

KNEKKING, FORENKLEDE METODER MOT EUROKODE 3, METODE 2

BUCKLING, SIMPLIFIED METHODS AGAINST EUROCODE 3, METHOD 2

JAN OLAV HAUAN KAASA

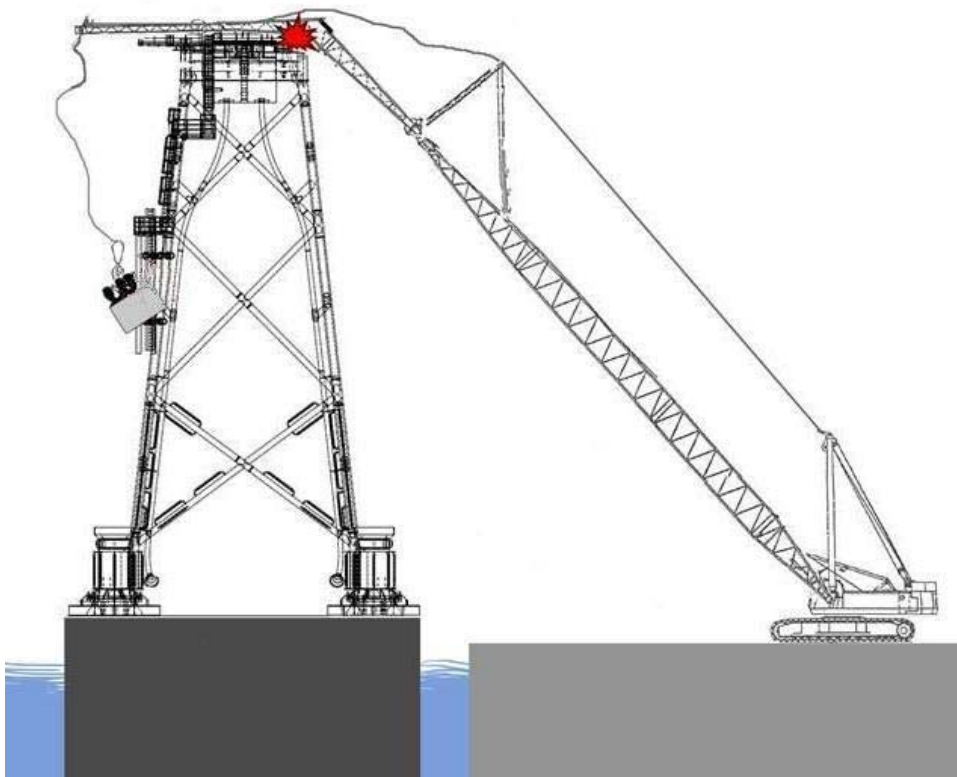
UNIVERSITETET FOR MILJØ- OG BIOVITTENSKAP
INSTITUTT FOR MATEMATISKE REALFAG OG TEKNOLOGI
MASTEROPPGAVE 30 STP. 2012



Knekking, forenklete metoder mot Eurokode 3, metode 2

av

Jan Olav Hauan Kaasa



Gradsoppgave
Maskin, prosess og produktutvikling,
IMT/UMB, 2012



FORORD

Dette prosjektet er gjennomført som en del av masterprogrammet i maskin, prosess og produktutvikling ved Institutt for matematiske realfag og teknologi ved UMB. Prosjektet er gjennomført i vårsemesteret 2012 med et omfang på 30 studiepoeng. Veileder under arbeidet har vært førsteamanuensis Geir Terjesen.

Oppgaven har vært å gjøre en grundig analyse av de klassiske metodene som kan brukes for å beregne knekktilfeller. Disse har blitt sammenliknet med Eurokodestandarden, som nå er innført som eneste gjeldende standard i Norge.

Oppgaven ble valgt fordi den er annerledes enn de fleste jeg har skrevet tidligere. Der oppgavene før har dreid seg om å utvikle nye produkter, er oppgaven denne gangen å teste noen av *metodene* som brukes når nye bygg og strukturer skal dimensjoneres. Det har krevd at jeg har måttet sette meg inn i disse metodene på en helt ny måte.

Takk til alle som har hjulpet til med stort og smått underveis i arbeidet.

Jan Olav Hauan Kaasa
Ås, 15. mai 2012

SAMMENDRAG

I denne oppgaven er to klassiske beregningsmetoder for knekking testet opp mot nåværende standard, som er Eurokode 3. Beregningsmetodene er to forskjellige forenklede metoder, som ble testet opp mot metode 2 i Eurokode 3. Dette ble gjort for å undersøke om de forenklede metodene kommer ut på konservativ side av Eurokode 3. For om de gjør det, kan de forenklede formlene spare ingeniører for betydelig arbeid.

Først ble det gjort rede for hva knekking er og bakgrunnen for oppgaven. Så ble de forskjellige metodene utledet og grundig gjennomgått. Forskjellene på hvordan knekkingsberegninger har blitt gjennomført opp gjennom historien er store, men selv den moderne Eurokode 3 låner momenter fra de tidligste metodene.

Metodene ble så brukt på fem caser. I hver case ble en bjelke utsatt for en aksial trykklast og i fire av tilfellene ble bjelken også belastet med et moment. I casene hadde bjelkene forskjellige opplagerbetingelser også. Bjelkene ble kontrollert for styrt knekking om sterk akse. Forenklet metode 1 og 2 og Eurokode 3, metode 2 ble brukt i de casene der bjelkene ble utsatt for et moment. Resultatet av beregningene ble så sammenliknet for å gi et inntrykk av hvordan metodene lå i forhold til hverandre.

Så ble det brukt et regneprogram for å kontrollere formlene ytterligere. Ved å variere bjelkelengden og laststørrelsene i hver case fant programmet den kombinasjonen som ga det høyeste resultatet etter Eurokode 3, metode 2, og som fortsatt var innenfor kravet etter en av de forenklede metodene. Det viste seg at de forenklede metodene hadde svakheter.

Forenklet metode 1 kom dårlig ut i én av casene, men kom ut på konservativ side i de andre. Forenklet metode 2 overskred kravet etter Eurokode 3, metode 2 i to av casene, riktignok i veldig spesielle tilfeller. Derfor er ikke de to forenklede metodene helt trygge å bruke, men de vil likevel komme på konservativ side av Eurokode 3, metode 2 i de fleste praktiske tilfeller.

ABSTRACT

In this master thesis two classic methods for buckling calculation were tested against the current standard, which is Eurocode 3. The calculation methods were two different simplified methods, which were tested against method 2 in Eurocode 3. This was done to see if the simplified methods would give results on the conservative side of Eurocode 3. If so, these methods would be considerably more time efficient to use by engineers than the current method.

In the introduction, buckling and the purpose of this thesis was described. Then the different methods were derived and thoroughly reviewed. There are great differences in the methods used to calculate buckling throughout history but even the modern Eurocode 3 borrows elements from the earliest methods.

The methods were then used to calculate five cases. In each case, a beam was subjected to an axial pressure load and in four of the cases the beam was also subjected to a moment of force. The beams were also subject to different support conditions in each case. The beams were controlled for steered buckling about the strong axis. Simplified method 1 and 2 and Eurocode 3, method 2, was used in the cases where the beam also was subjected to a moment of force.

A calculation program was then used for further analysis of the methods. By varying the beam length and the load size in each case the program found the combination that gave the highest result with Eurocode 3, method 2, and still were within the requirements of one of the simplified methods. The results of the calculations were then compared to each other. It turned out that the simplified methods had weaknesses.

Besides one case, the results of simplified method 1 were on the conservative side of Eurocode 3, method 2. Simplified method 2 exceeded the requirements in two cases, although this was under very special circumstances. Therefore, the two simplified methods are not completely safe to use, but they will come out on the conservative side of Eurocode 3 in most practical cases.

INNHOLDSFORTEGNELSE

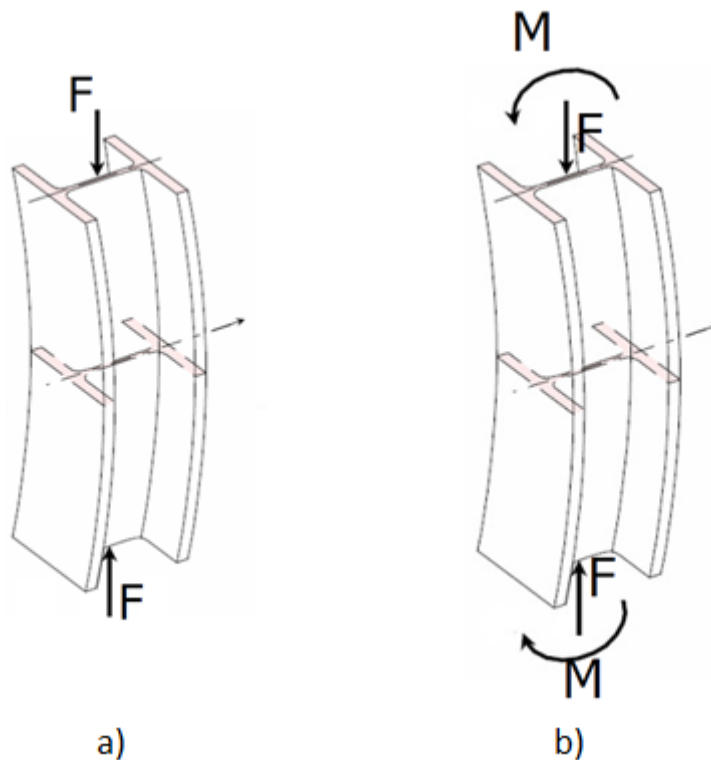
1	INNLEDNING.....	1
1.1	Bakgrunn	1
1.2	Problemstillinger	5
1.3	Målsettinger og begrensninger	5
1.4	Kvalitetssikring	6
1.5	Symboler og terminologi.....	7
2	BESKRIVELSER	12
2.1	Kravspesifikasjon	12
2.2	Knekking	12
2.2.1	Lokal knekking	12
2.2.2	Avvik.....	13
2.2.3	Slankhet.....	14
2.3	Sikkerhet.....	14
2.3.2	Klassiske beregningsmetoder.....	15
2.3.3	Eurokode 3	15
3	KLASSISKE BEREGNINGSMETODER	17
3.1	Knekking med aksialkraft	17
3.1.1	Euler.....	17
3.1.2	Tetmajer	23
3.1.3	Sikkerhetsfaktorer	26
3.2	Knekking med kombinert last	27
3.2.1	Metode 1, forenklet interaksjonsformel.....	27
3.2.2	Metode 2, svensk metode.....	28
4	EUROKODE 3.....	32
4.1	Bakgrunn	32
4.1.1	Tverrsnittsklasser	32
4.1.2	Knekkurver	35
4.1.3	Partialfaktorer	38
4.2	Grunnlagsteori	38
4.2.1	Knekking av stav med konstant tverrsnitt og tilsiktet sentrisk trykk, Eurokode 3-1-1, 6.3.1.1	39
4.2.2	Trykkstav med sinusformet formfeil	40
4.2.3	Bjelkesøyle, styrt knekking og moment om sterk akse, y	44
5	CASER.....	51
5.1	Case 1, kun aksiallast	52
5.1.1	Klassisk beregningsmetode.....	52
5.1.2	Beregning etter Eurokode 3	53
5.2	Case 2, fritt opplagret bjelke med aksial trykklast og midtstilt tverrlast.....	55
5.2.1	Klassiske beregningsmetoder.....	55



5.2.2	Beregning etter Eurokode 3	57
5.3	Case 3, jevnt fordelt last.....	61
5.3.1	Klassiske beregningsmetoder.....	61
5.3.2	Beregning etter Eurokode 3	63
5.4	Case 4, aksial trykkraft med.....	67
5.4.1	Klassiske beregningsmetoder.....	68
5.4.2	Beregning etter Eurokode 3	71
5.5	Case 5	74
5.5.1	Klassiske beregningsmetoder.....	75
5.5.2	Beregning etter Eurokode 3	77
5.6	Oppsummering.....	81
6	CASEANSLYSE	82
6.1	Fremgangsmåte Case 2, forenklet metode 1	83
6.2	Forenklet metode 1, HEB100-bjelke.....	85
6.3	Forenklet metode 2, HEB100-bjelke.....	90
7	DISKUSJON OG PROSESSEVALUERING	95
7.1	Diskusjon.....	95
7.2	Forbedringer	95
7	KONKLUSJON	96
7.1	Anbefalinger.....	96
7.2	Videre arbeid	97
8	LITTERATURREFERANSER	98
9	VEDLEGG.....	101
	Vedlegg 1	102
	Vedlegg 2.....	105

1 INNLEDNING

I denne oppgaven blir begrepet knekking brukt om det som mer presist kalles *global bøyningknekking*. Det er et fenomen som kan oppstå når en lang bjelke utsettes for en aksiell trykkraft. En vertikal bærebjelke i en konstruksjon er et eksempel på en bjelke som utsettes for en slik kraft. Blir vekten av det som bjelken bærer og dermed også kraften på bjelken stor nok, vil bjelken til slutt kollapse (knekke). Figur 1 viser to eksempler på hvordan slik knekking kan foregå.

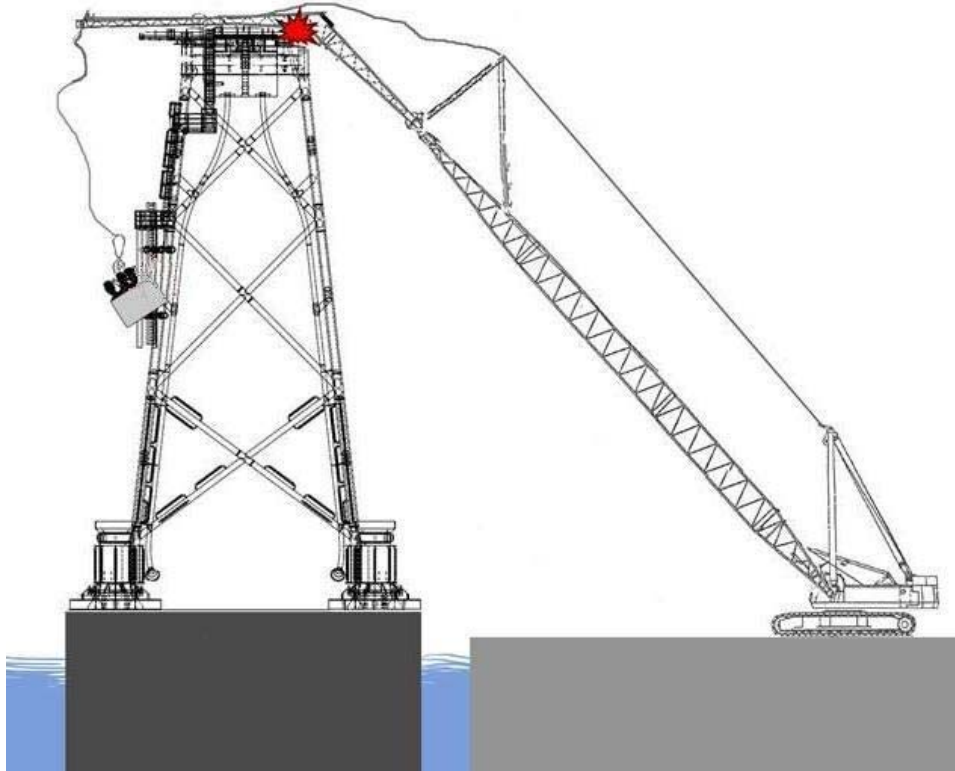


Figur 1. Her vises to tilfeller av global knekking. I tilfelle a) blir bjelken kun utsatt for en aksiell trykklast F , mens i tilfelle b) blir bjelken utsatt for en aksiell trykklast F og et bøyemoment M i begge ender.

1.1 Bakgrunn

Når det skjer ulykker der konstruksjoner kollapse, er det ofte knekking som er årsaken. I motsetning til en del andre sammenbrudd kan knekking skje uten særlig deformasjon i forkant. Derfor får en ofte ikke noe forvarsel om at en ulykke er i ferd med å skje. Når en bjelke først knekker, forsvinner svært mye av bjelkens

opprinnelige styrke. Det gjør at konstruksjoner kan kollapse raskt, noe som igjen gir liten tid til å forhindre skade og komme seg unna om en skulle være i nærheten. Derfor kan knekkingsulykker bli svært alvorlige, med store materielle ødeleggelser og skader på mennesker. Det er metodene for å hindre slike ulykker det blir sett nærmere på i denne oppgaven.



Figur 2. Forsidebildet [1] viser en illustrasjon av en alvorlig ulykke på Kværner ASA sitt verft på Verdal 12. mars 2012. Det røde punktet er der kranbommen knakk.

Figuren over viser et eksempel på en knekkingsulykke som skjedde under en inspeksjon av malingen på et vindmølleunderstell som var plassert på en lekter. En beltegående kran med en hovedbom forlenget med en kranbom, var utstyrt med en arbeidskurv med tre personer om bord. Da bommen gradvis ble senket, kom kranbommen i kontakt med rekkverket på toppen av vindmølleunderstellet. Da ble kranbommen utsatt for en tverrlast i tillegg til den aksielle trykklasten. Tverrlasten var stor nok til at kranbommen knakk. Arbeidskurven falt nedover og wiren som holdt den røk når bommen var omtrent 15 meter over dekket på lekteren. Alle de tre personene ble hardt skadet, men helsetilstanden deres er etter forholdene gode [2].

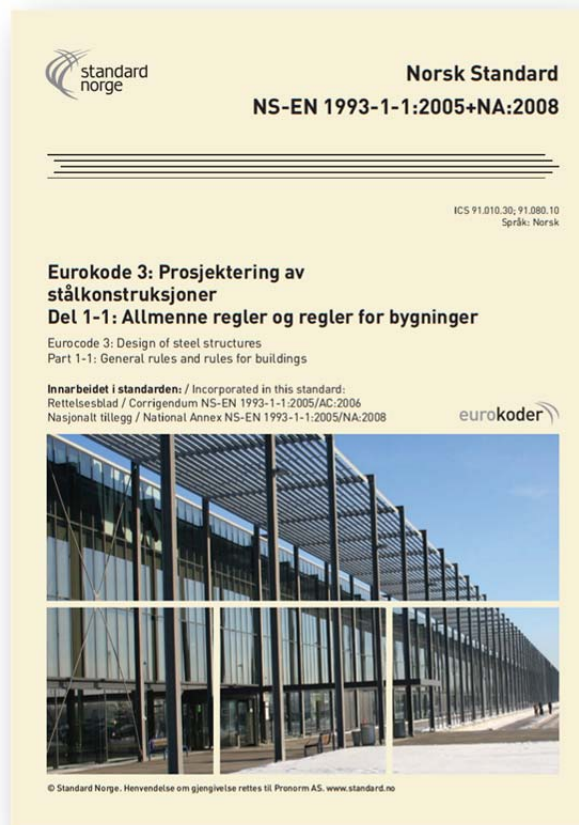
Ulykker som den på Verdal skjer heldigvis sjelden. Derfor dimensjoneres ikke kraner for å tåle slike belastninger. Snølaste kan i enkelte tilfeller bli så store at bærebjelker i bygninger knekker. Vindlaste kan også bli så store at de river byggverk over ende.

Dette er laster som det ofte må dimensjoneres mot, og for å systematisere slike dimensjoneringsprosesser er det utviklet standarder.

Innenfor teknikken er en standard et dokument som beskriver viktige deler av et produkt eller en produksjonsprosess. Det finnes standarder for nær sagt alt vi omgir oss med til daglig. Disse skal sørge for at produktene er trygge å bruke, holder tilfredsstillende kvalitet og ivaretar forbrukerens rettigheter. Standarder innføres ofte for å gjøre produkter enklere å forholde seg til. I 2009 godkjente den internasjonale telekom-unionen ITU en beslutning om å innføre en felles mobillader-standard for alle nye mobiltelefoner. Dette vil kutte dramatisk i antall ladere som produseres, noe som gjør det enklere for forbrukerne. Det vil også spare miljøet [3]. En standard kan kort forklares som «en felles enighet om en måte å gjøre ting på».

Standarder baseres på forskningsresultater, matematiske beregninger og erfaring. De beskriver varer eller tjenester ved å fastsette dimensjoner, materialer, kvaliteter, prøvingsmetoder, funksjons- og sikkerhetskrav, systemer, prosesser og terminologi. Derfor er standarder viktig i handel for å forsikre kunder om at produkter holder et ønsket nivå. Standarder godkjennes av et offentlig organ, enten regionalt, nasjonalt eller internasjonalt [4].

Eurokoder ble innført for å gi en felles standard for de europeiske landene. Eurokodene er en serie standarder for prosjektering av byggverk og dokumentasjon av produkters bæreevne/styrke til konstruksjonsformål [5]. Standardene ble utgitt i 28 europeiske land før november 2005, og tok over som eneste gjeldende standard i Norge 1. april 2010. Eurokodene med nasjonale tillegg erstatter de nasjonale standardene for konstruksjonsteknikk. Nasjonale tillegg er egne nasjonalt bestemte parametere for sikkerhet/pålitelighet, bestandighet mot ressursbruk, samt klimatiske og geografiske forhold. Dette anses som nasjonalt anliggende og kreves for at Eurokodene skal være gyldige [6] og [7].



Figur 3. Viser forsiden av «Eurokode 3: Prosjektering av stålkonstruksjoner - Del 1-1: Allmenne regler og regler for bygninger» [8]. Dette er standarden som brukes i denne oppgaven.

Det eksisterer i dag 10 forskjellige eurokoder, fra Eurokode 0: NS-EN 1990 Grunnlag for prosjektering av konstruksjoner til Eurokode 9: NS-EN 1999 Prosjektering av aluminiumskonstruksjoner. Eurokodene omfatter prosjektering av alt fra betong-, stål-, tre- og murkonstruksjoner, til prosjektering av bygninger som skal tåle jordskjelv. Hver eurokode har igjen flere deler og underdeler.

Eurokodene er ofte svært omfattende i forhold til standarden som var gjeldende i Norge frem til eurokodene tok over, nemlig norsk standard (NS). «NS 3472 Prosjektering av stålkonstruksjoner, Beregnings- og konstruksjonsregler» ble erstattet av «NS-EN 1993 Eurokode 3: Prosjektering av stålkonstruksjoner», og der NS 3472 besto av 127 sider består Eurokode 3 av 20 deler og underdeler på til sammen ca. 1250 sider [9]. Dette er mye på grunn av at metodene for styrkeberegning og dimensjonering etter Eurokode 3 gjerne er mer omfattende og tidkrevende enn etter gammel standard.

I mange tilfeller kan dimensjonering gjøres raskere og enklere med «forenklede metoder uten standard». Dette er formler som skal være på konservativ (trygg) side av

resultatene en vil få ved å dimensjonere etter eurokodene. Det betyr at ingeniører og andre kan spare betydelig med tid og arbeid på å velge slike forenklede metoder. Og om de forenklede metodene gjør at en må gå opp i bjelkestørrelse, kan en da heller gå tilbake og gjøre mer nøyaktige beregninger med eurokodene.

Problemet er bare at mange av de forenklede metodene ikke er testet ut for mange nok tilfeller til at de kan anses som helt trygge å bruke. Denne oppgaven vil derfor teste noen av de forenklede metodene i et visst antall tilfeller og eventuelt tilpasse konstantene i formlene for knekking, slik at en er sikrere på at en havner på konservativ side i forhold til Eurokode 3.

For de forenklede metodene, også kalt klassiske metoder, vil det bli gjort beregninger med to av de vanligste metodene. Disse vil enkelt bli omtalt som metode 1 og 2 i denne oppgaven. Det er også to forskjellige metoder for knekkingsberegninger i Eurokode 3, så dette kan være litt forvirrende. I beregningene med Eurokode 3 vil det kun bli sett på den ene metoden, metode 2. Alle metodene vil bli nærmere beskrevet senere.

1.2 Problemstillinger

I denne oppgaven vil det bli fokusert på følgende problemstillinger:

- Hvilke tilfeller skal velges ut?
- Ender de forenklede metodene på konservativ side av Eurokode 3 i alle tilfellene?
- Hvis ikke, er det mulig å justere konstantene slik at resultatene ender på konservativ side?

1.3 Målsettinger og begrensninger

For å komme frem til hovedmålet for oppgaven er det satt opp flere delmål. Det er også satt opp hvilke begrensninger som gjøres.

Hovedmål: Undersøke om de forenklede metodene uten standard er på konservativ side av Eurokode 3 og foreslå eventuelle endringer som gjør forenklede metoder uten standard tryggere å bruke.

Delmål:

1. Kartlegge de forskjellige metodene for å beregne knekking med og uten standard. Velge ut hovedtilfeller for sammenlikning.
2. Dimensjonere en rekke knekktilfeller med både forenklede metoder uten standard og Eurokode 3, metode 2. Her kan det være nyttig å benytte regneark.
3. Fremstille resultatene oversiktlig, gjerne i form av grafer.
4. Komme med anbefalinger til endringer i de forenklede metodene hvis resultatene ikke ligger på konservativ side av Eurokode 3, metode 2.

Et Gantt-diagram ligger med som vedlegg 2. Dette gir en utfyllende oversikt over hvordan arbeidet ble planlagt og gjennomført.

Begrensninger:

- Det finnes nærmest et uendelig antall knekktilfeller. Derfor har det vært viktig å velge ut noen generelle tilfeller for å kontrollere metodene.
- Det tas utgangspunkt i to forskjellige lastfaktorer, $\gamma_{f1} = 1,5$ og $\gamma_{f2} = 1,3$.
- Det er kun sett på H-bjelker med knekking og moment om sterk akse, forhindret knekking om svak akse, vipping og torsjon (styrt knekking).
- Ved knekkingsberegninger av bjelkesøyler vil det kun bli sett på beregninger med metode 2 i Eurokode 3, tillegg B.
- Det tas ikke hensyn til bjelkenes egenvekt.
- Knekking vil kun beregnes elastisk etter Eurokode 3. Dvs. at det kun blir sett på situasjoner der bjelken er i tverrsnittsklasse 1, 2 eller 3.
- Det vil kun bli gjort analyser med en HEB100-bjelke.

1.4 Kvalitetssikring

Kvalitetssikring rapport

Jeg har gått gjennom rapporten og språkvasket den, referanser, tabellnummerering, figurnummer, formelnummer og sidetall er sjekket to ganger. Jeg har også brukt malen fra oppdragsgiver. Kontrollert utregningene to ganger og kontrollert at alle symboler er kommet med i symbollisten osv.

Kvalitetssikring produkt

Kravspesifikasjonene er diskutert/tolket i samråd med oppdragsgiver på jevnlig møter. Jeg har brukt sikkerhetsfaktorene gitt av oppdragsgiver og brukt forskjellige standarder.

1.5 Symboler og terminologi

Som det kommer frem av symbollisten under vil enkelte betydninger ha flere symboler. Det kommer av at det brukes litt forskjellige symboler i de klassiske metodene og i Eurokode 3-standarden. Symbolene blir oppgitt i den rekkefølgen de blir benyttet, oppdelt etter kapittel. I kolonnen til venstre står symboler, i midten står betydningen og til høyre står det hvilken enhet symbolet har.

Symbolene vil også bli forklart i oppgaven første gang de brukes.

Følgende symboler benyttes i denne oppgaven:

Tabell 1 - Symboler og enheter som er brukt i denne oppgaven. MPa = N/mm².

Kapittel 1

F	Last, generelt	N
M	Moment	Nmm
γ_f	Partialfaktor for last (lastkoeffisient)	-
γ_{f1}	Partialfaktor for aksial trykklast	-
γ_{f2}	Partialfaktor for tverrlast	-

Kapittel 2

q	Jevnt fordelt tverrlast	N/mm
V	Skjærspenning	MPa
λ	Slankhet	-
n	Sikkerhetsfaktor, generelt	-
n_b	Sikkerhetsfaktor mot strekk- og trykkbrudd	-
σ_b	Bøyespenning	MPa
σ_{till}	Tillatt spenning	MPa
σ_f	Strekkfasthet	MPa
n_f	Sikkerhetsfaktor mot flyt	-
γ	Partialfaktor	-
γ_M	Partialfaktor for kapasitet (materialkoeffisient)	-
R_k	Karakteristisk verdi for kapasitet	MPa
f_y	Flytegrense	MPa
f_u	Strekkfasthet	MPa
σ	Spenning	MPa

Kapittel 3

l	Lengde	mm
l_k	Knekk lengde	mm



I	Arealmoment	mm ⁴
I _x	Arealmoment om x-aksen	mm ⁴
b	Bredde	mm
h	Høyde	mm
I _y	Arealmoment om y-aksen	mm ⁴
F _{cr}	Kritisk last, den lasten som sørger for at likevektstilstanden til en matematisk perfekt stav slutter å være stabil	N
F _K	Knekklast, den lasten som gir sammenbrudd i en virkelig stav med formavvik, egenspenninger og eksentrisiteter	N
E	Materialets elastisitetsmodul	MPa
I _{min}	Stavens minste arealmoment	mm ⁴
c ₁	Konstant	-
c ₂	Konstant	-
n _s	Antall svingninger i en stav belastet av en aksial trykklast	-
σ _k	Knekkspenning	MPa
R	Proporsjonalitetsgrense	MPa
λ ₀	Slankhetsverdi som skiller det plastiske og elastiske området	-
i	Treghetsradie	mm
A	Tverrsnittsreal	mm ²
I ₀	Arealmoment om tyngdepunktsaksen	mm ⁴
R _e	Materialets nedre flytegrense	MPa
n _k	Sikkerhetsfaktor mot knekking	-
F _{K,till}	Tillatt aksial trykklast etter Euler eller Tetmajer med sikkerhetsfaktor mot knekking	N
n _i	Interaksjonsfaktoren skal ivareta interaksjonen mellom trykkraft og moment	-
M _b	Det største momentet som virker på bjelken, etter første ordens teori	Nmm
M _{b,maks}	Det største momentet bjelken tåler før flyt opptrer i ytterste fiber etter elastisitetsteorien	Nmm
e ₀	Initiell nedbøyning, dvs. nedbøyning uten aksial trykkraft	mm
e	Nedbøyning	mm
W	Tverrsnittsmodul, kun om y-aksen i denne oppgaven	mm ³
ΔM	Moment på grunn av utbøyning og aksial trykklast	Nmm
β	Konstant for belastningstype etter forenklet metode 2	-

Kapittel 4

χ	Reduksjonsfaktor for relevant knekkform	-
λ̄	Relativ slankhet	-
α	Imperfeksjonsfaktor	-
γ _{M0}	Partialfaktor for tverrsnittskapasitet uansett tverrsnittsklasse	-



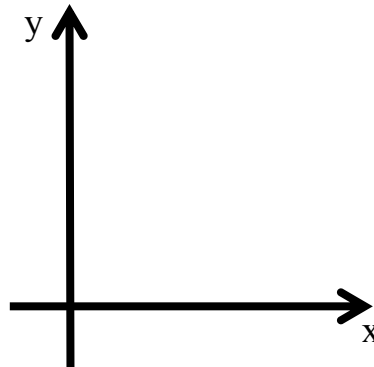
γ_{M1}	Partialfaktor for stavers kapasitet mot instabilitet påvist for hele staven	-
γ_{M2}	Partialfaktor for tverrsnittskapasitet mot brudd for strekkpåkjenning	-
N_{Ed}	Dimensjonerende aksialkraft (kun trykk i denne oppgaven)	N
$N_{b,Rd}$	Dimensjonerende kapasitet ved bøyingsknekking for en stav med sentrisk trykk	N
A_{eff}	Effektivt tverrsnittsareal	mm ²
y	Utbøyning et vilkårlig sted på bjelken	mm
y_0	Initiell utbøyning et vilkårlig sted på bjelken	mm
N_{cr}	Ideell kraft for den relevante knekkformen basert på bruttotverrsnittet til en matematisk perfekt stav.	N
N_{Rd}	Dimensjonerende verdi for kapasitet mot aksialkrefter	N
M_{Rd}	Dimensjonerende verdi for kapasitet for moment	Nmm
Q	Tverrlast	N
M_{Ed}	Dimensjonerende moment, det vil si det høyeste momentet som kan oppstå i bjelken	Nmm
M_{Ed}^*	Moment med forsterket maksimalverdi i forhold til det virkelige momentet og sinusformet momentdiagram	Nmm
C_m	Ekvivalent momentfaktor	-
k_{yy}	Interaksjonsfaktor for knekking om sterk akse	
N_{Rk}	Karakteristisk verdi av kapasitet for aksialt trykk	N
M_{Rk}	Karakteristisk momentkapasitet	Nmm
Kapittel 5		
Φ	Funksjon for å bestemme reduksjonsfaktoren χ	-
σ_1	Spenning i bjelkens overside	MPa
σ_2	Spenning i bjelkens underside	MPa
ψ	Forhold mellom maksimal trykk- og strekkspenning	-
ε	Faktor avhengig av f_y	-
Ψ	Forhold mellom endemomenter	-
M_h	Endemoment	Nmm
M_s	Momentet i bunnpunktet av momentdiagrammet	Nmm
α_s	Faktor	-

Interaksjonsformel

En formel der summen av forskjellige spenninger skal være under et visst krav.

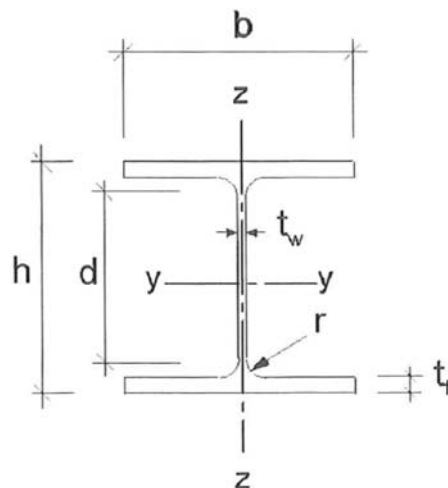
Koordinatsystem

Som hovedregel vil koordinatsystemet under brukes for beregningene i denne oppgaven. Hvis det brukes et annet koordinatsystem vil dette bli oppgitt på figuren til det aktuelle tilfellet.



Figur 4. Koordinatsystem som brukes hvis ikke noe annet er oppgitt.

Betegnelser og akser for bjelketverrsnittet defineres som i figur 5.



Figur 5. Viser betegnelser og akser for bjelketverrsnittet [10].

Case

Case vil i denne oppgaven bli brukt om et knekktilfelle. Begrepet case omfatter opplagerbetingelsene og lastsituasjonen, det vil si at bjelkelengde og laststørrelse vil kunne være forskjellig for en gitt case.



Tilfelle

Et tilfelle vil være en case med fastsatte laster og bjelkelengder.

2 BESKRIVELSER

2.1 Kravspesifikasjon

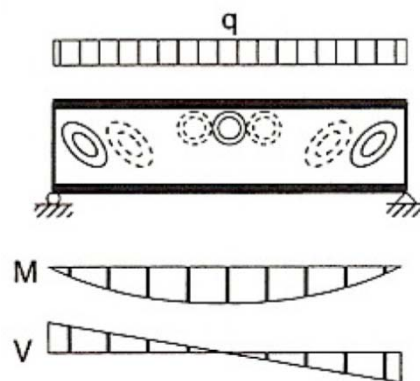
Eurokode 3 har et relativt komplisert regelverk for å dimensjonere knekktilfeller, derfor er det et behov for forenklede overslagsformler som gir mindre arbeid og som er på konservativ side av Eurokode 3. Oppgaven går ut på å prøve Eurokode 3, metode 2 mot eksisterende forenklede metoder og om mulig komme med endringer i disse formlene som gir overslagsberegninger som er mer i tråd med Eurokode 3 metode 2.

2.2 Knekking

I dette avsnittet gjøres det rede for en del sentrale begreper vedrørende knekking.

2.2.1 Lokal knekking

Knekking deles opp i to begreper, lokal og global knekking. Den knekkingsformen som har blitt omtalt til nå er den globale knekkingsformen. Det er for eksempel når en hel bjelke gir etter for en aksial trykkraft. Lokal knekking kan oppstå uten at det får større konsekvenser for en bjelkes bæreevne. Det avhenger av formen på bjelkens tverrsnitt.



Figur 6. Lokal knekking på en fritt opplagret bjelke utsatt for en jevnt fordelt last [11].

Lokal knekking kan for eksempel opptre som buler på steget til en I-bjelke, se figur 6. Bjelken på figuren er utsatt for en jevnt fordelt last og er fritt opplagret i hver ende.

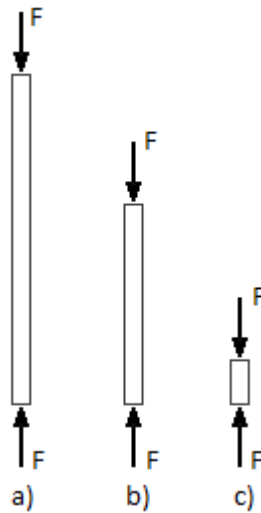
Det gjør at både bøye- og skjærspenninger opptrer i bjelken. Bøyepeningen kan gi lokal knekking i øvre og midte del av bjelken, der trykket er størst. Skjærspenningen kan gi lokal knekking i bjelkens ender, siden skjærspenningen er størst her, se figuren. Disse bulene kan opptre uten at bjelken nødvendigvis må byttes.

2.2.2 Avvik

Slanke bjelker får i praktiske tilfeller en utbøyning når de utsettes for en aksiell trykkraft. Det vil så godt som alltid oppstå små formfeil når bjelker produseres, som gjør at bjelken egentlig ikke er helt rett. Selv om disse feilene kan være umulig å se med det blotte øye, er de likevel en medvirkende årsak til at kraftens angrepslinje omtrent alltid faller med en liten avstand fra bjelkens tyngdepunktsakse. I tillegg er det gjerne egenspenninger (restspenninger) i bjelken. Dette er spenninger som ligger inne i bjelken uavhengig av om bjelken belastes eller ikke. De kan oppstå på grunn av de store temperaturforskjellene under valsingen av bjelken, for eksempel mellom steg og flens. Egenspenningene kan være store og ligge helt opp mot stålets flytegrense. Trykkraften som bjelken belastes med er som regel heller ikke jevnt fordelt over bjelkens tverrsnitt.

Disse avvikene gjør at trykkraften skaper et bøyemoment i bjelken. Det som da skjer er at bjelken vil begynne å bule ut når kraften øker. Bjelker i alle materialer får en slik deformasjon, selv de materialene som anses som helt stive. Deformasjonen er likevel ofte for liten til at det er mulig å se den med det blotte øye, men med måleinstrumenter oppdages den lett.

2.2.3 Slankhet



Figur 7. Bjelker med samme tverrsnittsareal og forskjellig lengde utsettes for en aksiell trykkraft F .

En metallstang må være forholdsvis lang og tynn for at den skal kunne knekke. I figur 7 vises tre bjelker som utsettes for en trykkraft F . Bjelkene har forskjellig lengde, men samme tverrsnitt. Hvis kraften øker på bjelke a vil stanga bli bøyd ut til siden. Fortsetter kraften å øke vil bjelken ved en viss last knekke. Hvis kraften øker på bjelke b, vil den også bøye ut og knekke, men det vil kreve større kraft enn på bjelke a. Øker kraften på bjelke c, vil bjelken sannsynligvis ikke knekke, men gå til ett vanlig trykkbrudd uten utbøying. Dette vil kreve større kraft enn å knekke både bjelke a og b. Bjelkens lengde i forhold til tverrsnitt har altså mye å si for å bestemme bjelkens kapasitet mot knekking. Dette forholdet kalles bjelkens slankhet og defineres slik at jo større slankhet en bjelke har, jo mindre motstand har den mot utbøying. Slankheten har symbolet λ . Den matematiske definisjonen av slankhet vil bli behandlet i avsnitt 3.1.2.

2.3 Sikkerhet

Det vil alltid være flere usikkerhetsmomenter ved dimensjonering av konstruksjoner. Avvik i bjelken er allerede omtalt, men det kan også oppstå andre avvik som at bjelken belastes med mer enn den er dimensjonert for og uforutsette hendelser som slag og støt i bjelken under last. Disse avvikene skal heller ikke føre til kollaps av konstruksjonen. Derfor brukes det sikkerhetsfaktorer for å ivareta usikkerhetsmomentene både i de forenklede metodene uten standard og Eurokode 3.

Det er altså ikke slik at konstruksjoner dimensjoneres for å utnytte materialet fullt ut. Grunnen til at dette vil være sentralt i denne oppgaven er at resultatene av dimensjoneringen avhenger mye av hvilken grad av sikkerhet en velger i beregningene.

2.3.2 Klassiske beregningsmetoder

I den klassiske mekanikken ivaretas sikkerheten med en sikkerhetsfaktor n . I korthet sørger denne faktoren for at konstruksjonen kun utsettes for en del av den belastningen som teoretisk skal til for å gi brudd. Alle avvikene skal bli ivaretatt av denne faktoren. Sikkerheten n_b mot strekk- og trykkbrudd blir materialets strekk- og trykkfasthet σ_B delt på tillatt strekk- og trykkspenning σ_{till} , slik [12]:

$$n_b = \frac{\sigma_B}{\sigma_{till}} \quad (1)$$

På samme måte blir sikkerhetsfaktoren mot flyt:

$$n_f = \frac{\sigma_f}{\sigma_{till}} \quad (2)$$

2.3.3 Eurokode 3

I Eurokode 3 brukes en litt annen form for sikkerhetsfaktor enn det som brukes i den klassiske mekanikken. Sikkerhetsfaktoren er delt opp i flere delfaktorer, såkalte partialkoeffisienter. Da er det for eksempel slik at én skal ivareta sikkerheten i forhold til materialet, én skal ivareta sikkerheten i forhold til usikkerhet i produksjonen og én skal ivareta sikkerheten i forhold til lasten. Til sammen er det en rekke partialkoeffisienter å forholde seg til ved dimensjonering.

For partialkoeffisientene brukes tegnet for den greske bokstaven gamma, γ . De to partialkoeffisientene som brukes i denne oppgaven er lastkoeffisienten γ_f og materialkoeffisienten γ_M . Lastkoeffisienten skal ivareta usikkerheten i lasten og multipliseres med den teoretiske lasten. Det gir den lasten konstruksjonen skal dimensjoneres for, dimensjonerende last.

Forts. neste side.

Materialkoeffisienten γ_M er egentlig en samling av de delfaktorene som gjenstår og oppgis i det nasjonale tillegget. De ulike konstruksjonsmaterialene har ulike teoretiske grenseverdier, som brudd- og bøyefasthet. Disse grenseverdiene går fram av konstruksjonsstandardene. Å dividere den karakteristiske (teoretiske) grenseverdien med materialkoeffisienten, gir den dimensjonerende verdien som en kan regne med at materialet tåler. Partialkoeffisientene for eurokode kan beskrives slik:

$$\gamma_M \cdot \gamma_f = \frac{R_k}{\sigma} \quad (3)$$

Her er:

- R_k karakteristisk verdi for kapasitet, enten flytegrense f_y eller strekkfasthet f_u .
- σ spenningen som opptrer i materialet.

3 KLASSISKE BEREGNINGSMETODER

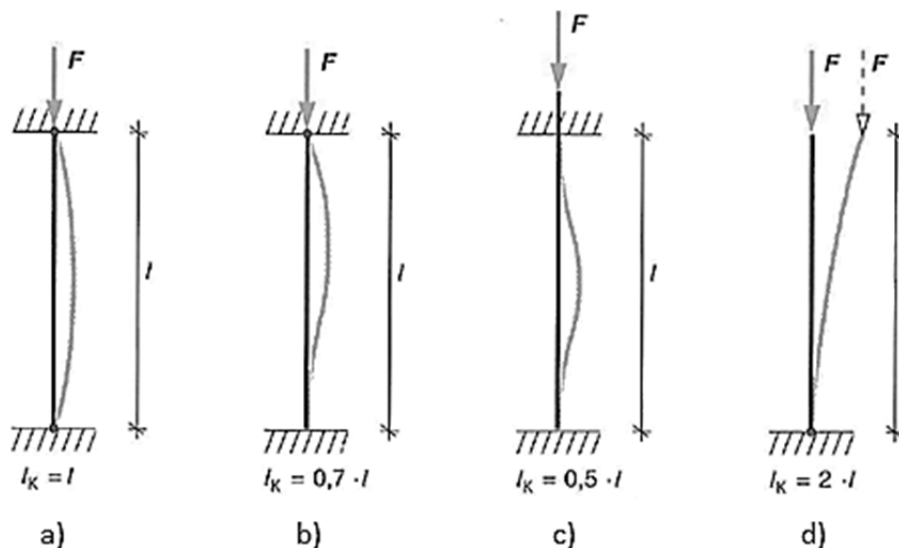
I dette kapittelet gjennomgås de klassiske metodene for dimensjonering av knekktilfeller. Det er disse metodene som ble brukt før Eurokode 3.

3.1 Knekking med aksialkraft

I dette avsnittet er bjelkene kun utsatt for en aksial trykkraft.

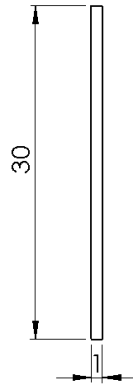
3.1.1 Euler

Euler var en sveitsisk matematiker som for ca. 200 år siden begynte å utforske knekkingsproblemer [13]. Han viste at fenomenet knekking kan deles opp i fire hovedtilfeller. Formen deformasjonen eller bulen får avhenger nemlig av hvordan bjelken er innspent. Figur 8 viser de fire hovedtilfellene av knekking som Euler kom fram til.



Figur 8. De fire hovedtilfellene av knekking som Euler kom frem til [14]. På figuren er a) leddlagret i begge ender, b) leddlagret og fast innspent, c) fast innspent i begge ender og d) fast innspent i den ene enden og fri i den andre. Knekk lengden er oppgitt under hvert tilfelle.

Både erfaring og teori tilsier at knekking vil skje om den akselen som har det minste arealmoment (også kalt treghetsmoment). Her kan en linjal igjen brukes som eksempel. Figur 9 under, viser en linjal med bredde 1 mm og høyde 30 mm.



Figur 9. Linjal med bredde 1 mm og høyde 1 mm.

For denne linjalen blir arealmomentet om de to aksene [15]:

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{1 \text{ mm} \cdot (30 \text{ mm})^3}{12} = 2250 \text{ mm}^4 \quad (4)$$

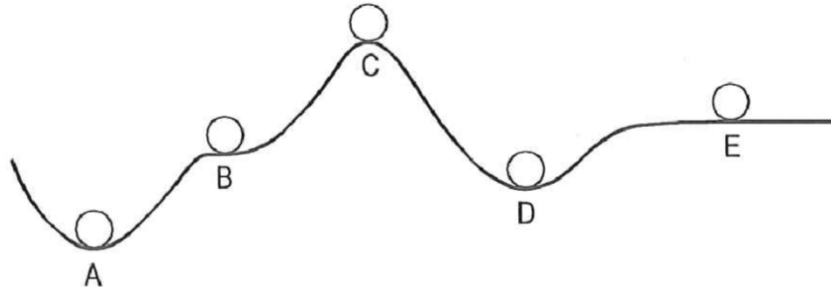
$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{30 \text{ mm} \cdot (1 \text{ mm})^3}{12} = 2,5 \text{ mm}^4 \quad (5)$$

Arealmomentet er altså klart minst om y-aksen. Det viser seg også at utbøyningen skjer om denne aksen. Derfor beregnes knekkingstilfeller alltid om den aksen med minst arealmoment (svak akse), hvis knekkingen ikke er styrt om sterk akse. I denne oppgaven er alle bjelkene beregnet for styrt knekking om sterk akse.

Eulers formler baserer seg på teori og bestemmer *kritisk last* (F_{cr}) for en matematisk perfekt stav. Den kritiske kraften er den kraften som skal til for at en stav ikke lenger er i en *stabil* likevektstilstand. Kritisk last skiller seg fra begrepet *knekklast* (F_K) som er den kraften som skal til for å gi sammenbrudd i en virkelig stav med formavvik, egenspenninger og eksentrisiteter. Begrepet kritisk last brukes ofte noe upresist om knekklast [16].

En stabil stav vil returnere til sin opprinnelige posisjon etter en liten forskyvning. En stav som ikke er stabil er enten *instabil* eller *indifferent*. Instabilitet karakteriseres ved at hvis en stav i likevekt gis en liten forstyrrelse (perturbasjon) fra sin likevektstilstand, vil staven få en endring som er stor i forhold til forstyrrelsens størrelse [16]. Dette kan for eksempel være en stav som er belastet med tilnærmet knekklast, som da knekker når den får en liten dytt i siden. En stav i en indifferent (nøytral) likevektstilstand vil være stabil selv etter små forstyrrelser. I figur 10 er

likevektstilstandene vist som en modell med en kule som kan bevege seg friksjonsfritt på et ujevnt underlag.



Figur 10. Kuler som ligger på et friksjonsfritt og ujevnt underlag [16].

Figuren over kan brukes til å forklare de forskjellige likevektstilstandene til en bjelke. Kula i posisjon A og D representerer en stabil likevektstilstand. Her vil kula gå tilbake til utgangsposisjonen om den skulle bli utsatt for små forstyrrelser. Kula i posisjon C representerer en ustabil likevektstilstand, siden en liten forstyrrelse vil medføre en stor forandring. Likevektstilstanden til kula i posisjon B vil også være ustabil. Kula i posisjon E vil være indifferent, fordi kula er stabil i et antall nabopunkter til E.

Euler fant dette generelle uttrykket for kritisk last:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_k^2} \quad (6)$$

Her er:

E: Materialets elastisitetsmodul.

I_{min} : Stavens minste arealmoment.

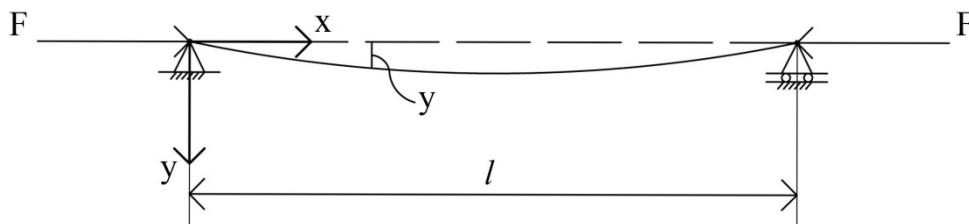
l_k : Knekk lengde.

Knekk lengden er avstanden mellom infleksjonspunktene (krumningen på utbøyningen skifter retning) og avhenger derfor av innspenningsforholdene for bjelken i det aktuelle knekktilfellet. Figur 8 viser knekk lengden for hovedtilfellene som Euler kom frem til. For mer kompliserte strukturer er det egne metoder for å finne knekk lengden. Eurokode 3 Del 1-1 gir ingen generell fremgangsmåte for å beregne knekk lengden. Punkt 5.2.2 (8) gir derimot noen retningslinjer om en del hensyn som må gjøres når

knekk lengden skal finnes. I praksis brukes det enkle metoder fra forskjellig litteratur, oversikter slik som figur 8 eller dataprogrammer for å finne knekk lengden [17].

Utledning av Eulers formler

Leddlagret stav med trykkraft



Figur 11. Bjelken er utsatt for kraften F . Bjelken er fritt opplagret i begge ender og får utbøyningen y .

$$M(x) = -F \cdot y \quad (7)$$

Differensiallikningen for den elastiske linjen blir:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{E \cdot I_{min}} = \frac{F \cdot y}{E \cdot I_{min}} \quad (8)$$

Innfører betegnelsen:

$$k = \sqrt{\frac{F}{E \cdot I_{min}}} \quad (9)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{F \cdot y}{E \cdot I_{min}} = y'' - k^2 \cdot y = 0 \quad (10)$$

Dette er en homogen differensiallikning med den generelle løsningen:

$$y(x) = c_1 \cdot \sin(k \cdot x) + c_2 \cdot \cos(k \cdot x) \quad (11)$$

Ser nærmere på randbetingelsene for å finne verdiene for c_1 og c_2 . Ser først på likning 11 i det første opplagerpunktet der x er lik null og nedbøyningen y også er lik null.

$$x = 0: y(0) = 0 + c_2 \cdot \cos(k \cdot x) = 0$$

Det gir verdien for c_2 :

$$c_2 = 0$$

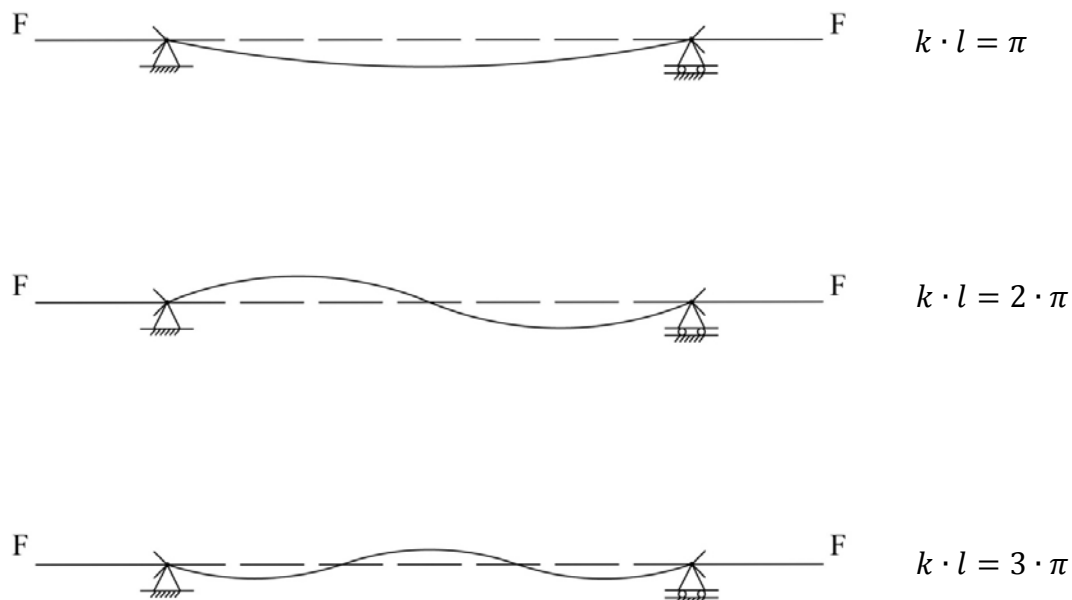
Ser så på likning 11 i det andre opplagerpunktet. Her er x lik lengden av bjelken (l) og nedbøyningen y er lik null:

$$x = l: y(l) = c_1 \cdot \sin(k \cdot l) = 0$$

Det gir denne mulige verdien for c_1 :

$$c_1 = 0$$

$c_1 = 0$ vil tilsvare en helt rett stav fordi nedbøyningen y aldri kan være noe annet enn null. Når $c_1 \neq 0$ må $k \cdot l$ være $n_s \cdot \pi$ fordi en stav som knekker under de innspenningsforholdene som er i vist i figur 11 alltid vil knekke med et helt antall svingninger. n_s vil altså være antall svingninger staven får i en knekksituasjon, se figur 12.



Figur 12. Viser forskjellige knekkmuligheter av en stav fast innspenn i den ene enden og fri i den andre [18]. Stafven i den øverste figuren her en svingning, den neste har to og den nederste har tre.

Knekkraften vil være lavest når $n_s = 1$, som tilsvarer at staven har én svingning.

$$k \cdot l = n_s \cdot \pi \quad (12)$$

$$\sqrt{\frac{F_{cr}}{E \cdot I_{min}}} \cdot l = 1 \cdot \pi$$

$$\left(\sqrt{\frac{F_{cr}}{E \cdot I_{min}}} \right)^2 = \left(\frac{\pi}{l} \right)^2$$

$$\frac{F_{cr}}{E \cdot I} = \frac{\pi^2}{l^2}$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l^2} \quad (13)$$

Dette er da formelen for å finne den kritiske kraften for tilfelle 1, der bjelken er leddet i begge ender. På en måte kan en si at denne likningen brukes for å finne kritisk last også for de andre tilfellene, bare at lengden justeres til tilfellets knekkklengde l_k .

Stang fast innspent i den ene enden og fritt opplagret i den andre [18].

Dette tilfellet tilsvarer knekksituasjonen i figur 8 b).

$$F_{cr} \approx \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l^2} \quad (14)$$

Stangen er fast innspent i begge endene [19].

Dette tilfellet tilsvarer knekksituasjonen i figur 8 c).

$$F_{cr} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l^2} \quad (15)$$

Stav fastspent i den ene enden og fri i den andre, utsatt for trykkraft [18]

Utledningen av denne formelen finnes i vedlegg 1. Dette tilfellet tilsvarer knekksituasjonen i figur 8 d).

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{4 \cdot l^2} \quad (16)$$

Likningene for de fire tilfellene forenkles vanligvis til Eulers formel slik den står i likning (13):

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_k^2} \quad (17)$$

Knekk lengden l_k for det gitte knekktilfellet hentes da fra figurer lik figur 8.

3.1.2 Tetmajer

Under utledningen av Eulers formler er det forutsatt at Hookes lov gjelder. Det betyr at materialet er i det elastiske området og slik knekking kalles derfor *elastisk knekking*. Da kan ikke knekkspenningen σ_k være større enn proporsjonalitetsgrensen R . Hvis trykkspenningen kommer over proporsjonalitetsgrensen gir Eulers formler for høye verdier for knekkspenningen, og er derfor ikke gyldige. Andre formler er derfor nødvendig for å kontrollere bjelker med spenninger i dette området [20].

Den ungarske professoren Ludwig von Tetmajer (1850-1905) var en pioner innenfor utviklingen av forskningslaboratorier som fastsatte de fysiske og mekaniske egenskapene til forskjellige materialer [21] og [22]. Der Euler baserte sine formler på beregninger fant Tetmajer sine formler ved empiri (forsøk).

Det viser seg at den tillatte knekkspenningen blir for høy når slankheten passerer en viss grenseverdi, λ_0 . Det er denne verdien som skiller det *plastiske* eller *uelastiske* området fra det *elastiske*. Når $\lambda > \lambda_0$ er knekkingen elastisk, mens når $\lambda < \lambda_0$ er knekkingen i det plastiske området [20].

For å utlede formelen som trengs for å finne λ_0 , innføres et nytt uttrykk, treghetsradien i . Treghetsradien defineres slik:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (18)$$

Her er:

I: Arealmomentet.

A: Tverrsnittsarealet.

Formelen for i er hentet fra Steiners formel [23]:

$$I = h^2 \cdot A + I_0 \quad ()$$

I_0 : Arealmomentet om tyngdepunktsaksen.

Steiners formel brukes for å finne arealmomentet for en flate med hensyn på en akse som ligger parallelt med tyngdepunktsaksen. Hvis hele flaten plasseres i en avstand i fra tyngdepunktsaksen, vil arealet av flaten bli uendelig smalt og arealmomentet $I_0 = 0$. Setter inn at $h = i$ og da ser Steiners formel slik ut:

$$I = i^2 \cdot A \quad (19)$$

Dette er det samme som likning 18. Knekkspenningen i en bjelke er:

$$\sigma_K = F_K \cdot A \quad (20)$$

Dette settes inn i uttrykket til euler for kritisk last (likning 6). Her gjøres forenklingen at kritisk last settes lik knekklast:

$$\sigma_K \cdot A = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A \cdot i^2}{l_k^2}$$

Likningen ordnes:

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{l_k}{i}\right)^2}$$

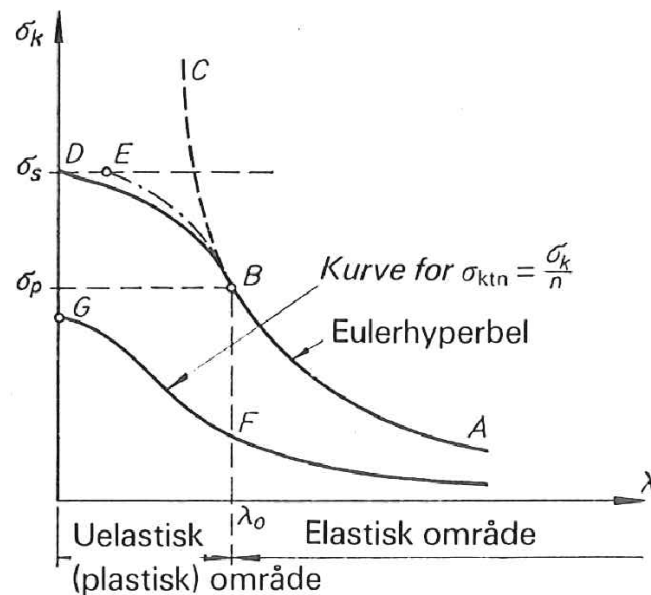
Slankheten λ defineres slik [24]:

$$\lambda = \frac{l_k}{i} \quad (21)$$

Det gir denne formelen for knekkspenning:

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad (22)$$

Grafen til denne likningen er en hyperbel av tredje grad fordi den inneholder to variabler, σ_K og λ . Denne grafen kalles for Euler-hyperbelen. Figur 13 viser sammenhengen mellom σ_K og λ .



Figur 13. Viser sammenhengen mellom knekkspenningen σ_K og slankheten λ [25].

For å finne slankheten λ_0 , settes proporsjonalitetsgrensen R inn for knekkspenningen σ_K :

$$R = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_0^2} \quad (23)$$

Det gir dette uttrykket for λ_0 :

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{R}} \quad (24)$$

Det kan være vanskelig å finne sikre verdier for R , men verdien $R = 0,8 \cdot R_e$ (der R_e er materialets nedre flytegrense) stemmer bra [25].

Gjennom sine forsøk kom Tetmajer frem til de formlene som har fått størst gjennomslag for beregninger av knekkspenninger i det plastiske området. Den generelle formen på Tetmajers formel er:

$$\sigma_K = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2 \quad (25)$$

Konstantene a , b og c har følgende verdier:

Tabell 2. Verdier for ulike materialer i Tetmajers formel.

Materiale	a	b	c	Gjelder for
Furu	29	0,19	0	$\lambda < 100$
Bløtt stål	310	1,14	0	$\lambda < 110$
Hardt stål	335	0,62	0	$\lambda < 90$
Støpejern	776	12	0,054	$\lambda < 80$

Som det kommer frem av verdiene i tabellen over vil Tetmajers formel danne en rett linje for alle materialene unntatt støpejern. Formelen gir et mer riktig bilde av bjelkens kapasitet i spenningsområdet mellom proporsjonalitetsgrensen R og materialets nedre flytegrense R_e . Overskrider knekkspenningen materialets flytegrense, gjelder ikke Tetmajers formel lenger. Knekkfastheten kan da settes lik flytegrensen [26].

3.1.3 Sikkerhetsfaktorer

Som nevnt er formlene til Euler og til en viss grad Tetmajer utledet under ideelle forhold som en ikke kan forvente i praksis. Normalt vil det forekomme en del avvik. Dette medfører at en ved dimensjonering ofte bruker høye sikkerhetsfaktorer når en dimensjonerer mot knekking.

Det er stor forskjell på hvilke sikkerhetsfaktorer som anbefales, og det eksisterer litteratur som anbefaler så høye sikkerhetsfaktorer som 30. Dette kommer av at det av

og til dimensjoneres mot utmatting på denne måten. Det vanlige er riktignok sikkerhetsfaktorer på 3-6 for eulerområdet og 1,75-4 for tetmajerområdet [27].

Tabellen under viser en oversikt over vanlige sikkerhetsfaktorer mot knekking (n_k) i eulerområdet [19]:

Tabell 3. Ulike sikkerhetsfaktorer ved knekking i eulerområdet.

$n_k = 3$	spesielle belastningstilfeller ved hus-, bru- og krankonstruksjoner i stål
$n_k = 3,7-4$	vanlige belastningstilfeller i stålkonstruksjoner
$n_k = 5-8$	trekonstruksjoner
$n_k = 8-10$	maskinkonstruksjoner med statisk belastning
$n_k = 10-30$	maskinkonstruksjoner med dynamisk belastning

3.2 Knekking med kombinert last

Bjelker som utsettes for en kombinert trykkraft og en kraft fra siden (bøyemoment av 1. orden) kalles *bjelkesøyer*. Det er flere grunner til at en slik kraftkombinasjon ofte oppstår. Det vanligste er tverrkrefter på bjelken, momenter i opplagringen av stavendene og momenter som oppstår i bjelken fordi aksialkraftens angrepslinje ikke sammenfaller med bjelkens tyngdepunktsakse (kraften er eksentrisk) [28].

For å beregne risikoen for knekking i en bjelkesøyle er det utarbeidet flere forskjellige forenklete metoder. Her blir to av de vanligste gjennomgått nærmere.

3.2.1 Metode 1, forenklet interaksjonsformel

Denne metoden er avledet fra Stålhåndbok, Del 3, ISBN 82-91466-00-9. Boka utgis av Norsk Stålforbund. Den avledede er ment å komme ut på konservativ side av Eurokode 3. Sikkerhetsfaktoren som brukes for få finne tillatt knekklast settes til 3.

Prinsippet går ut på å fastlegge trykklasten og det største momentet bjelken utsettes for i forhold til bjelkens kapasitet. Disse verdiene settes inn i en enkel interaksjonsformel. Dersom resultatet blir mindre eller lik 1 skal det ikke være fare for knekking [27].

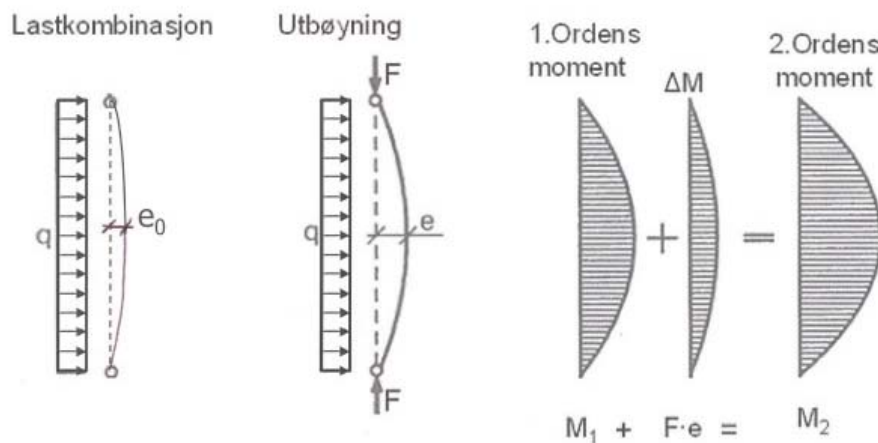
$$\frac{F}{F_{K,till}} + \frac{n_i \cdot M_b}{M_{b,maks}} \leq 1 \quad (26)$$

Her er:

- F: trykkraften som virker på bjelken
- $F_{K,till}$: tillatt aksial trykklast etter Euler eller Tetmajer med sikkerhetsfaktor mot knekking.
- n_i : interaksjonsfaktoren skal ivareta interaksjonen mellom trykkraft og moment. Settes lik 1,5.
- M_b : det største momentet som virker på bjelken, etter første ordens teori.
- $M_{b,maks}$: det største momentet bjelken tåler før flyt opptrer i ytterste fiber etter elastisitetsteorien.

3.2.2 Metode 2, svensk metode

Denne metoden ble tidligere brukt i svenske ”Normalbestämmelser för järnkonstruksjoner till byggnadsverk” og kalles derfor for svensk metode. For dette avnittet brukes referanse [29].



Figur 14. Førsteordens moment og moment av trykkraften danner sammen et andreordens moment [30].

For en bjelke med lastene som vist på figuren over kan utbøyningen beskrives slik:

$$e \approx \frac{e_0}{1 - \frac{F}{F_K}} \quad (27)$$

Her er:

e : Nedbøyning

e_0 : stavens største utbøyning når $F = 0$. I dette tilfellet vil det være utbøyningen på grunn av den jevnt fordelte lasten q .

Utledning av uttrykket for e i likning () kommer i avsnitt 4.2.2.

Figur 14 viser en oversikt over kreftene som virker på en bjelkesøyle med utbøyning. Kreftene ved stavens midtpunkt blir:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{\Delta M}{W} \quad (28)$$

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{F \cdot e}{W}$$

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{F \cdot e_0}{W \left(1 - \frac{F}{F_K}\right)} \quad (29)$$

Utbøyningen e_0 på grunn av den jevnt fordelte lasten er [31]:

$$e_0 = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I} \quad (30)$$

Setter dette inn i likning 29:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{F \cdot 5 \cdot q \cdot l^4}{W \cdot 384 \cdot E \cdot I \left(1 - \frac{F}{F_K}\right)} \quad (31)$$

Maks moment for bjelke belastet med jevnt fordelt last [31]:

$$M = \frac{q \cdot l^2}{8} \quad (32)$$

Setter in i likning (31):

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{F \cdot 5 \cdot M \cdot l^2}{W \cdot 48 \cdot E \cdot I \left(1 - \frac{F}{F_K}\right)} \quad (33)$$

Løser Eulers likning for knekkraft med hensyn på $\frac{l^2}{E \cdot I}$:

$$F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_k^2} \Rightarrow \frac{l_k^2}{E \cdot I} = \frac{\pi^2}{F_K}$$

l_k er i dette tilfellet lik lengden l :

$$\frac{l^2}{E \cdot I} = \frac{\pi^2}{F_K} \quad (34)$$

Setter inn i likning (33):

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{\pi^2 \cdot F \cdot 5 \cdot M}{48 \cdot W \cdot F_K \cdot \left(1 - \frac{F}{F_K}\right)} \quad (35)$$

Slår sammen konstantene til én:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{1,028 \cdot M \cdot F}{W(F_K - F)} \quad (36)$$

Sier en at spenningen ikke kan bli høyere enn flytegrensen, er dette en formel for bøyingsknekkning. Formelen ivaretar imidlertid ikke geometriske formfeil og egenspenninger i staven før det brukes en sikkerhetsfaktor.

Denne metoden er en ren spenningskontroll. Den sier at trykkspenningen pga. normalkraft, trykkspenning pga. eksternt moment og bøyespenning pga. eksternt utbøyning ikke skal være mindre eller lik tillatt spenning. For å ivareta formfeil og egenspenninger brukes en sikkerhetsfaktor n . n settes vanligvis lik 2. Konstanten i likning 36 gjelder for en belastningstype med en jevnt fordelt tverrlast, en aksial trykklast og at begge endene er fritt opplagret. Da erstattes konstanten med gitte verdier for den belastningssituasjonen. Konstanten har da betegnelsen β . Med sikkerhetsfaktor blir da likningen for metode 2 lik:

$$\frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{\beta \cdot M}{W} \cdot \frac{n \cdot F}{(F_K - n \cdot F)} \leq \sigma_{till} = \frac{R_e}{n} \quad (37)$$

F_K er knekkraften etter Euler eller Tetmajer. Tabellen under viser verdier for konstanten β når bjelken utsettes for andre belastningssituasjoner.

Tabell 4. Faktoren β avhenger av belastningstypen. Tabellen viser konstanten for flere forskjellige belastningstyper [32].

I_K	Belastningstype	β	Belastningstype	β	I_K
$2I$		0,822		0,617	$2I$
I		0,822		1,028	I
I		$\left[\frac{1}{8} - \frac{1}{6} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right] \cdot \pi^2$		1,234	I

4 EUROKODE 3

4.1 Bakgrunn

Eurokode 3: Del 1-1 forsøker å gi et mest mulig reelt bilde av risikoen for knekking av belastede bjelker. Derfor er disse metodene grundigere enn de som har blitt gjennomgått til nå. Blant annet tas det nå hensyn til eventuell lokal knekking.

4.1.1 Tverrsnittsklasser

Det viser seg at det for noen tverrsnitt kan oppstå lokal knekking før spenningen når flytegrensen. Til nå har ikke dette hatt noe å si for knekkingsberegningene. Lokal knekking kan medføre at bjelkens momentkapasitet reduseres fordi disse bjelkene ikke kan dimensjoneres plastisk. Derfor er det viktig å fastsette hvordan lokal knekking påvirker bjelkens bæreevne på en enkel måte. I Eurokode 3 gjøres dette ved å dele bjelker inn i fire forskjellige tverrsnittsklasser. Bjelker i tverrsnittsklasse 1 og 2 kan dimensjoneres plastisk, mens bjelker i tverrsnittsklasse 3 og 4 må dimensjoneres elastisk [33].

Tverrsnittsklasse 1

Tverrsnitt som opprettholder sin styrke selv om det får en betydelig plastisk deformasjon. Deformasjonen oppstår i for eksempel et flytledd. En bjelke som er dimensjonert etter tverrsnittsklasse 1 og som utsettes for sin maksimale last, vil fortsatt være deformert om belastningene fjernes.

Tverrsnittsklasse 2

Tverrsnitt som vil nå full plastisk kapasitet, men som får lokal knekking hvis tverrsnittet får plastisk deformasjon.

Tverrsnittsklasse 3

Tverrsnitt som akkurat når flyt i det mest påkjente punktet før det oppstår lokal elastisk knekking. Enkelte deler av tverrsnittet vil kunne dimensjoneres plastisk.

Tverrsnittsklasse 4

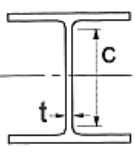
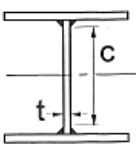
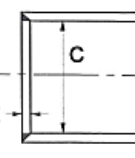
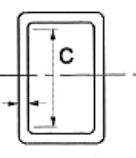
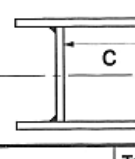
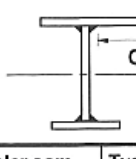
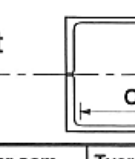
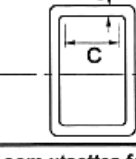
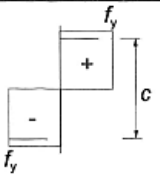
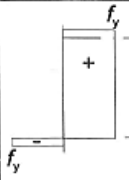
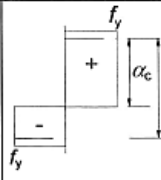
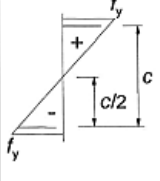
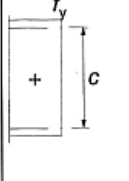
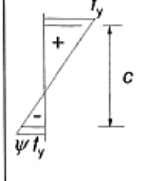
Tverrsnitt som ikke passer inn i en av de andre klassene. Her oppstår lokal knekking før det mest belastede punktet når flyt. Bjelker i denne klassen vil ikke kunne dimensjoneres plastisk.

Enkelt kan en si at tverrsnittsklasse 1 er den mest gunstige, mens tverrsnittsklasse 4 er den minst gunstige.



Klassifisering av tverrsnitt avhenger av forholdet mellom bredde og tykkelse i de trykkpåkjente delene av tverrsnittet. I Eurokode 3 oppgis prosedyrene for klassifisering av tverrsnittet til en gitt bjelke, se tabell 5. Klassifiseringen medfører noe arbeid, så for bjelker kun utsatt for trykk eller bøyning benyttes ofte oppslagsverk for å finne tverrsnittsklassen. «Stål håndbok Del 1 Produkter av stål» 5. utgave, Norsk stålforbund, 2008 er et eksempel på en bok der slik informasjon finnes om de fleste bjelker. For kombinasjonen av trykk og bøyning må imidlertid tabellene benyttes.

Tabell 5. Viser «Tabell 5.2 – Største forhold mellom bredde og tykkelse (c/t) for trykkpåkjennte tverrsnittsdeler» i Eurokode 3: Del 1-1.

Begge sider fastholdt og påkjent av trykk											
										Bøynings-akse	
										Bøynings-akse	
Klasse	Tverrsnittsdeler som utsettes for bøyning	Tverrsnittsdeler som utsettes for trykk	Tverrsnittsdeler som utsettes for bøyning og trykk								
Spenningsfordeling i tverrsnittsdeler (trykk positiv)											
1	$c/t \leq 72\epsilon$	$c/t \leq 33\epsilon$	når $\alpha > 0,5$: $c/t \leq \frac{396\epsilon}{13\alpha - 1}$ når $\alpha \leq 0,5$: $c/t \leq \frac{36\epsilon}{\alpha}$								
2	$c/t \leq 83\epsilon$	$c/t \leq 38\epsilon$	når $\alpha > 0,5$: $c/t \leq \frac{456\epsilon}{13\alpha - 1}$ når $\alpha \leq 0,5$: $c/t \leq \frac{41,5\epsilon}{\alpha}$								
Spenningsfordeling i tverrsnittsdeler (trykk positiv)											
3	$c/t \leq 124\epsilon$	$c/t \leq 42\epsilon$	hvis $\psi > -1$: $c/t \leq \frac{42\epsilon}{0,67 + 0,33\psi}$ hvis $\psi \leq -1$: $c/t \leq 62\epsilon(1 - \psi)\sqrt{-\psi}$								
$\epsilon = \sqrt{235/f_y}$	f_y	235	275	355	420	460					
	ϵ	1,00	0,92	0,81	0,75	0,71					

Tabell 6. Viser «Tabell 5.2 – Største forhold mellom bredde og tykkelse (c/t) for trykkpåkjennte tverrsnittsdeler (fortsettes)» i Eurokode 3: Del 1-1.

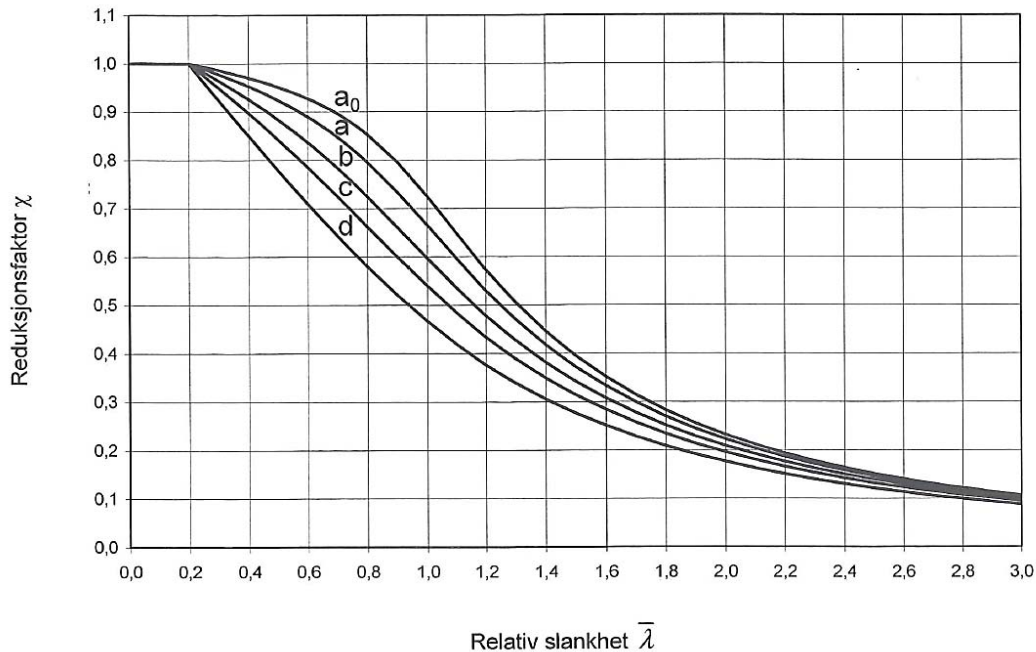
Utstikkende flenser						
Klasse	Tverrsnittsdeler som utsettes for trykk	Tverrsnittsdeler som utsettes for bøyning og trykk				
		Fri rand med trykk		Fri rand med strekk		
Spenningsfordeling i tverrsnittsdeler (trykk positiv)						
1	$c/t \leq 9\varepsilon$	$c/t \leq \frac{9\varepsilon}{\alpha}$	$c/t \leq \frac{9\varepsilon}{\alpha\sqrt{\alpha}}$	$c/t \leq \frac{9\varepsilon}{\alpha\sqrt{\alpha}}$	$c/t \leq \frac{9\varepsilon}{\alpha\sqrt{\alpha}}$	$c/t \leq \frac{9\varepsilon}{\alpha\sqrt{\alpha}}$
2	$c/t \leq 10\varepsilon$	$c/t \leq \frac{10\varepsilon}{\alpha}$	$c/t \leq \frac{10\varepsilon}{\alpha\sqrt{\alpha}}$	$c/t \leq \frac{10\varepsilon}{\alpha\sqrt{\alpha}}$	$c/t \leq \frac{10\varepsilon}{\alpha\sqrt{\alpha}}$	$c/t \leq \frac{10\varepsilon}{\alpha\sqrt{\alpha}}$
Spenningsfordeling i tverrsnittsdeler (trykk positiv)						
3	$c/t \leq 14\varepsilon$	$c/t \leq 21\varepsilon\sqrt{k_\sigma}$				
		For k_σ se NS-EN 1993-1-5				
$\varepsilon = \sqrt{235/f_y}$	f_y	235	275	355	420	460
	e	1,00	0,92	0,81	0,75	0,71

Hvilken klasse bjelken får styrer hvilket tverrsnittsareal som skal brukes i beregningene. Det bestemmer også hvilken formel som skal brukes for å finne interaksjonsfaktoren. Denne faktoren behandles grundigere på slutten av underavsnitt 4.2.3.

4.1.2 Knekkurver

Knekkurvene er viktige for å fastsette knekkapasiteten i virkelige staver med sentrisk trykk. Staver kun utsatt for sentrisk trykk vil si staver som er utsatt for en aksial

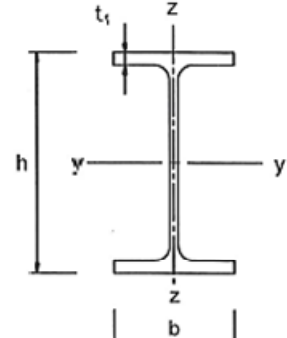
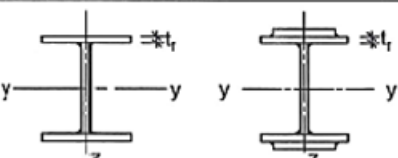

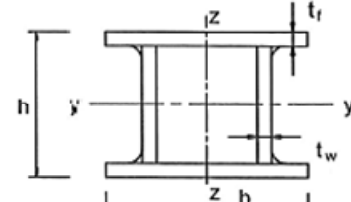
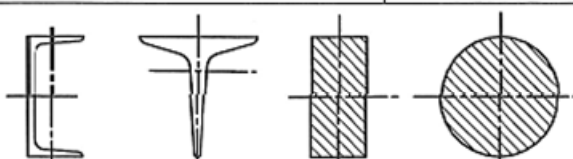
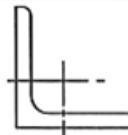
trykklast uten noe bøyemoment. For å bestemme knekkkapasiteten til en slik stav må man ta hensyn til både egenspenninger og formavvik, noe som ikke kan gjøres analytisk. Derfor er knekkkurvene funnet ved hjelp av eksperimentelle og simulerte data, hvor det tas hensyn til blant annet tverrsnittsformen, geometriske formavvik, avvik fra nominelle tverrsnittsdimensjoner og egenspenninger på grunn av valsing eller sveising [34]. Knekkkurvene vises i figuren under.



Figur 15. Viser «Figur 6.4 – Knekkkurver» i Eurokode 3: Del 1-1. Kurvene gir reduksjonsfaktoren χ som funksjon av den relative slankheten $\bar{\lambda}$. Kurvene er gitt betegnelsene a_0 , a, b, c og d.

Ved å gruppere profilene ut fra tverrsnittsform, fremstillingsmåte, egenspenninger og flenstykkelse fant man at fem knekkkurver er tilstrekkelig for å representere de vanligst forekomne knekktilfellene [34]. De fem knekktilfellene har fått ulike betegnelser. Tabellen for å velge de ulike kurvene er gitt under.

Tabell 7. Viser «Tabell 6.2 – Grunnlag for valg av knekkurve for ulike tverrsnittformer» i Eurokode 3: Del 1-1.

Tverrsnitt	Begrensninger	Forskyvning rettvinklet til akse	Knekkurve		
			S 235 S 275 S 355 S 420	S 460	
Valsede I-profiler 	$h/b > 1,2$	$t_f \leq 40 \text{ mm}$	y-y z-z	a a0	a0 a0
		$40 \text{ mm} < t_f \leq 100$	y-y z-z	b c	a a
	$h/b \leq 1,2$	$t_f \leq 100 \text{ mm}$	y-y z-z	b c	a a
		$t_f > 100 \text{ mm}$	y-y z-z	d d	c c
Sveiste I-tverrsnitt 	$t_f \leq 40 \text{ mm}$	y-y z-z	b c	b c	
	$t_f > 40 \text{ mm}$	y-y z-z	c d	c d	
Hultverrsnitt 	varmvalset	Alle	a	a0	
	kaldformet	Alle	c	c	
Sveiste kasseprofiler 	vanlig (bortsett fra tilfellene nedenfor)	Alle	b	b	
	tykke sveiser: $a > 0,5t_f$ $b/t_f < 30$ $h/t_w < 30$	alle	c	c	
U-profiler, T-profiler og massive profiler 		alle	c	c	
L-profiler 		alle	b	b	

Eurokode 3: Del 1-1 beskriver også en måte å finne reduksjonsfaktoren ved utregning. Dette er en mer nøyaktig metode enn å lese av fra tabell. Derfor er det slik reduksjonsfaktoren blir funnet i denne oppgaven. For å finne reduksjonsfaktoren ved regning må imperfeksjonsfaktoren α leses av tabellen under.

Tabell 8. Viser «Tabell 6.1 – Imperfeksjonsfaktor for ulike knekktilfeller» i Eurokode 3: Del 1-1.

Knekkurve	a_0	a	b	c	d
Imperfeksjonsfaktor α	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

4.1.3 Partialfaktorer

Tallverdiene for partialfaktorene er definert i det nasjonale tillegget. Tabellen under viser definisjonen av og verdiene til de ulike partialfaktorene som brukes i Eurokode 3: Del 1-1 for materialet.

Tabell 9. Partialfaktorer for materialet [10].

Partialfaktor	Verdi
γ_{M0} Tverrsnittskapasitet uansett tverrsnittsklasse	1,05
γ_{M1} Stavers kapasitet mot instabilitet påvist for hele staven	1,05
γ_{M2} Tverrsnittskapasitet mot brudd for strekkpåkjenning	1,25

De karakteristiske verdiene for kapasitet i Eurokode 3 divideres med disse partialfaktorene. I Norge har partialfaktorene generelt lav verdi. Dette skyldes at mye av sikkerhetsfaktoren allerede ligger innbakt i lasten (lastfaktoren).

Eurokode 3 krever i punkt 2.3.1 (1) at det benyttes laster i henhold til NS-EN 1991 Eurokode 1: Laster på konstruksjoner og tillegg A i NS-EN 1990 Grunnlag for prosjektering av konstruksjoner. I denne oppgaven skal det brukes to lastfaktorer som vist i tabellen under.

Tabell 10. Partialfaktorer for materialet hentet fra oppgavebegrensningene.

Partialfaktor	Verdi
γ_{f1} Lastfaktor for aksielt trykk	1,5
γ_{f2} Lastfaktor for tverrlast	1,3

4.2 Grunnlagsteori

Her vises utledningen av de relevante formlene som brukes som dimensjoneringskriterier mot knekking i eurokode 3.

Eurokode 3 bruker gjennomgående dimensjoneringskriterier der verdier ikke skal være større enn 1. For enkle formler ser dette kanskje tungvint ut, men når formlene får flere ledd som skal summeres sammen er dette ofte en enkel måte å gjøre det på.

For utledning av formlene i grunnlagsteorien er det brukt referanse [36].

4.2.1 Knekking av stav med konstant tverrsnitt og tilsiktet sentrisk trykk, Eurokode 3-1-1, 6.3.1.1

Dette tilfellet gjelder for å beregne knekking av bjelker som er utsatt for et sentrisk trykk, det vil si at det ikke er noe bøyemoment i staven. Det forutsettes at det er gjort tilfredsstillende tiltak for at trykket skal være sentrert. Ofte gjøres ikke dette i praksis. Det er vanligvis enklere å benytte formler som tar hensyn til eksentriske krefter enn å sentrere trykkraften.

Staver med tilsiktet sentrisk trykk bør påvises mot knekking som følger:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} \leq 1 \quad (38)$$

Denne formelen sier at dimensjonerende trykkraft N_{Ed} skal være mindre enn dimensjonerende knekkkapasitet i staven ved sentrisk trykk, $N_{b,Rd}$.

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} \quad (39)$$

Formelen gjelder for tverrsnittsklasse 1, 2 og 3. For tverrsnittsklasse 4 tas det utgangspunkt i et redusert, effektivt tverrsnitt bestemt i forhold til teorien for plateknekking, som gitt i NS-EN 1993-1-5. Arealet A erstattes altså med det effektive tverrsnittsarealet A_{eff} :

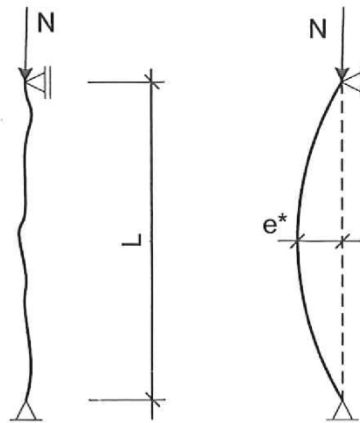
$$N_{b,Rd} = \frac{\chi \cdot A_{eff} \cdot f_y}{\gamma_{M1}} \quad (40)$$

χ er reduksjonsfaktor for relevant knekkform.

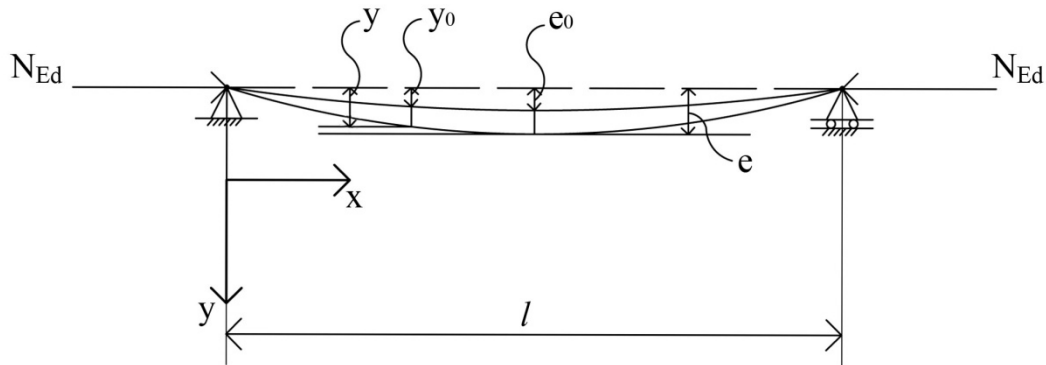
4.2.2 Trykkstav med sinusformet formfeil

Her vises utledningen av elastisk beregning etter eurokode 3 for trykkstav med sinusformet formfeil.

Hvis en skal ta hensyn til alle avvik som fordelingen av formfeil og egenspenninger, blir en knekkingsanalyse fort veldig omfattende og komplisert. Derfor er det utarbeidet enklere beregningsmodeller der en med moderat arbeidsinnsats kan finne kapasiteten med tilstrekkelig nøyaktighet. Dette gjøres ved at den virkelige staven erstattes med en homogen modellstav med samme tverrsnittsdimensjoner, men med et ekvivalent formavvik med utbøyning e_0 , se figur 16. Denne utbøyningen bestemmes slik at modellstaven får samme kapasitet som den virkelige staven.



Figur 16. Viser hvordan en stav med avvik erstattes av en homogen modellstav med en sinusformet formfeil [36]. e^* på figuren er det samme som e_0 .



Figur 17. Viser en stav med sinusformet formfeil. Staven er fritt opplagret i begge ender, med et glidelager i en ende. Staven utsettes for trykkraften N_{Ed} . På et vilkårlig sted på bjelken vil nedbøyningen være y , og den opprinnelige nedbøyningen på grunn av formfeil være y_0 . Den maksimale nedbøyningen e og den maksimale opprinnelige nedbøyningen e_0 vil være midt på staven.

Utbøyning e_0 vil være den utbøyningen som er i staven når $N_{Ed} = 0$, det vil her si utbøyningen på grunn av formfeil. Utbøyningen forutsettes å ha sinusform:

$$y_0 = e_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \quad (41)$$

Utbøyningen når $N_{Ed} > 0$:

$$y = e \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \quad (42)$$

Krumningsendringen kan beskrives med denne differensiallikningen:

$$y'' - y_0'' = -\frac{M}{E \cdot I} \quad (43)$$

Setter inn for utbøyningene og deriverer:

$$y'' - y_0'' = -(e - e_0) \left(\frac{\pi^2}{l^2}\right) \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \quad (44)$$

Likningen for momentet på et vilkårlig sted blir:

$$-M = -N_{Ed} \cdot y = -N_{Ed} \cdot e \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \quad (45)$$

Setter sammen likningene:

$$-(e - e_0) \left(\frac{\pi^2}{l^2} \right) \sin \left(\frac{\pi \cdot x}{l} \right) = - \frac{N_{Ed} \cdot e \cdot \sin \left(\frac{\pi \cdot x}{l} \right)}{E \cdot I}$$

Trekker sammen:

$$(e - e_0) \left(\frac{\pi^2}{l^2} \right) \cdot E \cdot I = N_{Ed} \cdot e$$

Eulerlasten for en stav fritt opplagret i begge ender:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}$$

Det gir:

$$(e - e_0) \cdot N_{cr} = N_{Ed} \cdot e$$

Løser med hensyn på e :

$$e = \frac{N_{cr} \cdot e_0}{N_{cr} - N_{Ed}} = \frac{e_0}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}} \quad (46)$$

Likning (46) viser at den opprinnelige utbøyningen blir forstørret med en faktor som avhenger av N_{Ed} og N_{cr} . Denne faktoren kalles forsterkningsfaktoren og ser slik ut:

$$\frac{1}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}} \quad (47)$$

Denne faktoren er utledet med utgangspunkt i at den ubelastede staven har en utbøyning med sinusform. Likevel viser det seg at denne forsterkningsfaktoren også passer godt for andre formfeil, som formfeil der bjelken har en relativ skarp bøy på midten og hvis staven er rett, men belastet med en eksentrisk kraft [37].

Den største spenningen opptrer midt på staven og vil være en kombinasjon av bøy- og aksialspenning. Den totale spenningen må ikke overstige dimensjonerende

tverrsnittsspennning ved sentrisk trykk [137]. Dette blir da dimensjoneringskriteriet for trykkstav med sinusformet formfeil:

$$\frac{N_{Ed}}{A} + \frac{N_{Ed} \cdot e}{W} = \frac{N_{Ed}}{A} + \frac{N_{Ed} \cdot e_0}{W \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}\right)} \leq \frac{f_y}{\gamma_{M1}} \quad (48)$$

For å finne uttrykket for e_0 må likning (48) omskrives noe. Dimensjonerende verdi for kapasitet mot aksialkrefter:

$$N_{Rd} = \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} \quad (49)$$

Dimensjonerende verdi for kapasitet for moment:

$$M_{Rd} = \frac{W \cdot f_y}{\gamma_{M1}} \quad (50)$$

Likning (48) kan da skrives som:

$$\frac{\frac{N_{Ed}}{A \cdot f_y}}{\frac{1}{\gamma_{M1}}} + \frac{\frac{N_{Ed} \cdot e_0}{W \cdot f_y}}{\frac{1}{\gamma_{M1}} \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}\right)} = \frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} + \frac{N_{Ed} \cdot e_0}{M_{Rd} \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}\right)} \leq 1 \quad (51)$$

Ved knekking reduseres stavens kapasitet mot aksialkrefter med en reduksjonsfaktor χ slik:

$$N_{Ed} = \chi \cdot N_{Rd} \quad (52)$$

Relativ slankhet defineres slik:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}} \quad (53)$$

Ved brudd kan forsterkningsfaktoren likning (47) skrives slik:

$$\frac{1}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}} = \frac{1}{1 - \frac{\chi \cdot N_{Rd}}{N_{cr}}} = \frac{1}{1 - \frac{\chi \cdot f_y \cdot A}{N_{cr} \cdot \gamma_{M0}}} = \frac{1}{1 - \frac{\chi \cdot \bar{\lambda}^2}{\gamma_{M0}}} \quad (54)$$

Da kan likning (51) skrives på denne måten ved brudd:

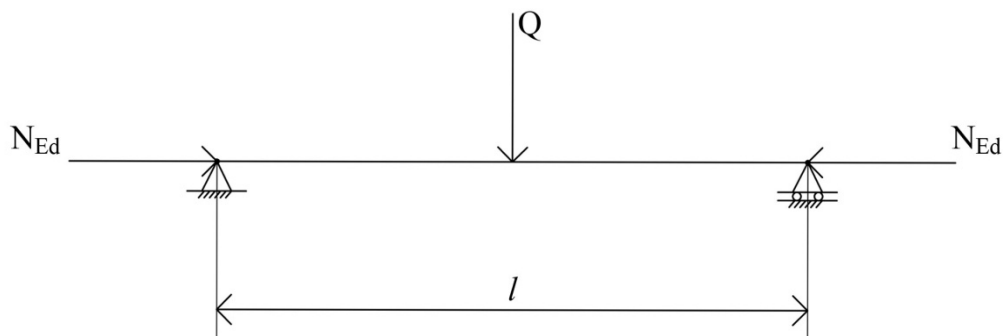
$$\frac{\chi \cdot N_{Rd}}{N_{Rd}} + \frac{1}{\left(1 - \frac{\chi \cdot \bar{\lambda}^2}{\gamma_{M0}}\right)} \cdot \frac{\chi \cdot N_{Rd} \cdot e_0}{M_{Rd}} \leq 1 \quad (55)$$

Løser med hensyn på e_0 :

$$e_0 = (1 - \chi) \left(1 - \frac{\chi \cdot \bar{\lambda}^2}{\gamma_{M0}}\right) \cdot \frac{M_{Rd}}{\chi \cdot N_{Rd}} \quad (56)$$

Denne likningen kan brukes for å finne den ekvivalente formfeilen e_0 .

4.2.3 Bjelkesøyle, styrt knekking og moment om sterk akse, y



Figur 18. Bjelkesøyle utsatt for aksiell trykklast og midtstilt punktlast.

Figur 18 viser en bjelkesøyle. Momentet oppstår som regel av tverrlaster eller stavendemomenter. Ofte får også bjelker med momenter fra aksialkraften på grunn av formfeil (slik som bjelken behandlet i forrige avsnitt) betegnelsen bjelkesøyle.

For tverrsnitt påkjent av en aksiell trykkraft N_{Ed} og et moment M_{Ed} , gjelder dimensjoneringskriteriet:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} + \frac{1}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}} \cdot \frac{N_{Ed} \cdot e_0}{M_{Rd}} + \frac{M_{Ed}^*}{M_{Rd}} \leq 1 \quad (57)$$

Der:

$$M_{Ed}^* = \frac{C_m \cdot M_{Ed}}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}} \quad (58)$$

M_{Ed}^* er et moment med forsterket maksverdi i forhold til det virkelige momentet og sinusformet momentdiagram. Faktoren « C_m » avhenger av stavens momentfordeling. Verdier for faktoren er basert på maksimalverdien av bøyemomentet. Det betyr at det er maksimalverdien av bøyemomentet som skal benyttes i interaksjonsformelen [38].

Setter formelen for e_0 (likning 56) og M_{Ed}^* (likning 58) inn i likning 57:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} + \frac{1}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}} \cdot \frac{N_{Ed}}{M_{Rd}} \cdot \left((1 - \chi) \left(1 - \frac{\chi \cdot \bar{\lambda}^2}{\gamma_{M0}} \right) \cdot \frac{M_{Rd}}{\chi \cdot N_{Rd}} \right) + C_m \cdot \frac{M_{Ed}}{\left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}} \right) \cdot M_{Rd}} \leq 1$$

Multipliserer likningen med:

$$1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}} = 1 - \frac{\bar{\lambda}^2 \cdot N_{Ed}}{N_{Rd}}$$

Som gir:

$$\begin{aligned} \frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} - \frac{\bar{\lambda}^2 \cdot N_{Ed}^2}{N_{Rd}^2} + \frac{N_{Ed}}{\chi \cdot N_{Rd}} - \frac{\bar{\lambda}^2 \cdot N_{Ed}}{\gamma_{M0} \cdot N_{Rd}} - \frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} + \frac{\chi \cdot \bar{\lambda}^2 \cdot N_{Ed}}{\gamma_{M0} \cdot N_{Rd}} + \frac{C_m \cdot M_{Ed}}{M_{Rd}} \\ \leq 1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}} \end{aligned}$$

γ_{M0} settes lik 1 og leddene ordnes til:

$$-\frac{\bar{\lambda}^2 \cdot N_{Ed}^2}{N_{Rd}^2} + \frac{N_{Ed}}{\chi \cdot N_{Rd}} + \frac{\chi \cdot \bar{\lambda}^2 \cdot N_{Ed}}{N_{Rd}} - 1 \leq -\frac{C_m \cdot M_{Ed}}{M_{Rd}}$$

Likningen over kan skrives på formen:

$$\left(1 - \frac{\chi \cdot \bar{\lambda}^2 \cdot N_{Ed}}{N_{Rd}}\right) \left(-1 + \frac{N_{Ed}}{\chi \cdot N_{Rd}}\right) \leq -\frac{C_m \cdot M_{Ed}}{M_{Rd}} \quad (59)$$

Definerer k slik:

$$k = \frac{1}{1 - \frac{\chi \cdot \bar{\lambda}^2 \cdot N_{Ed}}{N_{Rd}}} = \frac{1}{1 - \frac{\chi \cdot N_{Ed}}{N_{cr}}} \quad (60)$$

Da kan likning 59 skrives slik:

$$\frac{1}{k} \left(-1 + \frac{N_{Ed}}{\chi \cdot N_{Rd}}\right) \leq -\frac{C_m \cdot M_{Ed}}{M_{Rd}}$$

Leddene ordnes og interaksjonsformelen får endelig form:

$$\frac{N_{Ed}}{\chi \cdot N_{Rd}} + \frac{k \cdot C_m \cdot M_{Ed}}{M_{Rd}} \leq 1 \quad (61)$$

Som nevnt bruker Eurokode 3 forskjellige interaksjonsfaktorer. For styrt knekking om sterk akse (y-aksen) defineres interaksjonsfaktoren slik (fra tabell 11):

$$k_{yy} = \frac{C_{my}}{1 - \left(\chi \cdot \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}\right)} \quad (62)$$

Kapasitetskontroll for styrt knekking om sterk akse (y-aksen) kan da skrives slik:

$$\frac{N_{Ed}}{\chi \cdot N_{Rd}} + \frac{k_{yy} \cdot M_{Ed}}{M_{Rd}} \leq 1 \quad (63)$$

Her er:

$$N_{Rd} = \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}} \text{ og } M_{Rd} = \frac{M_{Rk}}{\gamma_{M1}}$$

Og:

$$N_{Rk} = A \cdot f_y \text{ og } M_{Rk} = W \cdot f_y$$

I Eurokode 3 skal det også tas hensyn til moment om z-aksen, vipping og forskyvninger for tverrsnittsklasse 4. Likningen i Eurokode 3 er derfor mer generell enn likning 63. Kapasitetskontrollen for knekking om sterk akse slik den står i Eurokode 3 ser slik ut:

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y \cdot N_{Rk}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed} + \Delta M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \cdot \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yz} \cdot \frac{M_{z,Ed} + \Delta M_{z,Ed}}{\frac{M_{z,Rk}}{\gamma_{M1}}} \leq 1 \quad (64)$$

Her er:

N_{Ed} , $M_{y,Ed}$ og $M_{z,Ed}$: dimensjonerende trykkraft og største momenter om henholdsvis y- og z-aksen langs staven.

$\Delta M_{y,Ed}$ og $\Delta M_{z,Ed}$: momenter som følge av forskyvning for tverrsnittsklasse 4.

χ_y : reduksjonsfaktor som følge av bøyingsknekking.

χ_{LT} : reduksjonsfaktor som følge av vipping. Settes lik 1 hvis staven er fastholdt mot vipping.

k_{yy} og k_{yz} : interaksjonsfaktorer.

I denne oppgaven vil det ikke være moment om z-aksen og bjelkene vil være fastholdt mot vipping. Det vil også kun gjøres på beregninger på bjelker i tverrsnittsklasse 3 (se begrensninger under 1.3). I de videre beregningene vil derfor kapasitetskontrollen bli brukt slik den står i likning 63.

For å finne det maksimale 2. ordens moment for en bjelke utsatt for et lineært varierende moment, kan en bruke annenordens differensiallikninger. I praksis er dette lite hensiktsmessig. I eurokode 3 brukes det derfor ekvivalente momentfaktorer som en finner i Eurokode 3: Del 1-1 Tillegg A eller B [36].

For de forskjellige tverrsnittsklassene brukes det forskjellige interaksjonsfaktorer, se tabell 11. Komiteen som utarbeidet Eurokode 3 kunne ikke bli enige om ett sett av interaksjonsformler. Derfor kommer Eurokode 3 med to tillegg (A og B) som inneholder to forskjellige metoder for å finne interaksjonsfaktorene og de ekvivalente momentfaktorene. Det nasjonale tillegget velger hvilken metode som skal benyttes. Norsk standard tillater at begge metodene kan benyttes [36].

Metode 1 beskrives i tillegg A. Metoden baserer seg hovedsakelig på teori og er veldig nøyaktig. Metoden er imidlertid komplisert og det brukes vanligvis regneark eller andre hjelpemidler for å utføre beregningene. Metode 2 beskrives i tillegg B og skal forenkle beregningene av standardtilfeller. Formelverket er basert på semi-empiri og kurvetilpasning. Omfattende datasimuleringer er benyttet for å komme fram til

formlene. Metoden er ikke like nøyaktig som metode 1 [39]. Siden denne oppgaven kun kontrollerer knekktilfeller i metode 2 er det bare tabellene for denne metoden som gjengis.

Eurokode 3: Del 1-1, metode 2

Tabellene med interaksjonsfaktorene og de ekvivalente momentfaktorene for metode 2 står beskrevet i Eurokode 3: Del 1-1, tillegg B. Metoden bruker også likning 64. Tabellene gjengis under.

Tabell 11. Viser «Tabell B.1 – Interaksjonsfaktorer, k_{ij} , for torsjonsstive staver» i Eurokode 3: Del 1-1, Tillegg B, Metode 2.

Tabell B.1 – Interaksjonsfaktorer, k_{ij} , for torsjonsstive staver

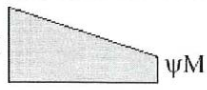
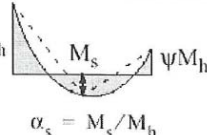
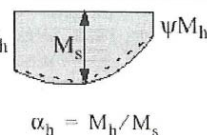
Interaksjonsfaktorer	Type tverrsnitt	Beregningsforutsetninger	
		elastiske tverrsnittsverdier for klasse 3 og klasse 4	plastiske tverrsnittsverdier for klasse 1 og klasse 2
k_{yy}	I-profiler	$C_{my} \left(1 + 0,6 \bar{\lambda}_y \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$	$C_{my} \left(1 + (\bar{\lambda}_y - 0,2) \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$
	RHS-profiler	$\leq C_{my} \left(1 + 0,6 \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$	$\leq C_{my} \left(1 + 0,8 \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$
k_{yz}	I-profiler	k_{zz}	$0,6 k_{zz}$
	RHS-profiler		
k_{zy}	I-profiler	$0,8 k_{yy}$	$0,6 k_{yy}$
	RHS-profiler		
k_{zz}	I-profiler	$C_{mz} \left(1 + 0,6 \bar{\lambda}_z \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{mz} \left(1 + 1,4 \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$	$C_{mz} \left(1 + (2\bar{\lambda}_z - 0,6) \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{mz} \left(1 + 1,4 \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$
	RHS-profiler		$C_{mz} \left(1 + (\bar{\lambda}_z - 0,2) \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$ $\leq C_{mz} \left(1 + 0,8 \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$

For I- og H-profiler og rektangulære hulprofiler med aksialtrykk og enakset bøyning $M_{y,Ed}$ kan koeffisienten k_{zy} settes lik 0.

Tabell «B.2 – Interaksjonsfaktorer, k_{ij} , for torsjonsmyke staver» er ikke gjengitt her da den ikke er relevant på grunn av begrensningene.

Tabell 12. Viser «Tabell B.3 – Ekvivalente momentfaktorer, C_m , for tabell B.1 og B.2» i Eurokode 3: Del 1-1, Tillegg B, Metode 2.

Tabell B.3 – Ekvivalente momentfaktorer, C_m , for tabell B.1 og B.2

Momentforløp	Område		C_{my} og C_{mz} og C_{mLT}	
			Jevnt fordelt last	Punktlast
 M ψM	$-1 \leq \psi \leq 1$		$0,6 + 0,4\psi \geq 0,4$	
 M_h M_s ψM_h $\alpha_s = M_s/M_h$	$0 \leq \alpha_s \leq 1$	$-1 \leq \psi \leq 1$	$0,2 + 0,8\alpha_s \geq 0,4$	$0,2 + 0,8\alpha_s \geq 0,4$
	$-1 \leq \alpha_s < 0$	$0 \leq \psi \leq 1$	$0,1 - 0,8\alpha_s \geq 0,4$	$-0,8\alpha_s \geq 0,4$
$-1 \leq \psi < 0$		$0,1(1-\psi) - 0,8\alpha_s \geq 0,4$	$0,2(-\psi) - 0,8\alpha_s \geq 0,4$	
 M_h M_s ψM_h $\alpha_h = M_h/M_s$	$0 \leq \alpha_h \leq 1$	$-1 \leq \psi \leq 1$	$0,95 + 0,05\alpha_h$	$0,90 + 0,10\alpha_h$
	$-1 \leq \alpha_h < 0$	$0 \leq \psi \leq 1$	$0,95 + 0,05\alpha_h$	$0,90 + 0,10\alpha_h$
		$-1 \leq \psi < 0$	$0,95 + 0,05\alpha_h(1+2\psi)$	$0,90 - 0,10\alpha_h(1+2\psi)$
For staver med sideveis knekking bør ekvivalent momentfaktor antas til $C_{my} = 0,9$ henholdsvis $C_{mz} = 0,9$.				
C_{my} , C_{mz} og C_{mLT} bør beregnes etter momentdiagrammet mellom de relevante fastholdte punktene på følgende måte:				
momentfaktor	bøyeakse	punkter avstivet i retning		
C_{my}	y-y	z-z		
C_{mz}	z-z	y-y		
C_{mLT}	y-y	y-y		

5 CASER

Lengden og kreftene som settes i hvert case (tilfelle) er vilkårlig valgt, men skal sammen gjøre at bjelken er i grenseområdet for knekking med forenklet metode 1. Lengden og kreftene blir senere variert for alle casene.

Det blir sett på fem caser. I alle casene dimensjoneres bjelkene for knekking om sterk akse (y-aksen). Bjelkene antas å være fastholdt mot knekking om svak akse og vipping. Bjelkene dimensjoneres først med klassiske beregningsmetoder, så etter Eurokode 3.

De fem casene er valgt ut ifra at de er relativt enkle tilfeller, samtidig som det er tilfeller som en ofte kommer innom ved dimensjonering av konstruksjoner. I første case er bjelken kun utsatt for en trykklast, mens bjelken i de andre casene er utsatt for kombinert knekking.

Det brukes en HEB100-bjelke med fasthetsklasse S235 i alle de fem casene. Dette er en vanlig H-bjelke i en fasthetsklasse som er mye brukt i konstruksjoner.

For denne bjelken gjelder [40]:

$$A = 2\,600 \text{ mm}^2$$

$$I_y = 4,5 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$W_y = 88\,900 \text{ mm}^3$$

$$i_y = 41,6 \text{ mm}$$

$$h = 100 \text{ mm}$$

$$b = 100 \text{ mm}$$

$$t_f = 10 \text{ mm}$$

$$t_w = 6 \text{ mm}$$

$$r = 12 \text{ mm}$$

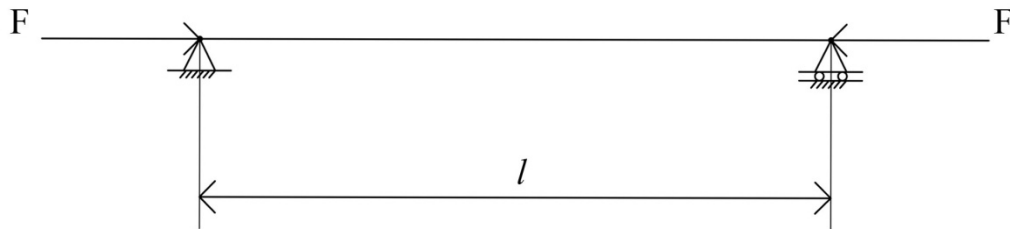
Lengden er også lik og settes til 5 m:

$$l = 5\,000 \text{ mm}$$

På slutten av kapittelet er det et avsnitt som oppsummerer tilfellene.

5.1 Case 1, kun aksiallast

I dette tilfellet blir bjelken som er leddlagret i begge ender utsatt for en aksial trykkraft, som vist på figur 19.



Figur 19. Leddlagret stav belastet med en aksial trykklast F .

5.1.1 Klassisk beregningsmetode

Når bjelken skal beregnes klassisk, beregnes den som om Eurokode 3 ikke eksisterer. Siden bjelken kun er belastet med en aksial trykklast, er det enten Euler eller Tetmajer som blir brukt.

Knekk lengde for leddlagret stav:

$$l_K = l = 5\,000\text{ mm}$$

Relativ slankhet:

$$\lambda = \frac{l_K}{i} = \frac{5\,000\text{ mm}}{41,6\text{ mm}} = 120,2 \geq 105$$

At den relative slankheten er større enn 105 tilsier at det skal brukes Euler:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_K^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5\text{ Mpa} \cdot 4,5 \cdot 10^6\text{ mm}^4}{(5\,000\text{ mm})^2} = 373\,071,046\text{ N}$$

Med en sikkerhetsfaktor $n = 3$ blir den tillatte lasten:

$$F_{till} = \frac{F_{cr}}{n} = \frac{373\,071,046\text{ N}}{3} = 124\,357,0\text{ N}$$

5.1.2 Beregning etter Eurokode 3

Tverrsnittsklassifisering gjøres etter tabell 5 og 6:

$$\left(\frac{c}{t}\right)_{steg} = \frac{h - 2 \cdot t_f - 2 \cdot r}{t_w} = \frac{100 - 2 \cdot 10 - 2 \cdot 12}{6} = 9,333$$

$$\left(\frac{c}{t}\right)_{flens} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b - t_w - 2 \cdot r}{t_f} = \frac{100 - 6 - 2 \cdot 12}{2 \cdot 10} = 3,500$$

$$\varepsilon = 1$$

Krav for tverrsnittsklasse 1 for steg kun påkjent av trykk:

$$\left(\frac{c}{t}\right)_{steg} \leq 33 \cdot \varepsilon$$

$$33 \cdot \varepsilon = 33 \cdot 1 = 33$$

$$\left(\frac{c}{t}\right)_{steg} = 9,333 < 33$$

Krav for tverrsnittsklasse 1 for flens kun påkjent av trykk:

$$\left(\frac{c}{t}\right)_{flens} \leq 9 \cdot \varepsilon$$

$$9 \cdot \varepsilon = 9 \cdot 1 = 9$$

$$\left(\frac{c}{t}\right)_{flens} = 3,500 < 9$$

HEB100 oppfyller altså kravene for tverrsnittsklasse 1 for både flens og steg når bjelken kun er påkjent av trykk i tverrsnittet. Tverrsnittskravene er slik at et snitt kan dimensjoneres som en høyere (mindre gunstig) tverrsnittsklasse enn den tverrsnittsklassen snittet oppfyller. Snittet kan altså dimensjoneres etter tverrsnittsklasse 3.

Relativ slankhet:

$$\bar{\lambda}_y = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{F_{cr}}} = \sqrt{\frac{2\,600\text{ mm}^2 \cdot 235\text{ MPa}}{373\,071,0\text{ N}}} = 1,280$$

Finner knekkurve etter tabell 7:

$$\frac{h}{b} = \frac{100}{100} = 1 < 1,2$$

$$t_f = 10 < 100$$

Bjelken oppfyller kravene til knekkurve *b*. Tabell 8 gir at imperfeksjonsfaktoren α :

$$\alpha = 0,34$$

Følger fremgangsmåten i NS-EN 1993-1-1, 6.3.2.1 for å finne reduksjonsfaktoren:

$$\Phi = 0,5[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2]$$

$$\Phi = 0,5[1 + 0,34(1,280 - 0,2) + 1,280^2] = 1,502$$

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} = \frac{1}{1,502 + \sqrt{1,502^2 - 1,280^2}}$$

$$\chi = 0,438$$

Dimensjonerende kapasitet ved bøyingsknekking for en stav med sentrisk trykk:

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0,438 \cdot 2\,600\text{ mm}^2 \cdot 235\text{ MPa}}{1,05} = 254\,156,209\text{ N}$$

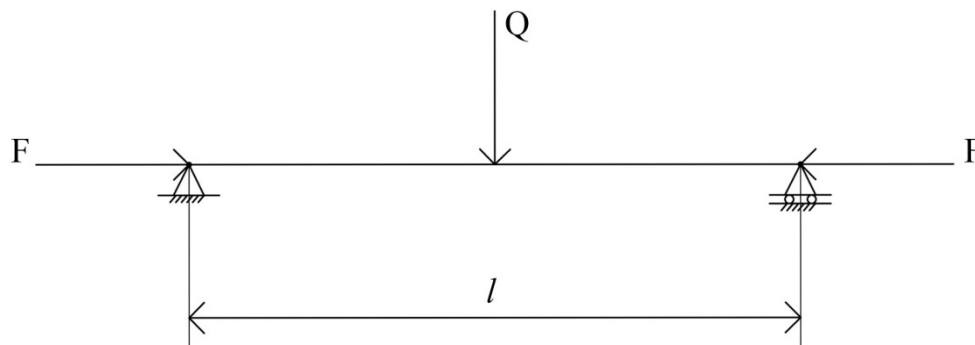
For å finne den virkelige lasten bjelken kan utsettes for må det tas hensyn til lastfaktoren:

$$F_{till} = \frac{N_{b,Rd}}{\gamma_{f1}} = \frac{254\,156,209\text{ N}}{1,5} = 169\,437,473\text{ N}$$

Som forventet gir beregning med Eurokode 3 mer arbeid enn beregning med forenklet metode, men også større tillatt last.

5.2 Case 2, fritt opplagret bjelke med aksial trykklast og midtstilt tverrlast

Dette er et tilfelle av kombinert knekking, som vil si en bjelke som er utsatt for både en aksial trykklast og en last fra siden (tverrlast), slik som figur 20 viser.



Figur 20. Leddlagret bjelke belastet med en aksial trykklast F og en tverrgående punktlast Q midt på bjelken.

For å kunne dimensjonere bjelkesøyler må det også settes på laster. De settes til å være:

$$F = 65\,000\text{ N}$$

$$Q = 5\,000\text{ N}$$

5.2.1 Klassiske beregningsmetoder

Som det ble gjennomgått i avsnitt 3.2 er det to klassiske beregningsmetoder for knekking med kombinert last. Her beregnes bjelken med begge metodene

Metode 1

Tillatt knekkraft blir lik som i case 1:

$$F_{till} = 124\,357,0 \text{ N}$$

Formelen for maksimalt moment i fritt opplagret bjelke med midtstilt punktlast [41]:

$$M_b = \frac{Q \cdot l}{4} = \frac{5\,000 \text{ N} \cdot 5\,000 \text{ mm}}{4} = 6\,250\,000 \text{ Nmm}$$

Det maksimale momentet bjelken kan oppta før flyt opptrer i de ytterste fiber etter elastisitetsteorien:

$$M_{b,maks} = f_y \cdot W = 235 \text{ MPa} \cdot 88\,900 \text{ mm}^3 = 20\,891\,500 \text{ Nmm}$$

Dimensjoneringskriteriet i metode 1:

$$\frac{F}{F_{till}} + \frac{n_i \cdot M_b}{M_{b,maks}} \leq 1$$

Setter inn:

$$\frac{F}{F_{till}} + \frac{n_i \cdot M_b}{M_{b,maks}} = \frac{65\,000 \text{ N}}{124\,357 \text{ N}} + \frac{1,5 \cdot 6\,250\,000 \text{ Nmm}}{20\,891\,500 \text{ Nmm}}$$

$$\frac{F}{F_{till}} + \frac{n_i \cdot M_b}{M_{b,maks}} = 0,52 + 0,45 = 0,971$$

$$0,971 < 1$$

Bjelken holder altså mot knekking etter forenklet metode 1.

Metode 2

Faktoren β for denne situasjonen finnes i tabell 4:

$$\beta = 0,822$$

Verdiene for formelen i metode 2 er funnet tidligere:

$$\frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{\beta \cdot M}{W} \cdot \frac{n \cdot F}{F_k - n \cdot F} \leq \sigma_{till} = \frac{R_e}{n}$$

Setter inn:

$$\frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{\beta \cdot M}{W} \cdot \frac{n \cdot F}{F_k - n \cdot F} =$$

$$\frac{65\,000\text{ N}}{2\,600\text{ mm}^2} + \frac{6\,250\,000\text{ Nmm}}{88\,900\text{ mm}^3} + \frac{0,822 \cdot 6\,250\,000\text{ Nmm}}{88\,900\text{ mm}^3} \cdot \frac{2 \cdot 65\,000\text{ N}}{373\,071\text{ N} - 2 \cdot 65\,000\text{ N}} =$$

$$25,000\text{ MPa} + 70,304\text{ MPa} + 30,907\text{ MPa} = 126,211\text{ MPa}$$

$$\sigma_{till} = \frac{R_e}{n} = \frac{235\text{ MPa}}{2} = 117,5\text{ MPa}$$

$$126,2\text{ MPa} > 117,5\text{ MPa}$$

Siden resultatet av spenningskontrollen blir høyere enn halve flytespenningen til materialet, holder ikke bjelken mot knekking etter forenklet metode 2.

5.2.2 Beregning etter Eurokode 3

Her må lastene oppjusteres med lastfaktorene.

$$N_{Ed} = \gamma_{f1} \cdot F = 1,5 \cdot 65\,000\text{ N} = 97\,500\text{ N}$$

$$M_{Ed} = \frac{\gamma_{f2} \cdot Q \cdot l}{4} = \frac{1,3 \cdot 5\,000\text{ MPa} \cdot 5\,000\text{ mm}}{4} = 8\,125\,000\text{ Nmm}$$

Fastsetter tverrsnittsklassen for HEB100-bjelken i dette tilfellet. Etter elastisitetsteorien er spenningen i bjelkens over- og underside:

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{97\,500\text{ N}}{2\,600\text{ mm}^2} + \frac{8\,125\,000\text{ Nmm}}{88\,900\text{ mm}^3}$$

$$\sigma_1 = 37,500 \text{ MPa} + 91,395 \text{ MPa} = 128,894 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{A} - \frac{M}{W} = \frac{97\,500 \text{ N}}{2\,600 \text{ mm}^2} - \frac{8\,125\,000 \text{ Nmm}}{88\,900 \text{ mm}^3}$$

$$\sigma_2 = 37,500 \text{ MPa} - 91,395 \text{ MPa} = -53,895 \text{ MPa}$$

Spenningsforholdet etter tabell 12 blir:

$$\psi = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = -\frac{53,895 \text{ MPa}}{128,894 \text{ MPa}} = -0,418$$

Etter samme tabell er steget utsatt for bøyning og trykk i tverrsnittsklasse 3 hvis dette kravet er oppfylt:

$$\left(\frac{c}{t}\right)_{\text{steg}} \leq \frac{42 \cdot \varepsilon}{0,67 + 0,33 \cdot \psi}$$

$$\varepsilon = 1$$

$$\frac{42 \cdot \varepsilon}{0,67 + 0,33 \cdot \psi} = \frac{42 \cdot 1}{0,67 - 0,33 \cdot 0,418} = 78,945$$

Forholdet mellom c-verdien og tykkelsen på steget er fastsatt tidligere (avsnitt 5.1.2):

$$\left(\frac{c}{t}\right)_{\text{steg}} = 9,333 < 78,945$$

Belastningssituasjonen oppfyller altså kravet til tverrsnittsklasse 3 for steget. Siden snittet er i det elastiske området for snittkreftene vil det være lite hensiktsmessig å kontrollere tverrsnittet for tverrsnittsklasse 1 og 2.

Siden det er knekking om sterk akse er det kun nødvendig å sjekke flensen for trykk. Det ble gjort i avsnitt 5.1.2, og resultatet ble at flensen var i tverrsnittsklasse 1.

Det er ikke nødvendig å kontrollere flensen på nytt siden bjelken er den samme og klassifiseringen er uavhengig av lastene når tverrsnittsdelen er i trykk. Belastningssituasjonen oppfyller altså kravet til tverrsnittsklasse 3 for snittet.

Kritisk last hentes fra avsnitt 5.1.1:

$$N_{cr} = F_{cr} = 373\,071,046 \text{ N}$$

Relativ slankhet blir:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{2\,600\, \text{mm}^2 \cdot 235\, \text{MPa}}{373\,071,046\, \text{N}}} = 1,280$$

I avsnitt 5.1.2 ble det funnet at bjelken oppfyller kravene til knekkurve b med imperfeksjonsfaktor:

$$\alpha = 0,34$$

Følger fremgangsmåten i NS-EN 1993-1-1, 6.3.2.1 for å finne reduksjonsfaktoren:

$$\Phi = 0,5[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2]$$

$$\Phi = 0,5[1 + 0,34(1,280 - 0,2) + 1,280^2] = 1,502$$

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} = \frac{1}{1,502 + \sqrt{1,502^2 - 1,280^2}}$$

$$\chi = 0,438$$

Dimensjonerende kapasitet ved bøyingsknekking for en stav med sentrisk trykk:

$$N_{by,Rd} = \frac{\chi \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0,438 \cdot 2\,600\, \text{mm}^2 \cdot 235\, \text{MPa}}{1,05} = 256\,038,1\, \text{N}$$

Dimensjonerende verdi for kapasitet for moment:

$$M_{y,Rd} = \frac{f_y \cdot W_y}{\gamma_{M1}} = \frac{235\, \text{MPa} \cdot 88\,900\, \text{mm}^3}{1,05} = 19\,896\,666,7\, \text{Nmm}$$

Bruker tabell 11 til å finne interaksjonsfaktor. Forholdet mellom endemomentene Ψ blir:

$$\Psi = 0$$

Momentet M_s :

$$M_s = M_{Ed} = 8\,125\,000\, \text{Nmm}$$

Endemomentet M_h :

$$M_h = 0$$

$$\alpha_h = \frac{M_h}{M_s} = 0$$

Den ekvivalente momentfaktoren C_{my} blir:

$$C_{my} = 0,90 + 0,10 \cdot \alpha_h = 0,90 + 0,10 \cdot 0 = 0,9$$

Siden $\bar{\lambda} > 1$ blir formelen for interaksjonsfaktoren k_{yy} :

$$k_{yy} = C_{my} \left(1 + 0,6 \cdot \frac{N_{Ed}}{\frac{(\chi_y \cdot N_{Rk})}{\gamma_{M1}}} \right) = C_{my} \left(1 + 0,6 \cdot \frac{N_{Ed}}{N_{by,Rd}} \right)$$

$$k_{yy} = 0,9 \left(1 + 0,6 \cdot \frac{97\,500\,N}{256\,038,1\,N} \right) = 0,11$$

Dimensjoneringskrav for styrt knekking om sterk akse:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{by,Rd}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} \leq 1$$

$$\frac{N_{Ed}}{N_{by,Rd}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} = \frac{97\,500\,N}{256\,038,1\,N} + 0,11 \cdot \frac{8\,125\,000\,Nmm}{19\,896\,666,7\,Nmm}$$

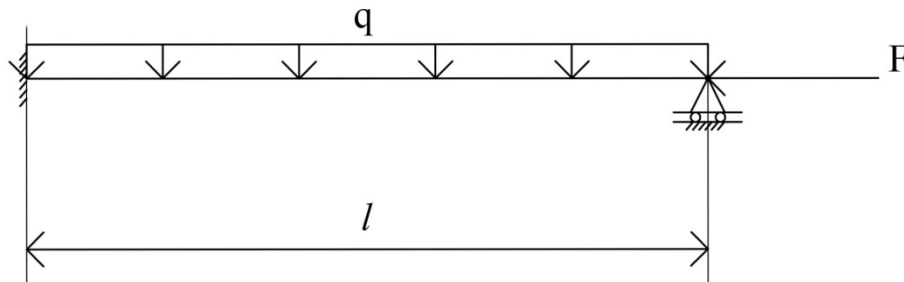
$$\frac{N_{Ed}}{N_{by,Rd}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} = 0,38 + 0,45 = 0,84$$

$$0,84 < 1$$

Bjelken har tilstrekkelig kapasitet mot knekking etter Eurokode 3.

5.3 Case 3, jevnt fordelt last

I dette tilfellet er bjelken fast innspent i den ene enden og fritt opplagret i den andre. Bjelken utsettes både for en aksial trykklast og en jevnt fordelt last, slik figur 21 viser.



Figur 21. Bjelke fast innspent i den ene enden og fritt opplagret i den andre, utsatt for en jevnt fordelt last.

Lastene settes til å være:

$$F = 65\,000\text{ N}$$

$$q = 2,8\text{ N/mm}$$

5.3.1 Klassiske beregningsmetoder

Metode 1

Relativ slankhet:

$$\lambda = \frac{l_k}{i} = \frac{0,7 \cdot 5\,000\text{ mm}}{41,6\text{ mm}} = 84,1 < 105$$

Tetmajers formel gir:

$$\sigma_k = 310 - 1,14 \cdot \lambda = 310 - 1,14 \cdot 84,1 = 214,1\text{ MPa}$$

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A}$$

$$F_k = \sigma_k \cdot A = 214,1\text{ MPa} \cdot 2\,600\text{ mm}^2 = 556\,660\text{ N}$$

Tillatt last blir (med en sikkerhetsfaktor n lik 3):

$$F_{till} = \frac{F_k}{n} = \frac{556\,660\text{ N}}{3} = 185\,553,3\text{ N}$$

Største moment på grunn av den jevnt fordelte lasten:

$$M_b = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{2,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot (5\,000\text{ mm}^2)}{8} = 8\,750\,000\text{ Nmm}$$

Største moment når de ytterste fibrene i profilet er på flytegrensen ble funnet i avsnitt 5.2.1:

$$M_{b,maks} = 20\,891\,500\text{ Nmm}$$

Dimensjoneringskriteriet for metode 1:

$$\frac{F_y}{F_{till}} + \frac{n_i \cdot M_b}{M_{b,maks}} \leq 1$$

Setter inn:

$$\frac{F_y}{F_{till}} + \frac{n_i \cdot M_b}{M_{b,maks}} = \frac{65\,000\text{ N}}{185\,553,3\text{ N}} + \frac{1,5 \cdot 8\,750\,000\text{ Nmm}}{20\,891\,500\text{ Nmm}}$$

$$\frac{F_y}{F_{till}} + \frac{n_i \cdot M_b}{M_{b,maks}} = 0,350 + 0,628 = 0,98$$

$$0,98 < 1$$

Bjelken har altså tilstrekkelig kapasitet som bjelkesøyle med forenklet metode 1.

Metode 2

Tabell 4 beskriver ikke akkurat dette tilfellet, men siden momentfunksjonen er den samme som for en fritt opplagret bjelke med aksial trykklast og jevnt fordelt last, blir faktoren β :

$$\beta = 1,028$$

Krav metode 2:

$$\frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{\beta \cdot M}{W} \cdot \frac{n \cdot F}{F_k - n \cdot F} \leq \sigma_{till} = \frac{R_e}{n}$$

Setter inn:

$$\frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{\beta \cdot M}{W} \cdot \frac{n \cdot F}{F_k - n \cdot F} =$$

$$\frac{65\,000\text{ N}}{2\,600\text{ mm}^2} + \frac{8\,750\,000\text{ Nmm}}{88\,900\text{ mm}^3} + \frac{1,028 \cdot 8\,750\,000\text{ Nmm}}{88\,900\text{ mm}^3} \cdot \frac{2 \cdot 65\,000\text{ N}}{556\,660\text{ N} - 2 \cdot 65\,000\text{ N}} =$$

$$25,0\text{ MPa} + 98,4\text{ MPa} + 30,8\text{ MPa} = 154,2\text{ MPa}$$

$$\sigma_{till} = \frac{R_e}{n} = \frac{235\text{ MPa}}{2} = 117,5\text{ MPa}$$

$$154,2\text{ MPa} > 117,5\text{ MPa}$$

Bjelken holder altså ikke etter forenklet metode 2.

5.3.2 Beregning etter Eurokode 3

Oppjusterer lastene:

$$N_{Ed} = \gamma_{f1} \cdot F = 1,5 \cdot 65\,000\text{ N} = 97\,500\text{ N}$$

Likningen for det maksimale momentet med jevnt fordelt last [42]:

$$M_{Ed} = \frac{\gamma_{f2} \cdot q \cdot l^2}{8} = \frac{1,3 \cdot 2,8\text{ MPa} \cdot (5\,000\text{ mm})^2}{8} = 11\,375\,000\text{ Nmm}$$

Fastsetter tverrsnittsklassen for HEB100-bjelken i dette tilfellet. Etter elastisitetsteorien er spenningen i bjelkens over- og underside:

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{97\,500\text{ N}}{2\,600\text{ mm}^2} + \frac{11\,375\,000\text{ Nmm}}{88\,900\text{ mm}^3}$$

$$\sigma_1 = 37,5 \text{ MPa} + 128,0 \text{ MPa} = 165,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{A} - \frac{M}{W} = \frac{97\,500 \text{ N}}{2\,600 \text{ mm}^2} - \frac{11\,375\,000 \text{ Nmm}}{88\,900 \text{ mm}^3}$$

$$\sigma_2 = 37,5 \text{ MPa} - 128,0 \text{ MPa} = -90,5 \text{ MPa}$$

Spenningsforholdet etter tabell 12 blir:

$$\psi = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = -\frac{90,5 \text{ MPa}}{165,5 \text{ MPa}} = -0,55$$

Etter samme tabell er steg utsatt for bøyning og trykk i tverrsnittsklasse 3 hvis dette kravet er oppfylt:

$$\left(\frac{c}{t}\right)_{\text{steg}} \leq \frac{42 \cdot \varepsilon}{0,67 + 0,33 \cdot \psi}$$

$$\varepsilon = 1$$

$$\frac{42 \cdot \varepsilon}{0,67 + 0,33 \cdot \psi} = \frac{42 \cdot 1}{0,67 - 0,33 \cdot 0,55} = 86,0$$

Forholdet mellom c-verdien og tykkelsen på steget er fastsatt tidligere (avsnitt 5.1.2):

$$\left(\frac{c}{t}\right)_{\text{steg}} = 9,3 < 86,0$$

Steket oppfyller betingelsene og flensen er kontrollert i avsnitt 5.1.2 for trykk med samme bjelke. Belastningssituasjonen oppfyller altså kravet til tverrsnittsklasse 3 for snittet.

Kritisk knekklast etter Euler:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{l_k^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 4,5 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}{(3\,500 \text{ mm})^2} = 761\,369,5 \text{ N}$$

Relativ slankhet:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{f_y \cdot A}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{235 \text{ MPa} \cdot 2\,600 \text{ mm}^2}{761\,369,5 \text{ N}}} = 0,90$$

I avsnitt 5.1.2 ble det funnet at bjelken oppfyller kravene til knekkurve b med imperfeksjonsfaktor:

$$\alpha = 0,34$$

Følger fremgangsmåten i NS-EN 1993-1-1, 6.3.2.1 for å finne reduksjonsfaktoren:

$$\Phi = 0,5[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2]$$

$$\Phi = 0,5[1 + 0,34(0,90 - 0,2) + 0,90^2] = 1,024$$

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} = \frac{1}{1,024 + \sqrt{1,024^2 - 0,90^2}}$$

$$\chi = 0,66$$

Dimensjonerende kapasitet ved bøyingsknekking for en stav med sentrisk trykk:

$$N_{by,Rd} = \frac{\chi \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0,66 \cdot 2\,600\,mm^2 \cdot 235\,MPa}{1,05} = 384\,745,1\,N$$

Dimensjonerende verdi for kapasitet for moment ble funnet i avsnitt 5.2.2:

$$M_{y,Rd} = 19\,896\,666,7\,Nmm$$

Bruker tabell 11 til å finne interaksjonsfaktor. Forholdet mellom endemomentene Ψ blir:

$$\Psi = 0$$

Finner momentet M_s [42]:

$$M_s = \frac{9}{128} \cdot \gamma_{f2} \cdot q \cdot l^2$$

$$M_s = \frac{9}{128} \cdot 1,3 \cdot 2,8\,N/mm \cdot (5\,000\,mm)^2 = 6\,398\,438\,Nmm$$

Endemomentet M_h :

$$M_h = M_{Ed} = 11\,375\,000\,Nmm$$

$$\alpha_s = \frac{M_s}{M_h} = -\frac{6\,398\,438\text{ Nmm}}{11\,375\,000\text{ Nmm}} = -0,56$$

Minustegnet kommer av at de to momentene ligger på forskjellig side av y-aksen i en momentdiagrambetraktning. Finner den ekvivalente momentfaktoren C_{my} :

$$C_{my} = 0,1 - 0,8 \cdot \alpha_s = 0,1 + 0,8 \cdot 0,56 = 0,55$$

Siden $\bar{\lambda} < 1$ blir formelen for interaksjonsfaktoren k_{yy} :

$$k_{yy} = C_{my} \left(1 + 0,6 \cdot \bar{\lambda} \cdot \frac{N_{Ed}}{\frac{(\chi_y \cdot N_{Rk})}{\gamma_{M1}}} \right) = C_{my} \left(1 + 0,6 \cdot \bar{\lambda} \cdot \frac{N_{Ed}}{N_{by,Rd}} \right)$$

$$k_{yy} = 0,55 \left(1 + 0,6 \cdot 0,9 \cdot \frac{97\,500\text{ N}}{384\,745,1\text{ N}} \right) = 0,63$$

Dimensjoneringskrav for styrt knekking om sterk akse:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{by,Rd}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} \leq 1$$

Setter inn og får:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{by,Rd}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} = \frac{97\,500\text{ N}}{384\,745,1\text{ N}} + 0,63 \cdot \frac{11\,375\,000\text{ Nmm}}{19\,896\,666,7\text{ Nmm}} =$$

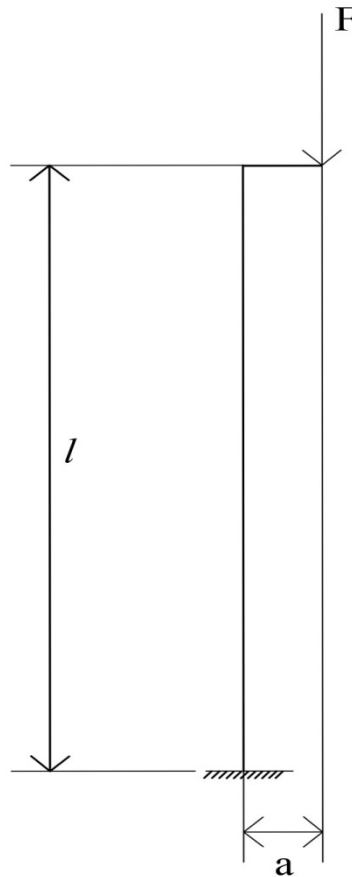
$$0,25 + 0,36 = 0,61$$

$$0,61 < 1$$

Bjelken har tilstrekkelig kapasitet mot knekking etter Eurokode 3.

5.4 Case 4, aksial trykkraft med

I dette tilfellet er bjelken kun fast innspent i den ene enden. På toppen er det en utstikker på 400 mm. I enden av utstikkeren er det en punktlast, se figur 22.



Figur 22. Bjelke fast innspent i den ene enden og en punktlast som påvirker bjelken med aksielt trykk og bøyemoment.

Lasten settes til å være:

$$16\,000\text{ N}$$

Lengden l på staven er fortsatt den samme. Avstanden a ut til punktlasten settes til å være:

$$a = 400\text{ mm}$$

5.4.1 Klassiske beregningsmetoder

Metode 1

Denne situasjonen tilsvarer knekktilfelle d) på figur 8. Knekklelgen blir:

$$l_K = 2 \cdot l = 2 \cdot 5\,000\text{ mm} = 10\,000\text{ mm}$$

Relativ slankhet:

$$\lambda = \frac{l_K}{i} = \frac{10\,000\text{ mm}}{41,6\text{ mm}} = 240,4 > 105$$

At den relative slankheten er større enn 105 tilsier at det skal brukes Euler:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_K^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5\text{ Mpa} \cdot 4,5 \cdot 10^6\text{ mm}^4}{(10\,000\text{ mm})^2} = 93\,267,8\text{ N}$$

Med en sikkerhetsfaktor $n = 3$ blir den tillatte lasten:

$$F_{till} = \frac{F_{cr}}{n} = \frac{93\,267,8\text{ N}}{3} = 31\,089,3\text{ N}$$

Bøyemomentet i bjelken på grunn av lasten:

$$M_b = F \cdot a = 16\,000\text{ N} \cdot 400\text{ mm} = 6\,400\,000\text{ Nmm}$$

Største moment når de ytterste fibrene i profilet er på flytegrensen ble funnet i avsnitt 5.2.1:

$$M_{b,maks} = 20\,891\,500\text{ Nmm}$$

Dimensjoneringskriteriet for metode 1:

$$\frac{F_y}{F_{till}} + \frac{n_i \cdot M_b}{M_{b,maks}} \leq 1$$

Setter inn:

$$\frac{F_y}{F_{till}} + \frac{n_i \cdot M_b}{M_{b,maks}} = \frac{16\,000\text{ N}}{31\,089,3\text{ N}} + \frac{1,5 \cdot 6\,400\,000\text{ Nmm}}{20\,891\,500\text{ Nmm}}$$

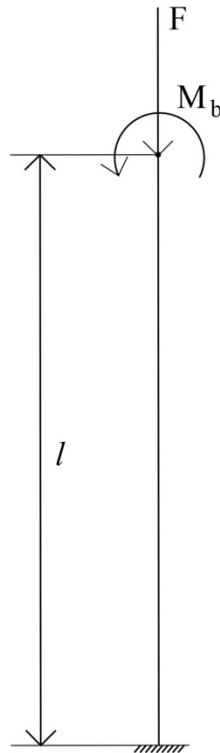
$$\frac{F_y}{F_{till}} + \frac{n_i \cdot M_b}{M_{b,maks}} = 0,515 + 0,460 = 0,974$$

$$0,974 < 1$$

Bjelken har altså tilstrekkelig kapasitet som bjelkesøyle med forenklet metode 1.

Metode 2

Akkurat denne casen er ikke beskrevet i tabell 4. Casen kan forenkles slik figuren under viser. Momentdiagrammet for bjelken blir ivaretatt.



Figur 23. Forenklet figur av case 4.

For å finne β -faktoren for dette tilfellet trengs det et uttrykk for den opprinnelige nedbøyningen e_0 , altså nedbøyningen når $F = 0$.

Maksimal nedbøyning for bjelke fast innspent i den ene enden, utsatt for et moment i fri ende [43]:

$$e_0 = \frac{M \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I}$$

Setter inn i likning 29:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{F \cdot M \cdot l^2}{W \cdot 2 \cdot E \cdot I \left(1 - \frac{F}{F_K}\right)} \quad (65)$$

Løser Eulers likning for knekkraft med hensyn på $\frac{l^2}{E \cdot I}$:

$$F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_k^2} \Rightarrow \frac{l_k^2}{E \cdot I} = \frac{\pi^2}{F_K}$$

l_k er i dette tilfellet lik $2 \cdot l$:

$$\frac{(2 \cdot l)^2}{E \cdot I} = \frac{4 \cdot l^2}{E \cdot I} = \frac{\pi^2}{F_K}$$

Som gir:

$$\frac{l^2}{E \cdot I} = \frac{\pi^2}{4 \cdot F_K}$$

Setter inn i likning (65)

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{\pi^2 \cdot F \cdot M}{W \cdot 2 \cdot 4 \cdot F_K \left(1 - \frac{F}{F_K}\right)}$$

Slår sammen konstantene til én:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{1,234 \cdot F \cdot M}{W(F_K - F)}$$

I dette tilfellet blir altså β -faktoren:

$$\beta = 1,234$$

Krav metode 2:

$$\frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{\beta \cdot M}{W} \cdot \frac{n \cdot F}{F_k - n \cdot F} \leq \sigma_{till} = \frac{R_e}{n}$$

Setter inn:

$$\frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{\beta \cdot M}{W} \cdot \frac{n \cdot F}{F_k - n \cdot F} =$$

$$\frac{16\,000\text{ N}}{2\,600\text{ mm}^2} + \frac{6\,400\,000\text{ Nmm}}{88\,900\text{ mm}^3} + \frac{1,234 \cdot 6\,400\,000\text{ Nmm}}{88\,900\text{ mm}^3} \cdot \frac{2 \cdot 16\,000\text{ N}}{93\,267,8\text{ N} - 2 \cdot 16\,000\text{ N}} =$$

$$6,2\text{ MPa} + 72,0\text{ MPa} + 46,4\text{ MPa} = 124,6\text{ MPa}$$

$$\sigma_{till} = \frac{R_e}{n} = \frac{235\text{ MPa}}{2} = 117,5\text{ MPa}$$

$$124,6\text{ MPa} > 117,5\text{ MPa}$$

Bjelken holder altså ikke etter forenklet metode 2.

5.4.2 Beregning etter Eurokode 3

Oppjusterer kraften med lastfaktoren:

$$N_{Ed} = \gamma_{f1} \cdot F = 1,5 \cdot 16\,000\text{ N} = 24\,000\text{ N}$$

$$M_{Ed} = 24\,000\text{ N} \cdot 400\text{ mm} = 9\,600\,000\text{ Nmm}$$

Fastsetter tverrsnittsklassen for HEB100-bjelken i dette tilfellet. Etter elastisitetsteorien er spenningen i bjelkens over- og underside:

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{24\,000\text{ N}}{2\,600\text{ mm}^2} + \frac{9\,600\,000\text{ Nmm}}{88\,900\text{ mm}^3}$$

$$\sigma_1 = 9,2\text{ MPa} + 108,0\text{ MPa} = 117,2\text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{A} - \frac{M}{W} = \frac{24\,000\text{ N}}{2\,600\text{ mm}^2} - \frac{9\,600\,000\text{ Nmm}}{88\,900\text{ mm}^3}$$

$$\sigma_2 = 9,2\text{ MPa} - 108,0\text{ MPa} = -98,5\text{ MPa}$$

Spenningsforholdet etter tabell 12 blir:

$$\psi = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = -\frac{90,5\text{ MPa}}{117,2\text{ MPa}} = -0,84$$

Betingelse for tverrsnittsklasse 3 for steget:

$$\left(\frac{c}{t}\right)_{\text{steg}} \leq \frac{42 \cdot \varepsilon}{0,67 + 0,33 \cdot \psi}$$

$$\varepsilon = 1$$

$$\frac{42 \cdot \varepsilon}{0,67 + 0,33 \cdot \psi} = \frac{42 \cdot 1}{0,67 - 0,33 \cdot 0,84} = 107,2$$

Forholdet mellom c-verdien og tykkelsen på steget er fastsatt tidligere (avsnitt 5.1.2):

$$\left(\frac{c}{t}\right)_{\text{steg}} = 9,3 < 107,2$$

Steget oppfyller betingelsene og flensen er kontrollert i avsnitt 5.1.2 for trykk med samme bjelke. Belastningssituasjonen oppfyller altså kravet til tverrsnittsklasse 3 for snittet.

Den kritiske lasten ble funnet i underavsnitt 5.4.1:

$$N_{cr} = F_{cr} = 93\,267,8\text{ N}$$

Relativ slankhet blir:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{f_y \cdot A}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{235\text{ MPa} \cdot 2\,600\text{ mm}^2}{93\,267,8\text{ N}}} = 2,56$$

I avsnitt 5.1.2 ble det funnet at bjelken oppfyller kravene til knekkurve b :

$$\alpha = 0,34$$

Følger fremgangsmåten i NS-EN 1993-1-1, 6.3.2.1 for å finne reduksjonsfaktoren:

$$\Phi = 0,5[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2]$$

$$\Phi = 0,5[1 + 0,34(2,56 - 0,2) + 2,56^2] = 4,177$$

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} = \frac{1}{4,177 + \sqrt{4,177^2 - 2,56^2}}$$

$$\chi = 0,134$$

Dimensjonerende kapasitet ved bøyingsknekking for en stav med sentrisk trykk:

$$N_{by,Rd} = \frac{\chi \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0,134 \cdot 2\,600\,mm^2 \cdot 235\,MPa}{1,05} = 77\,824,8\,N$$

Dimensjonerende verdi for kapasitet for moment ble funnet i avsnitt 5.2.2:

$$M_{y,Rd} = 19\,896\,667\,Nmm$$

Bruker tabell 11 til å finne interaksjonsfaktor. Forholdet mellom endemomentene Ψ blir:

$$\Psi = 1$$

Finner den ekvivalente momentfaktoren C_{my} :

$$C_{my} = 0,6 + 0,4 \cdot \Psi = 0,6 + 0,4 \cdot 1 = 1$$

Siden $\bar{\lambda} > 1$ blir formelen for interaksjonsfaktoren k_{yy} :

$$k_{yy} = C_{my} \left(1 + 0,6 \cdot \frac{N_{Ed}}{\frac{(\chi_y \cdot N_{Rk})}{\gamma_{M1}}} \right) = C_{my} \left(1 + 0,6 \cdot \frac{N_{Ed}}{N_{by,Rd}} \right)$$

$$k_{yy} = 1 \left(1 + 0,6 \cdot \frac{24\,000\,N}{77\,824,8\,N} \right) = 1,185$$

Dimensjoneringskrav for styrt knekking om sterk akse:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{by,Rd}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} \leq 1$$

Setter inn og får:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{by,Rd}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} = \frac{24\,000\,N}{77\,824,8\,N} + 1,185 \cdot \frac{9\,600\,000\,Nmm}{19\,896\,667\,Nmm}$$

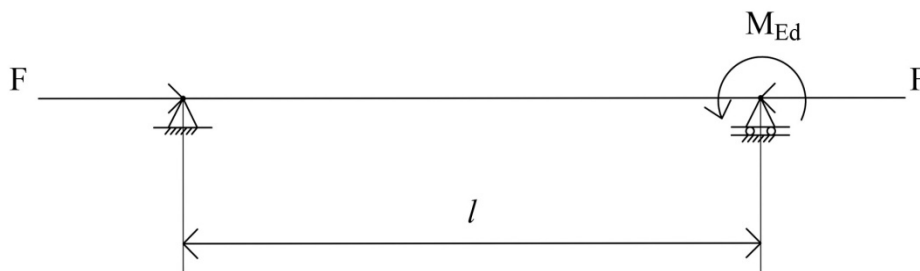
$$\frac{N_{Ed}}{N_{by,Rd}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} = 0,31 + 0,57 = 0,88$$

$$0,88 < 1$$

Bjelken har tilstrekkelig kapasitet mot knekking etter Eurokode 3.

5.5 Case 5

I dette tilfellet er bjelken fritt opplagret i begge ender. Den er belastet med en aksial trykkraft og et endemoment, se figur 24.



Figur 24. Bjelke leddlagret i begge ender belastet med en aksial trykkraft og et endemoment.

Lastene settes til å være:

$$F = 60\,000\,N$$

$$M_b = 7\,000\,000\,Nmm$$

5.5.1 Klassiske beregningsmetoder

Metode 1

Denne situasjonen tilsvarer knekktilfelle a) på figur 8. Knekk lengden blir:

$$l_K = l = 5\,000\text{ mm}$$

Relativ slankhet:

$$\lambda = \frac{l_K}{i} = \frac{5\,000\text{ mm}}{41,6\text{ mm}} = 120,2 > 105$$

At den relative slankheten er større enn 105 tilsier at det skal brukes Euler:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_K^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5\text{ Mpa} \cdot 4,5 \cdot 10^6\text{ mm}^4}{(5\,000\text{ mm})^2} = 373\,071,0\text{ N}$$

Med en sikkerhetsfaktor $n = 3$ blir den tillatte lasten:

$$F_{till} = \frac{F_{cr}}{n} = \frac{373\,071,0\text{ N}}{3} = 124\,357,0\text{ N}$$

Største moment når de ytterste fiber i profilet er på flytegrensen ble funnet i avsnitt 5.2.1:

$$M_{b,maks} = 20\,891\,500\text{ Nmm}$$

Dimensjoneringskriteriet for metode 1:

$$\frac{F_y}{F_{till}} + \frac{n_i \cdot M_b}{M_{b,maks}} \leq 1$$

Setter inn:

$$\frac{F_y}{F_{till}} + \frac{n_i \cdot M_b}{M_{b,maks}} = \frac{60\,000\text{ N}}{124\,357,0\text{ N}} + \frac{1,5 \cdot 7\,000\,000\text{ Nmm}}{20\,891\,500\text{ Nmm}}$$

$$\frac{F_y}{F_{till}} + \frac{n_i \cdot M_b}{M_{b,maks}} = 0,482 + 0,503 = 0,985$$

$$0,985 < 1$$

Bjelken har altså tilstrekkelig kapasitet som bjelkesøyle med forenklet metode 1.

Metode 2

For å finne β -faktoren for dette tilfellet trengs det et uttrykk for den opprinnelige nedbøyningen e_0 , altså nedbøyningen når $F = 0$.

Maksimal nedbøyning for bjelke fritt opplagret i begge ender, utsatt for moment i den ene enden [44]:

$$e_0 = \frac{M \cdot l^2}{9 \cdot \sqrt{3} \cdot E \cdot I}$$

Setter inn i likning 29:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{F \cdot M \cdot l^2}{W \cdot 9 \cdot \sqrt{3} \cdot E \cdot I \left(1 - \frac{F}{F_K}\right)} \quad (66)$$

Løser Eulers likning for knekkraft med hensyn på $\frac{l^2}{E \cdot I}$:

$$F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_k^2} \Rightarrow \frac{l_k^2}{E \cdot I} = \frac{\pi^2}{F_K}$$

l_k er i dette tilfellet lik l :

$$\frac{l^2}{E \cdot I} = \frac{\pi^2}{F_K}$$

Setter inn i likning (66)

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{\pi^2 \cdot F \cdot M}{W \cdot 9 \cdot \sqrt{3} \cdot F_K \left(1 - \frac{F}{F_K}\right)}$$

Slår sammen konstantene til én:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{0,633 \cdot F \cdot M \cdot l}{W \cdot \sqrt{F_k} \left(1 - \frac{F}{F_k}\right)}$$

I dette tilfellet blir altså β -faktoren:

$$\beta = 0,633$$

Krav metode 2:

$$\frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{\beta \cdot M}{W} \cdot \frac{n \cdot F}{F_k - n \cdot F} \leq \sigma_{till} = \frac{R_e}{n}$$

Setter inn:

$$\frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{\beta \cdot M}{W} \cdot \frac{n \cdot F}{F_k - n \cdot F} =$$

$$\frac{60\,000\text{ N}}{2\,600\text{ mm}^2} + \frac{7\,000\,000\text{ Nmm}}{88\,900\text{ mm}^3} + \frac{0,633 \cdot 7\,000\,000\text{ Nmm}}{88\,900\text{ mm}^3} \cdot \frac{2 \cdot 60\,000\text{ N}}{373\,071,0\text{ N} - 2 \cdot 60\,000\text{ N}} =$$

$$23,1\text{ MPa} + 78,7\text{ MPa} + 23,6\text{ MPa} = 125,5\text{ MPa}$$

$$\sigma_{till} = \frac{R_e}{n} = \frac{235\text{ MPa}}{2} = 117,5\text{ MPa}$$

$$125,5\text{ MPa} > 117,5\text{ MPa}$$

Bjelken holder altså ikke etter forenklet metode 2.

5.5.2 Beregning etter Eurokode 3

Oppjusterer lastene:

$$N_{Ed} = \gamma_{f1} \cdot F = 1,5 \cdot 60\,000\text{ N} = 90\,000\text{ N}$$

Likningen for det maksimale momentet med jevnt fordelt last [42]:

$$M_{Ed} = \gamma_{f2} \cdot M_b = 1,3 \cdot 7\,000\,000 \text{ Nmm} = 9\,100\,000 \text{ Nmm}$$

Tverrsnittsklassen fastsettes for denne belastningssituasjonen. Fra avsnitt 5.1.2:

$$\left(\frac{c}{t}\right)_{steg} = \frac{h - 2 \cdot t_f - 2 \cdot r}{t_s} = \frac{100 \text{ mm} - 2 \cdot 10 \text{ mm} - 2 \cdot 12 \text{ mm}}{6 \text{ mm}} = 9,3$$

$$\varepsilon = 1$$

Etter elastisitetsteorien er spenningen i bjelkens over- og underside:

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{90\,000 \text{ N}}{2\,600 \text{ mm}^2} + \frac{9\,100\,000 \text{ Nmm}}{88\,900 \text{ mm}^3}$$

$$\sigma_1 = 34,6 \text{ MPa} + 102,4 \text{ MPa} = 137,0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{A} - \frac{M}{W} = \frac{90\,000 \text{ N}}{2\,600 \text{ mm}^2} - \frac{9\,100\,000 \text{ Nmm}}{88\,900 \text{ mm}^3}$$

$$\sigma_2 = 34,6 \text{ MPa} - 102,4 \text{ MPa} = -67,7 \text{ MPa}$$

Spenningsforholdet etter tabell 12 blir:

$$\psi = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = -\frac{67,7 \text{ MPa}}{137,0 \text{ MPa}} = -0,49$$

Etter samme tabell er steg utsatt for bøyning og trykk i tverrsnittsklasse 3 hvis dette kravet er oppfylt:

$$\left(\frac{c}{t}\right)_{steg} \leq \frac{42 \cdot \varepsilon}{0,67 + 0,33 \cdot \psi}$$

$$\frac{42 \cdot \varepsilon}{0,67 + 0,33 \cdot \psi} = \frac{42 \cdot 1}{0,67 - 0,33 \cdot 0,49} = 50,4$$

Forholdet mellom c-verdien og tykkelsen på steget er fastsatt tidligere (avsnitt 5.1.2):

$$\left(\frac{c}{t}\right)_{steg} = 9,3 < 50,4$$

Belastningssituasjonen oppfyller altså kravet til tverrsnittsklasse 3 for steget. Snittet er i det elastiske området så det vil være lite hensiktsmessig å kontrollere for tverrsnittsklasse 1 og 2.

Steget oppfyller betingelsene og flensen er kontrollert i avsnitt 5.1.2 for trykk med samme bjelke. Siden det er knekking om sterk akse er det kun nødvendig å sjekke flensen for trykk. Belastningssituasjonen oppfyller altså kravet til tverrsnittsklasse 3 for snittet.

Kritisk last hentes fra avsnitt 5.1.1:

$$N_{cr} = F_{cr} = 373\,071,0\text{ N}$$

Relativ slankhet blir:

$$\bar{\lambda}_y = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{2\,600\text{ mm}^2 \cdot 235\text{ MPa}}{373\,071,0\text{ N}}} = 1,280$$

I avsnitt 5.1.2 ble det funnet at bjelken oppfyller kravene til knekkurve *b*:

$$\alpha = 0,34$$

Følger fremgangsmåten i NS-EN 1993-1-1, 6.3.2.1 for å finne reduksjonsfaktoren:

$$\Phi = 0,5[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2]$$

$$\Phi = 0,5[1 + 0,34(1,280 - 0,2) + 1,280^2] = 1,502$$

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} = \frac{1}{1,502 + \sqrt{1,502^2 - 1,280^2}}$$

$$\chi = 0,44$$

Dimensjonerende kapasitet ved bøyingsknekking for en stav med sentrisk trykk:

$$N_{by,Rd} = \frac{\chi \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0,44 \cdot 2\,600\text{ mm}^2 \cdot 235\text{ MPa}}{1,05} = 256\,038,1\text{ N}$$

Dimensjonerende verdi for kapasitet for moment ble funnet i avsnitt 5.2.2:

$$M_{y,Rd} = 19\,896\,666,7 \text{ Nmm}$$

Bruker tabell 11 til å finne interaksjonsfaktor. Forholdet mellom endemomentene Ψ blir:

$$\Psi = 0$$

Ekvivalent momentfaktor C_{my} :

$$C_{my} = 0,6 + 0,4 \cdot \Psi = 0,6 + 0,4 \cdot 0 = 0,6$$

Siden $\bar{\lambda} > 1$ blir formelen for interaksjonsfaktoren k_{yy} :

$$k_{yy} = C_{my} \left(1 + 0,6 \cdot \frac{N_{Ed}}{\frac{(\chi_y \cdot N_{Rk})}{\gamma_{M1}}} \right) = C_{my} \left(1 + 0,6 \cdot \frac{N_{Ed}}{N_{by,Rd}} \right)$$

$$k_{yy} = 0,6 \left(1 + 0,6 \cdot \frac{90\,000 \text{ N}}{256\,038,1 \text{ N}} \right) = 0,73$$

Dimensjoneringskrav for styrt knekking om sterk akse:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{by,Rd}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} \leq 1$$

$$\frac{N_{Ed}}{N_{by,Rd}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} = \frac{90\,000 \text{ N}}{256\,038,1 \text{ N}} + 0,73 \cdot \frac{9\,100\,000 \text{ Nmm}}{19\,896\,666,7 \text{ Nmm}}$$

$$\frac{N_{Ed}}{N_{by,Rd}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} = 0,35 + 0,33 = 0,68$$

$$0,68 < 1$$

Bjelken har tilstrekkelig kapasitet mot knekking etter Eurokode 3.

5.6 Oppsummering

I tabellen nedenfor er resultatet av de forskjellige casene oppsummert.

Tabell 13. Oppsummering av caseresultatene for case 1 med de forskjellige metodene.

Case	Tillatt last etter klassiske beregningsmetoder	Tillatt last etter Eurokode 3, metode 2
Case 1	124 357,0 N	170 692,1 N

Tabell 14. Oppsummering av caseresultatene for case 2 til 5 med de forskjellige metodene.

Case	Klassiske beregningsmetoder		Eurokode 3
	Metode 1	Metode 2	Metode 2
Case 2	Holder	Holder ikke	Holder
Case 3	Holder	Holder ikke	Holder
Case 4	Holder	Holder ikke	Holder
Case 5	Holder	Holder ikke	Holder

Alle tilfellene er tilpasset etter forenklet metode 1 og bjelken holder derfor for denne metoden. Forenklet metode 2 virker å være mer konservativ, siden den ikke holder i noen av tilfellene. Bjelken holder også etter Eurokode 3, metode 2. Allerede nå kommer det altså frem at forenklet metode 1 virker å komme ut på konservativ side av Eurokode 3, metode 2.

Nå vil det bli interessant å se resultatene når de klassiske beregningsmetodene «tynes» ytterligere, ved å tilpasse lastene og bjelkelengdene helt nøyaktig etter de forenklede metodene.

6 CASEANSLYSE

I dette kapitlet vil variablene i casene tilpasses for å skape et mest mulig «ugunstig» tilfelle for de forenklede metodene. Det vil si at for hver case vil det beregnes hvilken bjelkelengde og hvilke laster som gir den største verdien etter Eurokode 3, metode 2 og som likevel er godkjent etter forenklet metode. For hvis den maksimale verdien blir høyere enn én etter Eurokode 3 metode 2, vil ikke den forenklede metoden være konservativ nok.



Figur 25. Microsoft Office Excel 2010.

Excel er et program fra Microsoft som er mye brukt for å analysere data. Det er også gunstig å bruke for å finne maksimal- og minimalverdier for større formler. Ved å sette opp et regneark i Excel kan en teste et nærmest uendelig antall variasjoner kun med få tastetrykk. Skulle man gått frem på andre måter ville en måtte prøve seg frem eller beregne store formler. Programmet vil derfor bli brukt mye i de følgende avsnitt og underavsnitt.

Fremgangsmåten som brukes for å analysere casene med forenklet metode 1 blir forklart i neste avsnitt. Fremgangsmåten kommer til å være omtrent lik for alle casene, derfor vises bare fremgangsmåten for case 2. For de andre casene vil bare resultatet av analysen bli tatt med. For mer utfyllende informasjon om hver case vises det til vedleggene, der alle Excelarkene (med funksjoner) vil ligge.

I dette kapitlet blir det ikke kontrollert at tverrsnittet fortsatt er i tverrsnittsklasse 3 når lastene og lengden endres. Siden tverrsnittet oppfylte kravene til klasse 3 med god margin i alle de fem casene i kapittel 5, anses ikke dette som en urimelig antagelse.

6.1 Fremgangsmåte Case 2, forenklet metode 1

Excel inneholder en «Add-in» som vil være nødvendige i analysen. En Add-in kan beskrives som et lite program som kan legges til i Excel. Add-ins kan ha mange forskjellige funksjoner, men må altså legges til av brukeren. Den som skal brukes her heter «solver». Den brukes til å finne maksimal- eller minimalverdier for en funksjon. Solver finner selv de optimale variablene med de betingelser en måtte ønske.

En annen Excelfunksjon som blir brukt er funksjonen IF(). Dette er et eksempel på en funksjon som allerede er lagt til i Excel. IF()-funksjonen brukes her til å velge om kritisk last skal beregnes etter Euler eller Tetmajer for det gitte tilfellet. Funksjonen sørger altså for at hvis slankheten λ er høyere eller lik 105 blir det brukt Euler, ellers blir det brukt Tetmajer eller flytegrensen. Nøyaktig hvordan IF() er brukt vil komme frem av regnearkene i vedlegget.

Case 2

Det første som gjøres i solver er å velge den verdien som skal maksimeres. I dette tilfellet er det resultatet etter Eurokode 3, metode 2. Så velges de variablene som skal varieres. I denne casen er det bjelkelengden, den aksielle trykklasten F og tverrlasten Q . For at forenklet metode 1 skal presses til sitt ytterste, settes det som betingelse at formelen til forenklet metode skal være lik 1.

Oppsummert kan det solverfunksjonen gjør, beskrives som i tabellen under.

Tabell 15. Beskriver det solverfunksjonen gjør.

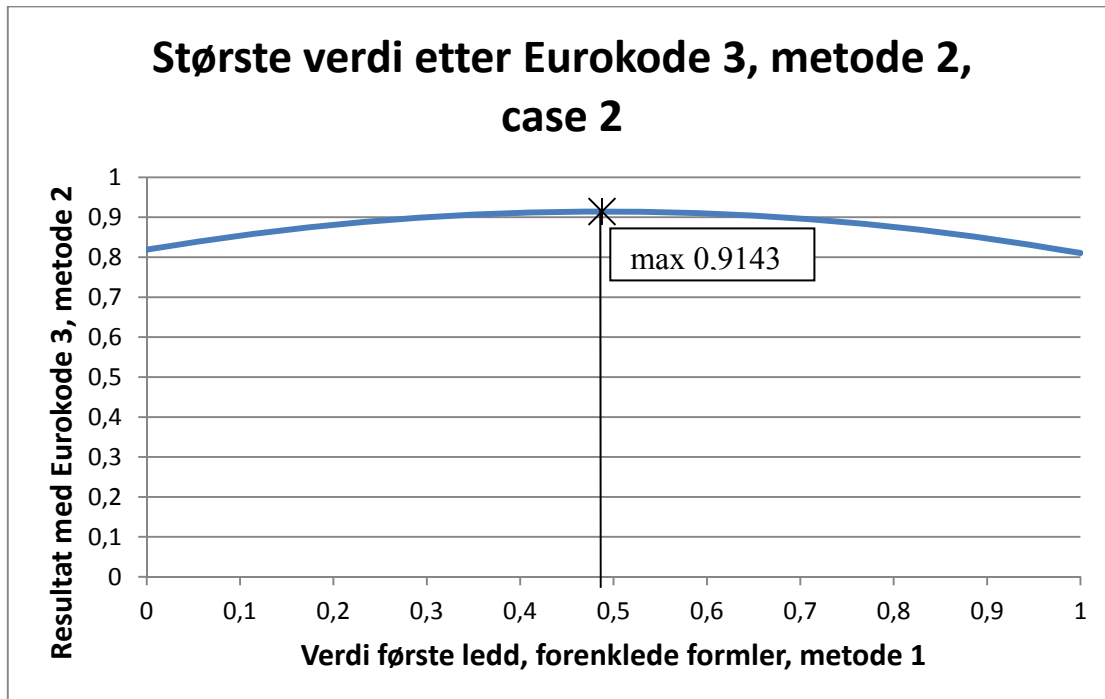
Hva som skal maksimeres:	Resultatet etter Eurokode 3, metode 2.
Hva som skal varieres:	<ul style="list-style-type: none">- Aksiell trykklast F- Tverrlast Q- Lengden l
Hvilke betingelser som settes:	Resultatet etter forenklet metode skal være innenfor kravet for den aktuelle metoden.

Excelfunksjonen IF() sørger hele tiden for at det brukes riktig formel for kritisk last. Resultatene av solveranalysen for case 2 vises i tabellen under.

Tabell 16. Viser resultatet av solverfunksjonen for case 2. Viser verdiene for variablene lengde, trykklast og tverrlast som gir den største mulige verdien etter Eurokode 3, metode 2, og som samtidig oppfyller kravet etter forenklet metode 1.

Case 2	
Bjelkelengde:	4 368,0 mm
Aksiell trykklast F:	80 445,1 N
Tverrlast Q:	6 533,2 N
Forenklet metode 1. ledd	$\frac{F}{F_{till}} = 0,4878$
Forenklet metode 2. ledd	$\frac{n_i \cdot M_b}{M_{b,maks}} = 0,5122$
Resultat med forenklet metode 1:	$\frac{F}{F_{till}} + \frac{n_i \cdot M_b}{M_{b,maks}} = 1$
Resultat med Eurokode 3, metode 2:	$\frac{N_{Ed}}{N_{by,Rd}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} = \mathbf{0,9143}$

Summen av begge leddene i likningen etter forenklet metode 1 vil alltid være én, slik at hvis verdien av det første leddet er 0,1 vil verdien av det andre leddet være 0,9. Som det fremkommer av tabellen over vil verdien etter Eurokode 3, metode 2 være størst når bjelkelengden er 4 368,0 mm lang. Figuren under viser de mulige verdiene for Eurokode 3, metode 2 når bjelken har denne lengden og verdien til likningen etter forenklet metode 1 er én.



Figur 26. Vertikal akse angir verdien etter Eurokode 3, metode 2. Horisontal akse angir verdien av det første leddet i likningen etter forenklet metode 1 når summen av begge leddene er én. Bjelkelengden er 4 368,0 mm. Maksimal verdi etter Eurokode 3, metode 2 er markert. Den er på sitt største når det første leddet i likningen etter forenklet metode 1 er 0,4878. Det andre leddet er da 0,5122.

Resultatet betyr at hvis en skulle dimensjonere et knekktilfelle med en HEB100-bjelke og de opplagerbetingelsene som er gitt i case 2 etter forenklet metode 1, vil en ikke kunne oppnå en større verdi etter Eurokode 3, metode 2 enn 0,91. Det vil si at forenklet metode 2 er trygg å bruke for denne casen med alle kombinasjoner av krefter og bjelkelengder med en HEB100-bjelke.

I andre caser kan det være helt andre krefter som gir den høyeste verdien for Eurokode 3, metode 2.

6.2 Forenklet metode 1, HEB100-bjelke

Her vil resultatene fra analysen i de andre casene bli representert og kommentert. Case 1 analyseres ikke fordi bjelken kun utsettes for en aksiell trykklast, og derfor beregnes på vanlig måte etter Euler eller Tetmajer og ikke etter de forenklede metodene.

Det solverfunksjonen gjør i dette avsnittet er oppsummert i tabellen under.

Tabell 17. Beskriver det solverfunksjonen gjør for caseanalysen for forenklet metode 1.

Hva som skal maksimeres:	Resultatet etter Eurokode 3, metode 2.
Hva som skal varieres:	- Laster - Lengde
Hvilke betingelser som settes:	Resultatet med forenklet metode 1 skal være lik 1.

Case 2

Case 2-resultatene er allerede vist over, men tas med her også for at det skal bli lettere å sammenlikne.

Tabell 18. Analyseresultater case 2 forenklet metode 1.

Case 2, forenklet metode 1	
Bjelkelengde:	4 368,0 mm
Aksiell trykklast F:	80 445,1 N
Tverrlast Q:	6 533,2 N
Forenklet metode 1. ledd	$\frac{F}{F_{till}} = 0,4878$
Forenklet metode 2. ledd	$\frac{n_i \cdot M_b}{M_{b,maks}} = 0,5122$
Resultat etter forenklet metode 1:	$\frac{F}{F_{till}} + \frac{n_i \cdot M_b}{M_{b,maks}} = 1$
Resultat etter Eurokode 3, metode 2:	$\frac{N_{Ed}}{N_{by,Rd}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} = 0,9143$

Verdiene for case 2 beregnet etter forenklet metode 1, er altså innenfor kravet etter Eurokode 3, metode 2 uansett lastkombinasjon. Det betyr at metoden vil være trygg å bruke for denne casen med en HEB100-bjelke.

Case 3

Tabell 19. Analyseresultater case 3 forenklet metode 1.

Case 3, forenklet metode 1	
Bjelkelengde:	6 240,0 mm
Aksiell trykklast F:	164 910,4 N
Jevnt fordelt last q:	0 N
Forenklet metode 1. ledd	$\frac{F}{F_{till}} = 1$
Forenklet metode 2. ledd	$\frac{n_i \cdot M_b}{M_{b,maks}} = 0$
Resultat etter forenklet metode 1:	$\frac{F}{F_{till}} + \frac{n_i \cdot M_b}{M_{b,maks}} = 1$
Resultat etter Eurokode 3, metode 2:	$\frac{N_{Ed}}{N_{by,Rd}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} = 0,8105$

Verdiene for case 2 beregnet etter forenklet metode 1, er innenfor kravet etter Eurokode 3, metode 2 uansett lastkombinasjon. Det betyr at metoden vil være trygg å bruke for denne casen med en HEB100-bjelke.

Som det kommer frem av tabellen over vil bjelken faktisk være mest utsatt for knekking når den jevnt fordelte lasten fra siden er null. Det kan tyde på at interaksjonsfaktoren som ivaretar forholdet mellom den aksielle trykkraften og momentet er for høy. Det kunne også skyldes at sikkerhetsfaktoren n som gir tillatt last er for lav, men siden resultatet kommer såpass konservativt ut som det gjør, vil det ikke ha hensikt å øke denne sikkerhetsfaktoren.

Selv om det ikke direkte er en del av oppgaven, kan det være interessant å teste ut påstanden om at interaksjonsfaktoren er for høy i denne casen. Derfor settes interaksjonsfaktoren lik én for en ny analyse:

$$n_i = 1$$

Tabell 20. Analyseresultater case 3 forenklet metode 1, med interaksjonsfaktor $n_i = 1$.

Case 3, forenklet metode 1, interaksjonsfaktor $n_i = 1$	
Bjelkelengde:	6 240,0 mm
Aksiell trykklast F:	96 052,9 N
Jevnt fordelt last q:	1,79 N
Forenklet metode 1. ledd	$\frac{F}{F_{till}} = 0,58$
Forenklet metode 2. ledd	$\frac{n_i \cdot M_b}{M_{b,maks}} = 0,42$
Resultat etter forenklet metode 1:	$\frac{F}{F_{till}} + \frac{n_i \cdot M_b}{M_{b,maks}} = 1$
Resultat etter Eurokode 3, metode 2:	$\frac{N_{Ed}}{N_{by,Rd}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} = 0,8743$

Som det kommer frem av tabellen over, vil ikke forenklet metode 1 bli for liberal i forhold til Eurokode 3, metode 2. I denne casen vil det altså være riktigere å bruke en lavere interaksjonsfaktor om en skal beregne med forenklet metode 1. Videre endringer i interaksjonsfaktoren vil gå utenfor rammene for denne oppgaven, og anbefales derfor som videre arbeid.

Case 4

Tabell 21. Analyseresultater case 4 forenklet metode 1.

Case 4, forenklet metode 1	
Bjelkelengde:	2 184,0 mm
Avstanden a:	400,5 mm
Aksiell trykklast F:	28 720,6 N
Forenklet metode 1. ledd	$\frac{F}{F_{till}} = 0,17$
Forenklet metode 2. ledd	$\frac{n_i \cdot M_b}{M_{b,maks}} = 0,83$
Resultat etter forenklet metode 1:	$\frac{F}{F_{till}} + \frac{n_i \cdot M_b}{M_{b,maks}} = 1$
Resultat etter Eurokode 3, metode 2:	$\frac{N_{Ed}}{N_{by,Rd}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} = 1,08$

Tabellen over viser at det ikke er trygt å bruke forenklet metode 1 for å beregne sikkerhet mot knekking i denne casen. Når bjelkelengden var 5 000 mm slik som i case 5 i kapittel 5, kom situasjonen ut på konservativ side i forhold til Eurokode 3, metode 2. Solverfunksjonen i Excel viser imidlertid at dette ikke alltid er tilfellet.

Selv om last- og lengdekombinasjonen kommer ut på trygg side med forenklet metode 1, kommer den ikke ut på trygg side etter Eurokode 3, metode 2. Verdien ender på 1,08, der kravet er at verdien ikke skal overskride 1.

Videre viser det seg at interaksjonskonstanten i forenklet metode 1 må økes fra 1,5 til 1,64 for at metoden skal komme på konservativ side av Eurokode 3, metode 2 for denne casen.

Case 5

Tabell 22. Analyseresultater case 5 forenklet metode 1.

Case 5, forenklet metode 1	
Bjelkelengde:	4368,0 mm
Aksiell trykklast F:	164 926,8 N
Jevnt fordelt last q:	0 N
Forenklet metode 1. ledd	$\frac{F}{F_{till}} = 1$
Forenklet metode 2. ledd	$\frac{n_i \cdot M_b}{M_{b,maks}} = 0$
Resultat etter forenklet metode 1:	$\frac{F}{F_{till}} + \frac{n_i \cdot M_b}{M_{b,maks}} = 1$
Resultat etter Eurokode 3, metode 2:	$\frac{N_{Ed}}{N_{by,Rd}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} = 0,8105$

Ser en bort i fra lengden er dette i praksis de samme resultatene som i analysen i case 3. Det tyder nok en gang på at interaksjonsfaktoren n_i kan settes lavere.

Solver setter slankheten λ til like under 105 i analysen av både case 5 og case 3. Det er altså den høyeste verdien slankheten kan ha når knekklasten beregnes etter Tetmajer. Dette gir den høyste knekklasten bjelken kan ha når resultatet etter forenklet metode 2 ikke skal bli høyere enn 1.

Lik knekklast gir samme tillatt last, som igjen gir samme aksiell trykklast F . Siden slankheten er lik i begge casene blir dimensjonerende knekkkapasitet i staven ved sentrisk trykk $N_{b,Rd}$ lik, som igjen gir likt resultat etter Eurokode 3, metode 2. Bjelkelengden blir forskjellig fordi knekkklengden er forskjellig i de to casene på grunn av innspenningsforholdene. Bjelkelengden justeres automatisk av solver for å gi den optimale slankheten, som er like under 105 i dette tilfellet.

6.3 Forenklet metode 2, HEB100-bjelke

Her vil resultatene fra analysen i de andre casene bli representert og kommentert. Case 1 tas ikke med her heller av samme grunn som i avsnittet over.

Fremgangsmåten i analysen med forenklet metode 2 vil være den samme som med forenklet metode 1, bare at nå tas det utgangspunkt i interaksjonsformelen og kravet til forenklet metode to:

$$\frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{\beta \cdot M}{W} \cdot \frac{n \cdot F}{(F_K - n \cdot F)} \leq \sigma_{till} = \frac{R_e}{n}$$

På samme måte som for forenklet metode 1 vil den største verdien etter Eurokode 3, metode 2 beregnes, som likevel tilfredsstillende kravet til forenklet metode 2. Det som varierer for å oppnå dette er også her lastene og bjelkelengden. Det solverfunksjonen gjør i dette avsnittet er oppsummert i tabellen under.

Tabell 23. Beskriver det solverfunksjonen gjør for caseanalysen for forenklet metode 2.

Hva som skal maksimeres:	Resultatet etter Eurokode 3, metode 2.
Hva som skal varieres:	- Laster - Lengde
Hvilke betingelser som settes:	Resultatet med forenklet metode 2 skal være lik halvparten av flytespenningen.

Case 2

Tabell 24. Analyseresultater case 2 forenklet metode 2.

Case 2, forenklet metode 2	
Bjelkelengde:	6 932,7 mm
Aksiell trykklast F:	97 026,5 N
Tverrlast Q:	0,0 N
Forenklet metode 1. ledd	$\frac{F}{A} = 37,3$
Forenklet metode 2. ledd	$\frac{M}{W} = 0,0$
Forenklet metode 3. ledd	$\frac{\beta \cdot M}{W} \cdot \frac{n \cdot F}{(F_K - n \cdot F)} = 80,2$
Resultat etter forenklet metode 2:	$\frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{\beta \cdot M}{W} \cdot \frac{n \cdot F}{(F_K - n \cdot F)} = 117,5$
Resultat etter Eurokode 3, metode 2:	$\frac{N_{Ed}}{N_{by,Rd}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} = \mathbf{0,9680}$

Resultatet etter Eurokode 3, metode 2 er lavere enn 1, som tilsier at forenklet metode 2 er trygg å bruke for denne casen. Likevel er resultatet på 0,97 høyere enn resultatet når casen var maksimert etter forenklet metode 1 (da var verdien etter Eurokode 3, metode 2 0,91), som betyr at forenklet metode 2 er mindre konservativ for denne casen. det blir også valgt helt andre verdier for lengde og aksiallast enn når casen var maksimert etter forenklet metode 1.

Resultatene i tabellen over kan ved virke noe pussige. Tverrlasten Q er jo 0, som skulle gi et moment lik 0. likevel er verdien av 3. ledd 80,2 MPa. Dette kommer av den spesielle situasjonen solver kommer frem til og avrundningene Excel gjør. Q er nemlig ikke helt lik 0, den er helt nøyaktig 0,0165859064092135 N. Dette er jo et lite tall, som skulle tilsi at verdien på det tredje leddet også skulle bli liten. Likevel får dette leddet verdien 80,2 MPa. Det er fordi solver setter knekkspenningen F_K til bare litt over det dobbelte av den aksielle trykkraften F, slik som vist i tabellen under.

Tabell 25. Analyseresultater case 2 forenklet metode 2.

Knekklast F_K :	194 053,6 mm
Aksiell trykklast F :	97 026,5 mm
$F_K - n \cdot F$:	0,643278001

Som det går frem av tabellen over gir dette et lite tall også *under* brøkstreken i det 3. leddet. Det er derfor resultatet av det 3. leddet blir så høyt som 80,3, selv med svært liten tverrlast.

Resultatene i denne analysen er et godt eksempel på de sterke og svake sidene ved solverfunksjonen. Funksjonen har kommet frem til den optimale bjelkelengde- og lastkombinasjonen for å maksimere resultatet etter Eurokode 3, metode 2, men situasjonen den har kommet frem til er relativt usannsynlig. Det er sjeldent at en vil ta med en tverrlast på under 0,017 N i beregningene. Likevel får den lille lasten store konsekvenser i dette tilfellet. På den annen side er det viktig å ta med alle forskjellige situasjoner. Så solver har gjort det den skulle, selv om resultatet er noe spesielt.

Case 3

Tabell 26. Analyseresultater case 3 forenklet metode 2.

Case 3, forenklet metode 2	
Bjelkelengde:	8 715,9 mm
Aksiell trykklast F :	125 279,0 N
Jevnt fordelt tverrlast q :	0,0 N
Forenklet metode 1. ledd	$\frac{F}{A} = 48,2$
Forenklet metode 2. ledd	$\frac{M}{W} = 0,0$
Forenklet metode 3. ledd	$\frac{\beta \cdot M}{W} \cdot \frac{n \cdot F}{(F_K - n \cdot F)} = 69,3$
Resultat etter forenklet metode 2:	$\frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{\beta \cdot M}{W} \cdot \frac{n \cdot F}{(F_K - n \cdot F)} = 117,5$
Resultat etter Eurokode 3, metode 2:	$\frac{N_{Ed}}{N_{by,Rd}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} = 1,0075$

Resultatet etter Eurokode 3, metode 2 er akkurat høyere enn 1, som betyr at denne metoden i teorien ikke er trygg for denne casen. Solver finner også her at den største verdien etter Eurokode 3, metode 2 oppstår når den jevnt fordelte tverrlasten q er svært liten, helt nøyaktig $0,000004582227664$ N/mm. Det betyr nok en gang at tilfellet er veldig spesielt og teoretisk. Siden tilfellet er så nære å være godkjent etter Eurokode 3, metode 2, vil nok forenklet metode 2 være trygg å bruke i praksis for case 3 med denne bjelkelengden.

Case 4

Tabell 27. Analyseresultater case 4 forenklet metode 2.

Case 4, forenklet metode 2	
Bjelkelengde:	2 977,6 mm
Avstand a:	0,0 mm
Aksiell trykklast F:	131 497,8 N
Forenklet metode 1. ledd	$\frac{F}{A} = 50,6$
Forenklet metode 2. ledd	$\frac{M}{W} = 0,0$
Forenklet metode 3. ledd	$\frac{\beta \cdot M}{W} \cdot \frac{n \cdot F}{(F_K - n \cdot F)} = 66,9$
Resultat etter forenklet metode 2:	$\frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{\beta \cdot M}{W} \cdot \frac{n \cdot F}{(F_K - n \cdot F)} = 117,5$
Resultat etter Eurokode 3, metode 2:	$\frac{N_{Ed}}{N_{by,Rd}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} = 1,0165$

Disse resultatene minner mye om resultatene i case 3. Resultatet etter Eurokode 3, metode 2 overgår så vidt kravet, så metoden er ikke trygg å bruke i teorien. Her er det da avstanden a som er satt til å være tilnærmet lik 0 som vil skape et svært lavt moment i bjelken. Igjen er ikke dette en sannsynlig situasjon i praksis, og siden kravet bare så vidt blir overgått for Eurokode 3, metode 2, vil nok forenklet metode 2 være trygg for denne casen.

Case 5

Tabell 28. Analyseresultater case 5 forenklet metode 2.

Case 5, forenklet metode 2	
Bjelkelengde:	7 081,4 mm
Aksiell trykklast F:	92 994,0 N
Endemoment M_b :	380,0 mm
Forenklet metode 1. ledd	$\frac{F}{A} = 35,8$
Forenklet metode 2. ledd	$\frac{M}{W} = 0,0$
Forenklet metode 3. ledd	$\frac{\beta \cdot M}{W} \cdot \frac{n \cdot F}{(F_K - n \cdot F)} = 81,7$
Resultat etter forenklet metode 2:	$\frac{F}{A} + \frac{M}{W} + \frac{\beta \cdot M}{W} \cdot \frac{n \cdot F}{(F_K - n \cdot F)} = 117,5$
Resultat etter Eurokode 3, metode 2:	$\frac{N_{Ed}}{N_{by,Rd}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} = 0,9625$

I dette tilfellet blir resultatet etter Eurokode 3, metode 2 under 1 som er innenfor kravet. Det betyr at forenklet metode 2 vil være trygg å bruke for denne casen og denne bjelkestørrelsen.

Også her forsøker solver å skape en ugunstig situasjon ved å sette ned bjelkeendemomentet, men det er altså ikke nok til å komme på liberal side av Eurokode 3, metode 2.

7 DISKUSJON OG PROSESSEVALUERING

7.1 Diskusjon

Oppgaven skulle undersøke om to forenklaede metoder for knekkingsberegninger var trygge å bruke i forhold til Eurokode 3. Resultatene har vist seg å ikke være entydige. Metodene vil mest sannsynlig være helt trygge å bruke for de fleste knekkingsberegninger. Likevel er det mulig å finne knekktilfeller som er innenfor kravet med de forenklaede metodene, men ikke etter Eurokode 3, metode 2.

Det at ikke flere bjelkelengder og caser har blitt testet gjør også at resultatene i denne oppgaven ikke kan gi nye og helt konkrete forslag til hvordan knekkingsberegninger bør utføres. Likevel er det nok resultater til å si at de forenklaede formlene ikke kan anses som *helt* trygge. Det betyr også at om en vil være helt trygg når en beregner knekktilfeller, så må en bruke Eurokode 3.

7.2 Forbedringer

Denne oppgaven har hatt en tidsbegrensning på ett vårsemester. Derfor har det vært nødvendig å gjøre noen begrensninger underveis. Det er også enkelte momenter som har blitt utelukket. Hadde de blitt tatt med ville oppgaven kunne gitt klarere anbefalninger med bakgrunn i resultatene.

Blant annet burde solverfunksjonen i Excel vært gjennomgått bedre. I denne oppgaven er det tatt utgangspunkt i at den fungerer optimalt i de analysene som er gjort. Det er viktig å være kritisk og det kan være svakheter ved solverfunksjonen som ikke kommer frem her. Hadde det vært mer tid ville solverresultatene vært grundigere undersøkt.

Flere caser og bjelkestørrelser burde vært analysert. Da kunne flere svakheter ved metodene vært avdekket, noe som hadde styrket oppgaven. Dette ville også gitt et bedre grunnlag for å komme med forslag til konkrete endringer i de forenklaede metodene.

Som vurdering av eget arbeid ser jeg i ettertid at det ble brukt for mye tid på bakgrunnsarbeidet i starten. Mye av det som ble lest og grundig gjennomgått har vist seg å ikke være relevant for oppgaven. Skrivearbeidet burde også kommet bedre i gang fra starten, slik at ny kunnskap kunne bli ført inn i oppgaven kontinuerlig. Å prøve å sette seg inn i alt før det ble skrevet ned, hadde flere bakdeler enn fordeler.

7 KONKLUSJON

Undersøkelsene som er gjort i denne oppgaven viser at de forenklete formlene uten standard ikke alltid kommer ut på konservativ av Eurokode 3. Spesielt ett tilfelle kommer uheldig ut med forenklet metode 1, der det overskrider kravet etter Eurokode 3, metode 2. Forenklet metode 2 overskrider også kravet etter Eurokode 3, metode 2 i enkelte tilfeller. Dette er riktignok en veldig liten overskridelse og for veldig spesielle og teoretiske tilfeller som antageligvis ikke vil forekomme i praksis. Selv om metoden overskrider kravet etter Eurokode 3, metode 2, kommer den ut svært nære det som er kravet i disse tilfellene. Det er med på å styrke metoden.

Derfor kan en si at forenklet metode 2 vil være mest hensiktsmessig å bruke av de klassiske beregningsmetodene som er testet i denne oppgaven. Det at metoden kommer ut tett opptil kravet etter Eurokode 3, metode 2, tilsier også at den er nøyaktig. Det tyder på at en kan komme heldigere ut med denne metoden med tanke på bjelkestørrelse. Likevel viser svakhetene som fremkommer av denne oppgaven at det tryggeste er å beregne etter Eurokode 3.

Etter kravspesifikasjonen og målene for oppgaven var det meningen at konstantene i de forenklete metodene skulle endres noe hvis metodene ikke kom ut på konservativ side av Eurokode 3, metode 2. Det viste seg at interaksjonsfaktoren i forenklet metode 1 måtte *økes* til 1,63 for at metoden skulle komme på konservativ side av Eurokode 3, metode 2 i en av casene. Dette indikerer at interaksjonsfaktoren må være større enn 1,63 for at forenklet metode 1 skal være trygg å bruke.

Analysene viser også at det ikke bare er konstantene som er avgjørende, men at casen og størrelsen på kreftene kan være av størst betydning. For forenklet metode 2 var det en spesiell kombinasjon av kreftene som gikk igjen i flere caser. Det tilsier at om noe burde endres i metodene så kan det være like hensiktsmessig å endre selve formelen som å endre konstantene.

7.1 Anbefalinger

Denne oppgaven har følgende styrker.

- Beregningsmetodene som er brukt i denne oppgaven er grundig gjennomgått.
- Casene som er valgt ut er generelle.
- Metodene er analysert i hvert case for å finne den kombinasjonen av laster og bjelkelengder, hvor de forenklete metodene er mest utsatt.
- Det er kommet frem til retningslinjer for hvordan de forenklete metodene kan forbedres.

7.2 Videre arbeid

For at oppgaven ikke skulle bli for omfattende ble det tidlig gjort en del begrensninger. I tillegg oppsto noen nye problemstillinger underveis. Dette blir derfor punkter som det kan være hensiktsmessig å underøke senere.

- Teste de forenklede metodene for flere caser og bjelkestørrelser.
- Tilpasse de forenklede metodene slik at de kommer ut på konservativ side av Eurokode 3, metode 2.
- Kontrollere resultatene med solverfunksjonen ytterligere.
- Gjøre tester for bjelker også utsatt for knekking om svak akse.
- Teste de forenklede metodene opp mot Eurokode 3, metode 1.

8 LITTERATURREFERANSER

Skriftlige kilder:

6. **Norsk Standard**, *Eurokode 3: Del 1-1*, 2005+NA:2008, s. 4.
10. **Norsk Standard**, *Eurokode 3: Del 1-1*, 2005+NA:2008, s. 21.
11. **Geir Terjesen**, *Globale knekkeberegninger uten standard* (kompendie), 2011, s. 2.
12. **Øistein Vollen**, *Mekanikk for Ingeniører, Statikk og Fasthetslære, 1. utgave, 6. opplag*, 2007, NKI Forlaget, ISBN 978-82-562-5008-0, s. 258.
13. **F. Olsson, G. Strømsnes, A. Bernhardsson**, *Mekanikk 3, Fasthetslære, 1. utgave, 2. opplag*, 1990, Yrkesopplæring, ISBN 82-585-0141, s. 147.
14. **Øistein Vollen**, *Mekanikk for Ingeniører, Statikk og Fasthetslære, 1. utgave, 6. opplag*, 2007, NKI Forlaget, ISBN 978-82-562-5008-0, s. 382.
15. **Jarle Johannessen**, *Tekniske Tabeller, 2. utgave, 7. opplag*, 2009, J. W. Cappelen's Forlag A/S, ISBN 82-02-16822-8, s. 63.
16. **Per kr. Larsen**, *Dimensjonering av stålkonstruksjoner, 1. utgave*, 1990, Tapir Akademisk Forlag, ISBN 978-82-519-2285-2, s. 151.
17. **Geir Terjesen**, *Eurokode 3: Bøyningsknekkning for dobbeltsymmetrisk tverrsnitt* (kompendie), 2011, s. 5.
18. **F. Olsson, G. Strømsnes, A. Bernhardsson**, *Mekanikk 3, Fasthetslære, 1. utgave, 2. opplag*, 1990, Yrkesopplæring, ISBN 82-585-0141, s. 149 og s. 150.
19. **F. Olsson, G. Strømsnes, A. Bernhardsson**, *Mekanikk 3, Fasthetslære, 1. utgave, 2. opplag*, 1990, Yrkesopplæring, ISBN 82-585-0141, s. 151.
20. **F. Olsson, G. Strømsnes, A. Bernhardsson**, *Mekanikk 3, Fasthetslære, 1. utgave, 2. opplag*, 1990, Yrkesopplæring, ISBN 82-585-0141, s. 154.
22. **F. Olsson, G. Strømsnes, A. Bernhardsson**, *Mekanikk 3, Fasthetslære, 1. utgave, 2. opplag*, 1990, Yrkesopplæring, ISBN 82-585-0141, s. 156.
23. **F. Olsson, G. Strømsnes, A. Bernhardsson**, *Mekanikk 3, Fasthetslære, 1. utgave, 2. opplag*, 1990, Yrkesopplæring, ISBN 82-585-0141, s. 152.
24. **Øistein Vollen**, *Mekanikk for Ingeniører, Statikk og Fasthetslære, 1. utgave, 6. opplag*, 2007, NKI Forlaget, ISBN 978-82-562-5008-0, s. 384.
25. **F. Olsson, G. Strømsnes, A. Bernhardsson**, *Mekanikk 3, Fasthetslære, 1. utgave, 2. opplag*, 1990, Yrkesopplæring, ISBN 82-585-0141, s. 153.
26. **Geir Terjesen**, *Globale knekkeberegninger uten standard* (kompendie), 2011, s. 8.
27. **Geir Terjesen**, *Globale knekkeberegninger uten standard* (kompendie), 2011, s. 10.
28. **Per kr. Larsen**, *Dimensjonering av stålkonstruksjoner, 1. utgave*, 1990, Tapir Akademisk Forlag, ISBN 978-82-519-2285-2, s. 245.
29. **Geir Terjesen**, *Globale knekkeberegninger uten standard* (kompendie), 2011, s. 13 til og med s. 16.

30. **Geir Terjesen**, *Globale knekeberegninger uten standard* (kompendie), 2011, s. 13.
31. **Jarle Johannessen**, *Tekniske Tabeller, 2. utgave, 7. opplag*, 2009, J. W. Cappelens Forlag A/S, ISBN 82-02-16822-8, s. 53.
32. **F. Olsson, G. Strømsnes, A. Bernhardsson**, *Mekanikk 3, Fasthetslære, 1. utgave, 2. opplag*, 1990, Yrkesopplæring, ISBN 82-585-0141, s. 173.
33. **Per kr. Larsen**, *Dimensjonering av stålkonstruksjoner, 1. utgave*, 1990, Tapir Akademisk Forlag, ISBN 978-82-519-2285-2, s. 105 til og med s. 107.
34. **Per kr. Larsen**, *Dimensjonering av stålkonstruksjoner, 1. utgave*, 1990, Tapir Akademisk Forlag, ISBN 978-82-519-2285-2, s. 186 til og med s. 187.
35. **Norsk Standard**, *Eurokode 3: Del 1-1, 2005+NA:2008*, NA s.2.
36. **Per kr. Larsen**, *Dimensjonering av stålkonstruksjoner, 1. utgave*, 1990, Tapir Akademisk Forlag, ISBN 978-82-519-2285-2, s. 249-255.
37. **Å. Ø. Waløen**, *Maskindeler, bind 1, 3 utgave og 2. opplag*, 1994, Tapir Akademiske Forlag, 7005 Trondheim, ISBN 82-519-0920-1, 271 s. 135 til og med s. 136.
38. **Geir Terjesen**, Eurokode 3: Bøyningsknekking for dobbeltsymmetrisk tverrsnitt (kompendie), 2011, s. 14.
39. **Geir Terjesen**, Eurokode 3: Bøyningsknekking for dobbeltsymmetrisk tverrsnitt (kompendie), 2011, s. 10.
40. **John Haugan**, *Formler og Tabeller, 1. utgave, 9. Opplag*, 2006, NKI Forlaget, ISBN 562-2483-5, s. 178 og 179.
41. **Jarle Johannessen**, *Tekniske Tabeller, 2. utgave, 7. opplag*, 2009, J. W. Cappelens Forlag A/S, ISBN 82-02-16822-8, s. 52.
42. **Jarle Johannessen**, *Tekniske Tabeller, 2. utgave, 7. opplag*, 2009, J. W. Cappelens Forlag A/S, ISBN 82-02-16822-8, s. 54.
43. **Fridtjov Irgens**, *Fasthetslære, 7. utgave*, 2006, Tapir Akademisk Forlag, ISBN 82-519-1522-8, s. 530.
44. **Fridtjov Irgens**, *Formelsamling i mekanikk*, 1999, Tapir Forlag, ISBN 82-519-1506-6, s. 69.

Internettkilder:

1. **Bilde av ulykke, Kværner:**
<http://www.kvaerner.com/Documents/News/Slide3.JPG>
2. **Info om ulykken, Kværner:**
<http://www.kvaerner.com/en/toolsmenu/Media/Press-releases/2012/Kvarner-ASA-Alvorlig-ulykke-pa-Verdal-Intern-granskingsrapport-ferdig/>
3. **Info om ny standard for mobilladere:**
<http://www.dagensit.no/article1767107.ece>
4. **Generell informasjon om standarder:** http://snl.no/standard/I_praktisk
5. **Informasjon om Eurokodene:**

<http://www.standard.no/eurokodekampanje?gclid=COeoleubtK4CFSVXmAodmi3NOw>

7. **Informasjon om Eurokodene:**

<http://www.stalforbund.com/Eurokoder/eurokoder.htm>

8. **Forsidebilde av Eurokode 3: Del 1-1:** <http://www.standard.no/no/Sok-og-kjop/produktkatalogen/Produktpresentasjon/?ProductID=326000>

9. **Informasjon om Eurokodene:**

<http://www.stalforbund.com/Eurokoder/eurokoder.htm> og

[http://www.standard.no/no/fagomrader/bygg-og-anlegg/eurokoder/eurokoder-erstatter-nasjonale-standarder-/](http://www.standard.no/no/fagomrader/bygg-og-anlegg/eurokoder/eurokoder-erstatter-nasjonale-standarder/)

21. **Informasjon om Ludwig von Tetmajer:**

http://en.wikipedia.org/wiki/Ludwig_von_Tetmajer

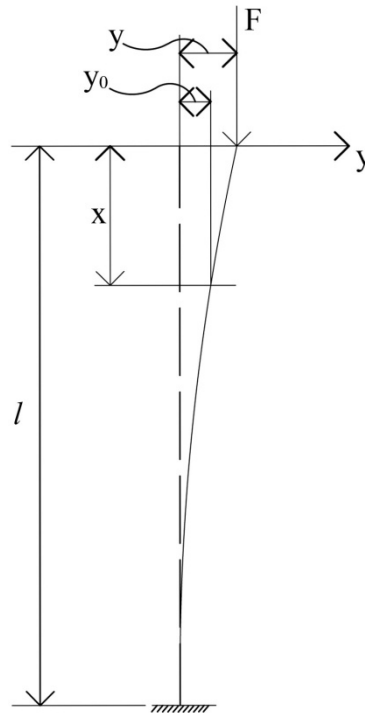


9 VEDLEGG

Vedlegg	Tittel	Side:
Vedlegg 1	Utledning av Eulers formel.	102
Vedlegg 2	Gantt-diagram.	105
Vedlegg 3	Exelark er vedlagt på CD. I excelarket ligger alle casene enkeltvis som Worksheets.	-

Vedlegg 1

Utledning av Eulers formel for knekking av stav fastspent i den ene enden utsatt for trykkraft, se figur 27. For dette vedlegget brukes referansen [18].



Figur 27. Bjelke fast innspent i den ene enden og fri i den andre, utsatt for en aksial trykklast [18].

Momentet i bjelken på figur 27 kan beskrives med likningen:

$$M_b = -F(y_0 - y)$$

$$E \cdot I_{min} \cdot y'' = -M_b = F_k(y_0 - y)$$

Innfører betegnelsen

$$k = \sqrt{\frac{F}{E \cdot I_{min}}}$$

$$y'' = k^2(y_0 - y)$$

Den generelle løsningen på denne differensiallikningen er

$$y = c_1 \cdot \sin(k \cdot x) + c_2 \cdot \cos(k \cdot x) + y_0$$

Randbetingelsene gir verdiene for c_1 og c_2 :

$$x = 0: y(0) = 0 + c_2 + 0 = 0$$

$$c_2 = 0$$

$$x = l: y(l) = c_1 \cdot \sin(k \cdot l) \cdot x + 0 + y_0 = 0$$

$$c_1 = -\frac{y_0}{\sin(k \cdot l)}$$

Differensiallikningen kan da skrives slik:

$$y = -\frac{y_0 \cdot \sin(k \cdot x)}{\sin(k \cdot l)} + y_0$$

Den deriverte av denne likningen blir:

$$y' = -\frac{y_0 \cdot k \cdot \cos(k \cdot x)}{\sin(k \cdot l)}$$

Setter inn at $x = l$ og $y' = 0$:

$$0 = -\frac{y_0 \cdot k \cdot \cos(k \cdot l)}{\sin(k \cdot l)}$$

Siden y_0 ikke kan bli lik null, betyr likningen over at $\cos(k \cdot l)$ må være lik null.

Den generelle løsningen av denne likningen har et uendelig antall røtter:

$$k \cdot l = \frac{\pi}{2}, \frac{3 \cdot \pi}{2}, \frac{5 \cdot \pi}{2}, \frac{7 \cdot \pi}{2}, \dots$$

Den minste roten $k \cdot l = \frac{\pi}{2}$ tilsvarer en bjelke med én bul, som vil være det relevante tilfellet fordi denne knekkformen krever minst aksiell trykklast. Fra før:

$$k = \sqrt{\frac{F}{E \cdot I_{min}}}$$



$$\left(\frac{\pi}{l \cdot 2}\right)^2 = \frac{F_{cr}}{E \cdot I_{min}}$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{4 \cdot l^2}$$

Vedlegg 2

Diagrammet har ukervisning og ukene vises med mandagens dato.

Fremdriftsplan, masteroppgave vår 2012

