equation and only one number comes after it"* (Falkner et al., 1999, p. 3).

Bortsett fra den ovennevnte problematikken som har forankring i måten aritmetikken ble presentert på i barneskolen, spiller aritmetikken en vesentlig rolle i å rydde opp misoppfatninger i algebra. Det kan sammenlignes med en nøkkel og en låst dør. Et pedagogisk eksperiment ble gjennomført av Herscovics og Linchevski i 1994 med fokus på og utforskede de øvre grensene for elevenes pre- algebraiske begreper før en eventuell opplæring i algebra. Dette eksperimentet ville oppdage elevenes intuitive prosedyrer i beregning av algebraiske regnestykket.

Seks elever ble testet gjennom dette eksperimentet. To sterke ($S_1$ og $S_2$), to middels ($A_1$ og $A_2$) og to svake ($W_1$ og $W_2$). Resultatet av dette forsøket opplyste at elevene løste enkelte ligningsoppgaver med en ukjent, ved bruk av inverse operasjoner i motsatt rekkefølge, f.eks.: $56 – n = 39$ som $56 – 39 = 17$. I de fleste tilfeller der elevene møtte hindringer og hadde misoppfatninger, ble aritmetikken brukt som en nøkkel for å gå over hindringene. For eksempel da elevene fikk oppgaven $19n + 67 – 11n – 48 = 131$. Både elev $S_1$, $S_2$ og $W_2$ grupperte 19n og 11n og skrev svaret lik $30n – 19 = 131$. Siden 67 etterfølges av et minus tegn ble utfallet av tallene ett negativt tall. På det tidspunktet fikk elevene en aritmetisk tips,

20 + 5 – 10 og sammenlignet det med den algebraiske oppgaven. Dette var tilstrekkelig nok for at elevene genererte riktig gruppering.
*From these detailed descriptions, it appears that developing the ability to perform operations non – sequentially requires overcoming the hurdle created by the presence of a variety of arithmetic operations* (Linchevski & Herscovics, 1994 s. 52).

Et annet eksempel i forsøket til Linchevski og Herscovics der aritmetikken ble brukt til å rydde opp misoppfatninger er da denne ligningen skulle løses. 12n + 30 = 13n +19. Elevene brukte nedbrytingsmetoden og forvandlet ligningen til 12n + 19 + 11 = 12n + 1n + 19.
Etter fjerning av like ledd fra hver side av ligningstegnet, forandret ligningen til 11 = 1n. Da student $W_2$ mente at det var meningsløst med 11= 1n. Aritmetikken ble brukt som forklaring av problemet slik at 1n er lik 1 ganger n som 1 x 3, da blir svaret 11 = n. *She had to be shown that 1n was the same as n, just as 1 x 3 is the same as 1*n* (Linchevski & Herscovics, 1994 s. 56). Aritmetikken spiller en vesentlig rolle for å rydde opp algebraiske misoppfatninger når elevene ser sammenhenger mellom den tidligere kunnskapen og den nye.

**Oppsummering:**
Aritmetikken er både algebras fundament og elevenes forkunnskap i form av de strukturelle egenskapene til matematiske operasjoner og relasjoner. Det gir aritmetikken en særskilt plass i introduksjonen av algebra, nemlig helt fra start og hele veien gjennom introduksjonen. Aritmetikken virker ofte som en nøkkel for å løse algebraiske oppgaver som elevene ikke kan løse selv. Den tidligere kunnskapen er avgjørende for å rydde opp elevenes misoppfatninger i algebra.

## 4. 2 diskusjon i introduksjonstimen for å fremheve misoppfatninger

Dette avsnittet skal svare på hvorfor diskusjon er et godt verktøy for å fremheve misoppfatninger i introduksjon av algebra og opprydding av dem. *Misoppfatningene framheves og ryddes deretter opp i gjennom diskusjoner og avklaringer*. (Olafsen & Maugesten, 2009, s.129). Det er viktig å finne ut hva slags organisering av diskusjon i klassen som mer effektiv til fremheving av misoppfatninger. Organisering av diskusjon i undervisningen kan skje på mange måter. For eksempel, diskusjon i smågrupper, diskusjon mellom to elever eller diskusjon mellom lærer og elevene (klassediskusjon).

Diskusjon som sosiokulturell innstilling har stor betydning i utvikling av elevenes matematiske kunnskaper. I den innflytelsesrike rapporten Cockcroft Committee in the United

Kingdom (Cockcroft, 1982) ble det uttalt at språk spiller en viktig rolle i dannelsen og uttrykk av matematiske ideer. Elevene bør oppmuntres til å diskutere og forklare matematiske ideer. C.Hoyles (1985) presenterer følgende aspekter ved diskusjon i en prosses der elevene utvider sine kunnskapsnettverk:

- Organisasjon og artikulasjon av egne ideer,
- Utarbeidelse med egne ideer for kommunikasjon til en annen, dynamikken i dialog og diskusjon,
- Etablering av kognitiv konflikt, når den nye kunnskapen ikke stemmer overens med den oppfatningen eleven hadde
- Bevissthet om behovet for avklaring.

Gjennom disse aspektene av diskusjon kan misoppfatninger bli synliggjort for hver enkelt elev og starter dermed en kognitiv prosess hos elevene, slik som det ble forklart i intervjuet mellom Neil og læreren om Figur 6 **i avsnitt 2.** *There is a venerable tradition in rhetoric and composition which sees the composing process as a series of decisions and choices. However, it is no longer easy simply to assert this position, unless you are prepared to answer a number of questions,* (Flower & R.Hayes, 1981 p. 365). Når elevene prøver å bygge algebraisk kunnskap på sin artimetiske kunnskap, skaper det kognitive konflikter der misoppfatninger kan bli diskutert og oppryddet. *Mathematics teaching at all levels should include opportunities for …Discussion between teacher and pupils and pupils themselves ;…*(Pimm, 1991 p. 3).

### 4.2.1. Diskusjon mellom lærer og elevene (klassediskusjon)

Begrepet matematiske diskusjonen har blitt introdusert av Pirie og Schwarzenberger (1988), *who define it as a purposeful talk on a mathematical subject in which there are genuine student contributions and interaction.* (Voigt, Seeger & Waschescio, 1998 s. 15).

Diskusjon kan foregå på forskjellige måter. Det kan være en lærerstyrt eller mindre lærerstyrt diskusjon. Når læreren styrer diskusjonen, har den klare retningslinjer. For eksempel valg av diskusjonsemne, antall elever i hver diskusjonsgruppe, hva diskusjonen skal lede til osv. I denne oppgaven ble for det meste en lærerstyrt diskusjon anvendt. Forskerne er enig i at bare bestemte diskusjonstyper har det store potensialet for læring i matematikk. Albeit, *with varying emphases, all the authors agree that mathematical conversation does seem to have great potential as a mode of learning; yet, on the other hand, only certain types of conversation are likely to bring this potential to fruition* (Sfard 1998 s. 51).

Læreren har en sentral rolle i en lærerstyrt klassediskusjon. Læreren velger emner og er den ene parten i diskusjonen, mens alle elevene i klassen er den andre parten. Elevene er aktive deltagere i hele undervisningstimen gjennom diskusjon. Læreren styrer bare diskusjonen i den retningen som er planlagt for undervisningstimen. Ved å bruke en slik diskusjonstype kan man fokusere på deler av diskusjonen der skjulte misoppfatninger blir fremhevet og forklart. *A form of mathematical discussion is the debate orchestrated and organized by the teacher in the whole classroom on a common mathematical object..* (Voigt, Seeger & Waschescio 1998 s. 18).
Diskusjon oppmuntrer elevene til å ta opp sine tanker og undringer rundt diskusjonstemaet. *Classroom discussion provokes a lot of reflection and gives an opportunity to compare, criticise, refute, complete, reject, and so on.* (Sfard & Kieran 2001 s. 45).

Elevenes avsløringer av sine misoppfatninger er avhengig av deres deltagelse i diskusjonen. Det er ikke lett for elevene å artikulere sine meninger om oppgavene når de diskuterer. Mercer & Sams (2006) mener at læreren er en viktig part for at diskusjonen skal fungere. Lærerens støtte av elevenes forsøk på å artikulere sine tolkninger av oppgavene, kan virke som en drivkraft for diskusjonen. Læreren kan også hjelpe elever til å bruke like eller aktuelle begreper for å forklare sine meninger. Dette gjør det enklere for elevene å diskutere og bruke fagspråk når de diskuterer med hverandre. *As these articulations focus on the reasoning that lies behind solution procedures, students' participation in such discussions increases the likelihood that they might come to understand each others' thinking.* (Sfard & Kieran 2001 s. 47).
Bortsett fra å kunne uttrykke sine meninger, er det viktig at elevene har gode argumentasjoner også. Diskusjon kan være produktivt hvis elevene er flinke til å argumentere. En del av lærerens rolle er å hjelpe elevene med å forstå hva som er ett overbevisende argument i matematikk diskusjon. Sfard *å ha denne type samtale, hvor barn argumentere med hverandre om gyldige argumenter i matematikk, kan være kjernen i vår undervisning i matematikk.* (Sfard, 1998 s. 43). Argumentasjon kan være ett effektivt verktøy i synliggjøring og avklaring av misoppfatninger.

Lærerens oppgaver er å skape situasjoner som motivere elevene til å iverksette diskusjonen. Teknikken problemløsning (Walter, 1991) er en god framgangsmåte til dette formålet, nemlig å skape gode læringssituasjoner. *Problem posing …- discuss different levels of question asking or problem posing* (Pimm, 1991 p. 190). I en tradisjonell matematikk klasse forklarer læreren det nye stoffet, elevene får tildelt oppgaver og læreren sjekker besvarelsene.

Ved bruk av problemløsningsteknikk, blir oppgaven diskutert etter hver enkel operasjon. For eksempel for å løse denne ligningen 4x – 3 = 24 – 2x kan elevene bli spurt om hvilke opperasjoner de gjennomfører først for å løse denne oppgaven. Noen av elever velger å addere 3 til begge sider av likhetstegnet mens andre elever velger å addere 2x til begge sider av likhetstegnet. Elevene bør argumentere for hvorfor de har valgt den bestemte opperasjonen først, siden begge to er riktige. På den måten blir elevene stimulert til å delta i diskusjonen rundt oppgaven og læreren får forståelse av elevenes matematiske tenkning og deres misoppfatninger.*Algebra teaching and learning build on students' naturally occurring linguistic and cognitive powers (encouraging them at the sometime to reflect on what they learn and to articulate what they know )* (Fennema & Romberg, 1999 p. 134). Elevene bygger relasjoner ved å oppdage likheter og forskjeller mellom foreslåtte operasjoner og å reflektere over dem. *The issue is not which alternative is necessarily better for all situations. Rather, the focus should be on the identification of possible alternatives and the decision as to which one seems best suited in a particular context.* (Pimm, 1991 p. 277).
Denne metoden kan brukes for å løse alle oppgavene i introduksjonstimen. Introduksjon av algebra som er preget av teknikken problemløsning og de fire programmene CGI, CBI, STST og PCMP som er forklart i avsnitt 3 skaper en læringsarena der elevene blir stimulert til å være aktiv og ikke passiv i diskusjonen som foregår i klassen, slik at misoppfatninger blir lettere synliggjort. *Knowledge is not passively received but actively built up by the cognizing subject* (Von Glasersfeld, 1989 p. 162).

Introduksjon av algebra i denne oppgaven er influert av problemløsningsmetoden (Walter 1991). I problemløsningsmetoden er læreren avhengig av elevenes spørsmål for å finne riktige måter å hjelpe dem på. I introduksjon av algebra er læreren forutsatt og forbredt på elevenes typiske undringer. Deretter bestemmer elevenes foreslåtte svar og løsningsforeslag til oppgavene over videreutvikling av undervisningstimen. Selv om introduksjonen er lærerstyrt, føler elevene likevel at deres foreslåtte løsninger har fått gjennomslag i timen. Dette er viktig for at elevene skal føle seg komfortable nok til ytre sine ideer. *an environment, in which the child is respected, feels free to speak her or his mind, can succeed on her or his own terms, and has the same chance as anyone else to be creative and make a substantial contribution* (Sfard, 2003 s. 382).

### 4.2. 2 Diskusjon mellom elev og elev

Elevene argumenterer lettere med hverandre enn med læreren. De vet at læreren sitter med det riktige svaret, mens medelevene er i samme situasjon. Diskusjon mellom elev og elev stimulerer dem til å delta i diskusjonen for å argumentere eller motargumentere med sine medelever. Elevene kan lettere ta opp sine misoppfatninger når de jobber for eksempel i grupper på to. I en slik læringssituasjon kan misoppfatninger synliggjort gjennom elevenes diskusjon med hverandre. Lærerens vandring i klasserommet gir anledning til å plukke opp disse eventuelle misoppfatningene.

Diskusjon mellom elevene i undervisningen som en slags aktivitet, skaper en positiv stemning og engasjement hos elevene. Elevene blir oppmerksomme og effektive på aktivitetsregler som har forankring i et fag. *students were efficient they attended to information when it was needed in the flow of instruction.* (Stodolsky, 1988, s.2). Høy engasjement alene i klasseaktivitet fører ikke nødvendigvis til bedre læring, hvis elevenes kunnskap ikke blir anvendt i aktiviten. *the kinds of things we want children to learn in a given subject can constrain the ways in which it could be taught and learned.* (Stodolsky, 1988, s.3).

**Oppsummering:**

Diskusjon mellom lærer og elevene skjer i plenum, slik at alle får mulighet å delta i en ikke evaluerende diskusjon. Alle fire programmene CGI, CBI, STST og PCMP som danner ramme for introduksjonen (ble diskutert under avsnitt 3) blir integrert i problemløsningsteknikken som er tilpasset til introduksjonstimen for å fremme misoppfatninger og avklare dem.

Elevene går gjennom en prosses ut ifra diskusjonens aspekter. Det virker nesten unngåelig at misoppfatninger blir holdt skjult når elevene deltar i diskusjoner. I en lærestyrt klasse brukes diskusjon i introduksjon av algebra. Læreren oppfordrer elevene i klassediskusjonen til å delta og reflektere over sine og andre elevers ideer. Diskusjonsformene veksler stadig mellom lærer - elevene og elev – elev.  Læreren starter diskusjonen ved å stimulere klassen til å delta. Læreren styrer diskusjonen ved behov med sin deltagelse i diskusjonen og trekker til slutt konklusjonen som presenterer en algebraisk regel.

# 5. Forskningsmetode

Forskningsmetoden er en kombinasjon av kvantitative og kvalitative metoder. Oppgaven i likhet med Grounded Theory har innhentet, syntetisert, analysert og konseptualisert innsamlede data fra virkeligheten gjennom test og observasjon. Konklusjonen trekkes ut av empirisk data i seg selv (Charmaz, 2003; Glaser & Strauss, 1967; Strauss & Corbin, 1998)., Men til forskjell med Grounded Theory er teorien basert på tidligere empiri og teori, altså en hypotetisk deduktiv metode.

Test og observasjon er valgt som forskningsmetoder for å innhente empiriske datamaterialer. Elevene i klasse 7b er mine informanter. Deres kommentarer til oppgavene i introduksjonstimen, og deres besvarelser til testene både før introduksjon av algebra (FIA) og etter introduksjon av algebra (EIA), danner mine empiriske datamaterialer.

Intensjonen bak test FIA, er å kaste lys på de eventuelle misoppfatningene elevene har før introduksjonstimen. Som Airasian (1991) og Popham (1995) beskriver, begynner effektiv klasseromsundervisning ved å vurdere hver elevs nåværende viten og forståelse for å bygge på elevenes kunnskaper. Observasjon er valgt for å registrere elevens misoppfatninger som kan bli synliggjort i diskusjoner som foregår mellom lærer og elev eller elevene seg imellom.

## 5.1 Begrunnelse for valg av forskningsmetode

Før elevene går gjennom temaet algebra og lærer de algebraiske regnestrategiene har de intuitive prosedyrer til å løse algebraiske oppgaver. Hensikten med test FIA er å få kjennskap til de intuitive prosedyrene og tankene som ligger bak dem. Elevenes like besvarelser til oppgavene, indikerer på like tanker bak svaret, som innholder informasjon om de intuitive prosedyrene. Misoppfatninger er definert av at en elev anvender en ukorrekt strategi konsekvent i oppgaver av samme type. Testen FIA fremhever ukorrekte svar som ikke ble gjort konsekvent av samme elev, men samme feil ble gitt av flere elever. Det er noe fellestrekk mellom misoppfatninger og slike feil som mange elever gjør likt. Det ligger nemlig like tanker bak dem og man kan kalle slike feil for en type misoppfatning.

Verdien i identifikasjon av intuitive misoppfatninger, er å bruke dem i den preaktive fasen av introduksjonen for planlegging av undervisningstimen. Læreres kognitive beslutninger som er utdypet i avsnitt 4.3.1. er assistert av en nøye analyse av de uunngåelige misoppfatninger som elevene har og deres tanker bak dem. Elevenes forklaring på løsningsforslaget gir læreren svært nyttig informasjon for å planlegge måter i undervisningen i algebra, slik som ble forklart **i avsnitt 3.1** med de fire programmene CGI, CBI, STST og PCMP.

Denne testen kan også benyttes som en kontrolltest. Etter introduksjon av algebra blir samme test brukt. Målet med testen etter introduksjonen er å registrere misoppfatninger som er utviklet mot riktig svar eller er ryddet opp gjennom introduksjonstimen. Dette indikerer på at elevenes opprydding eller positive progresjon av misoppfatninger er influert av introduksjonstimen.

Observasjon er valgt som den kvalitative forskningsmetoden. Lærerens rolle, aritmetikk og diskusjon som verktøy for å tilrettelegge fremheving og opprydding av misoppfatninger, er i fokus i observasjonen. Algebra og algebraiske regler blir introdusert gjennom avklaring av elevenes misoppfatninger.

I forkant av introduksjon av algebra hadde jeg observert en matematikktime der en av kontaktlærerne underviste matematikk. Dette ble gjort for å avgjøre hvem om jeg eller kontakt læreren skulle introdusere algebra,. Hvis jeg skulle gjennomføre timen selv, risikerte jeg å miste anledningen til å observere introduksjonstimen og notere de viktige momentene ut ifra mitt ståsted som forsker. Coffey (1996) *forskeres notater blir farget av deres bevissthet, forståelse og tolkning, og forskerne blir dermed både aktører, referenter og forfattere* (Sellerber 2011 s. 148). Det var noen hindringer for at kontaktlæreren kunne introdusere algebra. Kontaktlæreren var ikke komfortabel med å undervise temaet algebra. Det kunne ha dukket opp spørsmål som ville ha satt henne i en situasjon som hun ikke ønsket. Den andre grunnen var at undervisningsmetoden hun brukte hadde mindre fokus på misoppfatninger. Dette kunne prege introduksjonstimen der algebra skulle bli introdusert gjennom fokus og avklaring av misoppfatninger. Jeg hadde lest mye litteratur og hadde sydd sammen introduksjonstimen basert på tidligere forskning og kunne ikke forvente at kontaktlæreren skulle bruke så mye forarbeid for denne timen. Dette var grunnen til at jeg valgte å gjennomføre introduksjonstimen selv. For både å kunne undervise og observere timen, valgte jeg å ta opp hele timen med videokamera. Elevenes kommentarer i timen innholder informasjon angående misoppfatninger, derfor det var veldig viktig å observere elevene under introduksjonstimen og registrerer alle kommentarene i diskusjonen. Opptak av timen gav mulighet til å observere introduksjonen flere ganger og å registrere absolutt alle viktige kommentarer.

Testen etter introduksjonstimen viser misoppfatningenes progresjon i elevenes besvarelser ved å sammenlikne svarene som er gitt før og etter introduksjonstimen. Riktige besvarelser EIA, indikerer på at misoppfatninger er ryddet opp og ulike besvarelser fra FIA og EIA indikerer på progresjon i misoppfatninger. I sammenligning mellom de to testene kan man oppdage de misoppfatninger som har overlevd etter timen.

## 5.2 Test som ble brukt før og etter introduksjonen

For å avdekke elevenes misoppfatninger knyttet til temaet algebra, ble en diagnostisk test benyttet både før og etter introduksjonstimen. *"diagnostiske oppgaver kan gjerne komme før en undervisningssekvens"* (Brekke, 2003 s. 28). Disse oppgavene som Brekke nevner, kan både identifisere, framheve misoppfatninger og gi læreren informasjon om løsningsstrategier elevene bruker for ulike typer av oppgaver. Ved å bruke samme test etter introduksjonstimen kan læreren vurdere om undervisningen har hjulpet elevene til å overvinne misoppfatningene eller ikke. Küchemann (1981) klassifiserte elevenes tolkninger av algebraiske bokstaver i to hovedgrupper:

1. Eleven ignorerer bokstaver, gir det en vilkårlig verdi, eller bruker den som navnet på et objekt.
2. Bokstaver brukes som spesifikk ukjent tall eller som generalisert nummer.

Hver av disse divisjonene er videre delt inn i to kategorier for å forklare den kognitive kompleksitet, og dermed gir det fire nivåer. Disse nivåene er henholdsvis:

1. Elementene på dette nivået er rent numeriske eller har en enkel struktur, for eksempel finn x når X=2+49.
2. Elementene på dette nivået har bokstaver som må bli vurdert eller brukes som et objekt, men elevene kan fortsatt ikke håndtere konsekvent med spesifikke ukjente, generaliserte tall eller variabler, for eksempel hvis u=v og v=1 da u=1. Küchemann antydet at de som svarer på dette nivået, gjør det på grunn av økt kjenneskap til algebraiske notasjoner.
3. På dette nivået kan elevene takle bruk av en variabel eller en spesifikk ukjent, for eksempel x =5y eller 2 + t =.
4. Dette nivået krever bruk av bokstaver som spesifikke ukjente og har også komplekse strukturer. For eks. Hvilket er størst g-3 eller 3g?

Küchemann antydet at disse fire nivåer tilsvarer Piagetian stadier. Langsgående testing i CSMS prosjektet viste at elevene med høyere score på en ikke-verbal IQ test demonstrerer høyere kognitive nivåer og gjør raskere fremdrift gjennom nivåene enn studenter med lavere IQ. Med en del unntak viser at dette ikke stemmer, *Nevertheless the fact that, in algebra, a* *few students with below-average IQ scores reached the third or fourth levels by age 15* (Hart, 1981, s.185). Sånn sett er det andre faktorer som kan forklare elevenes vekst på forståelse av algebra som er mindre knyttet til kognitive nivåer. For eksempel avsløring av misoppfatninger og oppryddig av dem er blant faktorene som er mindre knyttet til elevenes kognitive nivåer, men kan ha idrekte påvirkning på elevenes algebra forståelse. Noen av oppgavene til Küchemanns test (Hart, 1989 s. 102, 106 og 107) ble valgt som test i denne sammenheng. Oppgavene er følgene.

**Oppgave 1**

**a) Hvis a + b = 43 så blir a + b + 2 =**
**b) Hvis e + f = 8 så blir e + f + g =**

Oppgave 1a er litt mer kompleks enn nivå 1 og oppgave 1b ligger mellom nivåene 2 og 3 av Küchemanns kognitive nivå fordeling.

**Oppgave 2**

**a) legg sammen 6n og 3n svar. ----------------**

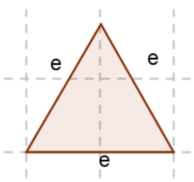
**b) legg sammen 2 og n + 5 svar: ----------------**

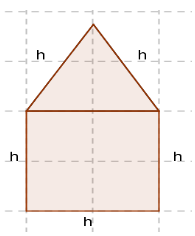
**c) legg sammen 4 og 3n svar: -----------------**

Disse oppgavene er mer komplekse og ligger mellom nivåene 1 og 2. Den laveste nivået 1. er rent numerisk svar eller har en enkel struktur, for eksempel finn x når X=2+49. Det er en klassisk misoppfatning å svare på oppgavene 2b og 2c som 7 eller 7n.

**Oppgave 3**

**Skriv omkretsen for hver av disse figurene:**




**O = ------------------------** **O = -------------------------------**

De to oppgavene ligger på nivå nr.2.

### 5.2.1 Metoden for analyse av testresultatene

Küchemanns (1981) anvendte kategoriseringsmetode av testresultantene. Ifølge Grounded teori, danner dimensjoner og egenskaper en ramme for en kategori. *Kategorisering er en forenkling av kompliserte, detaljerte og rike data* (Jacobsen, 2005 s. 193). Selv om deler av Küchemann (1981) test ble benyttet som test i denne oppgaven, men kategorisering skjer ikke etter kognitive nivåer. Resultatene blir kategorisert etter elevenes ulike misoppfatninger enten de er av kognitiv art eller ikke.

Analyse av testresultatene både FIA og EIA, foregår gjennom en kodingsprosess. Betegnelsene åpen, aksial og selektiv koding er brukt av Strauss og Corbin (1998). *Åpen koding hvor hovedformålet er å identifisere begreper som igjen kan inngå i kategorier* (Dalen, 2004 s. 70). Aksial koding egner seg til koding av enkelte hendelser. *Selektiv koding … samle alle trådene i en overordnet forståelse av det som fremstår som det mest sentrale i forhold til det fenomenet som studeres* (Dale, 2004 s. 73). Kodingsprosess til Strauss og Corbin (1998) preger koding av datamaterialer i denne oppgaven.

*Vi vil ha muligheten til å splitte opp datasettet og se nærmere på undergrupper* (Sellerber 2011 s. 189). Først blir datamaterialer kategorisert i forhold til oppgavene 1b, 2b, 2c og 3a og 3b. Hver oppgave danner en kategori. Hver kategori har en underkategori. Besvarelsene både FIA og EIA til hver oppgave danner underkategoriene. Hver oppgave vises i et stolpediagram hvor hver stolpe viser antall elever som kommer i denne underkategorien. For eksempel, diagrammet til oppgave 1b innholder 8 stolper altså 8 underkategorier. Elevene hadde 5 forskjellige besvarelser (9, 12, 10, 15 og ikke svart) FIA, men 8 forskjellige besvarelser (9, 12, 10, 15, 8+g, 8g og e+f+g) EIA i samme oppgave, hvor 5 av besvarelsene EIA, var like som besvarelsene FIA pluss 3 nye besvarelser (8+g, 8g og e+f+g). For at diagrammet til oppgave 1b skal innholde alle underkategoriene fra både FIA og EIA, har diagrammet 8 stolper.

Diagrammene viser ikke om elevene gjentok sine misoppfatninger eller om de hadde progresjon i sin besvarelse. For eksempel 12 elever svarte ikke på oppgaven 1b, FIA, og 4 elever svarte ikke EIA. Er alle de 4 som ikke svarte på oppgaven EIA blant de 12 elevene som ikke hadde svart på oppgaven FIA? For å imøtekomme slike undringer, er en tabell laget for å opplyse dette. Sammenlikning mellom besvarelsene FIA og EIA belyser utvikling av besvarelsene. Denne utviklingen kodes for å kunne trekke konklusjoner. *Etter at forskeren har funnet frem til flere kjernekategorier og analysert forbindelsene mellom de ulike kategoriene, er målet å samle alle trådene i en overordnet forståelse av det som fremstår som det mest sentrale i forhold til det fenomenet som studeres* (Dale, 2004 s. 73).

Elevenes forklaringer om tankene bak besvarelsene kommer etter hvert diagram. Elevene forklarte selv sine tanker som står bak besvarelsen. Geertz (1973, s. 14) kaller forskerens fortolkninger for aktørorienterte fortolkninger, noe så nær opp til deltagernes begreper og forståelse som mulig. Jeg brukte elevenes egen forklaring om tankene deres bak misoppfatninger for å nå den riktige fortolkningen.
Fem elever tok ikke testen FIA og en elev tok ikke testen EIA. Test resultatene til de seks elevene ble ikke diskutert, men er vist i resultat tabellen. Oppgavene som ble diskutert i timen hadde lite oppbygningslikhet med testoppgavene for å unngå at elevene kopierer besvarelsene fra introduksjonstimen.

# 5. 3. Observasjon

*Observasjon som metode, krever det en skjerping av sansene, ikke bare synssansen, vi observerer gjennom alle våre sanser*(Dalland, 2003 s. 160). Observasjon som den kvalitative metoden ble valgt for registrering av elevenes kommentarer under introduksjonen. Elevenes kommentarer, spørsmål og forklaringer inneholder viktig informasjon om misoppfatninger. Av den grunn ble introduksjonstimen filmet for grundig observasjon.

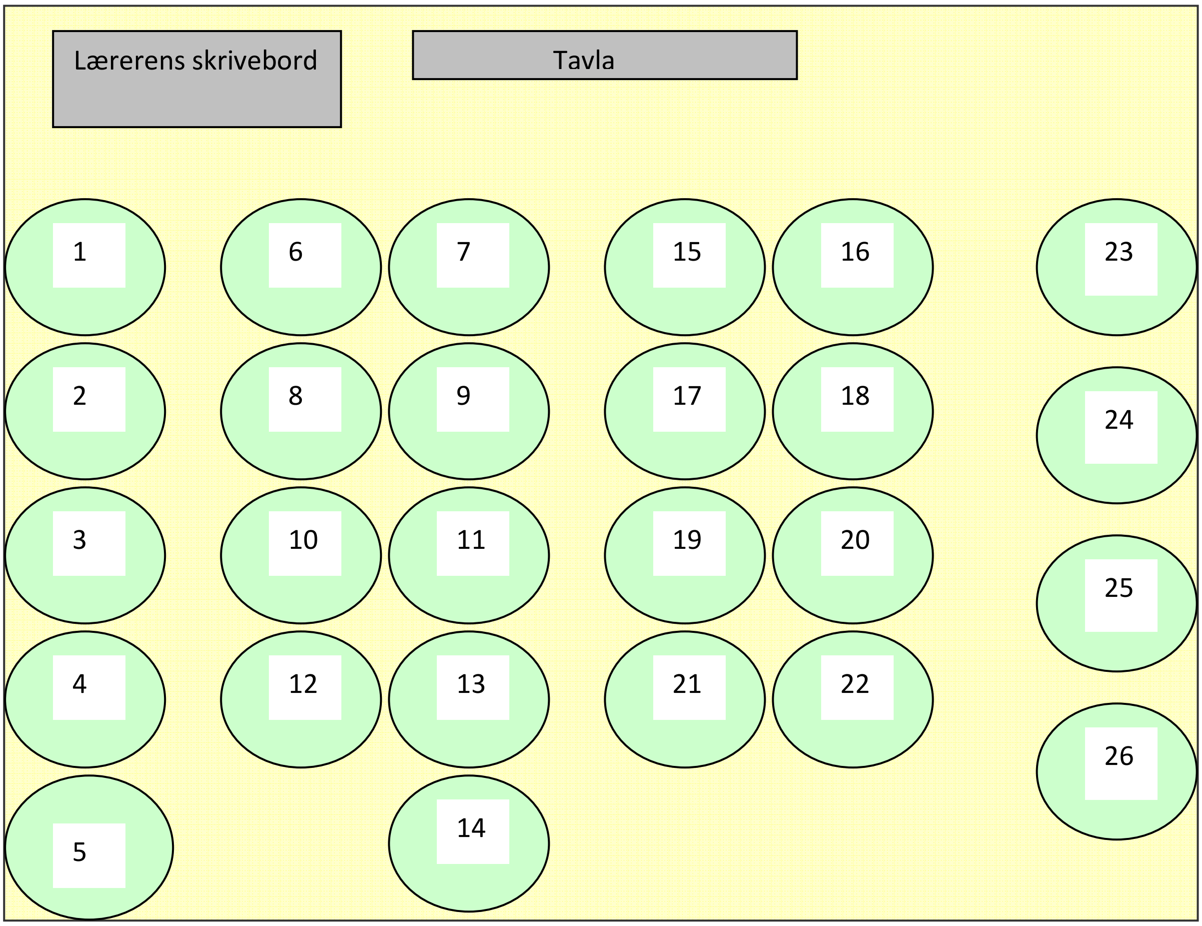
## 5.3.1 Beskrivelse av elevgruppen og introduksjonstimen

Introduksjonen tar to skoletimer (90 min) og er fokusert på å engasjere og involvere elevene mest mulig i diskusjon med læreren om temaet algebra. Misoppfatninger har alltid noen riktige ideer som blir generalisert og brukt til nye sammenheng som ikke passer. Læreren roser bevisst elevene som deler sine misoppfatninger med klassen for de riktige deler av deres tanker. Dette gjøres for å engasjere og motivere flere til å dele sine misoppfatninger med klassen.

Elevene, er en 7 klasse i aldersgruppen 11 til 12 år. Det er 27 elever i denne klassen med ganske lik fordeling når det gjelder antall gutter og jenter. En av elevene kan lite norsk og en elev har spesial undervisning. 22 elever tok testen FIA og 26 elever tok testen EIA. Det er en regulær klasse med variasjon i elevenes kunnskap i aritmetikk med lav, middels og god nivå. Det er et tradisjonelt klasserom med tavle og kritt som undervisningsmidler. Noen elever sitter to og to mens andre elever sitter alene. Tegning 1 på neste side viser mønsteret etter elevenes plassering i klasserommet. Elevene har faste plasser. Denne klassen har to klassestyrere som var tilstedet gjennom hele introduksjonen. En av klassestyrerne er også faglærer i matematikk og naturfag. Før introduksjon av algebra hadde elevene et pre- algebra kurs. I det kurset gikk elevene gjennom eller repeterte de aritmetiske regnereglene som introduksjon av algebra skulle bli bygget på.

26 elever var gjennom introduksjonstimen. De fleste deltok i diskusjonen, av den grunn får hver elev et nummer. Slik kan det vises i hvor stor grad hver enkelt elev deltok i diskusjonene. Plassering av pultene i klasserommet er illustrert på tegning 1. på neste side. Elevnummer og tilhørende pult stemmer ikke med virkeligheten for å holde elevene anonyme så godt som mulig.

**Tegning 1: viser elevenes plassering i klasserommet.**



### 5.3.2 Metoden for analyse av observasjonen

*Analyse kan også kalles forenkling. Siktemålet med analyse er å framstille de underliggende dataene på en måte som gir et helhetsbilde eller en oversikt over det fenomenet vi ønsker å studere* (Sellerber 2011 s. 83). Analysen sekvenserer hele observasjonen i flere økter i forhold til hver oppgave læreren tok opp for å avsløre misoppfatninger. Powell, Francisco & Maher, (2003) presenterer syv analytiske prosedyrer for bruk av observasjoner baser på videoopptak.

1. Det å ha en følelse av innholdet som helhet.
2. Hver sesjon eller økt ble fordelt i segmenter.
3. Hver utgave og segment beskrevet så detaljert som mulig.
4. Problemene blir gransket, kritiske spørsmål blir stilt på grunnlag av deres betydning for problemstillingene.
5. Transkribere hele segmenter som tilsvarer de kritiske spørsmålene.
6. Fortellinger som beskriver betydningen, eller innsikt av problemer.
7. Strukturell analyse på tvers av prosedyrene

Disse syv punktene danner rammer for analysen av videoopptaket siden det ble brukt for observasjonsmaterialer fra introduksjonstimen. Selv om *videoopptak gir en korrekt gjengivelse av hva som skjer i løpet av spesiell hendelse* (Jacobsen, 2005 s.163), men bruk av videoopptak har sine utfordringer. Opptaket er en gjengivelse av virkeligheten. En representasjon er ikke virkeligheten selv (Stensæth, 2008). Det som vises i opptaket er avhengig av opptakets fokus og det er ikke hele sannheten. Man tar opptak av det man legger merke til eller legger vekt på. Videoopptak begrenser transkribering av diskusjoner som foregår i klasserommet, fordi det ikke er lett å høre eller se alle uttrykkene. Opptaket fokuserer på noen og andre blir oversett. Elevene kan oppføre seg annerledes når de blir filmet.

I analyse av observasjonsmateriale blir Toulmins modellen benyttet for mine argumentasjoner. Den britiske filosofen Stephen Toulmin merker at gode, realistiske argumenter vil bestå av seks deler

1. Data, fakta eller bevis som brukes til å bevise argumentet
2. Påstand, uttalelsen blir hevdet
3. Warrants, eller begrunnelse. Begrunnelse er broen mellom krav og dataene.
4. Kvalifiseringer, Utsagn som begrenser styrken i argumentet eller uttalelser som foreslår de forholdene som argumentet er sant.
5. Rebuttals, uttalelser som indikerer omstendigheter når det generelle argumentet ikke holder stand.

6. Bakside, argumenter som ikke nødvendigvis beviser det viktigste.

I denne sammenhengen blir det lagt vekt på hvordan teorien med forankring i litteratur kan argumenteres ut ifra observasjonsøktene. Hendelsene i disse observasjonsøktene danner grunnlag for mine argumentasjoner. Jeg vil argumentere for hvordan lærerens rolle, klassediskusjon og aritmetikk legger til rette for avsløring og opprydding av misoppfatninger i introduksjon av algebra.

Transkribering av diskusjoner kunne ikke gjennomføres med nøyaktighet, siden elevene ble filmet bakfra i en del av øktene, Dette skapte utfordringen å sette nøyaktige transkriberingstegn for elevenes kommentarer, men elevenes kommentarer ble ganske nøye nedskrevet.

Jeg velger å diskutere hver observasjonsøkt rett etter transkribering av den økten, slik at det blir lettere å se sammenhengen mellom litteraturen, teori og argumentasjoner i hver observasjonsøkt.

# 6. Resultater

## 6.1. Resultat til testen

Resultatene fra testene er ordnet i tabeller. Tabell 1 viser alle besvarelsene både før og etter introduksjonen. Og tabell to viser antall riktige besvarelser FIA og EIA.

**Koder med farger**

| |
|---|
| Hadde riktig svar EIA |
| Hadde ikke riktig svar EIA |
| Alle svar, både riktig og ikke riktig, FIA |
| Var ikke tilstedet |

**Tabell 1. viser resultatene til begge testene til hver enkelt elev.**

| Elev nr. | Oppg. 1a | Oppg. 1b | Oppg. 2a | Oppg. 2b | Oppg. 2c | Oppg. 3a | Oppg. 3b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 45 | 0 | 9 og 2n | 7 og 1n | 7 og 1n | 3e eller 9cm | 5h 16 cm |
| 1 | 45 | 9 | 9n | n+7 | 4+3n | 3e/9cm | 5h/ 11cm |
| 2 | 45 | 12 | 0 | 0 | 0 | 9 cm | 16 cm |
| 2 | 45 | 8 + g | 9n | n + 7 | 3n + 4 | 3e | 5h |
| 3 | 45 | 0 | 9n | 2+n+5=10 | 4+3n =7n | 9 cm | 15 cm |
| 3 | 45 | 8+g | 9n | 7 + n | 4 + 3n | 3e | 5h |
| 4 | 45 | 0 | 0 | 0 | 0 | 9cm | 15cm |
| 4 | 45 | 8+g | 9n | n+7 | 4+3n =7n | 3e/9cm | 5h/11cm |
| 5 | 45 | 0 | 9n^2 | 7n | 7n | 9cm | 15.8cm |
| 5 | 45 | g+8 | 9n | n+7 | 3n + 4 | 3e | 5h |
| 6 | 45 | 0 | 9nn | 7n | 7n | 15e | 30h |
| 6 | 45 | 12 | 9n | 2n+5 | 3n+4 | 9e cm | 11h cm |
| 7 | 45 | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | 16 |
| 7 | 45 | 8g | 9n | 7n | 7n | 3e eller 9e | 5h |
| 8 | 45 | 0 | 9n | 7n | 7n | 9 | 16 |
| 8 | 2a+b | 0 | 9n | n+7 | 7n | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 9 | 7 | 7 | 9 | 16 |
| 9 | 45 | 0 | 9n | 2 og 5n | 4 og 3n | 10 | 11 |
| 10 | 45 | 0 | 0 | 0 | 0 | 9cm | 11cm |
| 10 | 45 | 8g | 9n | 7n | 7n | 10 cm | 11 cm |
| 11 | 45 | 10 | 9n | 7n | 7n | 9cm | 16cm |
| 11 | 45 | 10 | 9n | 7n | 7n | 10cm | 11cm |
| 12 | 45 | 15 | 9n | 7n | 7n | 9cm | 16 eller 9 cm |
| 12 | 45 | 15 | 9n | 5+2n | 3n+4 | 0 | 0 |
| 13 | 45 | 9 | 0 | 0 | 0 | 9 | 15,4 |
| 13 | 45 | 9 | 9n | 7n | 7n | 0 | 0 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 9cm | 11cm |
| 14 | 0 | 0 | 9n | 7n | 7n | 11,2 | 15 |
| 15 | 45 | 9 | 9n | 7n | 7n | 9cm | 16cm |
| 15 | 45 | 0 | 9 og 2n | 7n | 7 og n | 3e/2 | 5h/2 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 45 | 10 | 9n | 7n | 7n | 9cm | 16cm |
| 16 | 45 | 9 | 9n | n+5 | 3n+4 | e10 | h11 |
| 17 | 45 | 12 | 9n | 7n | 7n | 9cm | 16 |
| 17 | 45 | 12 | 9n | 7+n | 4+3n | 12 | 20 |
| 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 9cm | 0 |
| 18 | a+b+2 | e+f+g | 9n | n+7 | 3n+4 | 10cm | 11cm |
| 19 | 45 | 9 | 9n | 6n | 7n | 9cm | 20cm |
| 19 | 45 | 8g | 9n | 2n+5 | 7n | 3e | 5h |
| 20 | | | | | | | |
| 20 | 45 | 15 | 9n | n+7 | 43n | 9cm | 16cm |
| 21 | | | | | | | |
| 21 | 45 | 0 | 9n | n+7 | 3n+4 | 10,4 | 12,5 |
| 22 | | | | | | | |
| 22 | 45 | 12 | 9n | 7n | 7n | 10e | 11h |
| 23 | | | | | | | |
| 23 | 43+2 | 8+g | 9n | 7+n | 7n | 3e | 5h |
| 24 | | | | | | | |
| 24 | 45 | 0 | 9n | 5n+2 | 3n+4 | 0 | 0 |
| 25 | 45 | 15 | 9n | 7n | 7n | 9cm | 16,5cm |
| 25 | | | | | | | |
| 26 | 45 | 0 | 9 | 0 | 0 | 9 | 16 |
| 26 | 45 | 8 + g | 9n | 7 + n | 3n + 4 | 3e | 5h |
| 27 | 45 | 12 | 9n | 7n | 7n | 9cm /3e | 16cm/5h |
| 27 | 45 | 12 | 9n | 5n + 2 | 3n + 4 | 3e | 5h |

Resultatene til testen før introduksjon av algebra har hvit celle, men resultatene til testen etter introduksjon av algebra har blå og gul farge. Blå farge indikerer riktig svar og gull farge indikerer feil svar. De cellene som har oransje farge indikerer på fravær i den første eller andre testen.

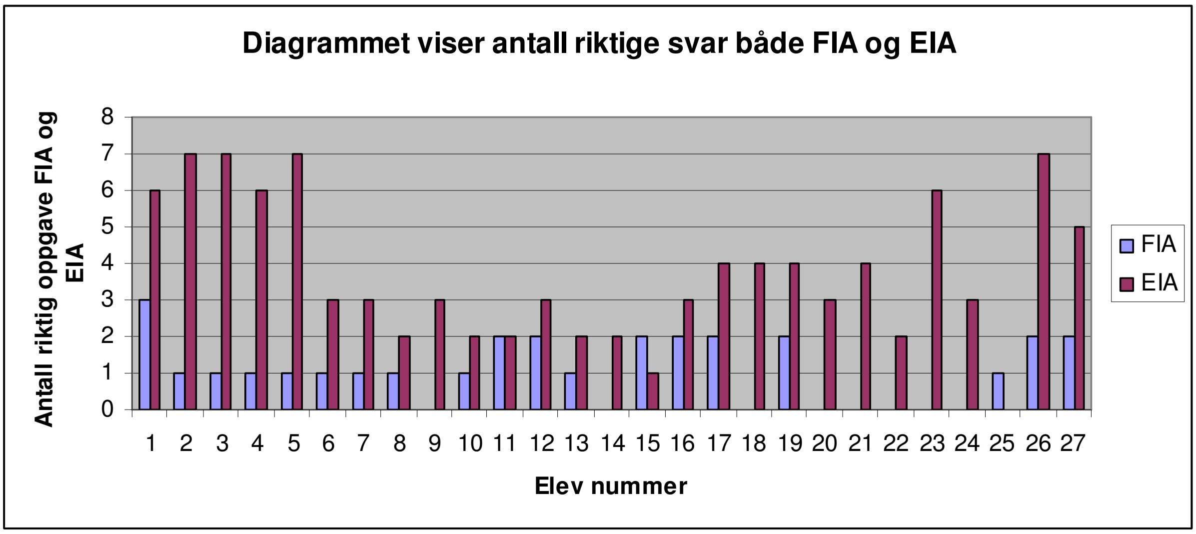
**Tabell 2. viser alle riktig besvarelser både FIA og EIA til hver enkelt elev**

| Elev | Antall riktig FIA | Antall riktig EIA |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 6 |
| 2 | 1 | 7 |
| 3 | 1 | 7 |
| 4 | 1 | 6 |
| 5 | 1 | 7 |
| 6 | 1 | 3 |
| 7 | 1 | 3 |
| 8 | 1 | 2 |
| 9 | 0 | 3 |
| 10 | 1 | 2 |
| 11 | 2 | 2 |
| 12 | 2 | 3 |
| 13 | 1 | 2 |
| 14 | 0 | 2 |
| 15 | 2 | 1 |
| 16 | 2 | 3 |
| 17 | 2 | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| 18 | 0 | 4 |
| 19 | 2 | 4 |
| 20 | 0 | 3 |
| 21 | 0 | 4 |
| 22 | 0 | 2 |
| 23 | 0 | 6 |
| 24 | 0 | 3 |
| 25 | 1 | 0 |
| 26 | 2 | 7 |
| 27 | 2 | 5 |
| Sum | 29 | 101 |

Neste diagram viser alle riktige besvarelser til alle 27 elever både FIA og EIA. I dette diagrammet ble resultatene til de elevene som ikke tok testen FIA (stolper 20-24) og den ene eleven som ikke tok tesen EIA (stolpe 25) tatt med.

**Diagram 1: viser alle riktige besvarelser FIA og EIA**



## 6.2 Resultat og oversikt over avslørte misoppfatninger i observasjonen

Tabellen på neste side viser oppgavene i den rekkefølgen som ble anvendt i timen for å fremheve og avklare misoppfatninger. I første kolonne står nummeret til oppgavene i den rekkefølgen læreren tok de opp i introduksjonstimen. I andre kolonnen står selve oppgaven. I tredje kolonne står elevenes besvarelser som indikerte på misoppfatninger.

**Tabell 3.** viser misoppfatninger, elevenes svar forslager og riktig svar

| Oppgave nr. | Oppgave som ble diskutert | Elevenes kommentarer svarforslag med indikasjon på misoppfatninger |
|---|---|---|
| 1 | 2 + 5 + 2 +2 + 5 = 16<br>Kan regnestykket skrives sånn?<br>3*2 + 2*5 = 16 | Alle elevene var enige |
| 2 | a + 5 + a + a + 5 = 16 | Skjuler (a) alltid tallet 2? |
| | a + 5 + a + a + 5 = | Vi vet ikke hvilket tall bokstaven (a) skjuler, da kan ikke vi regne ut regnestykket.<br><br>Det står ikke noe på andre siden av likhetstegnet, hvordan finner vi ut hvilket tall bokstaven (a) skjuler? |
| 3 | b + a + b + b + a = | Ingen misoppfatning |
| 4 | 5 + b + 6 = | 18 fordi 5 og 6 følger etter hverandre og b er neste tall 7<br>Da må tallet 18 på andre siden. |
| 5 | -5 + b + 6= | Svaret blir b1, b11og b +1 |
| 6 | 5-b-6= | Svaret blir b+-1 og b-1 |

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 3b +b = | Svaret blir 2b +3 |

Elevenes svarforslag til hver enkelt oppgave ble skrevet på tavla for å bli diskutert. Svarforslagene avslørte elevenes misoppfatninger.

# 7. Analyse og diskusjon

## 7.1 Analyse av hver observasjonsøkt med tilhørende diskusjonsavsnitt

Observasjon av introduksjonstimen er delt i 7 økter, i forhold til oppgaver som avslørte misoppfatninger, og de ble ramset opp under tabell nr.3. Elevnummer blir brukt for å skjelne mellom de elevene som hadde kommentarer i diskusjonen. Elevene får en liten stund for å diskutere om oppgavene sammen, mens læreren går rundt. Dette skjer i alle økt. Transkripsjonstegnene er vedlagt på side 59.

**Transkripsjon av økt 1**

Introduksjonen startet med denne oppgaven 2 + 5 + 2 + 2 + 5= 16. Elevene hadde jobbet godt med slike oppgaver i pre- algebra kurset før introduksjon av algebra.

**Lærer:** Er noen av dere uenig med at tallet 16 står på høyresiden av likhetstegnet?

De fleste av elevene gir signal til at de er enige, ved å løfte på hodet, mumler nei eller sier nei.

**Lærer:** hvor mange treere og femmere står på venstre siden av likhetstegnet?

Spørsmålet er så enkelt at nesten alle ønsker å svare på det.

**Elevene nr 8:** 3 toere og 2 femmere.

**Lærer:** Bra, riktig

**Elevene nr 1:** Fordi 3 ganger 2 er lik 6 og.. 2 ganger 5 er lik 10.. så summen er 16.

**Lærer:** Veldig bra!

**Diskusjonsøkt 1**

Introduksjonen starter med et aritmetisk regnestykke som anvendtes som en knagg der algebra kunnskapen skal festes til elevenes kunnskapsnettverk i denne økten, slik Hiebert og Carpenter har definert forståelse av nye relasjoner (Grouws, 1992). Booth (1989) argumenterer at vår evne til å manipulere algebraiske symboler krever at vi må først forstå de strukturelle egenskaper og relasjoner innen aritmetikken.

Enkelhet av spørsmålet om " er noen uenig med at det står tallet 16 på andre siden av likhetstegnet?" stimulerer elevene til deltagelse i klassediskusjonen. Lærerens positive tilbakemeling i form av ros er for å øke elevenes interesse i klassediskusjonen.

**Transkripsjon av økt 2**

Dette regnestykke 2 + 5 + 2 + 2 + 5= 16 står fortsatt på tavla

**Lærer:** nå skjuler jeg toere bak en bokstav, for eksempel (a),

Læreren henter tre store lapper som bokstaven (a) er skrevet på og teiper dem på tallet 2, da forandres regnestykket til a + 5 + a + a + 5 = 16.

**Lærer:** Selv om regnestykket ser slik ut, må bokstaven (a) skjule tallet 2, for at venstre siden og høyreside av likhetstegnet skal presentere samme verdi. Ellers kan vi ikke bruke = tegnet.

**Elev 18:** skjuler bokstaven (a) alltid tallet 2?

**Lærer:** Nei,

Læreren tok lappene med bokstaven (a) av og satt to av dem på tallet 5, da forandret ligningen seg til 2 + a + 2 + 2 + a = 16.

**Lærer:** Hvilket tall skjuler bokstaven (a) nå da?

**Lærer:** Hvis jeg skriver dette regnestykket a + 5 + a + a + 5 =, hva står da under bokstaven (a)?

**Elev 12:** Vi vet ikke hvilket tall bokstaven (a) skjuler.. vi kan ikke regne ut regnestykket!

**En elev (kamera viser ikke hvilken elev det er):** Det står ikke noe på andre side av er lik, h-vordan finner vi hva (a) skjuler?

**Elev 20:** Hvis det ikke står noe tall på høyre siden av er lik--- så kan (a) skjule hvilket som helst tall?

**Lærer:** Det er helt korrekt så lenge- det ikke står noen tall på høyresiden av likhetstegnet, bokstaven kan skjule hvilket som helst tall.

**Lærere:** Hvis det står…(1,2) tallet 16 på høyresiden av er lik tegne--hva skjuler (a), nå da.

**Elev nr 21:** (a) skjuler 6!

**Diskusjon økt 2**

I denne økten ble en misoppfatning synliggjort, nemlig det at bokstaven (a) alltid skjuler tallet 2. For å rydde opp denne misoppfatningen valgte læreren å presentere bokstavenes rolle som både et spesifikk ukjent tall (2 + a + 2 + 2 + a = 16) og et generalisert ukjent tall (a + 5 + a + a + 5 =). Forståelse av et spesifikt ukjent tall er knyttet til forståelse av likhetstegnets betydning i et regnestykke. Forståelse av likhetstegnet er avgjørende for algebraisk forståelse (Freiman & Lee, 2004). Det er grunnen til at læreren stadig trekker frem likhetstegnets betydning i diskusjonen.

Når læreren trekker frem forståelsen av bokstaven som et ukjent generalisert tall i diskusjonen, kommenterte flere elever regnestykket. Elev nr. 20's resonnement bidro til å rydde opp misoppfatningen at (a) alltid skjuler tallet 2. Kunnskap er ikke passivt mottatt, men aktivt bygget opp av å erkjenne emnet sier Glasersfeld (1989). Denne økten var et godt eksempel på bruk av programmet *Supporting Teten-Structured Thinking (STST)*, (Fennema & A. Romberg, 1999 p.53). Elevene konstruerte selv prosedyren gjennom diskusjon med hverandre.

**Transkripsjon av økt 3**

I det tidspunktet vil læreren lede elevenes diskusjon mot forståelse av bokstavene som generaliserte tall. Læreren skrev dette regnestykket på tavla 3 + 3 + 3 + 3=.

**Lærer:** Hvis 3*4 står på høyre side av er lik tegnet, stemmer dette med 3 + 3 + 3 + 3 på venstresiden av likhetstegnet?

**Elevene:** Hmm.

Læreren skriver igjen denne oppgaven a + 5 + a + a + 5 =, på tavla,

**Lærer:** Hva må stå- på høyre siden av likhetstegnet?

**Lærer:** Hvor mange femmere er på venstre siden av likhetstegnet? Kan vi skrive to femmere som 2*5?

**Elevene:** nikker.

**En av elevene (kamera viste ikke eleven):** Kan vi skrive 3 (a)-er som 3*a?

Læren spurte etter klassens mening. Det var ingen indikasjon på at noen ønsket å svare på spørsmålet, men elevene virket nysgjerrige.

**Lærer:** Hvordan kan vi skriv a + a + a =?

**Elev nr. 11:** På andre siden av er lik tegnet må det være 2*5 og 3*a, hvordan skriver vi det [(H)]?

**Lærer:** hva er svaret på 2*5? Og hva er svaret på 3*a?

**Elev nr. 15:** 2*5 er 10, hva med 2*a?

**Lærer:** vet du hvilket tall som står bak bokstaven (a)?

**Elev nr. 15:** Nei!

**Elev nr. 15:** så, det må være 2*a. Det stemmer det blir 2*a +10

**Lærer;** Det er viktig å huske at 2*a kan skrives som 2a, men 2*4 ikke kan skrives som 24, da forveksler vi den med tallet tjue fire.

Læreren konkluderte denne økten med at ukjente tall kan ikke legges sammen med kjente tall.

**Diskusjon økt 3**

Læreren starter igjen denne økten med en aritmetisk oppgave og konkluderer med en algebraisk regneregel. Ved å bygge algebraisk kunnskap på aritmetikken, reduserer læreren det kognitive gapet mellom aritmetikken og algebra som ble presentert av Linchevwski & Herscovics (1994). Oppgaven 3 + 3 + 3 + 3= 3*4 = 12 er grunnlaget for at elevene forstår hvorfor a + a + a = 3*a. Hvis elevene er enig med sistnevnte oppgave, da blir det lettere å forklare hvorfor a + 5 + a + a + 5 = 3a + 10.

Ved å nevne at 2*a kan skrives som 2a, men 2*4 kan ikke skrives som 24, setter læreren i perspektiv bruk av notasjoner i algebra. Linchevwski & Herscovics (1994) mener at elever har mange vanskeligheter med algebra, som ofte er knyttet til bruk notasjoner. Macgregor og Stacey (1997) konkluderer i sine studier at elevenes feiltolkninger av notasjoner, fører til vanskeligheter i å løse algebraiske oppgaver som ikke er knyttet til kognitive nivåer. Misoppfatningene kan reduseres ved elevenes bevisstgjøring i bruk av notasjoner.

**Diskusjon økt 4**

Vi gjennomgår ikke økt 4. fordi elevene ikke ga tegn til noen misoppfatninger til hvorfor 3*a + 2*b må stå på høyre siden av likhetstegnet til denne oppgaven a + b +a + a + b =.

**Transkripsjon av økt 5**

Siden elevene ikke hadde misoppfatninger når de skulle operere med bare bokstaver, utfordret læreren dem med et regnestykke med både ukjente og kjente verdier. En vekt ble tegnet på tavla. På den ene skålvekten sto denne oppgaven 5 + b + 6.

**Lærer:** Hva må stå på andre skålvekten, for at vekten skal stå i likevekt?

8 elever rekker opp hånden og elev nr. 13 mumler noe. Læreren viser interesser for besvarelsen til elev nr. 13.

**Lærer:** Kan du gjenta svaret, litt høyt.

**Elev nr. 13:** 5..6..7.

**Lærer:** Hvorfor 7?

**Elev nr. 13:** fordi, 7… er som 5 og 6.

**Lærer:** Hvordan 7 er som 5 og 6.

**Elev nr. 13:** 6 kommer, etter 5, så kommer 7 etter 6

**Elev nr. 21:** Hvis (b) skjuler 7, så må det stå 18 på den andre skålvekten!

**Lære:**18 står ikke på den andre skålvekten.

**Elev nr. 27:** Faktisk, (b) kan være hvilke som helst tall, for eksempel hvis (b) skjuler, tallet 3 så svaret på andre siden.. er 14.

**Elev nr. 13;** 5 og 6..blir 11, hva med (b)?

**Lærer;** Bra! Vi kan legge sammen, 5 og 6, og det blir 11

**Elev nr. 8:** Vi vet ikke, hva (b) skjuler, så vi bare skrive (b) i andre skålen.

**Lære:** Veldig bra! (b) er et ukjent tall.. det blir et ukjent tall.. (b) pluss et kjent tall11.

**Diskusjon økt 5**

Denne økten lyste opp den misoppfatningen om at denne eleven fortsatt ikke aksepterer en bokstav som et ukjent tall og prøver å erstatte bokstaven med et numerisk tall. I denne økten velger læreren bevisst denne ene besvarelsen som indikerte på en misoppfatning. Via diskusjon med den enkelte eleven, som hadde misoppfatningen, sammen med de andre elevene i klassen, forsøkte læreren å avklare misoppfatningen. Voigt, Seeger og Waschescio (1998) forklarer denne formen for matematisk diskusjon som en debatt, orkestrert og organisert av læreren i hele klasserommet på et felles matematisk objekt.

De tre elevene som deltok aktivt i diskusjonen og motargumenterte mot hvorfor tallet 7 ikke skjules av bokstaven (b). I tillegg til de tre elevene fulgte klassen ivrig med i diskusjonen. Elevene prøvde å artikulere sine motargumentasjoner i denne økten. Sfard og Kieran (2001) mener at ettersom disse artikulasjoner fokuserer på begrunnelsen som ligger bak løsningens prosedyrer, øker deltakelse i slike diskusjoner,

**Transkripsjon av økt nr. 6**

I denne økten ble elevene utfordret til å finne uttrykket som må stå på andre siden av likhetstegnet når den ene siden er et uttrykk med ett negativt, positivt kjent tall og et positivt ukjent tall.

**Lærer:** hva må stå på høyre side av likhetstegnet til dette regnestykket -5 + b + 6=? Husk, i besvarelsen kommer bokstaven først og tallet deretter! Det er ikke feil hvis tallet skrives først, men over hele verden er det avtalt at bokstaven kommer først i besvarelsen.

Elevene får tid til å diskutere med sin sidemann, så rekker elevene 5, 8, 12, 14, 15, 18, 20 og 27 opp hånden for å svare.

**Lærer:** Jeg noterer forslagene på tavla.

**Elev 8.** b1

**Elev 20:** b +1

**Elev 18:** b1 1

**Lærer:** Hvem støtter forslaget b1?

Elevene 14, 15 og 8 rekker opp hånden (Vi ser bare 2/3 av klassen i opptaket).

**Elev 8:** ee når du har b1—så ser du at du har en b, og ikke noe mer, andre har ikke b så det er bare 1!

**Lærer:** Hvem støtter forslaget b1 1?

Elev 18 rekker opp hånden.

**Elev 18:** Det er en b, det er som en b, uten den har jeg en til overs.

**Lærer:** Hvem støtter forslaget b+1?

Elevene 21, 27, 20 og 5 rekker opp hånden.

**Elev 27:** ‹F ord F› fordi at det er en b! og skriver ikke noe tall! Og er det en pluss av den andre.

**Elev 20:** ‹P ord P› Når du har b1, så ser du at du har en b, så har du det andre tallet i tillegg som ikke er en bokstav da!

**Elev 5:** ‹L orde L› Jeg tenker, det blir 1b også blir 1.

**Lærer:** utfallet av -5 og 6 er jo 1.. og b er det eneste ukjente tallet! Svaret må inneholde både utfallet av de kjente tallene og det ukjente, fordi det er umulig å legge dem sammen, så lenge vi ikke vet hvilket tall bokstaven (b) skjuler. Tankene bak alle tre forslagene er riktige! Vi må bare finne den akseptable måten å skrive svaret på. Som dere sier, vi ser at det er en (b), så vi kan la være å skrive b1og skriver bare b. Utfallet av 6 og -5 er ett positivt tall og det skriver vi +1.

**Diskusjon økt 6**

Økt 6 er høydepunktet i introduksjonstimen. Alle de fire programmene, diskusjon og lærerens rolle i fremheving av misoppfatninger ble synliggjort i denne økten. Læreren samlet forslagene på tavla for diskusjon, slik kunne læreren forstå elevenes tanker bak besvarelsene (CGI) (Fennema & A. Romberg, 1999 p. 50). Elevenes deltagelse økte siden deres svarforslag skulle diskuteres og elevene selv måtte forsvare besvarelsen (CBI) (Fennema & A. Romberg, 1999 p. 52).. Vi ser at elevenes artikulasjon er på flere nivå, men det hindrer dem ikke i å artikulere seg. Læreren tar forslagene til diskusjon i den rekkefølgen som passer elevenes konstruksjonsprosedyre av den riktige besvarelsen (STST og PCMP) (Fennema & A. Romberg, 1999 p.53 og 55).

Læreren oppdaget misoppfatningene som er knyttet til bruk av konvensjoner og notasjoner. Tanken bak alle forslagene var riktig. Elevene viste at utfallet av -5 og 6 er et positiv tall, men de hadde vanskeligheter med skrivemåten av besvarelsen. De var klar over at i et algebraisk uttrykk kommer det ukjente tallet først, men de hadde vanskeligheter med plassering av +1 på en riktig måte. Macgregor og Stacey (1997) mener at noen vanlige feiltolkninger kan forklares ved å vurdere faktorer mer tilgjengelig enn det kognitive nivået. De fire aspektene som ble presentert av Hoyles, Armstrong, Hodgetts og Taylor (1985) i forhold til diskusjon, som er **utdypet i avsnitt 4.2**, belyses i denne økten i sammenheng med fremheving og opprydding av misoppfatninger.
Lærerens forklaring om hvordan et algebraisk uttrykk skal skrives som svar (bokstaven kommer først og tallet deretter), forårsaket misoppfatning hos de elevene som hadde skrevet svaret som b1 1 når de egentlig mente 1b+1. De andre elevene som svarte b1 oversåogså plusstegnet mellom bokstaven b, og tallet 1. Læreren presiserte ikke i sin forklaring av konvensjoner forskjellen mellom tall som faktor og det kjente hele tallet. For eksempel når læreren gikk gjennom denne oppgaven b+ b+ b=3b, ble det ikke presisert at tallet 3 er en faktor og den må komme før bokstaven. Hvis elevene hadde blitt bevisstgjort på dette før lærerens forklaring av konvensjoner, der hel tallet kommer før det ukjente tallet, hadde elevene kanskje ikke hatt disse misoppfatningene.

I alle øktene, i likhet med denne, blir ikke det riktige svaret diskutert, men resonert på slutten av avklaringen av misoppfatningene. *It is not enough to have an answer to a problem; Students are expected to be able to articulate the strategy they used to solve the problem and explain why it works* (P. Carpenter & Lehrer, 1999 p. 19) (Edited by Fennema & Romberg, 1999 p. 19).

**Transkripsjon av økt 7**

Lærer tar opp neste oppgave som er 5-b-6=, og elevenes besvarelser ramses opp på tavla, som er følgende, b-1 og b+-1.
Elevene oversåfortegnene til bokstaven (b).
**Lærer:** Begge forslagene er like, hvis dere husker (pre -algebra kurset) så er utfallet av to ulike tegn er negativ så utfallet av b+- 1 blir b- 1!
**Elevene:** Nikker
**Lærer:** fortsatt er det noe som ikke stemmer, la meg gi dere en ledetråd. Kan jeg bytte plass mellom leddene i denne oppgaven 5-3-6= til -3+5-6=?

Noen elever blir stille en liten stund og noen nikker tankefull.

**Elevene:** Nikker

**Lærer:** Hvis jeg bytter plass mellom leddene i dette regnestykket 5-b-6= for å få det ukjente tallet som først ledd i regnestykket, hvordan kommer regnestykke til å se ut?

**Elev nr. 18:** -b +5-6=

**Elev nr. 20:** må det ikke være –b-1 i svaret?

**Lærer:** Hva synes dere?

**Elevene:** nikker, visker ja.

**Diskusjon økt 7**

Deltagelsen i diskusjonen hadde redusert betydelig i denne økten. Læreren tok en ledelsesmessig beslutning som er **utdypet i avsnitt 3.3.1** og gav elevene ti fri minutter. Elevene ble oppfordret å gå ut og ta frisk luft eller leke.

**Transkripsjon av økt 8**

Læreren skrev denne oppgaven 3b +b = på tavla.

**Lærer:** Hva må stå på andre siden av likhetstegnet?

**Elev nr. 13:** 2b + 3

**Elev nr. 17:** 4b.

**Lærer:** Hvem støtter første forslag 2b+3?

Elevene 12, 16, 1 og 24 rekker opphånden. Elev nr. 13 forklarer forslaget siden det var hans.

**Elev nr 13:** siden, siden 2 b-eer! Og siden det er 3, da blir 3.

**Lærer:** hvem støtter forslaget 4b?

Elevene 18, 27, 23, 17 og 22 rekker opp hånden.

**Elev nr. 17:** ‹P ord P› siden, det er 3b pluss b, det blir 4b.

**Lærer:** 3 b = b + b + b, Altså regnestykket er b + b + b pluss en b til.

**Elev nr. 13:** Oh, ja.. det blir 4b!

Læreren spurte de andre elevenes mening som hadde støttet besvarelsen til elev nr. 13.

**Lærer:** hva syns dere

**Elevene nr. 18, 27, 23 og 17:** nikket

**Diskusjon økt 8**

Svarforslaget 2b+3 indikerer at misoppfatningen som læreren forårsaket i økt 6, har overlevd hos den eleven som kom med dette forslaget. De ser fortsatt på faktoren 3 som et helt kjent tall, som må komme etter bokstaven. Elev nr. 17's forklaring var nok for den eleven som hadde misoppfatning, for å innse at 3b står for b+b+b og er en faktor.

### 7.1.1 Oppsummering av alle diskusjonsøktene i observasjonen

Bortsett fra elev 25 som forlot timen rett etter testen FIA, var 26 elever til stede gjennom hele introduksjonstimen. 20 av 26 elever rakk opp hånden i forskjellige sammenhenger i forhold til øktene for å delta i diskusjonen. Elevenes overraskende høye oppmerksomhet gjennom alle disse åtte øktene og deres interesse for deltagelse i diskusjonene, kan indikere på elevenes interesse for det nye temaet algebra.

Antall elever som ønsket å svare på den enkelte aritmetiske oppgaven i økt 1, tyder på at elevenes tidligere kunnskap kan være en god drivkraft for å starte elevenes deltagelse i diskusjonen. Samme oppgave, med en liten forandring, ble brukt som koblet aritmetikken til algebratemaet i økt 2. Denne forandringen i oppgaven forårsaket en misoppfatning. Læreren besluttet å rydde opp denne misoppfatningen gjennom forståelse av et spesifikk ukjent tall og et generelt tall. Dette viser lærerens kognitive avgjørelse som er **fordypet i avsnitt 3.3.1** for å avklare misoppfatningen hos elevene. I økt 3 ble elevenes tidligere kunnskap i aritmetikk (3+3+3+3=3*4) brukt som knagger til å fremme forståelse for denne oppgaven a+a+a=3*a i algebra. Både Booth (1989) og Kieran (1989) har påpekt at elevene konstruerer sine algebraiske begreper på sin tidligere ervervet erfaringer i aritmetikken. Konklusjonen av denne økten var presentasjon av en algebraisk regneregel. Denne regelen forårsaket eventuelt videre forståelse av dette algebraiske uttrykket 3a+2b i økt 4, siden ingen misoppfatning ble avslørt gjennom denne oppgaven a+a+a+b+b=. Grunnen til at ingen misoppfatninger ble avslørt i økt 4, kan peke på at elevene så på bokstavene som fem objekter hvor tre og to av dem er like objekter.

Læreren valgte å utfordre elevene med en oppgave som inneholdt både kjente og generelt ukjent tall (5 + b + 6=) i økt 5. En viktig ledelsesmessig beslutning **fordypet i avsnitt 3.3.3.,** ble tatt av læreren ved å velge en usikker og forsiktig elev (elev nr. 13) som mumlet sitt forslag blant de andre elevene som hadde hånden oppe og var villig å svare på oppgaven. Læreren viste stor interesse for forslaget til elev nr. 13 og lyttet godt på en uklar artikulasjon fra denne eleven, i håp på å oppdage en misoppfatning. Elev 13 tok opp den klassiske misoppfatningen og byttet ut det ukjente tallet med et kjent tall for finne et numerisk svar.

Küchemann (1981) klassifiserer slike kognitive misoppfatninger i hovedgruppen 1, der eleven ignorerer bokstaven og gir den en vilkårlig verdi. Programmene CGI, CBI, STST og PCMP (Fennema & A. Romberg, 1999 p. 50, 52, 53 og 55) **som ble fordypet I avsnitt 3.1,** var godt i bruk i denne økten. Lærerens enkle spørsmål til elev nr. 13 om hvorfor tallet 7, startet en diskusjon mellom elevene 13, 8, 21 og 27 som ble fulgt av resten av klassen. Gjennom diskusjon resonerte elevene at bokstaven (b) må stå i svaret som et ukjent tall som adderes til det kjente tallet (11).

I økt 6 som jeg kalte høydepunktet ved introduksjonstimen, deltok mange elever i diskusjonen. Elevene hadde blitt varme i trøya når det gjaldt deltagelse i klassediskusjonen. Deres diskusjon kastet lys på et svært viktig fenomen. Jeg som lærer i denne introduksjonstimen av algebra var godt forbredt, ved å lese aktuell litteratur, samle viktig ledetråder og planlegge grundig, for å tilrette legge best mulig for å avdekke og opprydde misoppfatninger i denne timen. Allikevel klarte jeg å skape misoppfatninger hos elevene i økt 6 som ikke var av den kognitive art. Misoppfatningene som ble dannet hos elevene i denne økten, var basert på min uklare og upresise artikulasjon og forklaring av en internasjonal matematisk konvensjon. Jeg fortalte elevene at tallet skrives etter bokstaven i besvarelsen, uten å presisere at det kjente tallet kommer etter den ukjente verdien, men tall som faktor kommer foran den ukjente verdien. Min uklare formulering av setninger for å uttale meg, skapte forvirring og misoppfatninger hos elevene. Elever som ikke leser mellom linjene i lærerens artikulasjon av temaet, får misoppfatninger som de egentlig burde ha blitt spart for. Dette viser hvor viktig lærerens formulering av setninger og språkbruk er for å forebygge dannelse av unødvendige misoppfatninger hos elevene. Forskere som Macgregor og Stacey (1997), mener disse misoppfatningene ikke er knyttet til det kognitive nivået, og vi må lete etter årsaken i andre faktorer enn de kognitive nivåene. Misoppfatninger i denne økten var basert på lærerens unøyaktige muntlig forklaring av konvensjoner og mangel på nøye forklaring på notasjonsbruk i algebraiske beregninger. Oppgaven 5-b-6=, i økt 7 inneholdt like ledd som oppgaven 5+b+6 i økt 6, med forskjell i fortegnet. Denne oppgaven utfordret elevene med beregning av et ukjent negativt tall, og samtidig kunne elevene bearbeide den misoppfatningen de hadde i økt 6. Elevene virket utmattet selv med høy deltagelse i klassediskusjonen. Læreren tok en ledelsesmessig avgjørelse ved å gi elevene pause. Etter pausen virket elevene mer opplagte og kom med sine svareforlag som indikerte at misoppfatningen fra økt 6 kan ha blitt ryddet opp, men en ny misoppfatning dukket opp. Elevene overså fortegnet til bokstaven (b), de var samtidig usikker på bruk av notasjoner. Linchevski og Herscovics (1994) ble også overrasket da de oppdaget at elevene overså minustegnet i sin studie. De mente at forekomsten av denne feilen indikerer på at problemet godt kan reflektere uante kognitive hindringer. Elevenes besvarelser i denne økten kan antyde på at elevene var mer opptatt av ikke å begå samme misoppfatning som i økt 6 enn å observere minustegnet foran bokstaven (b). En annen faktor som kan ha distrahert dem til å observere minustegnet foran bokstaven (b), var vansker med å vise at besvarelsen til denne oppgaven er en bokstav pluss et negativ tall (b+-1). Utfallet av to fortegn ble grundig gjennomgått i pre- algebra kurset og kan ha fremmet elevenes forståelse av utfallet av fortegnsberegning, derfor refererte læreren bare til denne eventuelle forståelsen for å rydde opp denne misoppfatningen.

Misoppfatningen som ble synliggjort i økt 8, peker på at de elevene tolket oppgaven 3b+b som 3 og b +b. Siden det kjente tallet skal komme etter det ukjente tallet, da blir b + b = 2b pluss kjente det tallet 3. Diskusjonen i denne økten førte til konklusjon i økt tre der a+a+a kan skrives som 3*a som har forankring i aritmetikken ryddet opp denne misoppfatningen hos disse elevene.

Siden det var en ualminnelig time med tre lærere til stede, virket elevene mer konsentrert gjennom hele introduksjonstimen enn forventet av en 7.klasse. En av kontaktlærerene filmet introduksjonstimen mens den andre satt bak en av elevpultene. Den tredje læreren som ikke jobber på denne skolen (jeg), introduserte algebra for dem. Denne situasjonen kan ha påvirket på elevenes uventede konsentrasjon gjennom introduksjonstimen. Generelt nesten alle elever uttrykket interesse for temaet og deltagelse i klassediskusjonen.

## 7.2 Diskusjon av testresultatene før og etter introduksjonen

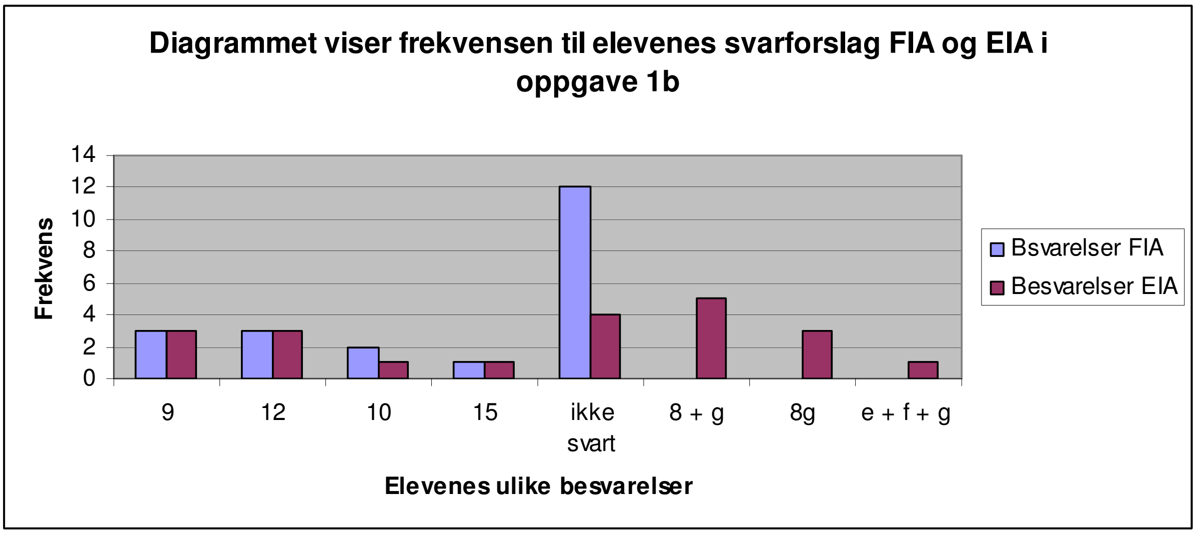
For å diskutere elevenes faglige utvikling gjennom introduksjonstimen, sammenligner vi testresultatene FIA og EIA med hverandre. Resultatene til hver oppgave blir diskutert separert. Fremgangsmåten er beskrevet i avsnitt 6.2.1.

**Oppgave 1**

I oppgave 1a blir elevene utfordret til å finne summen av tre tall der de ikke vet hvilke tall (a) og (b) presenterer (a+b=43 da a+b+2=). Summen av denne oppgaven er et numerisk svar. Nesten alle elever bortsett fra to svarte riktig på oppgaven. I oppgaven 1b er også to av tallene ukjente (e+f=8 da e+f+g=), men sluttsvaret er et algebraisk uttrykk. Når elevene svarer riktig på oppgave 1a og feil på oppgave 1b, tyder dette på elevenes misoppfatning, at et algebraisk uttrykk ikke er et legitimt svar. I et slikt tilfelle, tolker elevene bokstaven (g) som et tall, slik at sluttsvaret blir et numerisk svar. Grunnen kan være stor fokus på et numerisk svar i aritmetikkundervisningen på barneskolen. *In arithmetic, the focus of activity is the finding of particular numerical answers. …In algebra, the focus is on the derivation of procedures and relationships and the expression of these in general, simplified form* (Booth, 1988 p 299).

## 12.2 oppgave 1b

**Diagram 2. viser resultatene til oppgave 1b FIA og EIA. Riktig svar er 8 + g.**




Tanken bak tallet 9 som svar er at siden, e + f er lik 8, og (g) står i alfabet rett etter (e)og (f), da bør (g) være 1, derfor blir svaret 9. To av elevene ga 10 som svar på oppgaven. De resonerte slik at i oppgave 1a (a + b = 43 så a + b + 2) = 45, så i oppgaven 2b (e + f = 8 så e + f + g) bør (g) vær lik 2 som oppgave 1a, derfor blir svaret 10. Tre elever svarte 12 på oppgaven FIA. De hadde tenkt at både (e) og (f) står for samme tall, 4, derfor e + f blir 8, da (g) må også stå for 4, svaret blir derfor 12. 1 elev svarte 15 på oppgaven, tanken bak besvarelsen var at summen av e + f er 8. (e) er lik 3 og (f) er lik 5 Altså to oddetall i rekkefølge, da bør (g) stå for neste oddetall etter 3 og 5, som er 7. Sånn sett ble svaret 15. Küchemann (1981) og Stacy (1997) diskuterte slike feiltolkninger som elever har, som å knytte et nummer i henhold til plasseringen av bokstaven i alfabetet (a = 1, osv), og de som mener at ulike bokstaver må representere et annet nummer.

**Tabell nr. 4 viser frekvensen til hver besvarelseskode i oppgave 1b FIA og EIA.**

| Koder for misoppfatninger | Frekvens FIA | Frekvens EIA |
|---|---|---|
| Numerisk svar | 9 | 9 |
| Gjentok misoppfatningen | | 5 |
| Ikke svart | 12 | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| Ikke svart begge gangene | | 3 |
| Riktig svar | 0 | 8 |

Ni elever svarte med et nummerisk tall, FIA, bare en av dem lot være å svare EIA. Fem av dem gjentok sin besvarelse, en gav et annet nummerisk svar, en hadde riktig svar og en hadde svart 8g EIA.

Tolv elever svarte ikke på oppgaven FIA, tre svarte ikke igjen, to svarte numerisk, to elever svarte 8g og overså plusstegnet og fire svarte riktig.

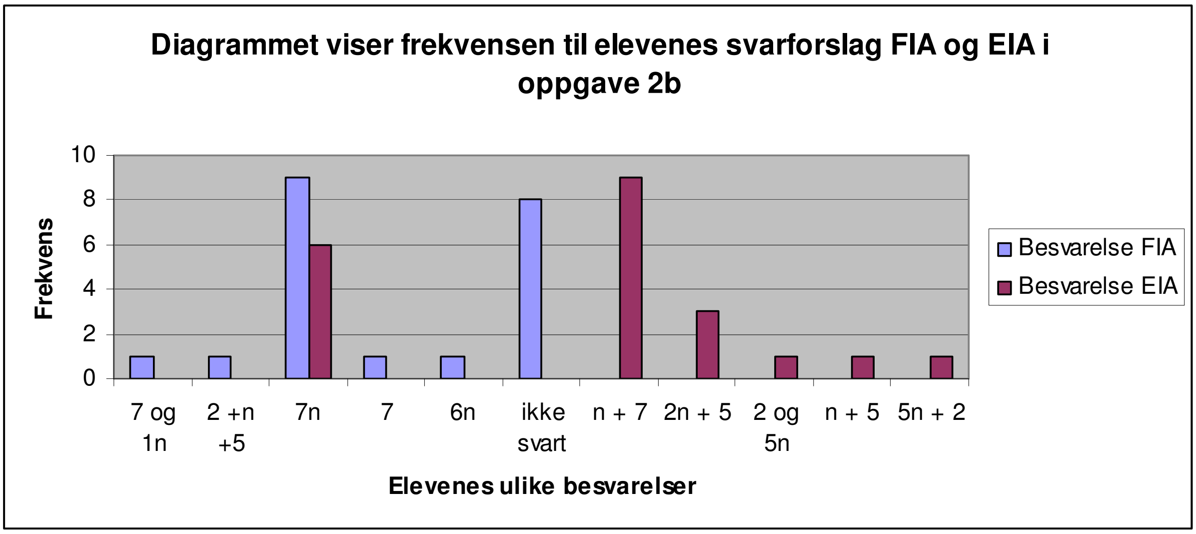
Bortsett fra de elevene som gjentok misoppfatningen kan dette muligens tyde mot en progresjon og utvikling hos de andre elevene. Dette indikerer på at misoppfatningens progresjon kan ha en slik prosess hos elevene i denne oppgaven, som ikke gjentok besvarelsen.

**Ikke svart → Numerisk svar → Ikke svart → 8g → Riktig svar**

Når elevene svarer numerisk på oppgaven FIA og ikke varer på oppgaven EIA, kan dette antyde på at eleven vet at et numerisk svar er feil, men fortsatt ikke vet hva er den riktige besvarelsen. Misoppfatningen til besvarelsen 8g, er knyttet til notasjonsbruk.

## 12.3 Oppgave 2b

**Diagram 3. viser resultatene til oppgave 2b FIA og EIA. Riktig er svar n + 7.**




Tanken bak besvarelsene 7n og 7 er den klassiske misoppfatningen å ignorere bokstaven. Tanken til de som lot være å svare er enten at de er klar over at den numeriske besvarelsen er feil, eller at de rett og slett ikke aner hva de skal svare. Besvarelsen (6n) var en feil og ikke en misoppfattning. Tanken bak 2n + 5 tolkningen av oppgaven er, 2 og n + 5, der 2 og n tolkes som 2n og siden en ukjent ikke kan legges sammen med det kjente tallet 5, blir hele uttrykket 2n + 5. Det er delvis riktige tanker og delvis ikke riktige tanker bak denne besvarelsen (Brekke, 2002).

**Tabell nr. 5 viser frekvensen til hver besvarelse i oppgave 2b FIA og EIA.**

| Koder til misoppfatninger | Frekvens FIA | Frekvens EIA |
|---|---|---|
| 7n | 11 | 5 |
| 7 | 1 | |
| Gjentok misoppfatningen | | 2 |
| Ikke svart | 8 | 0 |
| Riktig svar | | 9 |

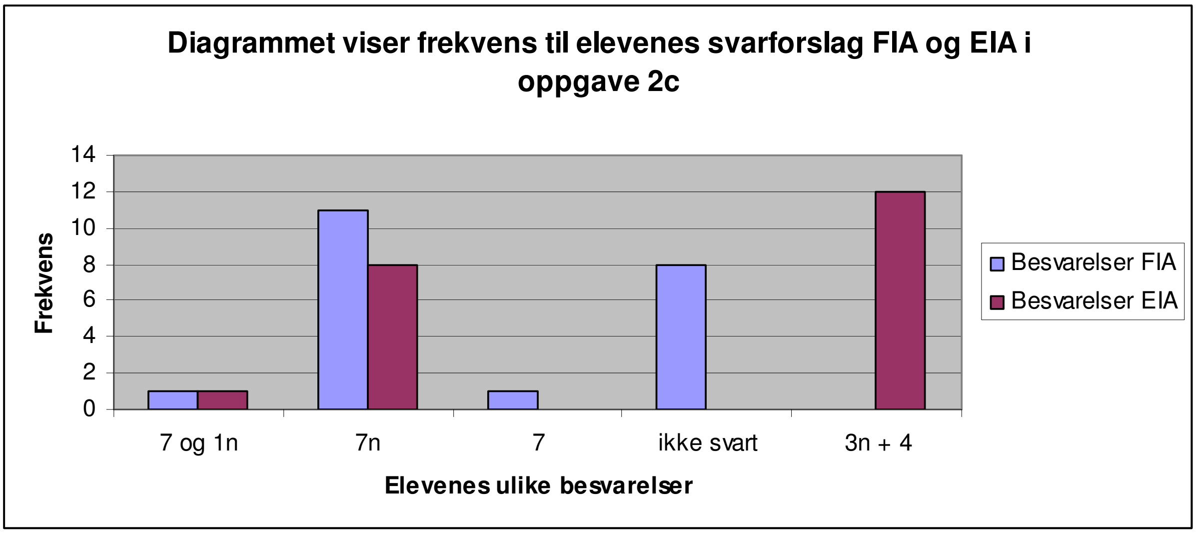
Ti elever hadde svart 7n til oppgave 2b FIA. Bare to av dem gjentok besvarelsen, fire elever svarte riktig, en svarte 3n+5, en svarte n+5 og to svarte 5n+2 EIA.

Åtte elever hadde ikke svart på oppgaven FIA. Fire av dem svarte riktig og fire svarte 7n, EIA. Dette tyder på at misoppfatningenes progresjon kan ha en slik prosess hos elevene i denne oppgaven, som ikke gjentok besvarelsen.

**Ikke svart → 7n → 3n+5, n+5, 5n +2 → Ikke svart → Riktig svar**

## 12.4 oppgave 2c

**Diagram 4. viser resultatene til oppgave 2c FIA og EIA. Riktig svar 3n +4**




Besvarelsen 7 og 1n betraktes som 7n etter en prat med eleven som oppgav denne besvarelsen. Eleven med besvarelsen 7 ignorerte bokstaven. Besvarelsen 7n er et klassisk svar fra elevene. Noen av elevtolkningene som Kücehmann (1981) og Stacey (1997) har diskutert, omfatter denne tolkningen ”ikke-numeriske” tolkninger av bokstaver, for eksempel at eleven ignorerer bokstaver og kun legger sammen tallene.

**Tabell nr. 6 viser frekvensen til hver besvarelse i oppgave 2c FIA og EIA.**

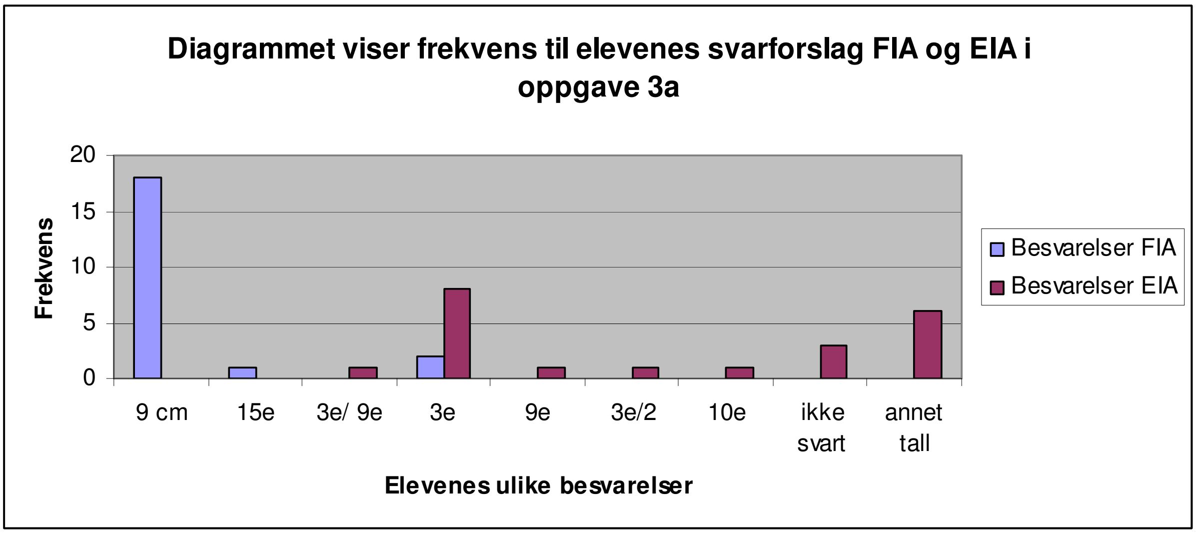
| Koder for misoppfatninger | Frekvens FIA | Frekvens EIA |
|---|---|---|
| 7n | 12 | 5 |
| Gjentok misoppfatningen | | 4 |
| Ikke svarte | 8 | |
| Riktig svar | 0 | 12 |

Tolv elever svarte 7n, FIA. Fire av de tolv gjentok misoppfatningen. Dette tyder på at åtte elever svarte riktig EIA. Åtte elever svarte ikke FIA. Tre av dem svarte riktig og 5 svarte 7n på oppgaven, EIA. Misoppfatningsprogresjon kan ha en slik prosess hos elevene som ikke gjentok besvarelsen.

**Ikke svart → 7n → Riktig svar**

## 12.5 Oppgave 3a

**Diagram 5. viser resultatene til oppgave 2c FIA og EIA. Riktig svar er 3e.**




Elevene målte sidene til trekanten som var 3 cm og utgav svaret 9 som omkrets. En elev svarte 15e. Denne eleven hadde ikke noe forklaring på svaret.

**Tabell nr. 7 viser frekvensen til hver besvarelse i oppgave 3a FIA og EIA.**

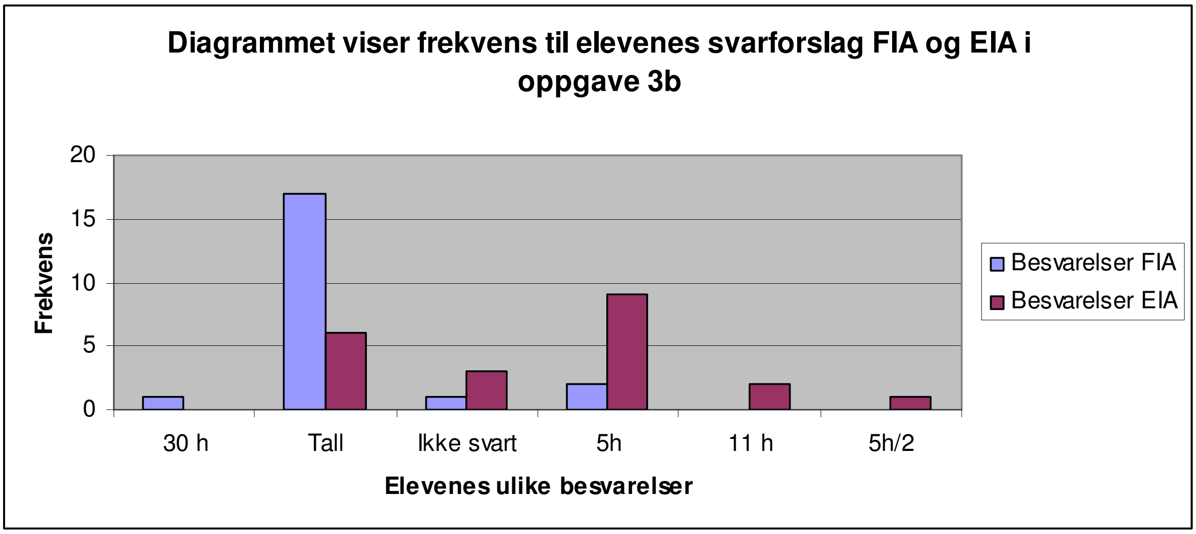
| Kode til misoppfatninger | Frekvens FIA | Frekvens EIA |
|---|---|---|
| 9 cm | 19 | 6 |
| 9e, e 10, 3e/2 | | 3 |
| 15e | 1 | |
| Riktig svar | 2 | 9 |
| Ikke svart | | 3 |

Nitten elever svarte 9 cm, FIA. Ni av dem svarte riktig på oppgaven, tre elever svarte ikke og 7 elever gjentok misoppfatningen, EIA. Misoppfatningenes progresjonsprosess kan ha et slikt mønster hos elevene som ikke gjentok besvarelsen..

**9 cm → 9e, e10, 3e/2 → Ikke svarte → Riktig svar**

## 12. 6 Oppgave 3b

**Diagram 6. viser resultatene til oppgave 2c før introduksjonstimen. Riktig svar 5h**




Eleven med besvarelsen 30h hadde ikke et klart resonnement for hvorfor svaret ble 30h. Tanken bak besvarelse 11h er at eleven rett og slett målte sidene og tolket (h) som en enhet. Tanken bak besvarelsen (5h/2) var at figuren innehold en trekant, og arealet til en trekant er (g*h/2). Eleven forvekslet omkrets med areal.

**Tabell nr.8 viser frekvensen til hver besvarelse i oppgave 3a FIA og EIA.**

| Koder for misoppfatninger | FIA | EIA |
|---|---|---|
| Nummerisk tall | 20 | |
| Gjentok numerisk tall | | 6 |
| 11h, 5h/2 | | 3 |
| Ikke svart | 1 | 3 |
| Riktig svar | 2 | 9 |

Tjue elever svarte et numerisk tall på oppgaven FIA. Fem elever gjentok besvarelsen, tre elever svarte ikke, tre elever ga besvarelsene 11h og 5h/2 og ni elever svarte riktig på oppgaven EIA. Den ene eleven som ikke svarte på oppgaven FIA svarte med et nummerisk tall EIA. Disse besvarelsene indikerer på et slikt mønster til misoppfatningenes progresjon.

**Ikke svarte → Numerisk tall → 11h, 5h/2 → Ikke svarte → Riktig svar**

# 8. Konklusjonen

Observasjon og analyse av øktene viste høy deltagelse hos mange elever i klassediskusjoner. Hele 20 av 26 elever enten kommenterte, foreslo besvarelser, eller ville forsvare sitt svarforslag. Elevenes ivrighet etter å få sine svarforslag skrevet på tavla i introduksjonstimen av algebra, viste deres positive respons til grundig diskusjon rundt deres svarforslag, selv om det ikke alltid innebar det riktige forslaget. Sfard, (2003) mener at barn føler seg fri når de blir respektert og kan diskutere sine meninger på sine egne premisser. Dette kan tyde på at diskusjon om hvert enkelt svarforslag fra elevene virket som en drivkraft på elevenes deltagelse. Dette ledet til et læringsmiljø der seks tydelige misoppfatninger ble avslørt. Dette kan ha indikasjon på at misoppfatninger kan ofte bli avslørt gjennom klassediskusjon. Ved å tilrettelegge en god diskusjonsøkt, tilrettelegger vi også for fremheving av misoppfatninger. Sfard og Kieran (2001) mener at klasseromsdiskusjon provoserer til refleksjon og gir en mulighet til å sammenligne, kritisere, tilbakevise, fullføre, avvise osv.

Blant lærerens forkjellige avgjørelser var å starte introduksjonen av algebra med en enkel aritmetisk oppgave for å stimulere elevene til diskusjon og deltagelse, lytte godt til deres artikulasjoner, selv de dårlig formulerte, og gi alle sjanse til å delta i diskusjoner. Økt 5 var et eksempel på lærerens komplekse avgjørelse når en usikker elev prøver og ytre seg ved å mumle sin mening, blir valgt av læreren som hovedpersonen til denne diskusjonsøkten og eleven fikk sjanse til å artikulere seg. En misoppfatning ble avslørt i elevens artikulasjon. Lærerens rolle og diskusjon i samspill med hverandre, kan muligens tilrettelegge best mulig for fremheving av misoppfatninger.

Algebra ble introdusert via elevenes tidligere kunnskap, altså aritmetikken. Aksept av algebraiske regneregler hos elevene var lettere når de så sammenhengen mellom dem. For eksempel aksepterte elevene lettere denne algebraiske regneregel a+a+a=2*a når de så sammenhengen med denne aritmetiske regelen 3+3+3+3= 4*3 (økt 3). Dette kan ha ført til aksept av dette løsningsforslaget i denne oppgaven a + 5 + a + a + 5 = 3a + 10 (økt 3). I økt 7og 8 ble aritmetikken brukt for å forsøke å avklare misoppfatningene. Elevene trakk algebraiske konklusjoner etter at de fikk aritmetiske ledetråd. Dette lyser opp aritmetikkens effekt i avklaring av misoppfatninger.

Jeg kalte økt 6 for høydepunktet i introduksjonstimen. En misoppfatning ble avslørt i denne økten som læreren hadde forårsaket gjennom sin undervisningstime. Denne misoppfatningen ble skapt til tross for et godt gjennomtenkt opplegg som var planlagt i mange måneder. En mindre presis forklaring var nok til at læreren skapte en misoppfatning hos elevene. Denne økten belyste kraften i samspillet mellom lærerens rolle og diskusjonene i fremheving av misoppfatningene. Uansett hva kilden til misoppfatninger er, kan de bli avslørt og avklart i diskusjoner. Swan, (2001) mener at misoppfatninger faktisk kan være et naturlig utviklingstrinn. I introduksjonstimen ble flere misoppfatninger med forskjellig art, kognitiv (økt 2, 5 og 8), ikke kognitiv (økt 7) og skapt av undervisningen (økt 2, 6) synliggjort. Dette kan også ha indikasjon på at lærerens rolle og diskusjon i samspill med hverandre, kan legge best mulig til rette for å skape et læringsmiljø, der misoppfatningene lettere blir avslørt.

Analyse av test resultatene avslørte en progresjonsprosedyre av misoppfatninger som viser en slik retning i de frem oppgavene.

Oppgave 1a

**Ikke svart → Numerisk svar → Ikke svart → 8g → Riktig svar**

Oppgave 2b

**Ikke svart → 7n → 3n+5, n+5, 5n +2 → Ikke svart → Riktig svar**

Oppgave 2c

**Ikke svart → 7n → Ikke svart → Riktig svar**

Oppgave 3a

**9 cm → 9e, e10, 3e/2 → Ikke svart → Riktig svar**

Oppgave 3b

**Ikke svart → Numerisk tall → 11h, 5h/2 → Ikke svart → Riktig svar**

Elevene som ikke svarte på oppgavene, kan deles i tre grupper. Første gruppe er de elevene som hadde stor utvikling når de ikke svarte på oppgaven FIA, men svarte riktig EIA. Andre gruppen er de elevene som hadde utvikling når de ikke hadde svart på oppgaven FIA, men hadde svart med misoppfatning EIA. Den siste gruppen er de elevene som hadde misoppfatning FIA, men ikke svarte på oppgaven EIA. Spørsmålet er, hvorfor svarte de ikke på oppgaven EIA? Hvorfor gjentok de ikke sin besvarelse EIA? Dette kan tyde på at elevens valg ved og ikke svare på oppgaven, er en indikasjon på at han eller hun hadde utviklet sin forståelse i algebra oppgaven. Før introduksjonen av algebra hadde eleven et svar på oppgaven, men etter introduksjonen av algebra visste eleven at det svaret fra forrige testen ikke var korrekt, men visste fortsatt ikke hva besvarelsen var. Dette kan indikere på en utvikling. Ut i fra dette kan man tolke at disse elevene som ikke svarte på oppgaven før eller etter introduksjon av algebra kan være på forskjellige stadier av forståelsesutvikling av algebra. Elevenes progresjonsprosedyre av misoppfatninger viser tydelig at ”ikke svart” på oppgaven kommer enten i begynnelsen eller før ”riktig svar” i progresjonsprosedyren.

Resultatet fra begge testene viste at 5 elever i oppgave 1b, 2 elever i oppgave 2b, 4 elever i oppgave2c, ingen i oppgave 3a og 6 elever i oppgave 3b gjentok sine besvarelser fra testen FIA. Altså resten av elevene hadde enten klart og rydde opp misoppfatningene og gitt riktig svar på oppgaven i test EIA, eller hadde utviklet besvarelsen nærmere til riktig svar, selv om de lot være å svare på oppgaven EIA. Dette kan ha tydet på at introduksjonstimen hjalp elevene å utvikle sin algebraiske kunnskap gjennom introduksjonen.

Sfard (1998) sier at matematiske samtaler synes å ha stort potensial som en modus for å lære, men likevel, på den annen side, er det bare visse typer samtaler som sannsynlig har dette potensialet. Antall misoppfatninger som hadde positiv progresjon gjennom introduksjon av algebra, kan indikere på at lærerensrolle gjennom sine avgjørelser i planlegging og gjennomføring av undervisningen skapte det potensialet i diskusjoner, som klarte å utvikle elevenes misoppfatninger positivt.

Mange misoppfatninger ble avslørt i introduksjonstimen og mange elever hadde bearbeidet sine misoppfatninger gjennom introduksjon av algebra. Alt dette har indikasjon på at elementene, lærerensrolle gjennom sine beslutninger, diskusjon og aritmetikk i samspill med hverandre, kan ha klart å legge best mulig tilrette for å fremheve misoppfatninger i introduksjon av algebra. Misoppfatningene ble ikke avklart hos alle elevene, men de hadde positiv utvikling i de to skoletimene hvor introduksjon av algebra foregikk. Antall elever som klarte å rydde helt opp sine misoppfatninger er tydelig vist på diagram 1 på siden 32. Dette indikerer på den positive utviklingen i elevenes algebraiske kunnskap. Selv om elevene klarte å utvikle sine kunnskaper gjennom introduksjonstimen, så min undring er hvorfor introduksjon av algebra ikke klarte å avklare misoppfatninger helt hos de andre elevene som svarte ikke riktig på oppgaven EIA?

# 10. Litteraturliste

**Airasian, P.W. (1991), *Classroom assessment*. New York. McGraw-Hill.**

**Anna Sfard, Pearla Nesher, Leen Streefland, Paul Cobb and John Mason**

***For the Learning of Mathematics* Vol. 18, No. 1 (Feb., 1998), pp. 41-51**

**Blair, L. (2005). It's Elementary: *Introducing Algebraic Thinking Before High School.***

**Accessed 12 August 2005 at http://www.sedl.org/pubs.**

**Brekke, G. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk,***

**Brekke, G. & Grønmo, L.S. & Rosen, B. (2000). *Veiledning til algebra F, H og J***

***Læringssenteret***

**Brekke, G. (2002). Introduksjon til diagnostisk undervisning. *Læringssenteret (LS)*: 1-24.**

**Breiteig, Trygve og Venheim, Rolf (2005). *Matematikk for lærere, 1*. 4. utg.**

**Oslo, Universitetsforlaget.**

**Booth, L.R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors.* Windsor: NFER**

**Booth, L. (1988). *Children's difficulties in beginning algebra.* In A. Coxford (ED.). *The Ideas of Algebra: K-12*(1988 yearbook) (pp. 20-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.**

**Charmaz, K. (2003). Grounded theory - Objectivist and constructivist methods. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Strategies of qualitative inquiry* (pp. 249-291). London: Sage.**

**Hoyles, C. 1985. What is the point of group discussion in mathematics? *Educational Studies in Mathematics* 16: 205-14.**

**Dalen, Monika (2004). Intervju som forskningsmetode. En kvalitativ tilnærming. Universitetsforlaget, Oslo.**

**Dalland, Olav (2000). *Metode og oppgaveskriving for studenter*. Oslo: Universitetsforlaget.**

**Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999).** ***Children's understanding of equality: A foundation for algebra. Teaching Children Mathematics, 6(1).***

**Fassinger, P, (1996)** ***Professors' and Students' Perceptions of why Students Participate in Class*. Published by: American Sociological Association, Teaching Sociology Vol. 24, No.1 (Jan, 1996), pp. 25-33.**

**Fennema. E. & Romberg, T.A. (Eds.). (1999)** ***Mathematics classrooms that promote thinking.*** **Mahwah. NJ: Erlbaum.**

**Flower & R. Hayes, (1981),** ***A Cognitive Process Theory of Writing*. College Composition and Communication Vol. 32, No. 4(Dec., 1981), pp. 365-387. Published by: National Council of Teachers of English.**

**Freiman, V., & Lee, L. (2004).** ***Tracking primary students' understanding of the equality sign.***

**In M. Hoines, & A. Fuglestad (Eds.),** ***Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*** **(Vol. 2, pp. 415-422). Bergen.**

**Fujii, T. (2003).** ***Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems: Is theconcept of a variable so difficult for students to understand?*** **In N. Pateman, G. Dougherty, J. Zilliox. (Eds.),** ***Proceedings of the 27th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,*** **(Vol.1, pp. 49-65). Hawaii: PME.**

**Geertz, C., 1973b. Thick description: toward an interpretive theory of culture. In: C. Geertz. The interpretation of cultures. New York: Basic Books, 3–30.**

**Glaser, B., & Strauss, A. (1967).** ***The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. Chicago: Aldine.**

**Grouws. D. A (1992)** ***Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,***

**s. 65 – 101.**

**Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H. & Borgeg, I. C., (2012).** ***Framgang, Men Langt Fram, norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011*. Oslo, Norway: Akademika forlag.**

**Hart, K. M. (2004).** ***Children`s Understanding of MATHEMATICS: 11 ~16*. Published by Antony Rowe Publishing Services.**

**Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994) A cognitive gap between arithmetic and algebra.** ***Educational Studies in Mathematics, 27,*** **59-78.**

**Jacobsen, D.I (2005),** ***Hvordan gjennomføre undersøkelser? Innføring i samfunnsvitenskapelig metode.*** **2.utgave.**

**Kieran, C. (2007).** ***Leaning and teaching algebra at the middle school through college levels.***

**In F.K. Lester (1992). (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 707 – 762). Charlotte, NC: Information Age.**

**Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds). (2001).** ***Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.**

**Küchemann, D. (1981). Algebra.** ***In K. Hart (red.) Children's understanding of Mathematics*: s. 102 -119.**

**Naalsund, M. (2011).** ***Why is algebra so difficult?*. Oslo University.**

**Olafsen, A. R. & Maugesten, M. (2009).** ***Matematikk - didaktikk i Klasserommet*** **1. utgave, Universitetforlaget.**

**Perry & Anthony & Diezmann (2000-2003) Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA).**

**Pimm, 1991, Mathematics, teachers and children, British library cataloguing in. Publication Data, First published in Great Britain 1988.**

**Popham, W. J. (1995).** ***Classroom assessment: What teachers need to know.*** **Needham Heights, MA: Allyn and Bacon.**

**Postholm, M. B. (2005). Kvalitativ metode: en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier. Oslo, Universitetsforl.**

**Powell, A. B., Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2003).** ***An analytical model for studying the development of mathematical ideas and reasoning using videotape data. Journal of Mathematical Behavior, 22*****(4), 405-435.**

**Rinvold, R. A. (2004 – 2009).** ***Visuelle perspektiv, tallteori,*** **2. utgave, Caspar forlag**

**Strauss, A., & Corbin, J. (1998).** ***Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory*** **(2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.**

**Tirosh, D., Ruhama, E. and Robinson, N. (1998)** ***"Simplifying algebraic expressions: Teacher awareness and teaching approaches",*** **Educational Studies in Mathematics, 35: 51-64.**

**Sfard, A., & Kieran, C. (2001).** ***Cognition as communication: Rethinking learning-by-talking through multifaceted analysis of students' mathematical interactions. Mind, Culture, and Activity, 8*****(1), 42-76.**

**Sfard, A. (2001).** ***There is more to discouse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. Educational Studies in Mathematics 46*****, 13-57.**

**Sfard, (2003)** ***Successful mathematical communities of practice.***

**Stodolsky, S. S. (1988). The** ***subject matters: classroom activity in math and social studies.*** **Chicago, University of Chicago Press.**

**Sellerberg, K. F. o. A.-M. (2011).** ***Mange ulike metoder.*** **Gyldendal Norsk forlag.**

**Stacey, K. & MacGregor, M.(1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15.** ***Educational Studies in Mathematics*****, 33(3), 1-19.**

**Stacey, K. & MacGregor, M. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher* (90)2, 110-113.**

**Stigler.J., &Hiebert, J. (1999). *The teaching gap.* New York: The Free Press. 113.**

**Stensæth, K. (2008). *Musical Answerability. A Theory on the Relationship between Music Therapy Improvisation and the Phenomenon of Action.* Ph.D. NMHpublikasjoner 2008:1. Oslo: Unipub.**

**Swan, M. (2001) *"Dealing with misconceptions in mathematics"* in Gates, ed. (2001: 65-147).**

**Voigt, J., Seeger, F., & Waschescio, U. (Eds.) (1998). *Culture of Mathematics Classroom*. Cambridge, NY: Cambridge University Press.**

# Internettsider

Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS. Personvernombudet for forskning, [Internett]. Tilgjengelig fra: < http://www.nsd.uib.no/ >[Nedlastet 06.des.2012].

Toulmin modell of Argument, [Internett]. Tilgjengelig fra: < http://web.cn.edu/kwheeler/documents/Toulmin.pdf > [Nedlastet 06.des.2012].

Transkripsjon (språkvitenskap), [Internett] Tilgjengelig fra : <http://no.wikipedia.org/wiki/Transkripsjon_(spr%C3%A5kvitenskap) > [Nedlastet 06.des.2012].

Utdanningsdirektoratet. Tilpasset opplæring og algebra, [Internett]. Tilgjengelig fra: < http://www.udir.no/Lareplaner/Veiledninger-til-LK06/Matematikk2/Matematikk/Eksempler-fra-hovedomradet-i-tall-og-algebra/Artikler-niva-2-og-3/Tilpasset-oplaring-og-algebra/ > [Nedlastet 06.des.2012].

Understanding by Design, [Internett].

https://docs.google.com/viewer?a=v&q=cache:K3F3dakjvyUJ:itgs.icthelp.biz/lib/exe/fetch.php?id%3Dubd%26cache%3Dcache%26media%3Dcurriculum:riss:introduction_20to_20ubd.pdf+wiggins+g.+%26+mctighe+j.+(1998).+understanding+by+design&hl=no&gl=no&pid=bl&srcid=ADGEEShU8169LvVPpVoI1Z7hOUjA6oUKKnGaZ-PTD2U0tPV6YaMpdbbzscRoNUms8uETSGJJuvHhvfEio1sJhW-fwO2UKTTRqIf1pBbRayNhZom3dlkFbLtI1ZkhXg3nGWfDBrnKhROR&sig=AHIEtbTYwm5_m4KUfAVGXrZLINk55J_rHw >

Learning to Teach Mathematics for, Carpenter, R Lehrer, (1999). [Internett]. <http://www.merga.net.au/documents/MTED_2_goodell.pdf > [Nedlastet 07.des.2012].

Algebra in Elementary School: Developing Relational Thinking. [Internett]. <http://www.mathematik.ph-weingarten.de/~ludwig/Vorlesungen/ws0708/fachdidaktikforschung/Algebrische%20denken/carpenter_Levi_Franke_Zeringue.pdf >

Children’s Understanding of Equality and the Equal Symbol.[Internett]. < http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/oksuz.pdf >[Nedlastet 07.des.2012].

# 11. Vedlegg

## Vedlegg 1.

**Listen nedenfor er hentet fra en innføringsbok[1] i språklig samhandling, ført i pennen av Jan Svennevig.**

| Tegn | Betydning |
|---|---|
| & | inneværende intonasjonsenhet fortsetter på neste linje |
| . | fallende intonasjonskontur (såkalt «hevdende» intonasjonskontur) |
| ? | stigende intonasjonskontur («spørrende») |
| , | svakt stigende, svakt fallende eller flat kontur («fortsettelse») |
| .. | kort pause (under 0,3 sekunder) |
| ... | mellomlang pause (0,3 - 0,6 sekund) |
| ...(1,2) | lengre pause (målt i tidels sekunder) |
| (0) | turskifte uten pause |
| = | forlenging av lyd |
| 'ord | trykksterkt ord (eller stavelse) |
| !ord | emfatisk trykk (når noe fremheves ekstra) |
| [ord], [ord] (vertikalt parallelle klammer) | overlappende tale |
| [[ord]], [[ord]] (indekserte klammer ved flere nærliggende tilfeller) | overlappende tale |
| - | avbrutt ord |
| -- | avbrutt intonasjonsenhet |
| (H) | innpust |

| | |
|---|---|
| (Hx) | utpust |
| <H ord H> | tale på innpust |
| (HOST) | ikke-språklige lyder fra taleapparatet |
| @ | latter (ett tegn for hver «latterstavelse») |
| <@ ord @> | latterkvalitet på stemmen (leende eller lattermild tale) |
| <MRC ord MRC> | marcato uttale |
| <EMF ord EMF> | emfatisk uttale |
| <SIT ord SIT> | sitatstemme, som når man etterligner noen, eller «og da sa han ...») |
| <F ord F> | høy stemmestyrke («forte») |
| <P ord P> | lav stemmestyrke («piano») |
| <A ord A> | høyt tempo («allegro») |
| <L ord L> | lavt tempo («lento») |
| <HI ord HI> | høyt toneleie (i betydningen *lyst*) |
| <LO ord LO> | lavt toneleie (i betydningen *mørkt*) |
| X | uhørbar stavelse |
| <X ord X> | usikker transkripsjon |
| /o:r/ | fonetisk transkripsjon |
| ((PEKER)) | ikkespråklig handling, eller annen kommentar til transkripsjonen |

# Vedlegg 2.

**Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS**
NORWEGIAN SOCIAL SCIENCE DATA SERVICES

NSD

Harald Hårfagres gate 29
N-5007 Bergen
Norway
Tel: +47-55 58 21 17
Fax: +47-55 58 96 50
nsd@nsd.uib.no
www.nsd.uib.no
Org.nr. 985 321 884

Margrethe Naalsund
Institutt for matematiske realfag og teknologi, IMT
Universitetet for miljø og biovitenskap
Postboks 5003
1432 ÅS

Vår dato: 29.06.2012 Vår ref: 30393 / 4 Deres dato: Deres ref:

## STATUS FOR BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

*30393 Hvordan fremheves misoppfatninger i introduksjon av algebra*

Vi viser til tidligere innsendt meldeskjema for forskningsprosjekt som medfører meldeplikt eller konsesjonsplikt. Videre vises det til vårt svarbrev hvor det gikk frem at vi ville ta kontakt ved prosjektslutt angående prosjektets status.

Ifølge våre opplysninger skal prosjektet nå være avsluttet. Personvernombudet for forskning ber om en tilbakemelding på hvorvidt datamaterialet er anonymisert.

Dersom data ikke er anonymisert og det fortsatt er behov for oppbevaring av personopplysninger, må prosjektleder gi en redegjørelse til personvernombudet for hvorfor data ikke kan anonymiseres på nåværende tidspunkt. Denne tilbakemeldingen er nødvendig for at prosjektleder skal ha lovlig grunnlag for behandling av personopplysninger.

NSD arkiverer forskningsdata for fremtidig bruk. Hensikten med arkivordningen er først og fremst å styrke datagrunnlaget for norsk forskning. Forskningsdata representerer en verdifull kilde til informasjon både for samtidsforskning og historisk forskning.

Dersom lagring av data ved NSD er ønskelig ber personvernombudet om at data og tilhørende dokumentasjon sendes til dataarkivering@nsd.no. Vi viser til våre nettsider for ytterligere informasjon om arkiveringstjenesten. Forskere som gjennomfører forskningsprosjekt med støtte fra Norges forskningsråd (NFR) minnes om at arkivering ved NSD er et kontraktsvilkår for den gitte støtte (dersom data er egnet for arkivering ved NSD).

Vi ber om elektronisk tilbakemelding på status for behandling av personopplysninger ved å bruke linken i medfølgende epost, innen 3 uker. Dersom noe er uklart ta gjerne kontakt over telefon.

Vennlig hilsen

Vigdis Namtvedt Kvalheim

Hildur Thorarensen

Kopi: Soheila Sheshkalani, Toppåsvei 77, 1262 OSLO

Avdelingskontorer / *District Offices*:
*OSLO*: NSD. Universitetet i Oslo, Postboks 1055 Blindern, 0316 Oslo. Tel: +47-22 85 52 11. nsd@uio.no
*TRONDHEIM*: NSD. Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim. Tel: +47-73 59 19 07. kyrre.svarva@svt.ntnu.no
*TROMSØ*: NSD. SVF, Universitetet i Tromsø, 9037 Tromsø. Tel: +47-77 64 43 36. nsdmaa@sv.uit.no