# Et møte mellom matematikkundervisning og fenomenologisk naturfagdidaktikk

## Mathematical education meets phenomenological science education


Sigurd Hals

UNIVERSITETET FOR MILJØ- OG BIOVITENSKAP

Institutt for matematiske realfag og teknologi


Masteroppgave 30 stp. 2011

# Forord

At jeg skulle ende opp på en lektorutdanning i realfag (LUR) ved Universitet for Miljø- og biovitenskap (UMB) og en mastergrad i matematikkdidaktikk, hadde jeg ikke i tankene da jeg en gang begynte på plantefag her ved UMB.

Nå som arbeidet med oppgaven begynner å bli ferdig, er jeg spesielt glad for at det ble en oppgave med et tema som jeg personlig synes er spennende, og at det er blitt en oppgave som har gitt rom for å reflektere og filosofere over matematikken som fag.

Denne oppgaven hadde ikke blitt til uten hjelp og støtte, og mange fortjener en stor takk.

Særlig vil jeg nevne min gode veileder Edvin Østergaard for inspirerende samtaler og oppmuntrende veiledning. Jeg vil også nevne Margrethe Naalsund, biveileder, som med utrolig positivitet og imponerende oversikt over litteraturen hjalp meg over flerfoldige uløselige vanskeligheter. Morten Eide, mangeårig matematikklærer ved ulike Steinerskoler, kom med mange konstruktive innspill og var behjelpelig med korrekturlesning. Jeg vil også rette en takk til min far for engasjement og for tålmodig bekjempelse av min noe overdrevne ”kreative” ortografi og setningskonstruksjon.

En takk retter jeg også til lærerne som stilte opp og lot seg intervjue: dere er selve kjernen i oppgaven.

Tusen takk også til min familie som kanskje aller mest gleder seg til at jeg skal flytte fra lesesalen og hjem igjen. Maja, min kjære kone, lot meg få tid og rom til å ferdigstille oppgaven.

Og de som kanskje aller mest gleder seg til at alle disse sidene er ferdig skrevet og innlevert, mine barn Aurora og Benjamin, som har vært meg en sprudlende kilde til fornyet pågangsmot hver gang jeg gikk meg vill i ulendt terreng.

Ås, desember 2011

Sigurd Hals

# Sammendrag

I denne oppgaven spør jeg:

- Hvordan kan prinsipper fra fenomenologisk naturfagundervisning inspirere matematikkundervisning?

- Hva kan kjennetegne fenomenologisk matematikkundervisning?

Med utgangspunkt i litteratur om fenomenologisk naturfagundervisning har jeg intervjuet fem lærere. Det er lærerens perspektiver som i hovedsak drøftes opp mot prinsipper i fenomenologisk naturfagundervisning.

Det utpeker seg tre områder fra analysen av intervjuene:

- Matematikkens realitet og kvalitet
- Matematikkens kognitive aktivitet
- Matematikken som verktøy

*Matematikkens realitet og kvalitet* går inn på hvordan matematikken kan oppleves reell og hvordan denne realitet kan være opphav til kognitive erfaringer.

*Matematikkens kognitive aktivitet* tar for seg hvordan tenkningen forholder seg til de fysiske fenomener og hvordan denne relasjon er med i utviklingen av de abstrakte matematiske fenomener.

*Matematikken som verktøy* handler om hvordan matematikken og erfaringer av den, bidrar til å erkjenne og forstå den verden som omgir oss.

I konklusjonen viser jeg hvordan disse perspektiver ved matematikken kan bidra til å utvikle en utvidet læringsmodell inspirert av den fenomenologiske naturfagundervisningen. Denne utvidete modellen tar med seg matematikkens abstrakte verden, hvor abstrakte fenomener kan være kilde til hva jeg kaller kognitive erfaringer. Denne utvidete modellen tydeliggjør relasjonen mellom matematikkfaget og naturfaget, og hvordan kunnskapene i disse fagene henger sammen. Et vesentlig punkt som kommer frem er hvordan også læring i matematikk er en prosess som kan romme fenomenologiske erfaringer og opplevelser.

# Abstract

In this thesis I am putting forward the following questions: How can the principles from phenomenological science education inspire mathematical education? What might characterize phenomenological math-teaching?

Starting from literature on phenomenological science education, I have interviewed five math-teachers. My main focus is on the perspectives of the teachers related to the principles of phenomenological science education.

From the analysis of the interviews three aspects emerge:

- The reality and the quality of mathematics
- The cognitive activity related to mathematics
- Mathematics as tool

*The reality and the quality of mathematics* is about how mathematics can be perceived as real and how this reality can be the fundament for cognitive experiences

*The cognitive activity related to* mathematics focus on how the thinking relates to the physical phenomenon and how this relationship is a part of developing abstract mathematical phenomena.

*Mathematics as tool* is about how mathematics and the experiences of it can contribute to the perception and the understanding of the surrounding world.

In the conclusion I discuss how these aspects of mathematics can contribute to the development of a teaching-model inspired by the phenomenological teaching of science education. This extension includes the abstract world of mathematics, where abstract phenomena can be the source of what I describe as cognitive experiences.

This extended model reveals the relations between the mathematical education and those of science education, and how their knowledge is intertwined.

An important aspect that emerges is how the process of teaching mathematics also can contain phenomenological perceptions and experiences.

## Innhold

# 1 INNLEDNING

Her vil jeg presentere min faglige og personlige motivasjon for oppgavens tema, og deretter forklare mitt forskningsspørsmål. Jeg gir også i 1.4 en definisjon av noen sentrale begreper som jeg bruker i oppgaven.

## 1.1 Faglig motivasjon

Ved Seksjon for læring og lærerutdanning ved IMT, UMB, ble jeg kjent med fenomenbasert naturfagundervisning. Her blir fenomenet utgangspunktet for undervisningen, og erfaring og observasjon av fenomenet blir grunnlaget for elevenes kunnskapsdannelse. Denne undervisningsformen ligger naturlig for naturfaget, hvor den kunnskap som formidles er forståelsen av de konkrete fenomeners verden og hvor teorien utvikles i relasjonen til fenomenene.

Dette er annerledes med matematikken. Den bygger opp et eget system av aksiomer, som om den har til hensikt å være sin egen ”herre”. Matematikken ble sett på som ren vitenskap inntil Kurt Gödel kom med sitt ufullstendighetsteorem som bl.a. sier at et lukket system ikke kan bevise seg selv. Som konsekvens er det tenkningen som blir det bærende i matematikken (Ulin 1988). Men hvilke mulige konsekvenser får dette for fenomenologisk matematikkundervisning, og hva slags fenomener er det som kan være utgangspunkt for en slik undervisning?

I dag finnes det mange didaktiske metoder og verktøy som brukes for å formidle matematikk i skolen. Metoder er strategier som brukes for å formidle den kunnskapen læreren ønsker å gi eleven. Verktøy er slikt som tavle og kritt, tekniske hjelpemidler, også slike hjelpemidler som er mer rettet mot matematikken, som f.eks. matematikkspill. Verktøy og metoder danner et nett av begreper med ulike relasjoner. Flere metoder er overlappende og enkelte verktøy knyttes sterkere til noen metoder enn andre.

## 1.2 Personlig motivasjon

Som person er jeg mest en praktiker og et friluftsmenneske. I mitt utviklingsprosjekt på praktisk-pedagogisk utdanning (PPU) skrev jeg om gården som læringsarena. Aktivitet og opplevelse i undervisningen står med andre ord sentralt i min praksisteori. Det er da kanskje litt paradoksalt at jeg har matematikk som fag. Det hadde kanskje vært mer nærliggende å lage en oppgave som handlet om hvordan å undervise matematikk i en praktisk situasjon. Min intuitive innvendig mot dette er, at jeg da ikke er rettferdig ovenfor matematikken, som jeg opplever er helt annerledes enn naturfaget.

Det er kanskje dette paradokset som har ført til at jeg har kommet frem til et slikt motsetningsfylt forskningsspørsmål: finnes det en fenomenologisk undervisningsform i matematikk?

Slik jeg ser det, er mye av fasinasjonen og undringen blitt borte i matematikkundervisningen. Hvordan kan fasinasjonen få igjen den nødvendige plass til å inspirere undervisningen, og kan denne oppgaven gi et bidrag i den retningen?

En annen impuls, som også ga meg motivasjon til denne oppgaven, var mine erfaringer fra jobben som øvingslærer ved ”Brukerkurs i matematikk - math100”, det første matematikkurset ved UMB. Som øvingslærer møter jeg jo oftest de som trenger mest hjelp, så disse erfaringer er klart ikke representative for alle studenter. Jeg vil likevel ta frem et eksempel, hvor studenter spør meg f.eks.: blir $\frac{1}{2}x \; lik \; \frac{x}{2}$? (Hals 2010). Det som forundrer meg er at de spør om ”hva *blir* det?” og ikke om ”hva *er* det?”. Det ligger en vesentlig nyanseforskjell her. Det første tilfellet er fasit-orientert, mens det andre er konsept-orientert. Hvis man lurer på hva noe blir, bør man kanskje først undre seg over hva det er, altså virkelig fundere over dette forunderlige som er blitt servert. Det kan se ut som studentenes undring er borte og viljen til å gripe fatt med tenkningen følgelig er svekket (se bla. Wagenschein 2000). Dette fikk meg til å undre på om fenomenologisk undervisning kunne være en undervisningsmetode som kunne inspirere eleven mer til egen undring og refleksjon.

## 1.3 Forskningsspørsmålene

I denne oppgaven har jeg ønsket å undersøke hvordan metoder og ideer fra fenomenologisk naturfagundervisning kan overføres til matematikkundervisningen. Hovedvekten er lagt på matematikkundervisning utformet med utgangspunkt i ideer fra fenomenologisk naturfagundervisning.

Jeg har ikke funnet noe litteratur som kan belyse en slik sammenstilling mellom fenomenologisk naturfagundervisning og matematikkundervisning. Det har medført stor usikkerhet om denne sammenstilling i det hele tatt har noe for seg, og om det vil være mulig å kunne gi et slikt bidrag til matematikkundervisningen. Denne usikkerhet har gjort det vanskelig å lage et passende forskningsspørsmål. Til å begynne med jobbet jeg ut i fra følgende problemstilling: “Hvilken relasjon *kan* matematikkundervisning ha til fenomenologisk naturfagundervisning?”. Dette satte fokus på relasjonen mellom matematikkundervisning og fenomenologisk naturfagundervisning. Da dette ikke er hovedfokus i oppgaven, har jeg gått bort denne oppgaveformuleringen. Hensikten med oppgaven er nå å sette fokus på matematikkundervisningen og hva som kan tilføres fra ideene som ligger til grunn for fenomenologisk naturfagundervisning. I denne oppgaven blir derfor forskningsspørsmålene:

> Hvordan kan prinsipper fra fenomenologisk naturfagundervisning inspirere matematikkundervisning? Og hva kan kjennetegner fenomenologisk matematikkundervisning?

Med dette ønsker jeg å vise hvordan ideer fra fenomenologisk naturfagundervisning kan overføres til matematikkundervisningen og hvordan en slik undervisning eventuelt vil kunne arte seg.

## 1.4 Begrepsavklaring

### Fenomenologisk kontra fenomenbasert

Jeg har i min oppgave tatt utgangspunkt i begrepet *fenomenologisk undervisning*. Men det er en tendens i litteraturen til å bruke *fenomenbasert undervisning (se bla. Østergaard et al. 2008)*, dette kanskje for å slippe unna det litt tyngre begrepet fenomenologi. I og med at jeg fortsatt er nysgjerrig på fenomenologi, er jeg ikke konsekvent i bruken av *fenomenbasert* og *fenomenologisk*. Jeg er redd for at om kun ordet fenomenbasert brukes, vil de ideer som er knyttet opp til fenomenologi kunne forsvinne, noe jeg ikke ønsker skal skje i mitt arbeid. Men i og med at det er ulik bruk i litteraturen, så bruker jeg begge begrepene i denne oppgaven.

### Livsverden

Dette er oversettelsen av Husserl sitt begrep «Lebenswelt» («Lifeworld»*)* (Østergaard et al. 2007, s. 124). Det blir der forklart med: “the world of everyday experience”(ibid.). Her i oppgaven mener jeg: Den erfaringsverden den enkelte selv lever i, forholder seg til og gjør seg tanker om.

### Begrep – konsept

Skillet mellom ordene *begrep* og *konsept* kan være litt uklart og ordene er i mange sammenhenger synonymer. I denne oppgaven er det behov for å gjøre et skille.

Ordet *begrep* brukes i oppgaven med følgende betydning:

> (klart) avgrenset forestilling om det vesentlige ved noe: begrepet kjærlighet / matematiske, grammatiske begreper / toleranse var for ham et ukjent begrep / Louis Armstrong ble et begrep innen jazzen; (filos.) avgrense det til et begrep, gi det begreps-form (Kunnskapsforlaget 2011).

Ordet *konsept* brukes i oppgaven med følgende betydning:

> grunnleggende (og retningsgivende) idé; helhetlig opplegg: arbeide, drive etter et nytt konsept (Kunnskapsforlaget 2011).

Ordet *konsept* omfatter en helhet, for eksempel et salgskonsept eller et reisekonsept, slik at det er en helhet som ikke er helt avgrenset og definert. Mens *begrep* er tydeligere, avgrenset og mer bearbeidet.

### Kvalitet

Ordet *kvalitet* kan ha litt ulike betydninger. Det forbindes ofte med at noe er godt laget, at det er av en god kvalitet. Jeg er her i oppgaven mer ute etter fenomenets ulike kvaliteter slik vi opplever det. Det kan både være gode eller dårlige kvaliteter eller ingen av delene. Eksempel: En kvalitet ved vann er at det er vått.

### Estetikk

Når jeg i denne oppgaven tar opp temaet matematikkens estetikk eller det estetiske i matematikken, bruker jeg en utvidelse av slik en av kunnskapsforlagets nettordbøker definerer det; Estetisk: at noe er vakkert og smakfullt (Kunnskapsforlaget 2011). Men jeg legger til at den estetiske opplevelsen ikke alltid er vakker, det kan være stygt, ubehagelig, kjedelig.

### Skille mellom undervisningsmetode og forskningsmetode

Det som er felles for forskningsmetode og undervisningsmetode, er at begge deler skal strukturere den prosessen som skjer i forsknings resp. undervisning.

I læringsprosessen er elevens ontologiske forståelse i utvikling. Det gjelder her å få grep om verden og dens realitet. Hvis første steg skal være å komme til den konklusjonen at det ikke er mulig å finne én sann viten, er det ganske fåfengt som begynnelse. Det er viktig å tenke slik at dette ikke er et sluttprodukt, men en prosess; eleven er på vei.

Det blir ofte brukt vitenskapelige termer på ulike undervisningsmetoder. Men er det reelt å kalle en undervisningsmetode for induktiv? Eller fenomenologisk? I hvilken grad er dette ekte? Og hvordan er grensen mellom den verden læreren setter opp og det som er elevens virkelige verden? Når elevene jobber induktivt, så jobber de induktivt innenfor den verden som læreren konstruerer for dem. Det blir en liksom-verden hvor læreren hele tiden justerer hvor mye kunnskap de får å jobbe med.

Men hvordan gjøre dette til reelle og virkelige prosesser? Eleven vil kanskje aldri komme utenom lærerens oppkonstruering. Hva er det som kan bli ekte i denne oppkonstruerte verden? Er det elevens egen aktivitet? Hvis eleven skal lære seg det universet som læreren legger fram, vil dette ikke være helt reelt. Men den egenaktivitet som eleven bedriver innenfor disse rammer oppleves likevel som en reell aktivitet.

## 1.5 Oppgavens struktur

Kapittel 2 trekker frem teori fra fenomenologisk naturfagundervisning. Med dette teoretiske bakteppet dannes grunnlag for planleggingen av intervjuet.

Kapittel 3 presenterer metode og plan for intervjuene.

Kapittel 4 presenterer det datamaterialet som jeg mener er relevant i besvaring av forskningsspørsmålet.

Kapittel 5.1-5.3 drøfter funn opp mot litteratur.

Kapittel 5.4 sammenstiller funn og viser hvordan disse kan være grunnlag for å utvide en fenomenologisk læringsmodell til også å omfatte matematikk.

Kapittel 6.1 konkluderer med hensyn til forskningsspørsmålene.

Kapittel 6.2 avslutter oppgaven med å presentere noen tanker om mulige videreføringer av dette arbeidet.

# 2 TEORETISK BAKGRUNN

I dette kapittelet går jeg inn på den teoretiske bakgrunnen for fenomenologien og den fenomenbaserte undervisningen. Først ser jeg på det filosofiske utgangspunktet, og deretter på den form dette har fått i naturfagdidaktikken. Ut fra dette vil jeg forme mine spørsmål når det gjelder fenomenologisk matematikkundervisning. Jeg vil også se på hva som allerede finnes innenfor matematikken i denne retningen. Aller først ser jeg litt på hva det vil si å danne seg en teoretisk bakgrunn.

## 2.1 Oppgavens bruk av teori

Et hvert vitenskapelig arbeid bør hvile på et teoretisk grunnlag. Det finnes mange teoretiske retninger man kan følge, men er det bare å velge ut det som passer best i den enkelte situasjon? Hvilke kriterier er det som skal brukes når man velge sitt teoretiske bakteppe? Mogens (2006) hevder at bruken av teori er vidt forskjellig, og at et gjennomgående problem er, at det ikke er en forbindelse mellom teorien og empirien. Teorien fungerer ofte som en kunngjøring av forskerens tilknytning til en gruppe innenfor fagmiljøet. Videre sier han:

> Firstly, there is *no such thing* as a well-established unified "theory of mathematics education" which is supported by the majority of mathematics education researchers. (Mogens 2006, s. 5, orginal tegnsetting)

Vi har opp gjennom tiden sett ulike teoretiske fokus, behaviorismen og ulike former for konstruktivisme, og dertil mer komplekse teorier som blant annet bygger på nevrovitenskap. Disse ulike retninger har gitt ulike utslag i praksis, som igjen har gitt ulike didaktiske metoder som i varierende grad bygger opp under ulike teoretiske retninger. Et annet aspekt er at forskningen på matematikkundervisning stadig henter inn teoretisk materiale fra andre fagområder som kognitiv vitenskap, sosiologi, antropologi, filosofi og nevrovitenskap (Sriraman & English 2010 s. 16).

I denne oppgaven gjør jeg en sammenstilling mellom teorier fra fenomenologisk naturfagundervisning og matematikkundervisning. Dette er en sammenstilling som er ganske fraværende i den litteratur jeg har funnet, slik at jeg her går en vei hvor muligheten for korreksjon av teori er mindre enn i de situasjoner hvor temaet er mer etablert i den teoretiske litteratur.

## 2.2 Fenomenologi som filosofi

Begrepet fenomenologi har sitt utgangspunkt som en filosofi og ikke som et didaktisk verktøy. Som forskertilnærming er fenomenologi kjent første gang fra Hegel som brukte begrepet i 1807, og det er videre kjent at Hegel sitt arbeid var inspirert av Goethe (1749-1832) sin fenomenologi (Østergaard et al. 2008). Fenomenologien blir igjen løftet frem av Edmund Husserl(1859-1938) som prøvde, med fenomenologisk metode, å finne et nullpunkt for vitenskapen, et fundament. Østergaard skriver om denne prosessen:

> … 'returning to the things themselves', meaning things as given in experience, when this experience is cleansed from all knowledge and suppositions about reality. The phenomenological researcher must, within her own experience, carry out a 'transcendental reduction' in order to reach that level of experience which is the 'purely given'. (Østergaard et al. 2008, s. 95)

Dette er kjernene i fenomenologien, hvor hver enkelt må dyrke frem en ren erfaring av tingen, en erfaring som skal være fri for meninger og forhåndskunnskap. Tanken er vel at det er dette som danner grunnlaget for vår relasjon til livsverden. Dette er erfaringer som ikke kan formidles, men noe som må erfares av den enkelte selv.

Vi berører her noe av det mest sentrale i fenomenologien, nemlig at dette er en prosess, en aktiv handling, slik både Goethe og Husserl sier - det kan ikke leses, det kan bare gjøres. Går vi litt nærmere inn på Goethe sitt vitenskapelige arbeid, ser vi både i hans fargelære og i hans observasjoner av planteriket, at det er en ”non-dualisme”. Goethe legger vekt på at fenomen og teori ikke skilles, men gjennom sansing og erfaring gjøres fenomenet til en del av teorien. Jeg synes det kan være vanskelig å begripe dette kjernepunkt i fenomenologien, noe som kanskje henger sammen med at det er noe man selv må erfare for å kunne forstå.

Et annet begrep som også kaster lys over denne vanskelig gripbare kjernen i fenomenologien, er ”empirisk-idealisme” (Østergaard et al. 2008). Et motsetningsfylt begrep som har til hensikt å beskrive hvordan ideer er levende erfaringer, og at våre ideer står i et levende forhold til den sanselige verden. Båndet mellom ideene og den verden hvor disse ideene har sitt utgangspunkt, skal ikke brytes men være vedvarende, og erfaringen skal fortsette å være en aktiv del av kunnskapen. For å illustrere kontrasten i dette, kan vi se på hva Bo Dahlin (2002, referert i Østergaard et al. 2008) erfarte da han presentere Goethes fargelære for sine lærerstudenter og spør dem om denne fargelære kan karakteriseres som vitenskap. En student som har vanskelig for å akseptere det som vitenskap utalte: ”*Hvis det ikke er noe bak* *fenomenet, da er det ingen ting å undersøke.*” Ut fra konteksten tolker Dahlin dette til at studenten mener:

> If there is not an invisible but more real world behind our everyday lifeworld experience, then science has no object of study. (Østergaard et al. 2008, s. 100)

Dette illustrerer kontrasten mellom å søke en abstrakt bakenforliggende kunnskap og den å søke fenomenets eget utrykk. Dette kan kanskje virke uforenelig med matematikken som tilsynelatende er en rendyrkning av en abstrakt verden.

## 2.3 Fenomenologi i naturfagundervisningen

Fra å være en forskerholdning har fenomenologien funnet veien til didaktikken. Den får her en noe annen form, fordi elevene ennå ikke er modne til selv å innta en slik holdning til fenomenene og tenkningen som den filosofiske fenomenologien krever. Vi må derfor skille mellom det å undervise fenomenologisk, og en fenomenologisk tilnærming til forskning. Det dreier seg derfor om for læreren, å tilrettelegge undervisningen slik at fenomenologien som metode blir ivaretatt gjennom det som gjøres.

Hovedprinsippet er at man ikke skal lære elevene en eller annen ferdig teori, for eksempel atomteorien eller lignende, men at det er det opprinnelige fenomenet som skal danne grunnlag for læringen (Østergaard 2004). Hugo (2002) viser flere eksempler, og ett hvor undervisningen tar utgangspunkt i en fyrstikk. Han starter det hele med en undring over hva en fyrstikk er og hva det er som skjer med fyrstikken når den tenner. Det viser seg at et så tilsynelatende enkelt fenomen som en fyrstikk skjuler mange ”hemmeligheter” som kan være utgangspunkt for undervisningsøkter. Ut fra denne undringen vokser det frem en verden av erfaring og kunnskap. Prakteksempelet som veldig ofte refereres, er vitenskapsmannen Michael Faradays foredrag holdt for ulærde tilhørere i Royal Academy of Science i London rundt 1860. I løpet av disse seks foredragene vendte han hele tiden tilbake til et brennende stearinlys som han hadde foran seg. Faradays mål var å gi de ulærde en innføring i datidens vitenskap, og all teori knyttet han opp til dette ene brennende lyset(Hugo 2002; Nordal 2006; Østergaard et al. 2008). Om det var en av datidens mest kjente vitenskapsmann, Faraday, eller om det var stearinlyset som trakk sprekkfulle hus, kan man så undre seg over. Men at det er et godt eksempel på fenomenologisk undervisning er helt sikkert.

Fenomenologi vil si å skape kunnskap om fenomenet slik det kommer oss i møte, så det bygges en kunnskap som er basert på fenomenets eget uttrykk. I fenomenologisk undervisning bestreber man seg på at eleven møter fenomenet direkte, og ikke gjennom teorien (Østergaard 2004).

Det er viktig å lære elevene selv å kunne *se* og *erfare* verden for å kunne forstå den. På det viset vektlegger fenomenologisk undervisning de tidlige fasene i kunnskapens dannelse, slik all naturviten har sin opprinnelse i forskerens eget møte med naturfenomenene. Det er gjennom denne erfaring og observasjon at forskeren kan etablere kunnskap om fenomenet. Det å undervise den omvendte veien, altså først se på teorien, for så å eksemplifisere denne teorien med eksperimenter, blir av Dahlin (2003, refert i Østergaard et al. 2008, s. 104) kalt ”ontological reversal”. I undervisningssammenheng karakteriserer Freudenthal (1983) dette som omvendt didaktikk. Begge kilder mener dette vil problematisere elevens egen kunnskapsdannelse og skape et gap mellom elevens erfaring av verden og den kunnskap som de lærer på skolen. Vi kan ofte se at den kunnskapsformidling som skjer i skolen har en slik karakter, at det opprinnelige fenomen bare blir en sekundær kilde til kunnskap.

Eide forteller om en hendelse som viser problemet med at tingene læres teoretisk. Han satt engang på en buss bak to gutter som refererte til et kuldeblandingsforsøk læreren hadde gjort på skolen. Den ene sa: ”Det var rart at det ble så kaldt av å blande snø og salt, hva kan det komme av?” Den andre svarte: ”Det har sikkert noe med molekylene å gjøre”, hvorpå den første la til: ”Ja, det har sikkert det”, og dermed var samtalen slutt. Det ble et levende eksempel på at en teori, i dette tilfellet atomteorien, tar livet av erkjennelsestrangen; elevene får oppfatningen av at virkeligheten finnes i et område man ikke selv kan nå frem til.” (Personlig kommunikasjon, 01. november 2011)

Den fenomenbaserte undervisning streber etter ikke å ”vrenge” elevens kunnskapsdannelse, men å tette gapet mellom teorien og den virkelige verden (Østergaard et al. 2008).

Østergaard (2004) oppsummerer sammenhengen mellom fenomenologi og undervisning i fem punkter. Disse tydeliggjør hva som er innebefattet i begrepet fenomenologisk naturfagundervisning. Jeg har forkortet det til følgende:

**Utgangspunkt i virkeligheten.** Den primære kilden til vår naturvitenskap er elevens møte med fenomenet, og på den måten blir teorien en sekundær kunnskap. På samme måte ønsker man at eleven også bygger sin teoretiske kunnskap på reelle erfaringer.

**Utgangspunkt i elevenes levde erfaringer.** Det er viktig at læreren knytter teorien til elvenes faktiske erfaringer. Det kan fort bli et gap mellom erfaringer som eleven har og den teori som læreren presenterer. Et godt eksempel på dette er, når læreren ber elevene se bort fra alle feilkildene i eksperimentet i klasserommet. Det blir jo som å si at eleven skal se bort fra hvordan de selv erfarer verden, for så å fortelle hvordan verden "egentlig" er ifølge teorien.

**Fenomenologi må gjøres.** Å erfare og observere er en aktiv handling som man selv må gjøre for å få en ekte erfaring av fenomenet.

**Menneskets relasjon til verden er mangfoldig.** Når vi trekker inn erfaringer av fenomenet som en del av kunnskapen, må vi være oppmerksomme på at slike erfaringer er veldig personlige. Det er viktig i møte med fenomenet ikke å forstumme mangfoldet i erfaringen til fordel for teoriens snevre forenkling.

**Fenomenologisk didaktikk- fokus, formål og fremgangsmåte.** Det kan være hensiktsmessig å ta med spørsmålet om hva som er tema/objekt i den fenomenologiske tilnærmingen, og hva som er særegent med denne undervisningsformen og hvordan den kan praktiseres.

## 2.4 Matematikken og naturvitenskapen

Den fenomenologiske naturfagundervisningen kan ikke direkte overføres til matematikkfaget, fordi det er vesentlige forskjeller mellom fagene. Faktisk er det slik at ukritisk anvendelse av matematikk fører til teoretisering av naturvitenskapen. Matematikken blir da stående i veien for fenomenet; det blir den matematiske beskrivelsen som blir det vitenskapelige, slik at man ikke får skikkelig øye på det egentlige fenomenet (Ulin 1988). Som vi har sett tar fenomenologisk undervisning opp denne problemstillingen, og henter da inn fenomenet og lar dette være inngangspunkt for kunnskapen.

Naturfaget er induktivt, hvor all kunnskap kommer fra gjentakende forsøk. Slik at etter å ha sett at teorien stemmer ved gjentatte forsøk, kan vitenskapen anerkjenne teorien. Matematikken på sin side oppfattes i utgangspunktet som deduktiv. Ut fra visse grunnregler, eller aksiomer, bygges de ulike matematiske teorier opp, og fra disse bevises så de ulike lovmessigheter som viser seg.

Som et eksempel på forskjellen mellom fysikk og matematikk tar Ulin(Ulin 1988) frem $s=kt^2$ og $1+3+5+7+9+\ldots+2n-1=n^2$. Det første eksempelet viser noe som er kommet frem av empiriske forsøk, det siste er noe som kommer frem av ren logikk, og som kan bevises ut fra de aksiomer vi har godtatt. Og alle som setter seg inn i dette beviset vil kunne få en fornemmelse og visshet om at det er riktig(Ulin 1988). Matematikken vokser ut fra tenkningen selv, mens naturvitenskapens tenkning må utgå fra iakttakelsene. Ulin går likevel imot Kants ytring om at matematikken er sann *a priori*, og hevder at den må bli sann ut fra tenkningen. Ulin kan plasseres i et intuitivistisk syn hvor tanken og intuisjonen blir det bærende element (Ernest 1991).

Naturvitenskapen og matematikken står dermed som motsetninger til hverandre. Er det da mulig å finne en fenomenologisk inngang til matematikken?

## 2.5 Fenomenologisk tilnærming til matematikkens begreper

Freudenthal (1983), som er nevnt tidligere, gjør en fenomenologisk tilnærming til matematikken. Han sier i ”Didactical phenomenology of mathematical structures” at de matematiske strukturer ble oppfunnet for å beskrive den fysiske, sosiale og mentale verden. Videre sier han:

> Phenomenology of a mathematical concept, structure, or idea means, in my terminology, describing this nooumenon[1] in its relation to the phainomena it is created to organize, and to which it can be extended, how it acts upon these phenomena as a means of organizing, and with what power over the phenomena it endows us. (Freudenthal 1983, s. 28)

Freudenthal søker å beskrive de matematiske konsepter og samtidig sette dem i relasjon til deres opprinnelse. Han søker videre å gå inn i matematikken på en måte som kan minne om hvordan matematikken oppstod. Videre går han grundig inn i de enkelte begreper og konsepter, dveler og reflekterer over dem. Som et eksempel starter Freudenthal boken med fenomenologiske betraktninger over begrepet *lengde*. Han tar da utgangspunkt i ordet lengde og ser hvilke ulike betydninger som ligger i det. Etter å ha sett på blant annet lengde, høyde, dybde og bredde, introduseres den grunnleggende matematikken ved å regne med lengder, addere, reell- og rasjonalmultiplikasjon m.m. Freudenthal gjør også betraktninger over de tilhørende adjektivene som beskriver lengder (lang, kort, høy, liten)(Freudenthal 1983, s. 20).

Freudenthal(1983) vil i sin bok vise at slike fenomenologiske betraktninger er nødvendige for å kjenne innholdet i de begreper og konsepter eleven skal lære, og hvilke relasjon slike betraktninger har til kultur og språk. Han kaller sine betraktninger for *didaktisk fenomenologi* og undersøker hva det er ved begrepene og konseptene som må være bevisstgjort når det skal undervises. Han skiller *didaktisk fenomenologi* fra en *genetisk fenomenologi*, som omhandler hvordan eleven kan lære seg matematikken ved en fenomenologisk tilnærming(Freudenthal

[1] *“The object of a purely intellectual intuition”* (*reference.com*).

1983, s. 10). Freudenthal jobbet ikke med å tilrettelegge for undervisning (Treffers 1993, s. 99), noe som avspeiler seg i boken som ikke forteller noe om hvordan læreren bør fremlegge disse refleksjoner. Han forteller heller ingen ting om hvordan å undervise fenomenologisk, men gir inspirasjon til fenomenologiske studier av matematiske begreper og konsepter i forhold til undervisning.

Freudenthal sier således ikke noe om hvordan fenomenologisk undervisning bør utføres. Men hans didaktiske fenomenologi er et nyttig verktøy som kan hjelpe læreren å forstå hva det er som ligger i de begreper som undervises. Dette er kunnskap som læreren egentlig kan formidle ved bruk av enhver undervisningsmetode, og vi kan vel mene at disse fenomenologiske betraktninger bør komme frem i undervisningen på en eller annen måte, enten man dikterer dem eller lar eleven selv jobbe seg frem til dem.

Freudenthal gir altså ikke noe direkte svar på forskningsspørsmålet i denne oppgaven. Han gir likevel et svar i den forstand at han går til begrepenes opprinnelse, og det kan hjelpe meg med innsikt i hva jeg skal se etter i min empiri. Så langt er Freudenthal den som snakker konkret om matematikk og fenomenologi. Jeg vil videre se litt mer intuitivt på annet som kan forbindes med en fenomenologisk tilnærming til matematikken.

Matematikk er et kulturelt fenomen, den oppstår ut ifra menneskets møte med verden. De første begrepene er dannet i relasjon til omverdenen. Denne påstanden står i kontrast til påstanden om at matematikkens aksiomsystem kan dannes helt uten relasjon til verden, men våre begreper kan kun dannes i relasjon til en erfaring, for eksempel gir begrepet ”eksistens” ingen mening hvis vi ikke har erfart at noe kan eksistere (Sion 2003). De matematiske grunnbegreper har dermed en fenomenologisk basis.

Det som er fasinerende med matematikken er, at vi har skapt disse begreper ut fra vår erfaringsverden, for så å kunne arbeide videre med dem helt uavhengig av den kontekst hvor de ble skapt. Men spørsmålet blir videre hva som skjer når man viderefører disse begreper når de beveger seg inn i den kognitive verden. Fenomenologi i forhold til matematikken vil da også kunne være å gå i møte med dynamiske tankeverden. Man kan se om man kan få en opplevelse av denne dynamiske tankevirksomheten, og således forsøke å finne et perspektiv i retning av Edmund Husserl, som prøvde å finne et fundament for vår kunnskap om verden ved å gå til saken selv (Bengtsson 2001), helt uten forutinntatte meninger og teorier.

La oss se litt på hvordan det er når det innføres bokstaver i matematikken som eksempel på det som lever videre i den kognitive verden. En kan da stille spørsmålet om hvilke bilder og erfaringer eleven har til disse symbolene fra før. Bokstavene har allerede vært tilknyttet andre egenskaper enn matematiske symboler. En tone, et språk, ortografi og kommunikasjon, det er allerede et helt arsenal av opplevelser som er knyttet til bokstavene. Men ser vi i læreboken Grunntall 9 (Bakke & Bakke 2006) så begynner algebra med en liten definisjon av bokstavregning, og så er det rett på med et stort antall oppgaver i algebra. Hvilke erfaringer er det eleven kan knytte dette an til? En fenomenologisk tilnærming til matematikken vil kunne være å rive ned denne muren som kun slipper inn matematiske teorier, og begynne å lytte til hele den strømmen av opplevelser som kommer fra naturen i menneskene selv (Dahlin 2001, s.454). Dette berører noe ved kjernen i forskningsspørsmålet. På hvilken måte kan dette prinsippet om å komme tingene totalt i møte, overføres til matematikken? Kan man også være imøtekommende ovenfor hva et matematisk fenomen vi si, og finne evnen til ikke å være regelbundet og strikt i sin egen tenkning om fenomenet.

Vi kan vel kanskje ane at fenomenologisk matematikk vil knytte seg opp til intuisjonisme (Ernest 1991), hvor den matematiske forståelsen baserer seg på intuitive opplevelser. Hva dette egentlig innebærer er ikke så lett å konkretisere, siden den intuitive opplevelsen består av mange aspekter som ikke er konkret definerbare. Men det er klart at det ligger noe mer i denne opplevelsen enn en formalisme som danner et sett med regler og aksiomer som man sjonglerer med.

Matematikken er også en menneskelig aktivitet, den er ikke bare noe vi har foran oss, men vi deltar i utviklingen av den. Skal man ha en fenomenologisk tilnærming til selve aktiviteten, så må det kanskje si å arbeide i feltet på en variert måte, der hensikten er å følge prosessen helt fra den konkrete verden til den matematiske abstraksjon, og derigjennom også komme frem til opplevelsen av den matematiske prosessen som finner sted.

# 3 METODER FOR EMPIRISK STUDIE

Forskningsspørsmålene er: "Hvordan kan prinsipper fra fenomenologisk naturfagundervisning inspirere matematikkundervisning, og hva kan kjennetegne fenomenologisk matematikkundervisning?". Hva slags empirisk materiale er det som kan gi svar på dette? I naturfaget hadde det vært forholdsvis lett å finne en undervisningssituasjon som var fenomenbasert som kunne vært objekt for min forskning. Men som jeg har bemerket tidligere så finnes det få som snakker om fenomenologisk matematikkundervisning. I litteraturen er det bare Freudenthal som trekker inn dette begrepet, men da er det mer snakk om lærerens innsikt og tilnærming. På det praktiske området er det i Steinerskolen vanlig å snakke om fenomenologisk undervisning, og i entusiastiske øyeblikk også om fenomenologisk matematikkundervisningen.

Jeg har valgt å basere oppgaven på empirisk materiale. Dette kunne også vært vinklet i en mer filosofisk teoretisk retning. For spørsmålet hva er et matematisk fenomen kan også være et filosofisk spørsmål. Det kunne rent teoretisk vært drøftet hva matematikk er, og hvordan den fremstår. Men en slik teoretisk vei ville kunne ende opp med et resultat som ikke gav noe til den praktiske undervisningssituasjon. Jeg har derfor prøvd å besvare spørsmålet ved å søke i skolen, i klasserommet. Det å prøve og finne svaret på et slikt forskningsspørsmål i praksisfeltet har vært en interessant vei, fordi jeg prøver å hente frem teoretiske perspektiver som lever i den praktiske verden. Det står i motsetning til å finne ut hvordan teori kan overføres til praksis, og dette at en metode må skapes ut fra situasjonen og de perspektiver som er hos skolen og læreren. Svaret i denne oppgaven har på den måten fått lærerens perspektiv. Det kan hende at resultatet av denne oppgaven da lettere kan få en relasjon til hva som skjer i klasserommet, og kanskje til og med være et bidrag til å forbedre undervisningsmetoder brukt i skolen i dag.

I og med at det i Steinerskolen er snakk om fenomenologisk undervisning er det naturlig å undersøke hva dette kan være. Når det gjelder andre skoler så skal det ikke utelukkes at det finnes aspekter ved undervisningen som kan settes i relasjon til begrepet fenomenologisk undervisning, på tross av at begrepet fenomenologisk undervisning sjelden brukes. Jeg tenker det da kan være riktig å undersøke begge disse to arenaer. Jeg har undersøkt disse to arenaer for å se om observasjoner der kan fortelle noe om hva fenomenologisk matematikkundervisning er. I hovedsak har jeg undersøkt hvilken tilnærming læreren har til matematikken, og hvilke perspektiver læreren har på matematikk og læring av den. Det å undersøke hva læreren legger frem i sin undervisning kan fortelle noe om hva matematikken inneholder, og hvordan dette kan fremlegges fenomenologisk.

## 3.1 Forskningstilnærming – kvalitativ casestudie

I og med at forskningsspørsmålet ikke kan tilknytte seg etablerte begreper som kunne ledet til kriterier brukt i seg selv, har jeg valgt å gå inn med en utforskende tilnærming. Jeg vet ikke i utgangspunktet hvilke svar jeg vil finne, og hvilke former de har. Jeg velger dermed en *induktiv* og *kvalitativ* tilnærming til feltet. Postholm (2010) beskriver denne prosessen som en interaksjon mellom en induktiv og deduktiv prosess. Det er induktivt på den måten at jeg ikke har tydelige teorier for feltet. Det er deduktivt i den forstand at jeg hele tiden har med meg min bakgrunn og tolkning av det jeg ser, og at jeg bevisst har laget et bakteppe av teori som jeg knyttet opp til lignende områder.

Ut fra denne bakgrunnen har jeg laget noen *følger*. Dette beskriver Postholm (2010) som de spørsmål og temaer som hjelper meg til å finne et fokus. Uten slike følger er det ikke lett å orientere seg i det kvalitative arbeidet, så det er noe jeg tar med i både datainnsamlingen og analysen (Tjora 2010). Følgene har jeg hentet ut fra teori om fenomenologisk undervisning.

Oppgaven bygger på en casestudie av 4 undervisningssituasjoner, som er en tilnærmingsmåte egnet til å studere komplekse situasjoner, oftest brukt i humanistiske og samfunnsvitenskapelige studier (Yin 2009).

### Om casestudie

Casestudie er en forskningstilnærming som setter fokus på noen få situasjoner, og forskeren søker å lære av situasjonen uten å manipulere den (Yin 2009). Det vil si at man ikke går inn og fryser faktorer for å måle konsekvensen, men dokumenterer hvordan situasjonen arter seg. Forskeren får slik et grunnlag for å fortelle noe om den spesifikke situasjon. Casestudie er slik en metode som går i dybden i komplekse situasjoner, hvor de funn som gjøres, kan få en overføringsverdi på lignende situasjoner. Generalisering her er ikke lik den som f.eks. finnes i en survey, som kan fortelle noe om gjennomsnitt i en hel populasjon. Vi kan vel si at casestudie kan være med på å karakterisere en type situasjoner, og casestudie egner seg derfor til å svare på *hvordan og hvorfor* spørsmål (Yin 2009; Østergaard 2010).

Johansen (2006) påpeker at man på et eller annet tidspunkt må spørre seg om den gitte settingen kan gi svar på det spørsmål man har stilt seg, og om det eventuelt er andre settinger som også bør være med. Det er jo noe som bør avklares så tidlig som mulig, men det kan i noen tilfeller ikke være mulig å svare før forskeren har startet studiet. Det kan derfor være lurt å være bevisst på spørsmålet hele veien gjennom forskningsarbeidet. Til slutt vil jo spørsmålet også dukke opp i diskusjonen om resultatets validitet og reliabilitet.

### Utvalg

I dette studiet er det valgt ut fem caser hvor alle er klasser i videregående skoler, derav to Steinerskoler og to offentlige skoler. Steinerskolen oppsøkte jeg fordi det her er etablert en bruk av begrepet fenomenologisk undervisning. Selv om ordet fenomenologi ikke brukes i offentlig skole skal det ikke utelukkes at også undervisningen der kan bidra til denne undersøkelsen. Det er altså to litt ulike arenaer, men jeg har likevel hatt samme tilnærming til begge skoletypene. Johansen (2006) beskriver en rekke strategier for utvalg i en kvalitativ studie. Strategien som er brukt i denne oppgaven ligger tett opp til det Johannesen (2006) karakteriseres som *typiske tilfeller*. Jeg henvendte meg til alle skolene med følgende beskrivelse:

> I den forbindelse er jeg ute etter å observere og samtale med lærere som i større eller mindre grad jobber med å gi elevene opplevelse og erfaringer i matematikkundervisningen. Det kan være for eksempel at læreren lar elevene utforske og bearbeide temaet før begrepene innføres. Eller det kan være arbeid med konkreter eller lignende. Altså en undervisning hvor temaet gis et innhold bredere enn det rent begrepsmessige.(vedlegg nr. 1)

Jeg skilte ikke mellom de to skoletypene, men søkte å finne tilfeller som kunne gi utfyllende informasjon. Den beskrivelsen jeg sendte til skolen er i realitet veldig vid. Det jeg søkte var en undervisning som inneholdt mer enn bare fokus på rene matematiske begreper. Jeg søkte i tillegg tilfeller med like kriterier for at det skulle være en viss enhet over casene. Men det er mange momenter som det ikke er stilt krav til, for eksempel undervisningstema og klassetrinn. Utvalgsprosessen har også et snev at det Johansen (2006) kaller *slumpmessighet* og *bekvemmelighet.* Det slumpmessige er alt det som ikke er definert i min forespørsel. Et annet moment er også at det var gruppelederen for realfagslærerne som tolket min henvendelse og foreslo en lærer. Selv om det vanligvis ble videresendt til alle aktuelle lærere, så fikk jeg inntrykk av at det var gruppelederen valgte ut lærerne. På hvilket grunnlag det valget ble gjort, har jeg ikke noe informasjon om. Som en av lærerne sa "vi er som ensomme øyer, som ikke har noe med hverandre å gjøre" viser kanskje at dette valget av lærer ikke er overkvalifisert. Jeg hadde heller ikke noe mulighet til å kontrollere at lærerens plan for undervisning tilfredsstilte mine kriterier. Når det gjelder det bekvemmelige, så sendte jeg kun henvendelse ut til skoler her i nærheten, fra Ås til Oslo.  Med dette utvalget er tanken at det skal gi et enhetlig resultat som grunnlag for drøfting av forskningsspørsmålet.

Alle lærere og elever er blitt anonymisert.

## 3.2 Metoder for innsamling av data

**Video**

Det viste seg at videomaterialet ikke fikk så stor plass i mitt arbeide som først antatt. Dette henger sammen med flere ting. Den vesentligste grunnen var at videomengden ble veldig stor, og det ville bli for tidkrevende å inkludere en grundig videoanalyse i denne oppgaven. Jeg har brukt video enkelte steder, der det jeg har observert i timene kan gi et perspektiv på det jeg skriver i oppgaven.

Mine erfaringer fra en tidligere oppgave sier at det er vanskelig å gjøre rene observasjoner av hva som skjer i klasserommet, fordi jeg fort begynner å tolke hendelser. Det var derfor jeg ønsket å ha opptak av hele forløpet, så jeg i ettertid kunne bruke videomaterialet for å studere hver case nærmere. Således har videoopptakene vært en stor hjelp for meg i utarbeidelsen av denne undersøkelsen.

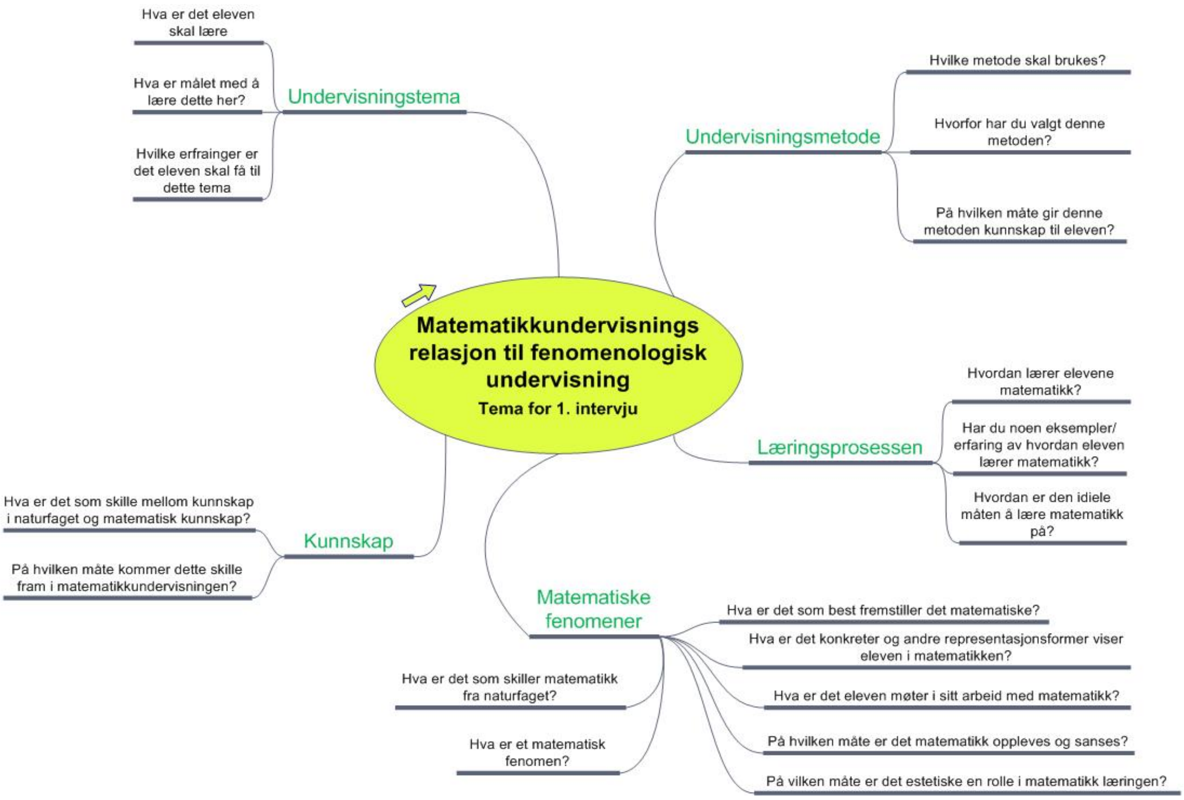
**Intervju**

Hvorfor søker jeg å finne svar hos lærerne? Karakteristikken lærerne får i dagens medier er at de er underbetalte, umyndiggjorte og med synkende IQ (Østtvei 2011), og at de mangler etterutdannelse. Å finne svar hos denne *folkegruppen* kan således virke fåfengt. Jeg er imidlertid av den oppfatning at lærerne sitter med både kunnskap, forståelse og erfaringer som kan være med på å gi svar på mitt forskningsspørsmål. Som Johannessen (2006, s. 136) sier, er dette en åpenbar grunn til å bruke kvalitativ intervju som metode. Det er hos lærerne jeg finner den levende praktiske erfaringen av matematikk som undervisningsemne. Det er de som står midt i arbeidet med å gjøre matematikken levende for eleven, og skape et inspirerende møte mellom eleven og faget. Læreren har førstehåndserfaring med hvordan matematikken arter seg som undervisningstema. Det er denne kunnskap og erfaring jeg vil bruke som grunnlag for å drøfte mitt forskningsspørsmål. Det er lærernes perspektiver jeg vil sette frem for å se hvordan disse kan svare på mitt forskningsspørsmål.

Et kvalitativt forskerintervju bygger på samtaleformen. Samtalen finner vi igjen over alt i menneskelig interaksjon, men med ulike hensikter. I forskerintervjuet er hensikten at samtalen mellom intervjuer og intervjuperson skal frembringe kunnskap (Kvale & Brinkmann 2009, s. 22).

I denne oppgaven har jeg brukt en metode som Kvale kaller “Semistrukturert livsverdensintervju” (Kvale & Brinkmann 2009, s. 47). Om denne intervjuform sier Kvale “… brukes når temaet fra dagliglivet skal forstås utfra intervjupersonenes egne perspektiver.”(Kvale & Brinkmann 2009, s. 47). Her brukes ordet *dagliglivet*, og her søker jeg fagpersoner, matematikklærere, som daglig har et forhold til matematikk og undervisning. Jeg skal få frem hvilke betraktninger læreren gjør rundt matematikk som undervisningsemne og hvordan de ser på elevens møte med matematikken. Jeg er ikke ute etter den spesifikke matematikkunnskap som jeg vil kunne finne i en bok. Men mer den menneskelige relasjonen til faget. Jeg er ute etter de perspektivene ved matematikken som knytter læreren og eleven til faget.

For å få løftet frem de ulike perspektivene har jeg brukt et semistrukturert intervju, som grenser opp mot et strukturert intervju. Johannessen (2006) sier et semistrukturert intervju har et gitt tema, mens spørsmålene varierer. I et strukturert intervju er tema og spørsmål fastsatt på forhånd. I mitt tilfelle hadde jeg en intervjugaid som inneholdt 5 hovedtemaer og under hvert tema hadde jeg satt opp veiledende spørsmål som fungerte som stikkordspørsmål (se figur 1). Stikkordspørsmålene skulle fungere slik at deltemaet skulle bli mer konkret. I gjennomføringen forholdt jeg meg ganske fritt til intervjugaiden. Men som en innledning til samtalene begynte jeg alltid å snakke om en konkret undervisningsøkt som jeg skulle være med å observere. Dette for å starte med et lett tema, slik at intervjupersonen kunne føle seg trygg og avslappet i intervjusituasjonen, slik som blant annet Dalen påpeker er viktig (2011, s. 27).




*Figur 1. Intervjugaid, figuren viser intervjugaidens fem hovedtemaer. Pilen indikerer hvor det starter, med undervisningstema som innledende emne.*

I intervjuet er jeg i hovedsak ute etter fortolkende beskrivelser. Det vil si at jeg er ute etter hvordan læreren oppfatter og fortolker hendelser, og den betydning læreren legger i dem (Johannessen et al. 2006, s.135).

### Intervjugaidens fem hovedtemaer

Som jeg har vist tidligere i oppgaven, berører fenomenologisk undervisning et vidt spekter ved læring og undervisning. Kort oppsummert handler det om kunnskapsformen og dens fundament, og hvordan den knyttes til livsverden. Det blir også beskrevet en tilnærmingsmåte hvor undervisningen kretser rundt observerbare fenomener. For å få vite hvordan matematikkundervisning kan forholde seg til fenomenologisk naturfagundervisningsmetode har jeg laget en intervjugaid som berører mange temaer ved undervisningen. De to første hovedtemaer er knyttet opp til den konkrete undervisningen som jeg skulle delta i. Mens de tre neste er mer generelle i forhold til matematikkundervisning. Intervjuet starter med den konkrete situasjonen og går så over til det generelle.

*Undervisningstema*: Temaet dreier seg om den konkrete undervisning som jeg skal observere, og hvilke perspektiver som brukes til det spesifikke tema.

*Metode for undervisning:* Handler om hvordan læreren tenker å legge frem stoffet for elevene, og hvordan dette skaper læring hos elevene.

*Læringsprosess:* Belyser lærerens syn på hvordan matematikk læres og hvordan kunnskapsdannelse skjer, og hva som må til for at dette skal bli optimalt.

*Matematisk fenomen*: Retter fokus på hva det er som undervises og hvordan dette kommer fram. Hva er det elev og lærer opplever ved matematikken.

*Kunnskap*: Her er fokus hvordan matematikkunnskap skiller seg fra kunnskap i naturfaget, og hvordan en eventuell forskjell kommer frem i undervisningen.

### Forskeren som deltager i situasjonen

Det å fange opp fenomenet er en av forskerens primære oppgave og her kan det brukes ulike metoder. Det er viktig å være bevisst på at forskeren og dennes metode ikke kan unngå å bli en del av situasjonen, uten å gå på akkord med etikken og bruke skjult kamera. Fordi forskeren blir deltager i den situasjonen han forsker på, er det viktig å være klar over hvilken påvirkning forskeren utøver på situasjonen, kalt forskereffekt (Johannessen et al. 2006). I sosiale studier er det selvfølgelig ikke lett å vite hvordan individer blir påvirket. Slik er det når jeg går inn og observerer i en klasse, alle er klar over at jeg er der for å observere ett eller annet.

Johansen (2006)trekker frem et eksempel som illustrer hvordan en legepraktikant blir mye mer avslappet når han får vite at observatøren ikke har nok kunnskap til å gjøre en faglig vurdering av ham. Dette antyder at det er viktig at de som observeres, ikke får en følelse av at de blir satt på prøve. Det må legges til rette for at alle forstår, at forskeren ikke er ute etter å finne rett eller galt, men bare vil registrere den faktiske virkeligheten slik den utspiller seg. Nå er det slik at en klasseromssituasjon er en takknemlig situasjon for observasjon, fordi eleven er så vant til å bli observert, av læreren, av andre lærere, av skoleledelsen, av studenter og myndigheter (Jewitt 2006). Kommer vi derimot inn med et videokamera, er dette tydelig og helt klart et fremmedelement i situasjonen som påvirker i mye større grad enn bare å være tilstede som observatør (Johannessen et al. 2006).

Omvendt forskereffekt er den påvirkning som situasjonen har på forskeren, som f.eks. å få medfølelse for enkelte av individene som studeres. Dette vil da kunne påvirke forskerens vurderinger og valg (Tjora 2010).

Som Kvale et. al. (2009) sier, så er det å foreta et intervju meget avhengig av øvelse. Og jeg vil derfor opp gjennom disse intervjuene gjøre meg erfaringer og kanskje bli dyktigere. I det minste endres metoden litt for hvert intervju. Etter hvert som jeg får mer erfaring med transkribering, har jeg også under intervjuet fått et fokus på å gjøre ting effektivt og prøve å holde progresjonen.

## 3.3 Gjennomføring

### Intervjuene

Jeg har intervjuet fem lærere, Ole, Kristian, Åsmund, Fredrik og Jesper. Alle utenom Fredrik observerte jeg i undervisningssammenheng. Fredrik hadde akkurat gått av med pensjon, så han hadde ingen undervisning lengre.

Intervjuene ble gjennomført på lærerens skole, men Fredrik intervjuet jeg på et bibliotek i Oslo.

Jeg hadde på forhånd sendt lærerne informasjon om min oppgave og dens tema, i tillegg til intervjugaiden, sånn at lærerne kunne være mest mulig forberedt. Dette var nok lurt, for det var flere som ble litt overveldet over omfanget på spørsmålene. I alle intervjuene satt vi ovenfor hverandre med opptaker på bordet mellom oss. Det virket som alle følte seg komfortable i intervjusituasjonen og de deltok engasjert i samtalen. Jeg fulgte kronologien i intervjugaiden og introduserte de ulike temaene med et par setninger. Undervisningsmetode viste seg å være litt vanskelig, fordi lærerne ikke var vant til å bruke begrepet *metode* i forhold til sin undervisning. Begrepet undervisnings*form* var mer passende. Det viste seg også at flere ikke hadde planlagt undervisningen som jeg skulle komme og observere, slik at det hele ble tatt litt på sparket.

Noen ganger under intervjuene kom jeg med mine egne synspunkter, for å prøve ut hva læreren mente om det. Dette passet jeg på å gjøre etter at læreren hadde kommet med hva han hadde å si først. Noe ganger prøvde jeg å svare for læreren ved å trekke sammen det de har sagt tidligere, og noen ganger kompletterte læreren svaret. Jeg var imidlertid ikke alltid flink nok til å få tilbakemelding om dette er korrekt, så i de tilfellene hadde svaret ikke så stor verdi, selv om man også kan si at den som tier samtykker.

Alle intervjuene varte ca. 2 timer. Jeg merket for min del, at dette var litt lenge uten pause, for det var ganske intenst å skulle styre en samtale hvor jeg helte tiden skulle forstå det som læreren sa og samtidig tenke på hva jeg eventuelt burde gå nærmere inn på. I ettertid ser jeg at jeg her skulle vært flinkere til å stille oppfølgingsspørsmål, men med hensyn til lengden av intervjuet, var det ikke rom for mer.

Intervjuet med Fredrik ble i hovedsak lik de andre, men her kuttet jeg ut *tema for undervisning,* og *undervisningsmetode* ble omtalt generelt uten å knytte an til en spesiell situasjon.

Jeg avsluttet intervjuet med å spørre om det var noe som burde kommet med i forbindelse med temaet, men det var det ingen som mente.

## 3.4 Analysemetode

**Analyse av intervju**

Jeg har ønsket å beholde et nært forhold til intervjuet, slik at analysen hovedsakelig blir gjort ut fra intervjuet som jeg har tatt opp på bånd. Kvale og Brinkmann (2009) sier det er lett at analysen blir til en analyse av det transkriberte materialet og at forskeren glemmer at dette er noe intervjupersonen har fortalt i en dynamisk situasjon. Jeg har derfor først gjort en grovtranskripsjon, som jeg har brukt for å systematisere informasjon i intervjuet. Under selve drøftinga av det empiriske materialet har jeg så gått tilbake til lydfilen for å få et mer nøyaktig bilde av det som sies.

Analyseprosessen kan deles inn i:

*Grovtranskripsjon og meningsfortetning*. Samtidig som jeg har hørt gjennom intervjuene har jeg skrevet ned det som blir sagt i grove trekke, og fått med direkte stikkord. Jeg har ikke tatt med blindsetninger, altså setninger som begynnes på nytt, eller digresjoner som har med noe helt annet å gjøre. I enkelte tilfeller har jeg også vurdert ting som mindre aktuelt, de har da bare blitt kodet, men ikke blitt skrevet ut. Kodingen har jeg gjort i ATLAS, et dataprogram som gjør det mulig å legge på stikkord og notater til sekvenser i lydfiler.

*Gjennomlesning*. Jeg har så lest gjennom det transkriberte og sett hvilke assosiasjoner det gir, og prøvd å se hvordan intervjuinnholdet kan knyttes opp til forskningsspørsmålet. Til å begynne med sorterte jeg det etter temaer i intervjugaiden.

Jeg hadde valgt og ikke lage kategorier ut fra teoretisk bakgrunn, fordi dette da ville sette kriterier som kanskje ikke passet helt med det jeg faktisk skulle undersøke: Hvordan matematikkundervisning kan inspireres av den fenomenologiske naturfagundervisningen.

Det første som slår meg, er hvor enormt forskjellige forhold lærerne har til matematikken. Det gjorde det også veldig vanskelig å finne et sammenfallende perspektiv. Etter hvert pekte det seg ut tre områder som på en måte lager en helhet og som også greier å få med perspektiver fra alle lærerne.

Tre områder som beskriver tre veldig forskjellige sider ved matematikken. Det er disse tre områdene jeg tar med videre og drøfter opp mot fenomenologisk naturfagundervisning.

**Analyse av videoopptak**

Det er ikke gjort noe analyse av videoopptakene, men jeg har i teksten ved to anledninger referert til hendelser i klasserommet.

# 4 FREMSTILLING AV EMPIRISK MATERIALE

## 4.1 Kategorisering av funn

Intervjuene var myntet på å skape et møte mellom matematikkundervisning og ideene fra fenomenologisk naturfagundervisning. Intervjugaiden viser mange temaer som jeg tok med til intervjuet (se figur 1) og den inneholder, som vi har sett, fem hovedtemaer: undervisningstema, undervisningsmetode, læringsprosessen, matematiske fenomener og kunnskap - samt tilhørende undertemaer. Intervjugaiden var grunnlaget for samtalene om matematikk som undervisningsemne, og det er perspektivene fra disse samtalene som jeg her har prøvd å drøfte, i lys av fenomenologisk undervisning.

I fenomenologisk undervisning er det fenomenet som skal være utgangspunktet. Fenomenet skal eleven få et eget og rikt forhold til, og ut fra forholdet til fenomenet skal elevene danne sin kunnskap. I naturfaget er fenomenene konkrete, og derfor tydelige og klare, men i matematikken er fenomenene mer abstrakte, og derfor ikke så tydelige. De kan hverken berøres eller føles, men det som er sikkert er at det også i matematikken er noe elevene skal forholde seg til; det finnes også der et *objekt*.

I analysen har jeg lagt vekt på de ulike perspektiver som lærerne har på matematikken, hvordan de forholder seg til det jeg prøver å få tak i som objektet, eller fenomenet i matematikkundervisningen.

Selv om jeg har fem hovedtema som utgangspunkt for intervjuene viste det seg ved gjennomgangen at stoffet ordner seg noe annerledes, fordi kjernen i samtalene handlet om hva som kunne være matematikkens vesen. Jeg har i materialet funnet tre ulike aspekter ved objektet i matematikkundervisningen.

- Matematikk - realitet og kvalitet
- Matematikk - en kognitiv aktivitet
- Matematikk - et verktøy

*Matematikkens realitet og kvalitet:* Her trekkes frem hvordan vi kan få en opplevelse av matematikken som noe reelt. For eksempel at den matematiske dynamikk (eksempel den lineære og eksponentielle vekst), og de matematiske mengder og forhold (enheter, mengder, mønstre) er noe som er i naturen, og ikke bare noe som er et kulturelt og abstrakt påfunn. Videre hvordan denne realitet har kvaliteter[2] som vi kan erfare. Under begrepet kvaliteter kommer også de estetiske kvaliteter man finner i matematikken.

*Matematikkens kognitive aktivitet:* Her trekkes den egenaktivitet som ligger til grunn for de matematiske oppdagelser og fremstillinger frem, og hvordan det dannes en egen indre matematikk frigjort fra naturen.

*Matematikken som verktøy:* Her vises hvordan matematikkens metoder brukes som verktøy i alle andre fagområder.

I utgangspunktet hadde jeg trodd at disse aspektene ville stå i motsetning til hverandre, men det kan se ut til at en fenomenologisk undervisningsform vil måtte vektlegge og bruke alle tre aspekter, for å kunne gi eleven en helhetlig opplevelse av matematikken.

[…] Sekvens jeg ikke har tatt med. Eksempel når det er noe som ikke har med det aktuelle tema å gjøre, eller at vedkommende korrigerer seg selv og sier noe annet isteden.

Under sitatet står det en referanse. Dette referer til en lydfil og til en spesiell sekvens. En sekvens kan komme igjen flere ganger fordi sekvensen kan inneholde flere aktuelle sitater.

## 4.2 Matematikk - realitet og kvalitet

Da fenomenet står helt sentralt i den fenomenologiske naturfagundervisning stilte jeg alle lærerne spørsmål om hva de mente var matematiske fenomener. Jeg fikk ikke noe sammenfallende svar på dette, men det kommer allikevel frem en del interessante aspekter på dette spørsmålet.

Åsmund og Fredrik mente begge at det var problematisk å snakke om matematiske fenomener. Fredrik sier:

[2] Se kapittelet Begrepsavklaring

> Det er problematisk å bruke ordet fenomenologisk undervisning om matematikkundervisning, fordi det henleder på et ytre fenomen. (Fredrik 6:8)
> Åsmund har også den samme spontane reaksjonen, og sier “matematikken er et verktøy for naturfaget, og vanskelig å sanse.”

De tolket ordet fenomen som om det da måtte være snakk om et konkret naturfenomen. Innledningsvis var alle fremmede for det å snakke om matematiske fenomener, men siden dette nå var tema for min oppgave, så var de villige til å bidra med innspill på spørsmålet. Det ble trukket frem ulike momenter som kanskje kunne bli betraktet som matematiske fenomener. Her kom det frem flere interessante perspektiver som kan settes i relasjon til objektet i matematikkundervisningen.

Kristian er kanskje den som er tydeligst på hva et matematisk fenomen er. Hans undervisning handlet om det gylne snitt, og Kristian fortalte hvordan han planla at fenomenet skulle komme frem. Elevene skulle på forhånd ha målt sin høyde, og også høyden opp til navlen. De skulle så finne forholdet mellom hele høyden, og høyden opp til navlen, og også forholdet mellom høyden til navlen og resten av høyden. De gikk så over til å finne det ideelle gylden snitt. Kristian sier:

> … setter opp annengrads utrykket, løser dette og får et tall. 1.68... . Da er man kanskje inne på noe som kan kalles et matematisk fenomen. Så det er et veldig takknemlig stoff. (Kristian 6:3)

Det utforskes så videre både på hvor man kan finne dette gylne snittet (betegnet med fi= $\varphi$) og hvilke egenskaper dette tallet har, bl.a. sammenhengen $\varphi^n = f_n \cdot \varphi + f_{n-1}$ hvor $\varphi^n$ det $gylne\ snitt\ i\ n'te\ potens\ og\ \ f_n er$ det $n'te\ \ fibonacci\ tallet$. Han trekker også frem andre eksempler. Kristian sier:

> Det er noe mystisk med dette tallet. … slik dukker det opp eksempel med $\varphi$, vi ser at det er slik men vi kan ikke forstå at det blir slik. Men man ser at tallene har en kvalitet, og denne kvalitet fremkommer. Tenker at dette er et matematisk fenomen. (Kristian 6:4)

I disse to siste sitatene kommer det frem to aspekter. Det første er hvordan relasjonen det *gylne snitt* har visse kvaliteter som utforskes i undervisningen. Disse kvalitetene er bl.a. som det at fibonaccitallene dukker opp. I undervisningen kommer det også frem at $\varphi$ på en måte er sin egen invers ved at desimaltallene er like, altså 1/ $\varphi$ = $\varphi$ -1. Det vi ser er at visse tall og relasjoner utforskes kun fordi det har visse kvaliteter, ikke fordi det har bruksverdi. Det andre vi ser her, er hvordan matematikken finnes i enkle størrelsesforhold i naturen, her i form av menneskekroppens proporsjoner. De måler seg frem og finner matematikk i naturen som til og med oppleves som litt mystisk. Dette kan gi en opplevelse av at matematikken lever i naturen. For meg ser det ut til at Kristian her lar seg overvelde av de matematiske relasjoner som allerede ligger der, at det er noe forunderlig over det at det dukker opp tall på en slik tydelig måte i naturen.

Kristian sier følgende om det å jobbe med temaer som fibonaccitallene og det gylne snitt:

> Det må vekke en nysgjerrighet, og matematikk er ikke bare noe kjedelig og dødt vi må holde på med. Når de ser at dette har relevans til ting i naturen, så skjønner man at det er jo ikke noe som bare er løsrevet fra det andre. Det er inderlig forbundet med ting i naturen. (Kristian 5:7)

Det jeg trekker ut av det Kristian sier her, er at hensikten med å jobbe med slike temaer er å få en erfaring av at matematikken er forankret i naturen, i virkeligheten.

Jeg spør Kristian hva som skal læres ved å jobbe med dette, det gylne snitt. Kristian trekker frem hvordan algebra blir tatt i bruk for å jobbe med det gylne snitt, ved å utforske det gylne snitt kommer fibonaccirekken frem. Han planlegger så å jobbe videre med rekker og utvikle kompetanse med geometriske og aritmetiske rekker. Han avslutter med å si:

> Dette er veldig konkret og litt mysteriøst, dette passer veldig bra for første videregående. (Kristian 7:10)

Her poengterer Kristian at det å jobbe med det gylne snitt er konkret. Ut fra det konkrete temaet, kommer han så frem til algebra og regler som tilhører matematikken generelt.

Åsmund er også inne på dette med å gjøre matematikken mer konkret. Han mener at det som kan kalles kontekstualiserte oppgaver blir en ”liksom”-konkretisering. Åsmund refererer til uttalelser fra et foredrag av professor Tom Lindstrøm ved universitetet i Oslo, høsten 2010. Lindstrøm snakket der om sin erfaring med første års matematikkstudenter ved UIO. Åsmund sier:

> Lindstrøm var oppgitt over videregående skole, for der blir matematikken liksom-konkretisert. Man lager for eksempel en overskuddsfunksjon, hvor overskudd i en bedrift kan beskrives ved en funksjon hvor x er antall produserte enheter. Hvor kommer denne funksjonen fra? Bare fordi teksten sier at det er en slik situasjon så skal dette liksom være praktisk, og det er jo egentlig en illusjon synes jeg. Men han syntes det var mye

> bedre å jobbe med enklere funksjoner hvor en kunne regne, uten bruk av for eksempel digitale hjelpemidler, og heller regne seg helt til buns i den problemstillingen; framfor kanskje å bevege seg på den matematiske overflaten av det hele, og løse en del problemer knyttet til funksjons drøfting ved bruk av digitale hjelpe midler. [...] Sånn tror jeg det blir tolket i en del lærebøker, ikke det at jeg tror lærebokforfatteren faktisk tror at det de gjør er konkret. Men det er hvert fall den innpakningen det får, det blir mye tekst, det er konkretisering. Det er liksom-konkretisering. (Åsmund 10:5)

Åsmund sier her, at å oppkonstruere en setting rundt et tema snarere kan være med å sløre det mer til, enn å virkeliggjøre det. Og når digitale hjelpemidler brukes, kan matematikken bli ennå fjernere. Jeg forstår det slik at Åsmund ser et behov for å komme nærmere innpå matematikken. Det kan se ut til at når matematikken blir for vanskelige, så skaper man en kontekst som skal gjøre den mer forståelig. Men dette gjør at man fjerner seg fra matematikken og forsvinner inn i en oppkonstruert og teoretisk kontekst.

Når jeg spør Ole om hva som fremstiller det matematiske, så sier han:

> Jeg er glad i fysikken som skal forklare verden rundt oss med modeller. Jeg synes det er en fin måte å undersøke matematikk. Undersøke fysiske fenomener og sjekke om det stemmer, det her. Men det kan også være moro å sjekke i biologien og lete etter mønster og forhold, det er det også fint å ta utgangspunkt i, som man så kan abstrahere matematikk fra. (Ole 1:17)

Ole viser her til to uttrykksmåter for matematikken. Det første er at den kan brukes til å lage modeller av virkeligheten, og dermed blir matematikken et verktøy for bedre og kunne forstå og forutsi virkeligheten. Det andre er at det går an å finne matematiske mønster i naturen, og at man ut fra dette kan abstrahere matematikken. Disse to perspektivene er kvalitativt ulike, ved at det første er mer deduktivt, og det andre mer induktivt. Vi kan vel si at det å abstrahere matematikk fra naturen gir et inntrykk av at matematikken kommer fra naturen og lever i den. Vi skal også bite merke i at han bruker ordet *moro*, at han knytter glede til det å finne matematikk i naturen. Det er ikke snakk om at det er noe nyttig verktøy, men kun noe som gir en morsom opplevelse.

Jeg spør så Ole om de matematiske fenomen.

> Jeg: Man kan finne egne fenomener i naturfaget f.eks. fall. Men kan man finne like enestående fenomener i matematikken?
> Ole: Det er jo det, ja. Men kanskje mer abstrakte fenomener. Spesielt innenfor

> geometrien.  Å gjøre oppdagelser innenfor geometrien føles jo helt vanvittig noen ganger og hvis man klarer å tro at eleven har oppdaget noe nytt, kontrollere og vise at det stemmer og klare å bevise noe innenfor geometrien er det stort.
> Jeg: hva slags opplevelse er det å gjøre oppdagelser innenfor geometrien?
> Ole: Det handler om forhold. Matematiske sammenhenger og forhold. (Ole 1:15)

Slik Ole beskriver det matematiske fenomenet, er det et abstrakt fenomen; han gir så en beskrivelse av hvordan dette er noe som kan "føles vanvittig". Det jeg synes er interessant her, er hvordan han beskriver et abstrakt fenomen som noe som kan vekke følelser. Og at disse følelser er knyttet til matematikkens sammenheng og forhold. Jeg vil knytte dette til hvordan disse følelsene, etter mitt syn, må være tilknyttet en opplevelse av disse sammenhenger og forhold.

Begrepet gav, som sagt, ikke noen umiddelbar respons fra lærerne, men når jeg tok opp matematikkens estetikk hadde alle ganske klare meninger som de uttrykte.

Kristian kommer med en avklaring når det gjelder begrepet estetikk i matematikkundervisningen. Han sier:

> Det er estetikk i det gylne snitt og at det har begynt å komme inn i lærebøkene, og noe som skal inn i tegning form og farge. Men her kommer det litt på en annen måte, at det er noe man skal kunne, noe ytre. Det som er viktig er det vakre. (Kristian 5:15)

Kristian skiller her mellom det å kunne det gylne snitt, og det å se og oppleve det vakre i det; han vektlegger det å oppleve det vakre. Jeg spør så hva er det som er vakkert.

> Det å gå fra noe komplekst til noe enkelt og elegant, slik som utledelsen av formler som starter med noe avansert og til slutt står man igjen med et helt rent og enkelt resultat. Det er noe estetisk i det. Utrolig befriende å ha vært gjennom en slik prosess. Andre eksempel er fra utledningen av abc-formelen, og det å komme frem til formelen for parabelen og ellipsen. Det er utrolig viktig for elever å være med på dette.  (Kristian 5:15)

Prosessen der man går fra noe kompleks til noe enkelt er for Kristian et estetisk moment. Han sier også at det er viktig at eleven er med på dette.

Når jeg spør Jesper om estetikk i matematikken sier han slik som Kristian, at det er det å gjøre noe avansert til noe elegant og enkelt. Og han sier også:

> Når problemer plutselig kan bli løst på en veldig elegant måte […] og hvor det elegante er litt skjult. […] Geometriske mønstre kan også være vakre. (Jesper 2:10)

Slik jeg tolker Jesper her, så viser han til to områder hvor matematikken kan være vakker. Det første området er i løsningsprosessen, det jeg vil kalle en del av det kognitive arbeidet, og det andre er i de visuelle formene, hvor Jesper her peker på geometrien.

Åsmund sier han ikke er matematiker men fysiker, og som nevnt så sier han at matematikk er et verktøy for ham. Det første Åsmund trekker frem er hvordan en kan lage en funksjon for en gjenstand som kastes opp i luften, man kan da anta at den bruker samme tid som å komme ned som å komme opp. Åsmund fortsetter så:

> … så går det an å vise ved å løse en annengrads ligning, ved å faktorisere den, finner man to løsninger hvor tiden er lik null og en annen løsnings som viser når den lander.
> Jeg forsøker i dette tilfelle å formidle det jeg synes er det estetiske i dette. Det at det går an på en enkel matematisk måte vise at det vi antok er korrekt.
> I matematikk R2: Hva har integraler med arealet under en graf å gjøre, da kan man vise at det man definerer som en arealfunksjon, med relativt enkle argumenter, at den deriverte av arealfunksjonen er lik funksjonen. Det synes jeg er estetikk.
> Men der er ikke så lett, for eksempel å finne estetikk i indeksregning.
> j: hva var det du syntes var det estetiske i tilfelle med arealet?
> Åsmund: Det at det er mulig å forstå hvorfor vi antideriverer, eller -integrerer for å finne arealet under en kurve. Man kunne jo sagt at det gjør vi, men vi kan vise hvorfor vi gjør det. Estetikken kommer frem når matematikken forteller oss hvorfor vi kan gjøre det vi gjør. (Åsmund 8:6)

Slik jeg forstår Åsmund her så trekker han frem estetikk på flere områder. Først peker han på hvordan han opplever at det er estetisk når man kan regne ut og bekrefte en antagelse. Her er også en sammenkobling mellom fysikken og matematikken, slik at han finner estetikk i det å bruke matematikken som verktøy. Så kommer han med en forklaring hvor han sier at det estetiske er at vi kan skjønne hvorfor vi gjør det vi gjør. Det vil jeg da koble opp til hva de andre har sagt om estetikk i det kognitive. Men akkurat den formuleringen om at det er estetisk at ”vi kan skjønne hva vi gjør”, er interessant. Selve det å få innsikt i noe, regner han til en estetisk erfaring.

Jesper har også et eksempel på estetikk i matematikken.

> Finne summen av en geometriskrekke er et snedig triks! der kan vi stryke alle leddene.
> Det er veldig deilig. Jeg vet ikke hvor estetisk vakkert dette er men det er i hvert fall bedre en et Munchmaleri. (Jesper 2:10)

I dette delkapittelet har vi sett hvordan matematikken kan oppleves som reell og at denne realitet har kvaliteter som kan gi estetiske opplevelser.

## 4.3 Matematikk - en kognitiv aktivitet

Jeg spurte om konkreter; hvilken rolle dette spiller i forhold til matematikklæring og -undervisning. Paradoksalt nok så kommer det i disse svarene frem perspektiver hvor tenkningen er det som er det sentrale mens konkretene blir kun et utgangspunkt, som bør forlates. Det fører til at spørsmålet som handler om konkreter blir til et kapittel som setter fokus på tenkningen. Også når jeg spør om skillet mellom naturfaget og matematikken, så er det tenkningen og hvordan den forholder seg til det konkrete som blir vektlagt.

Jet vil her først trekke frem en uttalelse av Jesper i tilknytning til mitt spørsmål om konkreter. Han forteller noe om at det å bruke konkreter hjelper tenkningen:

> Jeg: Hva gir konkreter?
> Jesper: Når vi skal ha kombinatorikk, så går vi, 5 elever skal sette seg på 5 stoler. Så kan vi snakke om det. Vi kan dagen etterpå snakke om Sara som setter seg på den stolen. Da blir det lettere. (Jesper 2:8)

Her beskriver Jesper at det blir lettere når de har vært i en setting hvor de har fysisk gjort noe som viser hen på grunnleggende operasjoner i kombinatorikk.

Jeg spør så:

> Jeg: Hvorfor er det lettere etter å ha "gått" kombinatorikk?
> Jesper: Det er lettere å forholde seg til. Det er lett å sette et navn og en stol, å gå til den plassen. Det tvinger dem til… (Jesper 2:8)

Setningen blir ikke fulført, men slik jeg tolker det, så mener han å si at det tvinger eleven til å tenke. Videre sier Jesper:

> Har fire ulike flasker som de kan ta på og bytter rundt på[…] da skjønner de det. Da klarer de å få det til. (Jesper 2:8)

Jeg tolker dette til at han sier her at det å bruke konkreter i undervisning tvinger eleven til å tenke; relasjonen til verden setter i gang tenkningen. Vi ser her hvordan ikke bare en ytre form, men også en ytre hendelse er med på å starte en tankeaktivitet.

Kristian sier følgende om det å bruke konkreter:

Den indre anstrengelsen må til, men det gjør det kanskje lettere å starte den indre anstrengelse.  (Kristian 5:18)

Kristian er da inne på det Jesper også nevner, at konkreter hjelper til med å starte den matematiske tenkningen.

Fredrik er også inne på dette

Telleprosessen hvor det bygger opp kompleksitet, den er helt bildeløs, den begynner med en rytme eller med noen konkreter. Og fordi et barn gjerne strever med å få et reelt forhold til sin indre billedverden så gir det selvfølgelig veldigstøtte punkt å ha konkrete gjenstander å hjelpe til. Men desto høyer eller lengre man kommer i den prosessen, desto mere så blir det mer og mer en billedløs tenkning, og blir en ren tankeprosess.
Eksempel: du skal omgjøre et algebraisk uttrykk. Du kan ikke begynne å fortelle en historie, holdt jeg på å si. For alt er bare en prosess. Hver linje du skriver er bare en ny liten stasjon i den prosessen. Prosessen kan du gå videre med på alle mulig måter, og endre og gå tilbake igjen, og alt mulig sånn. Men det er hele tiden uten bilder. (Fredrik 5:4)

Fredrik beskriver her en utvikling av en tankeprosess som i seg selv er billedløs. Denne tenkningen har en utvikling som kan hjelpes ved bruk av konkreter, som da er bilder som tankeprosessen kan vokse ut av. Jesper var inne på det å bruke konkreter som hjelpemiddel til å tvinge frem en tenkning. Vi ser hos Fredrik er at han trekker det ennå litt lenger, og mener at det også er med til å skape en relasjon til sin indre billedverden.

Ole sier om konkreter:

Bruken av konkreter gir elevene noen knagger å henge det på. (Ole 1:11)

I Oles tilfelle dreier det seg ikke om å starte tenkingen, men mer å kunne bruke det som et hjelpemiddel for å kunne huske det som skal kunnes til eksamen. Det som Ole kaller "knagger" kan vi kanskje tolke i samme retning som Fredriks konkreter, som er noe som gir et ankerpunkt for kunnskapen.

Åsmund sier om konkreter:

Jeg: hva er fordelen med å bruke konkreter.
Åsmund: Vet ikke om det er en fordel. Det kan være en fordel for noen, den kan virkelig gjøre noe. De tar ikke uttrykk på tavlen for god fisk.
Det stopper opp for dem, fordi det ikke er en konkret sammenheng. De som ikke trenger

> konkreter greier å tenke det abstrakt. (Åsmund 8:5)

Åsmund sier at det kanskje ikke er så mye hjelp, men kommer så frem til at det kan være hjelp for noen. Han antyder videre at den abstrakte tenkningen erstatter konkretene.

Jesper sier noe lignede:

> De som er flinke i matte, de greier å gjøre det inni hode. Gjør det med lette eksempler som de klarer. De som er ikke er så flinke, de tror at det er bare å vite svaret og vil ikke gjøre det lettere, vil ikke ta på flaskene. De som er flinke ser at det er vanskelig og prøver å gjøre noe lettere. De som ikke er så flinke de får hjelp til å tenke ved å flytte på flasker, mens de som er flinke greier å gjøre noe av det samme inni seg. (Jesper 2:8)

Det jeg vil legge merke til her, er at det gjøres et skille mellom det å trenge et hjelpemiddel for og uføre tenkningen, og det å kunne gjøre matematikken kun som et abstrakt tankearbeid. Begge beskriver det å kunne beherske en abstrakt tenkning. Dette momentet utfylles av Fredrik som sier:

> Fredrik: Du kan si at det har sin begrensing å bruke hjelpemidler i matematikken, til et vist punkt kan det være til hjelp, det er fint for små barn, eksempler nøtter, trekanter, for å hjelpe tenkningen på vei. Men hvis man hele tiden baserer tenkningen på at det skal være noe gjenstandsaktig som jeg skal forholde meg til, vil jeg oppfatte det som en svakhet.
> Jeg: Men den trenger et startpunkt for å begynne.
> Fredrik: Det er en god støttestav i begynnelse men det har den langsiktige trussel, at hvis vi ikke tar bort denne krykken vil det blir en hemsko. (Fredrik 6:14)

Her beskriver, Kristian og Fredrik hvordan det konkrete er med til å starte en tankeprosess, men at dette er noe en skal bli fri fra og da gjøre den abstrakte tenkningen på egen hånd. Fredrik sier også at det kan bli et hinder hvis en ikke løsriver seg fra det konkrete.

Videre trekker Fredrik frem et eksempel fra da man prøvde å innføre teoretisk mengdelære helt ned i barneskolen, men at denne retning så etter 20 år bare forsvant. Han påpekte at det som gjorde at dette ikke fungerte var:

> … man ikke lar tenkningen utvikle sitt begrepsapparat ut fra en konkret iakttagbar verden. (Fredrik 6:7)

I de to siste sitatene vektlegger jeg hvordan det fremlegges at tenkningen har en utvikling som må forankres og springe ut fra den konkrete verden, men at den så må kunne utvikles til en abstrakt tankeverden.

Når jeg spør om skillet mellom naturfaget og matematikken, blir også tenkningen vektlag som et vesentlig punkt.

Jeg begynner her med Fredrik som har en ganske generell uttalelse.

> Fredrik: Slik jeg ville se det, at man blir veldig inspirert, oppvakt og fylt med glede over hva man ser og kan finne ut når man møter naturen. Man går litt ut av seg selv, glemmer seg selv og strekker seg mot dette her. Mens det er det helt omvendte som skjer når man holder på med matematikk. Man kan gjerne ha en portal inn til det gjennom noe praktisk. Men i den store sammenhengen er det bar noe som skyver det hele i gang. Men det virkelig interessante er når man går bak denne portalen og begynner sin egen vandring. Man oppdager jo og alt det er. Men det er utrolig mye mer konsentrasjon rundt det.
> Jeg er litt på glattisen her, det er litt vanskelig å finne ord her.
> Men det er en forskjell, når man går til naturfaget går man lit ut av seg selv, man blir litt sånn glad og vekket til å gyve løs og blir kjent med noe nytt.
> Mens i matematikken blir det noe mer omvendt rettet[omvendt en i naturfaget = innover rettet], man er konsentrert og stille.
> Jeg: I naturfaget går man ut, og bare det å oppleve fenomenet, da er det sant. Mens i matematikken er det ikke sant automatisk bare fordi du betrakter noe matematisk, betyr det ikke nødvendig at det er sant.
> Fredrik: Du kan alltid stille et spørsmål etterpå: Er det jeg gjorde riktig? Eller noe lignende. Dette vekker på nytt eller forsterker den samme prosessen, nemlig konsentrasjon, innadrettet, man glemmer helt hva som foregår rundt en. Så det er helt forskjellig. (Fredrik 6:16)

Fredrik gir her en karakteristikk av den aktivitet som er i disse fagene. Han beskriver naturfaget som en utadrettet aktivitet kontra matematikken som mer innadrettet. Vi har her et perspektiv hvor det legges vekt på den egenaktivitet som eleven har. Det er således elevens aktivitet som han først trekker frem som forskjellen, isteden for det faglige innholdet. Tenkningen spiller en stor rolle i matematikken, og det er tenkningen som må kontrollere de resultatene som matematikken gir. Fredrik kommer flere ganger i intervjuet tilbake til tenkningens rolle i matematikken, og han utdyper det som et viktig skille i forhold til naturfaget:

> Viktig å skille. Realfag er en realitet som skal undersøkes, og i naturfaget er det tydelig hvilken realitet som skal undersøkes. Men i matematikken hva er det som er realiteten her? Naturfenomenet vet jo alle sammen hva er. Vi kan stille oss ovenfor dette å studere det igjen og igjen. Men i matematikk er det ikke slik. Der tror jeg det er veldig viktig å se at den realitet vi skal undersøke og lære, er menneskets egen tenkning. (Fredrik 6:7)

Vi har ikke her så mye konkret om hva slags realitet som ligger i tenkningen og hvordan dette kan læres, men det understreker at det er tenkningen som er det vesentligste momentet i matematisk sammenheng. Slik sett har Fredrik et fokus på det som gjøres, den kognitive aktiviteten.

> Fredrik: […] denne vekslingen, samtale rundt matematikk med barn eller unge eller voksne, hvordan tenkte du, hvorfor ble det sånn, er meget viktig. Ikke mer viktig men like viktig som selve regnestykket.
> Man ser at når noen sliter med matematikk, ser man ofte det at det som kommer ned når man ber en eleven føre stykket. Og så står det da 3x7=21 og så står det noen andre enkelte stykker, men det er ingen rød tråd i dette her. Det vil si, det kan godt hende at eleven har tenkt riktig, men eleven er ikke blitt skolert til å snakke rundt sine egne tanker , slik at man forstår at det er tenkningen som er det viktige, og så er det bestemte stasjoner underveis hvor eleven må skrive ut noen regnestykker som gir et tall. Men det er tenkningen som fører meg frem til dette her. Tror at det er denne vekslingen mellom å gjøre oppgaver og det å snakke og reflektere rundt dette her. Det styrker måten en forholder seg til det. Dette understreker det at det ikke er noe realitet før jeg selv setter ord på det og reflekterer over det. (Fredrik 6:14)

Her viser Fredrik hvordan han setter fokus på selve tenkningen i matematikken. Tenkningen blir vektlagt som det som ligger bak den matematiske fremstillingen, men også som den virksomhet som frembringer det matematiske og synlig gjør den. Man må se og reflektere for å frembringe det matematiske, altså det matematiske i tingen er ikke synlig uten at det tenkes. Fredrik sier også at det er viktig å reflektere over egen tenkning, for å få et bevisst forhold til tenkningen og for at tenkningen skal bli tydeligere.

Jesper sier noe som kan settes i sammenheng med dette:

> Jesper: Drømmer om å ikke si alt til eleven hvordan ting er. At de har et problem de prøver å finne ut av. Alternativet hadde vært å fortelle alt sammen. De lærer ved å finne ut av ting selv. Da har de jo greid det.. De må ha grublet på det, ellers nytter det ikke.
> […]

Man kommer jo til lovmessigheter i naturfaget også.
Jeg: Hva er det som korrigerer lovmessigheten i naturfaget?
Jesper: Nytt eksperiment.
Jeg: så vi kan ikke selv kontrollere resultatet?
Jesper: vi kan sette opp eksperimenter hvor vi kan sjekke om det vi tror er riktig.
Jeg: så det blir den fysiske verden som må verifisere våre tanker. Men i matematikken?
Jesper: kan vi selv rette, eller noen andre kan i hvert fall finne ut om man har gjort feil.
(Jesper 2:5)

Her kan vi legge merke til to momenter. Det første er noe de fleste kjenner igjen, nemlig at matematikken er grubling, at det å gjøre matematikk er en tankeaktivitet. Det andre momentet er hvordan i matematikken er det tenkningen selv som kan kontrollere det man har tenkt; det er tenkning som kan kontrollere det tenkte. Her kommer en motsetning til naturfaget frem, for der er det naturen som må gi korreksjon på modellen og teorien som er uttenkt.

Fredrik trekker frem perspektiver på matematikkens aktualitet når det gjelder å få erfaring med tenkningen, og hvordan dette stiller filosofiske spørsmål ved tenkningens relasjon til verden. Fredrik sier:

Fredrik: Fra det punktet at mennesket begynner å operere med abstrakt tenkning, ved 12 års alderen så er det bestemte problemstillinger som melder seg etter hvert. De problemstillinger vil ende opp som matematiske nyvinninger.
Jeg: Hva slags problemstillinger er det?
Fredrik: Det første er at det er noe jeg sanser og det er noe jeg tenker. For et lite barn er dette en enhet, det er ikke noe skille her, de har ikke noe erfaring av at dette er to forskjellige ting. I 10 klasse er dette en tydelig interessant problemstilling, det å øve hva er gitt, hva tenker jeg.
For eksempel, hvis jeg har en firkant med begge diagonaler og ser på vikler, er det noe som er gitt, hva kjenner jeg? Det er en sånn utvendiggjøring, det er litt stivt selvfølgelig, hva sanser jeg? jo det er de begrepene kan nå som [Akkurat det siste orde er ikke mulig å høre tydelig], hva er det jeg mangler, hvilke verktøy har jeg til disposisjon? Jo det er setningen om at i en trekant er summen av alle vinkler 180 grader osv. Så jeg setter opp dette. Så hvordan kan jeg nå tenke produktivt om dette. Det er den første problemstillingen.
Den andre problemstillingen som kommer opp er: Er disse tankene mine fullstendig virkelighetsfjerne? Altså, jeg kan tenke hva som helst og det er et fett. Om jeg sier at 2x5 er 10 eller 99. Og da er det jo det at tenkningen er knyttet til erkjennelse av verden, og da

er det flere ting som kan bidra til at de får en forståelse av, og kanskje til og med en erkjennelse av, at tenkning og fenomener i verden hører sammen. Min indre tenkning [og] fenomener i den ytre verden hører sammen. Og når jeg setter dem sammen, så kommer det frem noe, slik at det har mening å si at det er noe tenkning er riktig og noe annet som er virkelighetsfjernt. Og så er det tvilen, hvordan håndterer jeg tvilen, når det er umulig å fastslå noe som helst, hvordan skal jeg gjøre det? Og der er tenkningens kontinuitet og diskontinuitet.

Jeg: Hva betyr det?

Fredrik: ja det kommer jo frem i grensebegrepet. At jeg klarer å gå en prosess, kontinuerlig frem til en grense og ser at grenseverdien blir til. Da anvender jeg det at jeg har et kontinuerlig område i tenkningen, men så kan jeg altså se at der kommer det til å bli et brudd. Og det er også interessant.

Hva var spørsmålet? Hvordan kan matematikk oppleves og sanses?

Som vi har vært inne på før, at matematikk har noe allment generelt over seg. Det åpner slike problemstillinger som er av en filosofisk karakter, som da kan bli til ren filosofi men som da kan bøye av og bli matematiske begreper. Så det bruker jeg helt bevist at etter puberteten, fra 10. klasse og oppover, bruker jeg begreper og snakker til dem om dette på en halv filosofisk måte, slik at ikke faget skal være alt for strengt bokset inne. Altså at deres erfaring og opplevelse av matematikk skal bli knyttet til en mer generell forståelse av tenkningen. (Fredrik 6:15)

Fredrik tar her opp to spørsmål i denne uttalelsen. Det første er skillet mellom tenkningen og verden, og det andre er om tenkningen er riktig eller ikke. Han sier at disse spørsmålene aktualiserer matematikken for eleven fordi elevene møter sin egen tenkning i matematikkarbeidet. Dermed blir matematikken ikke bare noe som står utenfor eleven, men den angår også, den treffer elevens egen tenkning. Han gir et eksempel på hvordan grenseregning gir en erfaring av det han kaller tenkningens kontinuitet.

## 4.4 Matematikk – et verktøy

For å kunne drøfte hvordan matematikk kan nyttiggjøre seg metoder fra fenomenologisk naturfagundervisning har jeg ønsket å undersøke hva som skiller matematikk og naturfag. I alle intervjuene stilte jeg spørsmål om hvordan matematikk og naturfag var forskjellig. Det er interessant å få disse perspektivene direkte fra lærere som jobbet med faget, og som hele tiden på nytt møter faget gjennom elevene.

Mens Kristian i særlig grad vektla matematiske forhold i naturen, og Fredrik hadde fokus på tenkningens aktivitet i forhold til faget, ser vi at Åsmund trekker frem det tredje perspektivet jeg innledet dette kapittelet med; matematikken som verktøy. Han sier:

> Matematikken er et verktøy som brukes i teoretiske problemstillinger. Og ikke noe som kan sanses, slik som en kan finne i naturfaget. (Åsmund 8:1)

Åsmund la stor vekt på det praktiske ved matematikken, noe som også kommer frem i den undervisningsøkten hvor jeg observerte han. Her ble det brukt fjær som vekt, hvor elevene skulle kalibrere fjæren, for så etterpå å kunne veie noe med ukjent vekt. Et plotdiagram ble brukt som verktøy for å kunne estimere massen til en gjenstand med den ukjente vekten.

Åsmund sier at matematikk er et verktøy som brukes i teoretiske problemstillinger. Senere sier han:

> Matematikk brukes her [i skolen] som et redskap, ikke som et eget fag, hvor vi beviser påstander gjennom matematiske beviser. (Åsmund 8:6)

Åsmund poengterer at matematikk i skolen er et redskap, blant annet for naturfaget, men det kommer også frem at matematikk kan være et eget fag hvor man jobber med matematiske beviser.

Kristian utaler seg også om matematikk som verktøy. Han sier:

> Det er viktig å få med slike ting. Men mesteparten av matematikkundervisningen er terping for å lære seg et verktøy. Å bli sikker i det, parenteser, ligninger og algebraen. Det er jo viktig at forståelsen er med hele veien. Blir det bare formler uten at det er noe man skjønner, så blir det hele bortkastet. (Kristian 6:4)

Med "slike ting" mener Kristian det å regne på det gylne snitt, og studere hvordan dette kommer frem i en rekke ting, blant annet pentagrammet.

De ulike metodene, som løsning av ligninger og algebra, karakteriserer han som verktøy. Metodene betrakter han som noe som må terpes og øves, men samtidig må det medfølge en forståelse.

I det følgende utdyper Ole igjen hvordan matematikken blir brukt som redskap, både i økonomien og i fysikken.

> Det er ofte det eleven skal ut å gjøre hvis de tar økonomiske fag og skal begynne å tenke

> økonomiske strategiske valg, så må de lage seg økonomiske modeller for å forutsi hvordan ting kommer til å gå og planlegge ut fra det og bruke matematikken som redskap for dette. Det tror jeg spesielt de som har tar økonomiske fag har fått øynene opp for. Og i fysikken, brukes det også som et redskap. (Ole 1:17)

Dette tydeliggjør matematikken som et redskap som kan brukes innenfor alle kunnskapsområder.

Et annet moment som kan knyttes opp til matematikk som verktøy, er når matematikken operasjonaliseres og automatiseres. Fredrik trekker disse aspektene frem når han snakker om sin undervisningsmetode, en Fredriks metode jeg vil karakterisere som *problembasert undervisningsmetode*. I den innledende fasen jobber man gjerne med et problem som kan løses både ved hjelp av en komplisert kjent metode, og så ved en enklere metode som for eleven til da er ukjent. I problemfasen skal tenkningen utvikles, og gjennom samtaler kan eleven bli klar over de ulike måtene å tenke på. Til slutt kommet eleven dithen at tenkningen er på plass og de skjønner det (sammendrag av: Fredrik 6:10).

Fredrik avslutter dette med å si:

> […] da er det ikke mer aktuelt med nye problemstillinger, da må man stabilisere og nærmest stivne det og operasjonalisere det og til slutt automatisere det. (Fredrik 6:10)

Og denne "stivnete tenkningen" blir et verktøy for senere arbeid, både innenfor ren matematikk og i kontekstualiserte oppgaver.

Oppsummering av Matematikk – et verktøy

- Matematikk er et redskap
- Matematikk er et verktøy som må terpes og øves
- Fra utforskende tenkning til operasjonaliserte og automatisert teknikk

## 4.5 Oppsummering av funn

Det har her fremkommet tre aspekter ved matematikk som undervisningsemne. Den første betrakter realitet og kvalitet, og hvordan matematikken kan erfares og oppleves reel i naturen. Den andre fokuserer på hvordan tenkningen spiller en sentral rolle både for å frambringe matematikken og utføre den. Og til slutt, hvordan matematikken blir til et verktøy når eleven lærer seg de ulike metoder. Den førstnevnte forteller om hvordan matematikken kan erfares og oppleves, den andre hvorledes menneskets aktivitet er et element i matematikken. og den siste forteller hvordan dette som er opplevd og erfart, brukes som et verktøy utenfor selve matematikken, som et redskap. Og enda kortere kan vi si, at det første er selve matematikken, det andre er menneskets aktivitet, det tredje er hvordan de to første bringes ut i verden som et redskap.

Det de har til felles, er at de er aspekter som lærerne i denne studien fremlegger som viktige, når matematikk skal undervises. Det kan se ut til av vi her også har greid å favne store deler av selve konseptet matematikk.

Videre i oppgaven vil jeg se på hvordan disse aspektene kan utfylles, og settes i en relasjon til en fenomenologisk undervisningsform.

### Realitet og kvalitet

Essensen her er at matematikken kan gi en opplevelse av realitet, at den har en egen eksistens i verden. Hos Kristian kommer dette aspektet frem når han viser til en induktiv tilnærming til tall og forhold i naturen. Kristian påpeker at den matematikken som kommer ut av dette er noe reelt, der det kommer frem størrelser, som til eksempel det gylne snitt, som på en måte fremstår som like uforståelig reelle som jorden gravitasjonen. Jeg mener dette kan gi en opplevelse av matematikken som noe som eksisterer i virkeligheten, og at det ikke bare er noe som er oppkonstruert av læreren. Åsmund underbygger dette når han beskriver den kontekstualisering som gjøres i lærebøkene som oppkonstruert og virkelighetsfjern. Han peker dermed på at det skal gå an å søke en realitet i matematikken. Åsmund er ikke helt tydelig på hvordan det skal gjøres, men antyder en fremgangsmåte der man når til selve begrepene i matematikken. Fredrik tar også opp matematikken og tenkningens realitet som et viktig punkt som angår elevene etter at de har utviklet den abstrakte tenkningen.

Grunnen til at matematikkens realitet er så interessant, er at den fenomenologiske tilnærmingen går ut på å undersøke en realitet. Og som vi ser, fremkommer det en antydning om opplevelse av realitet i matematikken. Og går vi videre, så ser vi at det matematiske arbeidet også kan gi kvalitative opplevelser; lærerne snakker både om opplevelse av kvalitet og om estetikk.

### Kognitiv aktivitet

Her får vi et bilde av hvilken plass tenkningen har i matematikken. Det kommer frem hvordan tenkningen må bygges opp i forhold til den iakttagbare verden og hvordan den abstrakte tenkningen er en ferdighet. Det sies så at det er denne tenkningen som er det som frembringer matematikken. På samme tid kan arbeid med matematikken gi erfaring med tenkningen og på den måten blir matematikken aktuell for hvert individ. Gjennom drøfting av tankearbeidet kan man synliggjøre tenkningen og matematikken. Vi har også sett av uttalelsene om estetikk, at også det kognitive arbeidet kan gi kvalitative opplevelser. Det kommer også frem at tenkningen kan ha en viss realitet når vi ser på at det kan skilles mellom virkelighetsfjerne eller riktige tanker.

### Et verktøy

At matematikken anvendes som et redskap er et mer etablert aspekt ved matematikken. Det til tross er det ikke her kommet frem så mange perspektiver ved akkurat dette.

Det som kommer frem i denne undersøkelsen, er at det kreves mye øving og terping for å etablere et godt verktøy. Det sies også hvordan matematikkfaget griper inn i alle andre disipliner. Åsmund er den eneste som beskriver en estetisk opplevelse ved å bruke matematikken som et redskap. Til tross for at det ikke kommer mye frem angående matematikk som redskap så er det et vesentlig aspekt som må bringes videre i denne oppgaven. Dette vil jeg begrunne med at lærerne til en vis grad har tilpasset seg situasjonen med å sette fokus på en undervisning som skal gi opplevelser, og derfor lagt matematikk som verktøy til siden.

# 5 DRØFTING AV FUNN

I dette kapittelet vil jeg utdype *matematikkens realitet og kvalitet*, *matematikkens kognitive aktivitet* og *matematikken som verktøy* og drøfte dette opp imot litteraturen, og sette alt i sammenheng med en fenomenologisk undervisningsmetode, for derved å prøve å svare på mine forskningsspørsmål - "Hvordan kan prinsipper fra fenomenologisk naturfagundervisning inspirere matematikkundervisning?" og "Hva kjennetegner fenomenologisk matematikkundervisning?" Intervjuene var ikke beregnet på å finne disse tre aspekter som er fremkommet, og av den grunn ønsker jeg ikke bare å sette det i relasjon til litteraturen men også utdype disse med blant annet eksempler.

## 5.1 Matematikk - realitet og kvalitet

Hvordan erfarer vi matematikken og hva er det vi møter? Møter vi en realitet, et objekt – eller møter vi bare en skygge av noe annet? Det er dette tema som dette kapittelet berører. Kan matematikken fremstå som noe som er reelt og som kan gi kvalitative opplevelser? Dette er helt sentrale tema når jeg vil knytte dette opp til en fenomenologisk undervisning. For helt sentralt i fenomenologisk undervisning står elevens egen erfaring av virkeligheten, og de abstrakte begreper skal stå i en vedvarende relasjon til de konkrete erfaringer. I naturfagundervisning blir konkrete erfaringer knyttet til naturfenomenet og her i dette kapittelet vil jeg prøve å vise hvordan matematikk kan oppleves som reell og også være opphav til rike erfaringer. Men det som kreves er å gi slipp på en ensidig definisjon av et *konkret fenomen* som noe i den ytre verden, avskåret fra subjektet selv. Matematikken kan erfares som reell, nettopp fordi subjektet er personlig delaktig i prosessen.

Slik jeg forstår datamaterialet i undersøkelsen, kommer det frem to hovedtemaer: *matematikken i naturen* og opplevelsen av *matematikkens kvaliteter*. Det første omhandler realiteten i matematikken og den siste matematikkens kvalitet og opplevelse av denne.

**Matematikken i naturen**

Jeg vil her se på hvordan matematikken blir løftet frem som en realitet. Dette tar utgangspunkt i Kristian sin undervisning om det gylne snitt og fibonaccitallene. Kristian er ikke den første som tar opp akkurat disse to temaene. Vi finner det i en rekke bøker som retter seg mot undervisning (Se bl.a.: Adam 2003; Petersen & Tvete 2010; Posamentier 2003; Tjora & Florhaug 2010; Ulin 2007; Ulin 2008).

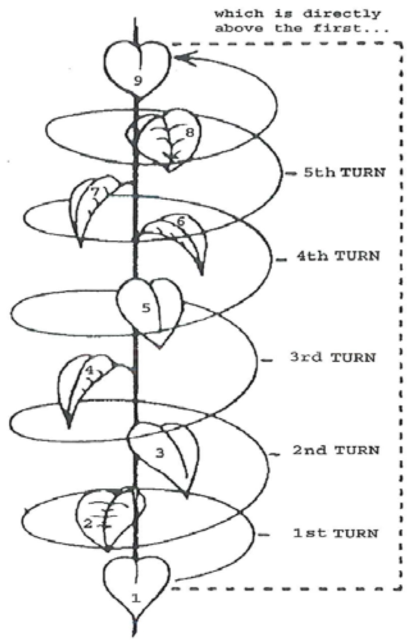
Her er noen eksempler: antall høyre- og venstre-spiraler i konglensfrøhus hvor dette, som regel, er tall i fibonacci-tallrekken, i figur 2 vises 8 spiraler medsols og 13 motsols som begge er fibonaccitall. Det samme ser man hos solsikker (figur 3) og det samme kan men se hos ananas. Det kan også finnes hos enkelte planters bladstillinger, hvor antall blad og antall rotasjoner før det kommer et blad i sammen posisjon som det første (figur 4).

*Figur 2. Viser en furukongle, 8 medsols- og 13 motsolsspiraler ( Petersen og Tvete 2010, s. 24)*

Kristian vektlegger dette forholdet som noe meget reelt. Dette kan sees i sammenheng med uttalelsen til Åsmund om den *oppkonstruerte* konteksten. Et eksempel som kan tydeliggjøre disse perspektivene som Kristian karakteriserer som *reell* og det Åsmund kaller *oppkonstruert* kontekst, finner jeg i introduksjon til funksjoner i Lærebok i matematikk for 2.videregående, Matematikk 1T (Heir 2006).

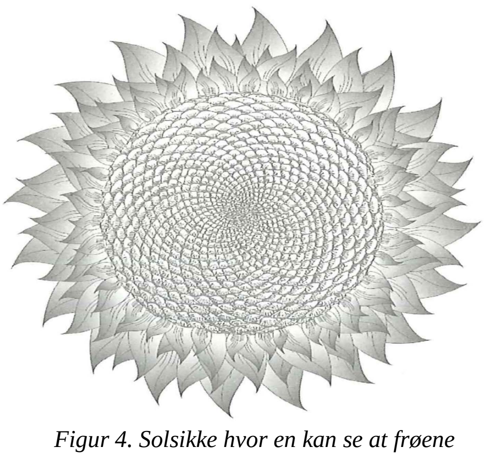
Her innledes det med:

> Andreas har kontantkort til mobiltelefonen sin. Startprisen for en samtale er 0,50 kr. I tillegg kommer 2,50 kr pr minutt. Prisen for samtale er altså avhengig av hvor mange minutter samtalen varer.
> Vi sier at prisen for en samtale er *funksjon* av samtaletiden. (Heir 2006, s. 105)




*Figur 3. Blad nr 1 og nr 9 er i samme posisjon, det er 5 runder og 9 blad (Posamentier 2003, s. 242)*

Jeg må påpeke at jeg ikke her skal vurdere om dette er en god eller dårlig innledning. Men jeg mener at dette er oppkonstruert på to nivåer, nivåer som det også er mulig å finne igjen i Åsmund og Kristian sine uttalelser. Det første jeg vil påpeke er at dette eksempelet mest sannsynlig er oppdiktet utfra en setting som forfatteren kjenner, altså prising av telefonsamtaler. Slik jeg



*Figur 4. Solsikke hvor en kan se at frøene danner spiraler i begge retninger. (Ulin 2007, s. 42)*

har tolket Åsmund, så vil han si at det er funksjon og lineær vekst som er kjernen, men at dette pakkes inn i en delvis fiktiv historie som er tilpasset temaet. Åsmund ga i intervjuet et eksempel med en overskuddsfunksjon. Det andre perspektivet som ligger i dette eksempelet er at telepriser er et påfunn av teleselskapene. Hvor denne prismodellen er en del av et slags pengespill, et spill som helt og holdent er et kulturelt påfunn. Og hvor denne funksjonen er designes for å "lure" forbrukeren til tro at dette er det rimeligste. At jeg sier at det er til for å lure en forbruker kan kanskje virke søkt, men jeg mener at dette forsterker opplevelsen av at dette er et abstrakt spill. Da blir eksempelet i læreboken et påfunn med utgangpunkt i noe som allerede er en del av et "kulturelt spill". Dette står i kontrast til det naturlige forhold mellom f.eks. konglens 2 spiraler, prosesser som har oppstått i naturen. Det har her vist seg tre nyanser, matematikken som påfunn for å tilfredsstille et tema, matematikken som en del av en kulturelt spill og matematikken som utrykt i naturen.

Eksempelet med teleprisene viser også hvordan vi bruker matematikk til å skape verden rundt oss. Dette er jo også reelt, men tilhører den realitet vi selv skaper. Når vi ser lærere her som oppsøker matematikk i naturen så viser dette mer en matematikk som erfares som ikke menneskeskapt.

I boken "Matematisk design i naturen" (Ulin 2007) vises det til mange eksempler på matematikk i naturen. Men hva er det som gjør dette så spesielt? Er det ikke som all annen matematikk? Adams (2003) har i sin bok "Mathematics in Nature – Modeling Patterns in the Natural world" også tatt med et kapittel om det gylne snitt og fibonaccirekken. Dette er en bok som over 350 sider tar for seg matematikken i naturfenomener som vi kan observere rundt oss, alt fra bølgeskyer til fuglens flukt og elveosets forgreninger.

I innledningen til kapittelet om det gylne snitt, viser Adams til en artikkel av George Markowsky, med tittel "Misconceptions about the golden ratio" (Markowsky 1992). Her blir det blant annet problematisert hvordan man finner det gylne snitt flere steder i menneskekroppen, men hvor dette er lite nøyaktig, fordi hverken kneet eller navlen er definerte punkter. I Mathematical Association of America poengterer Keith Devlin (2007) også det å skille mellom måling og beregnet størrelse, og at det alltid vil finnes målinger som skaper et forhold som ligger i intervallet mellom 1,5 og 1,7 og at dette alt for fort har blitt knyttet til det gylne snitt, 1,618. Selv om det blir kritisert som en overdrevet søken etter det gylne snitt, så bekrefter han en hyppig forekomst av fibonaccitallene i naturen og *deres* forhold til det gylne snitt. Denne kritikken mener jeg rommer et verdisyn som kommer frem i følgende sitat fra Markowsky:

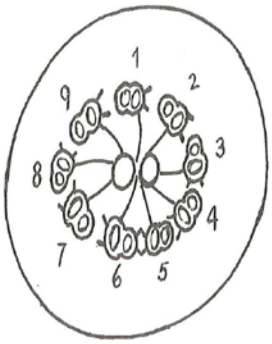
> … the height of his/her navel is roughly the golden ratio. We are not told why this is significant; the navel is a scar of no great importance in an adult human being.
> (Markowsky 1992, s. 15)

Jeg mener dette berører noe vesentlig. For fasinasjonen for det gylne snitt oppsto i en tid hvor verden og naturen var meningsbærende. Pytagoreerne drev med matematikk som en salgs religiøs aktivitet. Og så har vi her Markowsky som i det tyvende århundre reduserer navlen til en hvilket som helst skramme. Jeg setter det litt på spissen, men mener at vi her klart kan se de to ytterligheter. Den ene hvor naturen og tallene er meningsbærende og gudommelig og det andre hvor verden er blitt meningsløs og stokastisk. Begge disse ytterligheter har på hver sin måte fortolket verden. Den første gir verden et gudommelig innhold og den siste det helt motsatte. I det siste tilfellet mener jeg det gjøres en verdivurdering, hvor det konkluderes med at navlen ikke har betydning for et voksent menneske og dette da blir meningsløst å snakke om gylne proporsjoner.

Hvordan står dette i forhold til fenomenologien? Søker man her en mening i naturen eller søker man bare å møte den helt ureflektert?

Men, til tross for denne overnevnte kritikken, lar både Adams, Markowsky og Devlin seg fasinere av fibonaccitallene og det gylne snitt. Men hva er det som er så fasinerende med dette og hva er det som gjør dette gylne snitt og fibonaccitallene et slikt yndet undervisningstema når det gjelder relasjonen matematikk og natur. Ser vi på hastighet, så er dette et matematisk forhold mellom tid og distanse. Tid og bevegelse er i utgangpunktets uavhengig av hverandre, men i matematikken føres de sammen og gjør bevegelse kvantifiserbart.

Det gylne snitt er et forhold mellom delene og helheten, hvor helheten forholder seg til én del som denne delen forholder seg til en mindre del. Dette viser en iboende relasjon som kommer til syne. De samme tallene og relasjonen er noe som viser seg igjen i ulike sammenhenger, og kan kanskje gi en opplevelse at matematikken lever sitt eget liv som egenskap ved selve naturen. Det som også gjør dette tilfellet spesielt, er at fibonaccitallene og det gylne snitt også har mange andre fasinerende egenskaper, noe som jeg kommer tilbake til i neste kapittel.



*Figur 5, symmetrien i ciliens tverrsnitt (Ulin 2007)*

Jeg vil ta frem et lite eksempel fra Ulin (2007) som har overskriften “Cilier, ett problem med nio plus två”. Her innledes det med at Ulin lar seg fasinere av en rekke enestående egenskaper ved cilier. Så ser han på symmetrien i ciliens tverrsnitt (se figur 5). Her ser vi 9 + 2 fibriller. Han gjør oppmerksom på symmetrien og drøfter om denne symmetrien henger sammen med ciliens egenskaper. Så viser han til at tallet 9 også dukker opp i celledeling. Jeg mener dette eksempelet også illustrerer hvordan tall og symmetri er å finne i naturen.

Eksemplene som er vist hittil, har et fokus på tall og forhold som dukker opp i naturen. I et notat av Morten Eide(2011), matematiker og tidligere lærere, kommer det frem ennå et aspekt. Han skriver:

> Men hvis dette settes i sammenheng med vekst på en mer omfattende måte, får det mening. Et særtrekk ved vekst er at tilveksten er en funksjon av det som allerede er etablert. Spiralens vekst er en funksjon av hvor stor spiralen allerede er; dette viser seg i naturen i sneglehus for eksempel. Fibonaccirekken er en tallrekke som bygger på dette; og når man kommer ut i rekken, stabiliserer forholdet mellom to tall seg som det gylne snitt; som vi altså gjenfinner i naturen. (Eide 2011, s. 1)

Her kommer det frem et nytt aspekt ved matematikk i naturen. Det Eide her gjør, er å koble sammen prosesser i naturen med matematisk prosesser. Det er her ikke lenger så interessant med selve tallene i fibonaccirekken men hvordan den utfolder seg. Slik at vi ser at dynamikken i naturen avdekker en matematisk dynamikk.

Det er ingen nyhet at vi i lange tider har sett på naturen gjennom matematikkens briller. Illustrert med Galilei utsagn: "Universet … er skrevet med matematikkens språk…" (Dahlin 2001; Ulin 2007). Jeg vil da gå videre til Adams (2003) som i sin bok "Mathematics in Nature – Modeling Patterns in the Natural world". Adam sier innledningsvis:

> The question arises: does this approach to modeling natural phenomena really explain the mechanisms underlying the observed patterns? Or do such cellular automata reproduce and describe them without explaining them? No doubt time will tell… (Adam 2003, s. xvii)

Her viser Adam til to alternativer, hvor vi enten kan se på matematikken i naturfenomenet som noe som forklarer fenomenet, eller at matematikken bare er en beskrivelse av fenomenet (med tall-språk) uten at dette gir hverken forståelse eller forklaring.  Det første alternativet gjør matematikken til noe eksternt, men noe som har autoritet til å gi fenomenet og kan begrunne det. Det andre perspektivet har litt samme karakter av at matematikken er noe eksternt, men som kan gjenskape fenomenet, akkurat som man bruker modellkitt til gjenskape en bro – men matematikken har her mistet litt av sin autoritet til å forklare og begrunne fenomenet.

Men ser vi på den matematiske utvikling av fibonaccitallene, det gylne snitt og cilienes symmetri, så er ikke disse observasjoner ment for å forklare eller begrunne naturfenomenet. Formålet er ikke å finne forklaring på naturen, men snarere å bruke tanken til bedre å kunne se den. Disse eksempler viser at det er mulig å ha en matematisk tilnærming til virkeligheten uten å søke å forklare og begrunne det som skjer rundt oss, og har en rent betraktende tilnærming til matematikken i verden. På dette punkt er det kanskje mulig å gjøre et skille som kan knyttes til en fenomenologisk tilnærming. Hvor matematikken ikke er noe utenforstående som skal forklare naturfenomenet, men at matematikken er en del av fenomenet.

Slik vi forstår verden i dag, så skal alt ha skjedd ”tilfeldig” og derfor så bør også alt være meningsløst og stokastisk. Men matematikken er det motsatte, her er ingenting tilfeldig, alt er nøye gjennomtenkte og relasjoner er ikke tilfeldige. Det kan da oppstå en konflikt med å se på slike tallmønster i naturen, og det kan synes som en digresjon å beskjeftige seg med slike fasinerende sammentreff av matematiske mønstre i naturen. Dette blir av Ole karakterisert som noe moro, og blir ofte karakterisert som anomalier, og sett på som meningsløse digresjoner i matematisk sammenheng (Mack 2006, s. 2).

Jardin (1994, s. 110)sier det er et prinsipp i all undervisning at mennesket er adskilt fra naturen og at mennesket, for å danne seg kunnskap, forsøker å konstruere orden i en ellers uordnet verden. Dette kan forklare noe om hvorfor det er så fascinerende at det finnes slike tall-relasjoner i den direkte sanselige verden. Dette viser at matematikken ikke er noe adskilt og opphøyet. “Det ligger rett foran oss, i mønsteret på våre fingre, i håndens symmetri, i vår puls og rytmen av vår pust” (Jardin 1994, s. 112).

Budnik (2009) gjør en interessant vending i sin kritikk av sosialkonstruktivismen, hvor han kommer med følgende utsagn: “Social constructivism minimizes the connection between objective physical reality and mathematics” (Budnik 2009, s. 286). Budnik foreslår videre å lage en matematikk-filosofi som tar med realiteten i matematikken og samtidig greier å få med menneskets kreativitet. Når det gjelder realiteten i matematikken så viser Budnik til Gödels ufullstendighetsteorem, og at konsekvensen av at man ikke kan danne et komplett matematikksystem må være å ta en empirisk tilnærming til matematikken. Det er interessant at Budnik påpeker at matematikkens reelle tilknytning til verden ikke skal betraktes som oppkonstruert og at matematikken kan oppleves reel gjennom å erfare.

Dette peker igjen i retning av at det kan ha en viss verdi i å få en opplevelse av matematikken som noe reelt, ikke bare i den verden vi konstruerer rundt oss, men også i den verden som vi selv er skapt av. Slik som også Åsmund var opptatt av å la elvene komme direkte inn på matematikken og ikke skjule den innenfor oppkonstruerte rammen, vil disse eksempler fra naturen, kunne bidra til å gi eleven et mer reelt forhold til matematikken.

Dette har også vist hvordan det matematiske ligger i naturen, og dette mener jeg vil kunne gi en erfaring av at matematikken ikke rent ut er et kulturelt tankespinn, hvor vi spør oss: er mønsteret i solsikken en sosialkonstruksjon, eller er det en egenskap ved fenomenet. Fenomenologisk matematikkundervisning går i retning av å vektlegge den siste delen av dette spørsmålet. Slik at dette går litt i mot sosialkonstruktivisme slik Budnik (2009) gjør. Dette utelukker ikke at mennesket også har en aktiv rolle i kunnskapsdannelsen, men at dette skjer i slags symbiose med den ytre verden.

### Opplevelse av matematikkens kvaliteter

Essensen i dette kapittelet er de opplevelser av kvalitet som kan knyttes til matematikken. Kapitelet vektlegger de opplevelser som selve matematikken gir. Ut fra mitt datamateriale har jeg trukket frem opplevelser av talls og proporsjoners kvaliteter, og så har det kommet frem hva læreren synes er vakkert. Disse opplevelsene av matematikkens kvaliteter karakteriserer jeg som estetiske opplevelser.

Lærerne beskriver hvordan de opplever det vakre i matematikken. De kan gi konkrete eksempler på når de har opplevde noe vakkert i matematikken, til eksempel Åsmund som trekker frem beregning av kastebanen. Flere av lærerne beskriver det som vakkert, når det går fra noe komplekst til et enkelt uttrykk. Kristian snakker også om tallenes egenkvalitet som noe som kan oppleves, til eksempel ved det gylne snittet. Ranestad (2004) sier at det vakre i matematikken kan vise seg på tre områder: i begrepet, i resonnementet og i resultatet. For å få et direkte perspektiv på hvilken betydning matematikkens estetikk kan ha, har jeg tatt med et utsagn av Ranestad:

> Jeg spurte en matematikkstudent hvor viktig det vakre er i matematikk for henne.
> - Hvor viktig det er? Hvis det ikke var vakkert hadde i hvert fall ikke jeg giddet å jobbe med det. (Ranestad 2004, s. 1)

Kristian mente at estetikk var begynt å komme inn i lærebøkene, men at dette "kommer på en litt annen måte", matematikk blir bare noe man skal kunne. Fordi Kristian snakker om å oppleve kvaliteten til tallen φ, så tolker jeg han dit, at han mener at den ekte opplevelsen av det estetiske blir borte. I læreboken til Bakke og Bakke (2006) er det et kapittel “Matematikk i kunsten”. På side 299 vises det hvordan gylne snitt kan finnes ved å dele bankkortets langside på kortsiden. Her blir det gylne snitt redusert til et forhold mellom kun to sider, hvor forholden er 1,618… =φ. Dette tallet kommer i utgangspunktet fra et helt spesielt forhold mellom helheten og delene, hvor forholdet mellom helheten og den store delen er lik forholdet mellom den store delen og den lille delen. Størrelsene av dette ideelle forholdet finnes ved å løse en annengradsligning.

Rent matematisk vil dette forholdet kunne oppleves som spesielt og kanskje, når dette forholdet finnes igjen i naturen, så kan en la seg fascinere av det. Slik jeg tolker Kristian, peker han på er at Bakke og Bakke reduserer det gylne snitt til et tall som vi kan finne i bankkortet. Mens Kristian heller ville opplive den fasinasjon som har ført til at bankkortet har fått akkurat denne størrelsen. Kristian fortalte om en tidligere elev, som han på et tidspunkt hadde møtt igjen. Denne eleven bretter da opp ermet og viser frem en tatovering av tallet φ. Kristian forteller at dette var ikke en elev som var spesielt dedikert til matematikk. Men det gylne snitt hadde tydeligvis gjort et stort inntrykk på eleven og medført en tatovering. Om Bakke og Bakke sin bok har medført til at elever har tatovert *gylne bankkort* på armen har jeg ikke hørt om.

Kristian sin elev er ikke den eneste som har latt seg fasinere av proporsjoner i matematikken. Arkimedes skal ha bedt en venn om å få hugget ut en kule innskrevet i en sylinder (Ulin 2006; Wikipedia 2011). Sinclair (2009) har en rekke henvisninger som viser hvordan estetikk og estetisk opplevelse spiller en rolle i matematikken. Sinclair sier blant annet:

> There is a long tradition in mathematics of describing proofs and theorems in aesthetic terms, often using words such as ”elegant” and “depth”. (Sinclair 2009, s. 46)

Dette er hva også vi så hos Ranestad (2004). Videre sier Sinclair at matematikere har argumentert for at matematikken ligger nærmere kunsten enn vitenskap og belyst hvordan de har sette estetikk i matematikken. Sinclair trekker også frem hvordan denne opplevelsen kan være viktig.

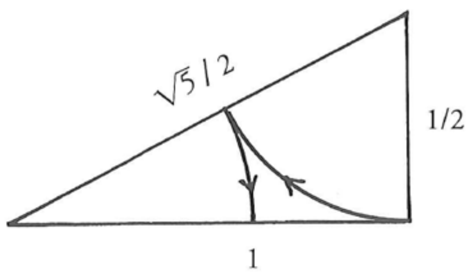
> Other mathematicians have spoken of the special sensibility as well and also in term of the way it gauds mathematicians to choose certain problems. (Sinclair 2009, s. 46)

Her kommer det frem et skille mellom selve estetikken og den estetiske opplevelsen, og hvordan det å få en estetisk opplevelse er viktig for å lykkes i det matematiske arbeidet.

Den kvalitative opplevelsen må ikke alltid være vakker, noe som Sinclair (2009) eksemplifiserer ved å vise til blant annet Charles Hermite (1822-1902) som beskriver ikke-deriverbare-kontinuerlige-funksjoner med adjektivene “dread” og “horror” (s. 48). Hun viser også til lærere som snakker om brøk som “monstre” og “beist”. Vi kan oppsummere ved å si at matematikken kan gi en estetisk opplevelse som ikke nødvendigvis er vakker.

Hva er det for egenskaper som er opphav til opplevelser av matematiske konsepter? Hva er det som må til for å få en kvalitativ opplevelse av matematikken. Sinclair refererer til en diskusjon hvor det ble hevdet, at det bare er på et meget høyt nivå at det er mulig å få en virkelig estetisk opplevelse av matematikken. Sinclair viser derimot at man kan få en estetisk opplevelse i matematikken på alle nivåer, og at denne opplevelsen er veldig personlig. Det kommer tydelig frem når 80 matematikere skal kåre det vakreste teoremet ut av 20 kjente. De svarer vidt forskjellige og gir mange ulike personlige grunner. (Sinclair 2009, s.48)

Betrakter vi det gylne snitt, ser vi på det at det er et irrasjonelt tall, så kan det gi opphav til en spesiell opplevelse. Det gylne tall kan konstrueres (figur 6) men vi kan ikke gi det en endelig plassering på tallinjen.




*Figur 6. Geometrisk konstruksjon av φ (Ulin 2008, s. 34)*

Det at det gylne tall er et irrasjonelt tall slik at det ikke kan endelig plassere på tallinjen mens vi *kan* konstruere lengden; denne motsetningen mellom en konstruerbar størrelse og et tallsystem som ikke kan utrykke denne størrelsen, mener jeg vil kunne gi en estetisk opplevelse. Men dette krever innsikt og kunnskap.

Hos Posamentier (2003) ser vi følgende sammenhenger:

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}}}}}}}}}}$$

Dette gir litt av en annen opplevelse av en viss ytre estetikk, men begynner en å fordype seg i det innholdsmessige, så gir det mulighet til ennå flere opplevelser. Og da kommer man inn på det som Jesper nevnte som vakkert. Det å gå fra det komplekse til det enkle, slik som å sette den overstående kjedebrøk inn i følgende forenklede sammenheng $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$

Adam(2003) sier det kan bevises at det gylne tall (φ) er det mest irrasjonelle blant alle irrasjonelle tall, ved at differansen mellom tilnærmet verdi og φ synker saktere enn ved andre irrasjonelle tall. Adam sier:

> … the golden number is very special, surprising, and strange. … However, for the beauty of simplicity the golden number just cannot be beaten! (Adam 2003, s. 220 og 229)

Sinclair sier følgende om virkningen av å oppleve estetikken:

> The aesthetic draws the attention of the perceiver to a phenomenon (a pattern, a relationship, a contradiction), while the effect can bring these perceptions to the conscious attention of the perceiver. (Sinclair 2009, s. 55)

Slik jeg tolker det, kan det at eleven får oppleve matematikkens mange kvaliteter, føre til at eleven kan knytte en forbindelse. Dette passer også sammen med hvordan Østergaard (2004) vektlegger at menneskets forhold til verden er mangfoldig, og at det er viktig å gi eleven en rik opplevelse av de fenomener som undervises (se kapittel 2.3).

I denne sammenheng, vil jeg si at en estetisk opplevelse bunner i en opplevelse av kvalitet, hvor denne kvaliteten i enkelte tilfeller er vakker, slik at det er hensiktsmessig å karakterisere den estetiske opplevelse som en opplevelse av kvalitet. Og det finnes opplevelse av kvalitet av både matematiske objekter og matematisk tankearbeid.

Ut fra dette vil jeg si, at vi til matematikken kan knytte en erfaring av realitet og at denne erfaringen kan gi kvalitative opplevelser som kan være mer eller mindre rikholdige. Jeg vil også anta at ulike matematiske temaer gir ulik grad av opplevelser av realitet og kvalitet.

Skal man vise fargenes egenskaper kan man ikke røre hele regnbuen ned i et malingsspann. Man må male opp bilder som tydelig viser fargenes kvaliteter. Slik mener jeg også at matematikkens estetikk kan bringes frem og vil gi eleven et rikt og tydelig bilde, som i større grad vil gjøre dem i stand til å gripe matematikken.

Det passer å avslutte med sitat av Sfard som sier

There is probably much more to mathematics than just the rules of logic. (Sfard 1991, s. 2)

## 5.2 Matematikken - en kognitiv aktivitet

At this point an enigma presents itself which in all ages has agitated inquiring minds. How can it be that mathematics, being after all a product of human though which is independent of experience, is so admirably appropriate to the objects of reality? Is human reason, then, without experience, merely by taking thought, able to fathom the properties of real things? (Einstein 1921, s.1)

Einstein setter her ord på essensen i dette kapittelet, nemlig hvordan tenkningen i matematikken og livsverden henger sammen. Det som kommer frem i dette kapittelet er relasjonen mellom matematisk tenkning og den fysiske verden. Jeg vil her prøve å vise noen tanker rundt denne relasjonen som jeg setter i relasjon til fenomenologisk naturfagundervisning.

Det tar utgangspunkt i konkreter og tenkning. Når jeg snakket med lærerne om konkreter ble dette knyttet opp til tenkning på ulik måte. I intervjuene definerte jeg ikke hva jeg mente med *konkreter*. Jesper kommer med et eksempel hvor han bruker flasker til å utforske kombinatorikk. Men ellers er det nok litt ulikt hva lærerne spesifikt legger i begrepet. I en lederartikkel skriver redaktøren i Tangenten, Christoph Kirfel (2010), at konkreter består av *materialisering, eksemplifisering, kontekstualisering* og *visualisering*. Dette er en meget vid definisjon, som rommer alt fra naturfenomener til finurlige tallspill, og visualisering kan inneholde grafisk fremstilling slik at store deler av det som gjøres i matematikk kan karakteriseres som konkreter. Ut fra slik jeg forstår lærerne i min studie, mener de at konkreter er noe som er observerbart og helst fysisk, og som på ulik måte illustrerer matematiske prinsipper.

I intervjuene setter lærerne konkreter i relasjon til tenkningen, hvor konkreter beskrives som noe som kan hjelpe tankeprosessen, til å komme i gang eller noe å knytte opp til. Dette kommer frem i følgende sitater fra intervjuene:

Den indre anstrengelsen må til, men det gjør det kanskje lettere å starte den indre anstrengelse. (Kristian 5:18)

Når vi skal ha kombinatorikk så går vi, 5 elever skal sette seg på 5 stoler. Så kan vi

> snakke om det. Vi kan dagen etterpå snakke om Sara som setter seg på den stolen. Da blir det lettere. (Jesper 2:8)

> Bruke av konkreter gir elevene noen knagger å henge det på. (Ole 1:11)

Selv om det ikke er mulig å si så mye om ulike typer av konkreter så kommer det her frem et prinsipp om at konkreter er med til å hjelpe tenkningen på et vis. Men konkreter i seg selv ikke er matematikk. Fredrik sier om dette:

> … selvfølgelig [er det en] veldig støtte å ha konkrete gjenstander å hjelpe til. Men desto høyere eller lengre man kommer i den prosessen desto mere så blir det mer og mer en billedløs tenkning, det blir en ren tankeprosess. (Fredrik 5:4)

Her trekker Fredrik frem at det her skjer en utvikling fra det konkrete til en tankeprosess, og hvor denne tankeprosessen beveger seg bort fra bilde av de konkrete gjenstander frem mot en «billedløs tenkning».

I den fenomenologiske naturfagundervisning er fokuset på relasjonen mellom fenomenet og begrepet.

> However, a deepened understanding of the phenomenon does not arise merely out of thorough sense experiences. Experiences need to be transformed into concepts. (Østergaard et al. 2007, s. 126)

Her kommer det frem hvordan erfaringene skal omgjøres til begreper. Et aktuelt spørsmål er: hvordan står den matematiske tenkingen i relasjon til dette?

I sitatet av Jesper i kapittel 4.3 beskriver han undervisning i kombinatorikk, da foreslår han å begynne med at elevene setter seg på stoler hvor de utforsker ulike kombinasjoner, videre jobber de med ulike flasker som også settes opp i ulike kombinasjoner. Jesper sier "… da skjønner de det. Da klarer de å få det til." (Jesper 2:8). I dette eksempelet er det konkrete helt virkelig, og en hverdagslig situasjon. Dette er også ting elevene har erfart før.

Dette kan settes i sammenheng med Fredrik sin uttalelse:

> … støtte å ha konkrete gjenstander å hjelpe til. Men desto høyere eller lengre man kommer i den prosessen desto mere så blir det en billedløs tenkning, det blir en ren tankeprosess. (Fredrik 5:4)

Her sier Fredrik at tenkning har en utvikling fra det konkrete til en ren tankeprosess. Ser vi på eksempelet til Jesper så viser han hvordan det å utforske konkreter gjør det lettere for eleven å forstå kombinatorikk. Fredrik mener da at dette skal føre til en tenkning som er «billedløs», en «ren tankeprosess». Jeg forstår det da slik at denne billedløse tenkningen er det som har greid å forstå og fange kombinatorikkens logikk. Og hvor bildene av den spesifikke situasjon ikke lenger brukes av tenkningen.  Jeg mener det da må være relevant å betrakte denne billedløse tenkningen som det Åsmund kaller abstrakt. Han sier:

> De som ikke trenger konkreter, greier å tenke det abstrakt. (Åsmund 8:5)

Her gis det en indikasjon på at den abstrakte tenkningen ikke nødvendigvis er avhengig av det konkrete. Dette sier ingen ting om etableringen av den abstrakte tenkningen. Slik som det kom frem hos Fredrik.

Ut ifra de overstående betraktninger ser det for meg ut til at det finnes et aspekt ved matematikken hvor de prinsipper som ligger i den konkrete verden blir absorbert av tenkingen og blir en del av den abstrakte tenkningen. I den fenomenologiske naturfagundervisningen er det fokus på forholdet mellom erfaringer og begreper (Østergaard et al. 2007; Østergaard et al. 2008), mens her i matematikken kommer det frem en relasjon mellom det konkrete og abstrakte tankeprosessen. Her mener jeg det avdekkes at disse innfallsvinklene er beslektet. Forskjellen ligger i hvordan det i matematikken strekker seg lengre inn i den abstrakte tenkningen, hvor det både utvikles nye abstrakte begreper som ikke nødvendigvis har en direkte tilknytning til livsverden, sammen med disse abstrakte begreper tilknyttes det også abstrakte tankebaner.

Dette kan settes i sammenheng med Sion (2003) som poengterer at abstrakte logiske begreper underbygges av en erfaring fra verden. Dette kommer frem i hans kritikk av en rent aksiomatisk matematikk.

> The idea that mathematical systems such as Hilbert' are "axiomatic" – that is, pure of any dependence on experience is a recurring myth, […] We need only indicate the use of logical expressions like "exists," "belonging," "including," "if – then –," etc., or mathematical ones like "two," "points" "line," etc., to see the dependence. Take for example the concept of a group (to which something "belongs" or in which something is "included"). The concept is not a disembodied abstract, but has a history within knowledge. […] Without such a physical example or mental image of concrete grouping, the word would have no meaning to us at all. (Sion 2003, s. 334)

Her sier Sion at de matematiske begreper må ha et grunnlag i erfaringer fra ytre verden. Begreper som *eksistere* og *tilhøre, punkt* og *linje* er begreper som også brukes i naturfaget, men det kan se ut til at matematikken gjør en idealisering av disse erfaringer, som så dannes til grunnelementer i matematikken. Det interessante er hvordan grunnelementer i matematikken hviler på en erfaring fra livsverden.

Dette passer også overens med det Fredrik sier at:

> … la tenkningen utvikle sitt begrepsapparat ut fra en konkret iakttagbar verden. (Fredrik 6:7)

Det Fredrik sier her stemmer helt overens med tenkningen i den fenomenologiske naturfagundervisningen, hvor det skal stå i relasjon til livsverden.

Hos Sfard (1991) er det også et interessant eksempel: Er det mulig å forstå en todimensjonal skisse av en tredimensjonal kube uten og ha noe erfaring med den virkelige tredimensjonale verden? Dette virker ganske usannsynlig.

Jeg vil også påstå at det ikke bare er statiske begreper som den abstrakte tenkningen kan få gjennom erfaring, men også prinsipper. Jeg vil prøve å illustrere dette med et eksempel: La hendelsen A være at bladet henger på treet, la hendelsen B være at bladet har falt ned av treet og la C være at bladet er høstgult. Utfra erfaring forstår vi at bladet ikke kan være falt av og samtidig henge på treet. Dette betyr at erfareringen gir oss en logikk som sier at hendelsene A og B er disjunkte, $P(A \cap B) = 0$. Videre erfarer vi at bladet kan både være gult og henge på treet. Slik at det gir mening å snakke om snittet mellom A og C. Her ser vi betingelser som ligger i livsverden henger sammen med den logikk som vi utvikler i den abstrakte tenkningen. Dette eksempelet gir erfaring av både hendelser og plasseringer. Et vesentlig begrep som kan knyttes til dette, er tenkningens kontinuitet, hvor en tanke får en forutsigbar konsekvens for neste tanke. I nevnte eksempel er en tanke at bladet er falt ned, og da blir det av dette en nødvendig tanke at bladet ikke lenger henger på treet.

Dette er prinsipper som vi tar med inn i matematikken og som vi vil karakterisere som logiske, så på den måte har vår logikk en tilknytning til de fysiske fenomener. Dette vil kunne stå i kontrast til for eksempel en religiøs logikk, som følger helt andre prinsipper. På kvantenivå kan vi finne fenomener som følger andre lovmessigheter, for eksempel kvantesprang som er diskontinuerlig. Ut fra det jeg her har påstått hadde det vært legitimt å spørre seg om vår tenking hadde fulgt andre prinsipper dersom vi hadde omgitt oss med en livsverden som hadde helt andre prinsipper.

Fredrik nevner denne kontinuitet når han snakker om tenkningen som er tilknyttet erkjennelse av verden:

> Og da er det jo det at tenkningen er knyttet til erkjennelse av verden. […] slik at det har mening å si at det er noe tenkning er riktig og noe annet som er virkelighetsfjernt. Og så er det tvilen, hvordan håndterer jeg tvilen, når det er umulig å fastslå noe som helst, hvordan skal jeg gjøre det? Og der er tenkningens kontinuitet og diskontinuitet. (Fredrik 6:15)

Dette tolker jeg ditt hen at den kontinuerlige tenkningen er den som er virkelighetsnær, mens når tenkningen blir diskontinuerlig så mister tenkningen sitt grep om virkeligheten.

Jeg viste innledningsvis at et vesentlig trekk ved fenomenologien var at kunnskapen om verden må romme erfaringen av den. Det er dette prinsippet jeg her prøver å overføre til tenkningen hvor den logikk som ligger i den matematiske tenkningen er noe som tenkningen har lært av prinsipper i naturen. Selv om den matematiske tenkningen kan bli abstrakt så har den en form som kan vise tilbake til den fysiske, ytre verden.

På dette punkt mener jeg det er mulig å finne en parallell til problematikk knyttet til konstruktivismen som fenomenologisk naturfagundervisning prøver å gi et svar på. Dette fremkommer hos Dahlin (2001):

> … most theories of constructivism remain within the dualistic framework which Dewey opposed, in particular those theories that focus on individual psychological processes. Reality, or nature, is seen as external to and independent of both knowledge and experience. (Dahlin 2001, s. 456)

Her kommer det frem hvordan den fenomenologiske naturfagundervisningen står i kontrast til en konstruktivisme hvor kunnskapen skapes ut fra rent sosiale og personlige prosesser.

Budnik (2009) påpeker at det sosialkonstruktivistiske perspektiv også har innflytelse i forståelse av matematikken og den ekstreme sosialkonstruktivismen sier at sannheten er konstruert ut av en kulturell gruppe. Budnik skriver følgende om den mer moderate konstruktivismen:

> It rejects the idea that all valid mathematical questions must be objectively true or false.

(Budnik 2009, s. 285)

Ved dette har jeg prøvd å gi et perspektiv på relasjonen mellom tenkningen og den verden som tenkningen prøver å begripe. Jeg har prøvd å vise et perspektiv hvor enkelte aspekter ved den fysiske verden ligger som utgangpunkt for deler av den matematiske tenkningen. Hensikten med dette har vært å vise at fra dette perspektiv kan det trekkes en parallell til den fenomenologiske naturfagundervisningen hvor det er et fokus på at en relasjon til naturfenomenene skal være bærende for kunnskapen i naturfaget. På samme måte må den matematiske tenkningen ha en relasjon til den fysiske verden og de prinsipper som ligger i den. Dette gjelder i hovedsak den stringente og kontinuerlige siden ved den matematiske tenkningen.

Fredrik sier at når eleven har utviklet evnen til abstrakt tenkningen så er det fruktbart å bringe inn de filosofiske problemstillinger som dukker opp i dette feltet som ligger mellom tenkningen og den ytre verden:

> Det åpner [opp for] slike problemstillinger som er av en filosofisk karakter, som da kan bli til ren filosofi, men som da kan bøye av og bli matematiske begreper. Så det bruker jeg helt bevisst etter puberteten, fra 10. klasse og oppover, bruker jeg begreper og snakker til dem om dette på en halv filosofisk måte, slik at ikke faget skal være alt for strengt bokset inne. Altså at deres erfaring og opplevelse av matematikk skal bli knyttet til en mer generell forståelse av tenkningen. (Fredrik 6:15)

Her sier Fredrik at det gjennom å løfte frem de filosofiske spørsmål som knytter seg til relasjonen mellom tenkningen og omverden aktualiseres på flere områder, at den ikke bare er begrenset til den matematiske *boks,* men at dette er noe som berører spørsmål angående tenkningen hos hver enkelt elev. Og på den måte blir også matematikken for den enkelte ikke bare et redskap til å forstå verden, men også noe som gir læring om egen tenkning.

Jeg avslutter dette resonnementet med et sitat av Einstein hvor vi finner denne problemstillingen tydelig formulert:

> As far as the propositions of mathematics refer to reality, they are not certain; and as far as they are certain, they do not refer to reality. (Einstein 1921, s. 1)

I denne oppgaven har jeg hele tiden vært vendt mot naturfagets verden, jeg tror det er litt av årsaken til at det matematiske univers har kommet noe i skyggen. I kapittel 5.1 var det fokus på matematikken i naturen, men lite fokus på det indre matematiske verden. Og så langt i dette kapittelet har det vært et fokus på relasjonen mellom tenkningen og den verden vi prøver å begripe. Mens det har vært lite fokus på et abstrakt universet, som Sfard beskriver slik:

> Unlike material objects, however, advanced mathematical constructs are totally inaccessible to our senses - they can only be seen with our mind's eyes. Indeed, even when we draw a function or write down a number, we are very careful to emphasize that the sign on the paper is but one among many possible representations of some abstract entity, which by itself can be neither seen nor touched. (Sfard 1991, s. 3) .

Fredrik sier:

> Man kan gjerne ha en portal inn til det gjennom noe praktisk. Men i den store sammenhengen er det bare noe som skyver det hele i gang. Men det virkelig interessante er når man går bak denne portalen og begynner sin egen vandring. (Fredrik 6:16)

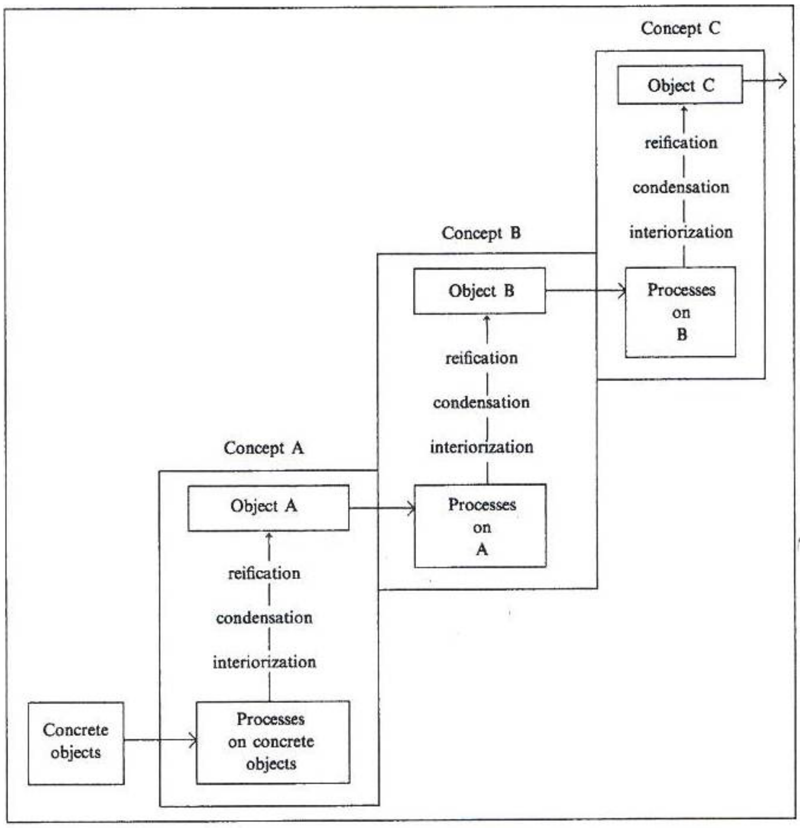
Sli jeg tolker Fredrik her, så mener han at denne vandringen er når man beveger seg fra de konkret erfaringer og inn og bygger ut et matematisk univers.

I kapittel 5.1 er det så vidt en begynnelse til en slik abstrakt utforskning og begynnelse til en “vandring” videre inn i matematikkens abstrakte univers. Det mest iøynefallende er hvordan det gylne snitt først kan begripes som en helhet og så settes opp med matematiske symboler, det oppstår en annengradsligning med matematisk metode. Det svaret som komme ut er så et irrasjonelt tall, en størrelse som nesten beveger seg ut av det tallsystemet som vi behersker. Sfard sier at en helt nødvendig egenskap for å kunne beherske matematikken er:

> Being capable of somehow "seeing" these invisible objects appears to be an essential component of mathematical ability; lack of this capacity may be one of the major reasons because of which mathematics appears practically impermeable to so many "well-formed minds" (Sfard 1991, s. 3)

I kapittel 5.1.2 var det fokus på hvordan disse abstrakte fenomener var opphav til kvalitative erfaringer. Hos Sfard (1991) er det et annet fokus. Her fremstiller hun en modell som viser hvordan eleven utvikler det matematiske univers; modellens tre steg beskrives utfra ytre karakteristikk av elevens atferd, holdning og ferdighet. Modellens tre nivåer er *interiorization*, *condensation* and *reification*.

*Interiorization* er det stadiet hvor eleven utforsker operasjoner innenfor et tema. Et eksempel er å ta roten av ulike tal. Når eleven mestrer å regne med røtter og kan begynne å overføre det til en større sammenheng, er eleven kommet inn fasen kalt *condensation*. I denne fasen ser eleven på operasjonen som noe helhetlig, eleven begynner å få et distansert forhold til prosessen og går ikke inn i de små detaljer da. Så er det den siste fasen, *reification*, hvor eleven plutselig kan se det kjente på en helt ny måte. Et eksempel fra Sfards er når det komplekse tallet 5+2i ikke lenger er bare en operasjon, men et legitimt objekt.




*Figur 7. Generell modell for konseptdannelse (Sfard 1991, s. 22)*

I denne prosessen beveges elevens forståelse fra å være ren operasjonell til konseptuell. I figur 7 ser vi hvordan denne prosessen gjentas igjen og igjen. Det jeg vil trekke frem er hvordan prosesser tilknyttet et ratifisert objekt kan utvikle nye objekter. Sfard har en rekke historiske eksempler på dette. Blant annet hvordan rotutdragning innledningsvis kun var en operasjon som ble gjort for å finne det tallet som ganget med seg selv ble det aktuelle tall. Men hvor denne operasjonen ble ratifisert og blir til et objekt som kan settes inn i nye sammenhenger. Og på den måten oppsto det komplekse tall ut fra $\sqrt{-1}$. (Sfard 1991)

Det jeg her vil stille spørsmål ved er hvordan denne bevegelsen, fra å gå fra en etablert strukturell enhet og over i nye operasjoner, siden kan bli nye matematiske konsepter. Ut over dette å skape nye formasjoner. Hva er det som bærer denne prosessen?

Sfard sier at denne modellen bruker ytre parameter til å forklare begrepsutviklingen hos eleven. Om hva denne modellen måler sier hun blant annet:

> … maybe even measuring, student's ability to think structurally about a concept at hand.
> (Sfard 1991, s. 18)

Uttrykket “to think structurally” henspiller på hvordan tenkningen hele tiden er essensiell, hvordan tenkningen må behandle identitet som har iboende egenskaper som tenkningen jobber ut fra.

Jeg vil her sette fokus på denne prosessen som viser seg i Sfard sin modell, hvor matematikken starter med et fysisk objekt, for så å utvikle et matematisk “univers”, hvor matematiske objekter kan vokse ut fra allerede etablerte matematiske objekter. Hvordan kan det være mulig, og hvilken rolle spiller tenkningen i denne prosessen? På hvilken måte kan perspektivet som kommer frem hos Ulin (1988) som sier at matematikken hviler på tenkningen. At ikke matematikken kan bevise seg selv men at det er tenkningen som er det springene punkt. Dette tar Ulin blant annet som en konsekvens av Gödel sitt ufullstendighets teorem.

Dette er spørsmål som vil bli stående ubesvart, men som like fullt er blitt reist. Det har kommet etter en fundering over aspekter ved matematikkundervisning som har fremkommet i intervjuene.

Det at tenkningen er et vesentlig aspekt, vektlegger Fredrik i sin uttalelse om viktigheten av å utforske tenkningen:

> […] denne vekslingen, samtale rundt matematikk med barn eller unge eller voksne, hvordan tenkte du, hvorfor ble det sånn, er meget viktig.
> […] slik at man forstår at det er tenkningen som er det viktige. […] Tror at det er denne vekslingen mellom å gjøre oppgaver og det å snakke og reflektere rundt dette her. Det styrker måten en forholder seg til det. (Fredrik 6:14)

Her innfører Fredrik et metaperspektiv hvor han sier at det er viktig å reflektere over hendelsene i tenkningen. Han sier at dette fremhever at det er tenkningen *i seg selv* som er det viktige.

Det har i dette kapittelet vært fokus på tenkningens utvikling fra erfaring av det konkrete og hvordan det i matematikken vokser frem et abstrakt univers. Til slutt har jeg, ved spørsmåls form, antydet hvordan den menneskelige tenkningen spiller en spesiell rolle her i denne prosessen. Det som mange sikkert vil savne her, hvor det har vært fokus på egenaktivitet i matematikken, er alle de andre menneskelige kvaliteter som også høre gjemme i matematikken. Ulin sier her:

> Matematisk aktivitet är att söka i idéernas värld och att kombinera kreativitet med logik. (Ulin 2004, s. 54)

Kreativitet og problemløsning har ikke vært noe tema i datamaterialet og av den grunn ikke kommet med her.

## 5.3 Matematikk - et verktøy

Matematikk som verktøy kommer i mindre grad frem i intervjuene med lærerne. Dette mener jeg henger sammen med det syn både lærerne og jeg hadde på denne delen av matematikken, at dette er den automatiserte matematikken, at dette ikke er så interessant når en skal se på fenomenologisk matematikkundervisning. I intervjugaiden er temaet «matematikk som verktøy» helt fraværende. Men de få uttalelser som kommer fra lærerne viser at dette likevel er en vesentlig side ved matematikken, og jeg tenker det kan være klokt ikke å utelate dette området fra oppgaven. For det må også her gå an å spørre om hvordan matematikk som verktøy kan settes i relasjon til fenomenologisk naturfagundervisning. Er det også slik at matematikken må vende tilbake til livsverden for på ny å komme videre med abstrakte begreper?

> Matematikk brukes her [i skolen] som et redskap, ikke som et eget fag, hvor vi beviser påstander gjennom matematiske beviser. (Åsmund 8:6)

Her gjør Åsmund et skille mellom matematikken som verktøy og hva han karakteriserer som en aktivitet hvor "vi beviser påstander gjennom matematiske beviser". Det å bevise matematikk ut fra annen matematikk, hører helt tydelig til den abstrakte matematiske aktiviteten. Det er kommet frem noen eksempler på bevisførsel i intervjuene. Jesper nevner bevisførsel for summen av endel antall ledd av en geometrisk rekke. Utledningen av abc-formelen er også blitt nevnt. I Matematikk 1T (Heir 2006), lærebok for videregående, blir nye konsepter som innføres knyttet direkte til hendelser i livsverden, og brukes som et verktøy for å løse praktiske problemer. Og så dette at matematikken i dag anvendes i alle fag:

> Det er ofte det eleven skal ut å gjøre hvis de tar økonomiske fag og skal begynne å tenke økonomiske strategiske valg, så må de lage seg økonomiske modeller for å forutsi hvordan ting kommer til å gå og planlegge ut fra det. Og bruker matematikken som

> redskap for dette. Det tror jeg spesielt de som har tatt økonomiske fag har fått øynene opp for. Og i fysikken, bruker det også som et redskap. (Ole 1:17)

Dette minner om hvordan matematikken brukes som verktøy i fag som ligger ganske langt vekk fra selve matematikken. I PISA-rapporten er det også et slikt perspektiv på matematikken:

> Matematikk er et nyttig og nødvendig redskap for å forstå og mestre verden. (Kjærnsli & Roe 2010, s. 138)

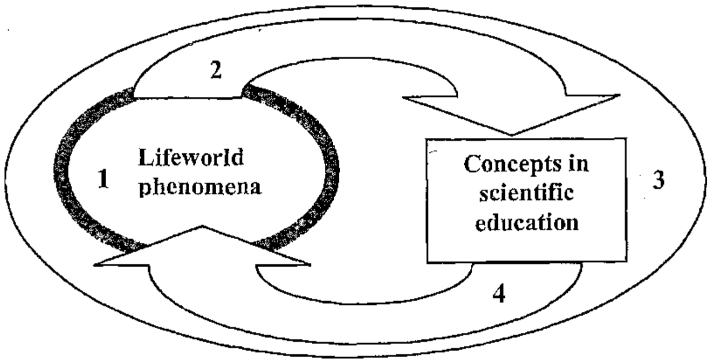
Det kommer også frem i Bertholds artikkel:

> Målet med enhver undervisning må være å utvikle elevens forståelse for sin hverdag og forberede den enkelte på anvendelse i sitt eget liv. (Berthold 2011, s. 6)

Hos Berthold er det en vektlegging av det å anvende matematikken. Det er her fokus på å anvende matematikkunnskapen til å forstå og mestre. Det å ha en så sterk relasjon til livsverden at man behersker den, er vel det som til syvende og sist er målet med all kunnskapsdannelse, og det gjelder vel innenfor alle fag. Det er dette som er kjernepunktet i den fenomenologiske naturfagundervisningens kritikk mot en tendens i skolen, hvor denne relasjonen til verden i for stor grad bygger på rent kognitive fremstilling av verden. (Østergaard et al. 2008)

Det argumenteres derfor i den fenomenologiske undervisning for at den rikholdige erfaringen av verden må bli *en del av* den kunnskapsdannende prosess – slik at det ikke oppstår et gap mellom kunnskapen og livsverden.

Den kunnskapsdannende prosessen som tar utgangpunkt i et fenomen, er skjematisk fremstilt hos Østergaard (2007)(se figur 8). Det inndeles her i fire faser: 1. Danne et rikt og levende bilde av fenomenet. 2. Bruke elevens allerede etablert oppfattelse til å utvikle vitenskapelige begreper. 3. Introdusere vitenskapelig begreper som en forlengelse av elevens eget begrepsapparat, slik at dette ikke blir en motsetning til elevens egen erfaring. 4. Returnere til fenomenet med nye vitenskapelig begreper som gir en dypere forståelse av fenomenet. Jeg siterer: "… the scientific concepts/models are put in a meaningful context developed by the students themselves." (Østergaard et al. 2007, s. 126)




*Figur 8. Fire stadier for sammenkobling av fenomen og abstrakt kunnskap (Østergaard et al. 2007, s. 125)*

Denne modellen viser hvordan det å vende tilbake til livsverden er essensielt for å levendegjøre de vitenskapelige begrepene, og for å utvide kunnskap om verden videre. Det som også er vesentlig, er at det da er bygget opp en mer vitenskapelig forståelse. Perspektivet på matematikken som et redskap for andre fag består i at den bringer abstrakte begreper inn i livsverden. Når man bringer matematikken med seg tilbake inn i livsverden, resulterer dette ikke bare i at man kan beherske den, men at man også får revitalisert de erfaringer man kan gjør i verden.

Det er her blitt beskrevet hvilken hensikt som vektlegges ved matematikken som verktøy. I undersøkelsen kommer det også frem noen mer kvalitative beskrivelser av den deduktive fasen. Kristian sier:

> Men mesteparten av matematikkundervisningen er terping for å lære seg et verktøy. Å bli sikker i det, parenteser, ligninger og algebraen. Det er jo viktig at forståelsen er med hele veien. Blir det bare formler uten at det er noe man skjønner, så blir det hele bortkastet. (Kristian 6:4)

Her beskriver Kristian hvordan det er en prosess å etablere matematikken som et redskap, at dette krever terping og øving. Kristian sier det er viktig å få med forståelsen inn i terpingen. Dette utfylles av Fredrik som sier:

> […] da er det ikke mer aktuelt med nye problemstillinger, da må man stabilisere og nærmest stivne det og operasjonalisere det og til slutt automatisere det. (Fredrik 6:10)

Hva er det Fredrik mener her? Utfra samtalen kan det se ut som om Fredrik mener at det ikke lenger trengs utforskende oppgaver som leder til nytt stoff, men at når et visst stoff er innført, gjelder det å ”stabilisere og nærmest stivne det”. At det blir til algoritmer som til slutt blir så familiære at de blir automatisert.

Her beskriver Kristian og Fredrik en prosess som leder hen til at matematikken blir et redskap. I det øyeblikket matematikken blir til et verktøy, er den på en måte stivnet. Det tolker jeg som at den har fått en bestemt form og hensikt og at det da er mulig å bruke den som et verktøy.

Hos Freudenthal finnes aspektet som utdyper fokuset på matematikken som verktøy:

> Phenomenology of a mathematical concept, structure, or idea means, in my terminology, describing this nooumenon in its relation to the phenomena it is created to organize, and to which it can be extended, how it acts upon these phenomena as a means of organizing, and with what power over the phenomena it endows us. (Freudenthal 1983, s. 28).

Her foreslår Freudenthal at en fenomenologisk tilnærming til matematiske konsepter er å betrakte matematikken i relasjon til de fenomener som det er satt til å organisere. Han trekker også frem hvordan dette kan utvides og gi oss «makt over fenomenene”. Her kan vi også se en fokusering på at dette skal utvikle et redskap til å kunne beherske livsverden. Freudenthal mener således at en fenomenologisk tilnærming vil være å gi eleven en beskrivelse av hvordan matematikken blir til når man søker å forklare et fenomen.

I sitatene over er det blitt brukt begreper som redskap, anvendelse, mestre verden og til slutt Freudenthal sitt begrep ”makt over”. Dette forteller om et perspektiv hvor matematikken ikke bare brukes til å forstå prosessene, men også brukes i den prosessen hvor vi bygger nye fenomener både kulturelle og fysiske.

Det kan se ut til at det å betrakte matematikkens anvendelse er viktig både for å fornye erfaringene av livsverden og for å se hvordan matematikken kommer til uttrykk i den.

Det kan stilles spørsmål om fokuset på matematikkens søken etter å kunne forklare og modellere fenomenet, styrer hvilken måte man betrakter fenomenet. Søker man kun den matematikken som allerede er brukt til å forklare fenomenet, og da glemmer å få en rikholdig opplevelse av det mangfold av andre matematiske uttrykk som ligger i fenomenet?

Og hvor denne ensidigheten kan foranledige følgende uttalelse:

> … the height of his/her navel is roughly the golden ratio. We are not told why this is significant; the navel is a scar of no great importance in an adult human being.
> (Markowsky 1992, s. 15)

Hvor det må ligge en vis betydning i tingen for at det skal være interessant å betrakte de matematiske relasjonene. Dette kan minne om Dahlins (2002, referert i Østergaard et al. 2008) betraktninger etter å ha hørt sine lærerstudenters uttalelser vedrørende Goethes fargelære (se kapittel 2.2):

> If there is not an invisible but more real world behind our everyday life-world experience, then science has no object of study. (Østergaard et al. 2008, s. 100)

Dette innfører det perspektivet at vi ikke må begynne å betrakte den abstrakte matematiske verden som noe som ligger *bak* naturfenomenet, men snarere at vi gjennom matematikken greier å fange litt av selve naturens utrykkformer.

Det er nok på dette punkt at matematikken og fenomenologien fort kan bli motsetninger. Dahlin sier følgende:

> The mathematical law is certainly useful. However, there is a serious but very common mistake to take it as more real than the concrete phenomena it refers to. (Dahlin 2001, s. 455)

Her blir det spørsmålet om ikke matematikeren også må se realiteten i Sokolowski uttalelse:

> For phenomenology, there are no “mere” appearances, and nothing is “just” an appearance. Appearances are real; they belong to being. Thing do show up. (Sokolowski 2000, s. 15)

Det kan neste se ut til at det er oppstår en kamp om å finne de fenomener som kan forklare vår kunnskap. Kanskje man kan la livsverdens fenomener og matematikkens fenomener møtes på likefot og la de utfylle og forklarer hverandre, og ikke pådytte dem forklaringsmodeller som er fremmede?

Går det an å opprettholde livsverdenens fenomener som reelle, samtidig som matematikkens realitet anerkjennes? Dette er svært interessante spørsmål, men de sprenger rammen av denne masteroppgaven.

I dette kapittelet er det blitt vektlagt hvordan matematikken er som redskap, i den fasen hvor den matematiske aktiviteten er fokusert på å gi nye forståelser av fenomenene. Det kan derved oppstå en fare for at de matematiske modeller blir oppfattet som mer reelle enn livsverdenen.

## 5.4 Utvidelse av en fenomenologisk læringsmodell

Her vil jeg drøfte hvordan det som hittil har fremkommet kan vær grunnlag for en utvidelse (figur 10) av den fenomenologiske læringsmodellen gjengitt i figur 8. Først trekker jeg frem hvordan erfaring og opplevelse også er viktig for å bygge en relasjon til det abstrakte fenomenet. Så jeg vil jeg se på skillet mellom det abstrakte begrepet som ligger i den originale naturfagsmodellen, og til slutt hva som er et abstrakt matematisk fenomen.

Den fenomenologiske læringsmodellen til Østergaard et. al (2007) gjengitt i figur 8 viser hvordan den abstrakte kunnskapen vokser frem i relasjon til fenomenene i livsverden. I arbeidet med denne oppgaven har det kommet frem hvordan det i matematikken vokser frem et *abstrakt matematisk univers,* hvor det finnes det jeg vil kalle *abstrakte fenomener*. Disse matematiske fenomenene forholder vi oss til på en måte som om det skulle være reelle fenomener (Sfard 1991). Vi har også sett hvordan det er mulig å få kvalitative opplevelser av de abstrakte fenomener, på lignende måte som man kan oppleve kvalitet ved livsverdens fenomener. Eksempel på dette er Kristian som trekker frem sammenhengen $\varphi^n = f_n \cdot \varphi + f_{n-1}$ hvor $\varphi^n$ det $gylne\ snitt\ i\ n'te\ potens\ og\ \ f_n er$ det $n'te\ \ fibanacci\ talle$, som noe han kaller for vakkert og fasinerende. Hos Sfard (1991) kommer det frem at det varierer, hva den enkelte elev vil oppleve i forhold til et matematisk konsept. Ranestad (2004) nevner at han opplever beviset for at det finnes uendelig mange primtall, som «et vakkert resonnement». Og som det kom frem i kapittel 5.1 hører opplevelse av noe vakkert til en kvalitativ opplevelse:

Hvis eleven har det klart for seg at alle tall er produkter av primtall er spørsmålet: hvor mange primtall må vi ha for å kunne faktorisere alle hele tall? La os si at vi kjenner alle primtall, vi multipliserer alle sammen og plusser på en:

$P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \ldots \cdot P_n + 1 = N$

Da er N ikke delelig med noen av de allerede kjente primtall (Ranestad 2004).

Det som jeg synes er fascinerende med dette, er hvordan man veldig elegant greier å beherske en uendelig mengde tall. Men, som sagt, vil et slikt fenomen gi ulike opplevelser for alle.

Vi ser dermed at det viktige momentet ved den fenomenologiske undervisningsform, opplevelsen, ikke bare finnes i forhold til naturfenomener, men også i forhold til abstrakte fenomener og prosesser.

I den originale fenomenologiske modellen er det et skille mellom fenomenene i livsverden og de abstrakte begrepene, som er lette å se, for fenomenene er fysiske, og begrepene er kun i vår bevissthet.

Spørsmålet er så: Hvordan er dette skillet mellom begrep og fenomen i matematikken, hvor både begrep og (matematisk) fenomen er abstrakte? Jeg vil prøve å kaste lys over dette spørsmålet ved å betrakte fenomenene i naturfaget. Dette er et tema som trenger større plass enn det får her, slik at dette kun må betraktes som antydninger til et svar.

For eksempel: drar vi en kloss over bordet, så kan vi ut fra dette fenomenet danne begrepet *friksjon*. Begrepet friksjon kan dannes fordi vi kan iaktta hvordan gjenstandene oppfører seg i forhold til hverandre. I en fenomenologisk undervisningsform kan man la elevene dra tunge gjenstander på ulike underlag, slik at de også får en erfaring av begrepet i ulike sammenhenger.

Et annet eksempel er hvis vi tar det fra det motsatte perspektivet, altså med utgangpunkt i begrepet. Vi kan ta for eksempel begrepet luft. For meg ser det ut til at vi ikke kan gi dette begrepet noe innhold hvis vi ikke har hatt noen erfaring med hvordan luft arter seg, eksempel hvordan luften i bevegelse rusker oss i håret, eller ekspanderer når den blir varm. Dette viser at ulike konkrete fenomener står i relasjon til hverandre.

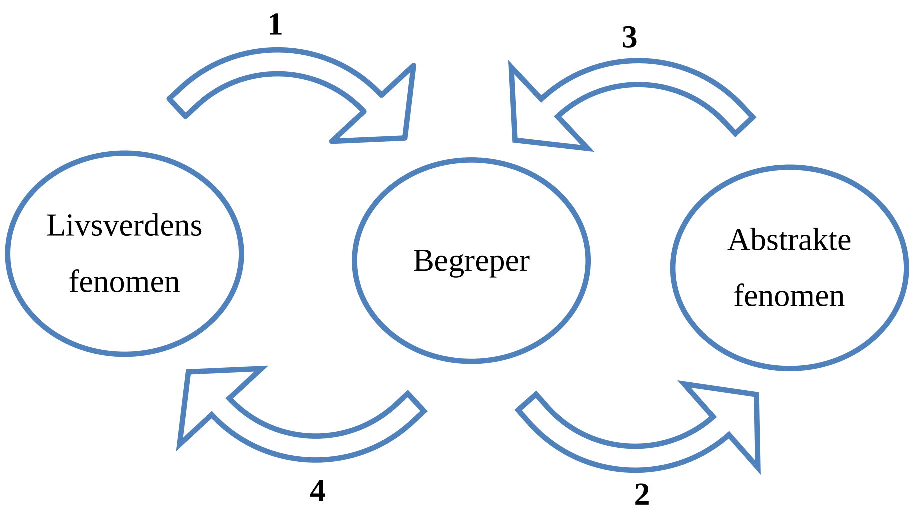
Kan så dette overføres til matematikken med dens abstrakte fenomener? Jeg vil trekke frem et eksempel: Det viser seg at summen av kvadratene av to etterfølgende fibonaccitall også er et fibonaccitall, $5^2 + 8^2 = 89$. Dette er fibonaccitall satt inn i en sammenheng, det er dermed et fenomen innenfor matematikken. Det kan også bli til opplevelse for eleven når de får i oppgave å regne ut en rekke av slike summer av to etterfølgende fibonaccitall. Et annet eksempel er jo $\varphi^n = f_n \cdot \varphi + f_{n-1}$ som Kristian viste til (se over). Her kan man også se en sammenstilling av elementer som står i en spesiell relasjon til hverandre.

Jeg har med dette prøvd å antyde hvordan et matematisk fenomen kan være. Hva så med for eksempel *Fibonaccirekken* selv, er det et begrep eller et fenomen? Så lenge fibonaccirekken kun er en definisjon, så er det et begrep, men når fibonaccitallene settes inn i en sammenheng som vist over, kommer det frem et fenomen. Vi kan også peke på hvordan fibonaccitallene som begrep går begge veier i den utvidede modellen jeg har prøvd å skissere (figur 10). Fibonaccirekkens fremkomst i naturen blir et naturfenomen, mens fenomener som viser seg mellom fibonaccitallene selv, og i forhold til andre matematiske begreper, blir det jeg har kalt abstrakte fenomener.

Den nye modellen inneholder to sirkelbevegelser: Den venstre sirkel rommer i hovedsak den originale modellen, hvor det skjer en veksling mellom konkrete fenomener i livsverden og de abstrakte begrepene. Det jeg legger til her, er den høyre sirkelbevegelsen hvor det er en veksling mellom begrepene og *abstrakte* fenomener. Denne vekselvirkningen er, sammen med den venstre sirkelen, et kjennetegn på innlæring av matematikk.

I den utvidete modellen blir begreper betegnelse på det som brukes til å beskrive både fysiske fenomener og abstrakte fenomener.

Jeg vil her bemerke at det i denne oppgaven har kommet frem at erfaringer ikke bare er knyttet til det jeg karakteriserer som fenomener, men også til begreper og egenaktiviteten. Noe tilsvarende har jeg ikke funnet i beskrivelsen av den fenomenologiske naturfagundervisning.




*Figur 9. Utvidelse av den fenomenologiske læringsmodell beskrevet i kapittel 5.3*

1. Dette er området hvor matematikken kan få vokse ut av livsverden. Her er fokus på å finne systemer og begreper som kan forklare fenomenet. Men det fremkommer også mulighet for mer åpent å la seg fascinere av naturens evne til å åpenbare seg gjennom det matematiske språk. Det er ikke et ensidig fokus på å finne det som kan forklare fenomenet, men heller på å kunne se hvordan fenomenet «viser frem» matematikken, både gjennom størrelse, forhold, form-forvandling og bevegelse. Dette står i relasjon til hvordan man i fenomenologien søker en erfaring som er minst mulig farget av ens egen forkunnskap (se kapittel 2.2). I denne prosessen er det viktig at det kommer frem et rikholdig og levende bilde av matematikken i naturen. Det er disse erfaringer som fanges opp som begreper og prinsipper. Det er i denne

fasen eleven kan få en opplevelse av matematikken som noe som henger sammen med naturen og vår livsverden, og at dette er noe konkret og reelt.

2. Begrepene og prinsippene absorberes, og ut fra dette vokser det frem abstrakte fenomener gjennom tenkningen. Gjennom dette arbeidet frigjøres begrepene fra de konkrete bildene og de etableres som egne abstrakte objekter. I denne fasen forsterkes fokuset på tenkningen og hvordan tenkningen må være solid, for at matematikken skal kunne utvikle seg riktig. Det er da mulig å ha fokus på selve tenkningen og gjøre erfaringer med den, gjennom refleksjoner over sin egen tenkning. Denne fasen kan karakteriseres ved at den har fokus på både oppbyggingen av abstrakte fenomener og på den egenaktiviteten som ligger i matematiske aktiviteter. Denne tosidigheten hvor det både er fokus på egenaktiviteten og på det som frambringes kan muligens kobles til det Østergaard (2004; 2011) karakteriserer som det "doble blikk", dette beskrives med følgende ord:

> Det er denne pendlingen mellom to aktiviteter – på den ene siden studiet av fenomenet i dets mest opprinnelige form, og på den annen side refleksjon over de betingelser som muliggjør og begrenser min iakttakelse av fenomenet – som den fenomenologiske orienterte læring prøver å nyttiggjøre seg. (Østergaard 2004, s. 65)

3. Den abstrakte matematiske verden kan være en kilde til mange erfaringer av ulik karakter. For virkelig å få øye på matematikkens abstrakte verden, er det viktig å sette søkelyset på den kvalitet som ligger i disse abstrakte fenomenene. Et eksempel er $\pi$ som alle kjenner ved navn. Vår umiddelbare kjennskap til denne størrelsen står i sterk kontrast til at $\pi$ sin størrelse faktisk ikke kan frambringes, verken ved endelig å plassere den på en tallinje eller konstruere den geometrisk. Dette er informasjon som skal kunne gi hva jeg vil kalle en *kognitiv opplevelse*. Slike rike opplevelser av det abstrakte kan gi begrepene ny fylde. Som jeg har nevnt er det ikke en selvfølge at eleven får slike kognitive erfaringer. Jeg vil ta med to enkle eksempler fra Posamentier (2003) som jeg mener illustrerer hvordan ulike tall gir ulik opplevelse av algoritmen. Figur 11 viser symmetri i alle retninger, dette kan gi en tydelig visuell erfaring. Figur 12 viser hvordan symmetri preger hele algoritmen, og det samme viser figur 13 og figur 14.

$$\begin{aligned}
0 \cdot 9 + 8 &= 8 \\
9 \cdot 9 + 7 &= 88 \\
98 \cdot 9 + 6 &= 888 \\
987 \cdot 9 + 5 &= 8{,}888 \\
9{,}876 \cdot 9 + 4 &= 88{,}888 \\
98{,}765 \cdot 9 + 3 &= 888{,}888 \\
987{,}654 \cdot 9 + 2 &= 8{,}888{,}888 \\
9{,}876{,}543 \cdot 9 + 1 &= 88{,}888{,}888 \\
98{,}765{,}432 \cdot 9 + 0 &= 888{,}888{,}888
\end{aligned}$$

*Figur 10, (Med amerikansk kommabruk) (Posamentier 2003)*

```
7 6 5 4 3 2
9 8 7 6 5 4 3 · 9  =  88. 888.887
8 8 8 8 8 8 8 7
```

*Figur 11, viser utregning av gangestykke i linje 8 i figur 11. Til og med tallene i mente har en helt tydelig symmetri.*

$$\begin{aligned}
1 \cdot 1 &= 1 \\
11 \cdot 11 &= 121 \\
111 \cdot 111 &= 12{,}321 \\
1{,}111 \cdot 1{,}111 &= 1{,}234{,}321 \\
11{,}111 \cdot 11{,}111 &= 123{,}454{,}321 \\
111{,}111 \cdot 111{,}111 &= 12{,}345{,}654{,}321 \\
1{,}111{,}111 \cdot 1{,}111{,}111 &= 1{,}234{,}567{,}654{,}321 \\
11{,}111{,}111 \cdot 11{,}111{,}111 &= 123{,}456{,}787{,}654{,}321 \\
111{,}111{,}111 \cdot 111{,}111{,}111 &= 12{,}345{,}678{,}987{,}654{,}321
\end{aligned}$$

*Figur 12, Multiplikasjon av tall som viser tydelig symmetri. (amerikansk kommabruk)(Posamentier 2003)*

```
1111 · 1111 =  1234321

      1111
     1111
    1111
   1111
-------------
   1234321
```

*Figur 13, viser utregning av 4. linje i overstående bilde. Dette gir et tydelig bilde av algoritmen.*

4. De abstrakte systemer og identiteter knyttes sammen slik at de kan brukes til verktøy for å få ny og utvidet innsikt i livsverdens fenomener. Det skjer en tilpasning av de abstrakte begrepene slik at de kan brukes til å forstå og mestre livsverden. Når verden i større grad er mestret og man besitter en rikere abstrakt kunnskap, vil livsverden kunne være kilde til nye matematiske perspektiver. Jeg vil vise et eksempel som jeg mener kan illustrere hvordan erfaring fra abstrakte fenomener kan gjøre erfaringen av livsverden rikere:

> Diep tar på seg en jobb som hun får 800 kr for. Bruker hun t timer på jobben, er timelønna L(t) kr gitt ved
>
> $$L(t) = \frac{800}{t}$$
>
> a Tegn grafen til L(t) på lommeregneren.
> b Diep synes at timelønna bør ligge i omradet 90-110 kr. Hvor lang tid kan hun da bruke på jobben?
> (Heir 2006, s. 148)

Her ser vi hvordan en rasjonal funksjon kan brukes til å mestre livsverden. Ut fra de tankene jeg har presentert over vil jeg påstå at eleven her har en mulighet til å opparbeide seg rike kognitive erfaringer av rasjonale funksjoner, og at eleven vil kunne ta disse erfaringer med inn i opplevelsen av livsverden. I dette tilfellet vil det kunne bidra til tydeligere å skille mellom nyanser i livsverden. I dette eksempelet vil dette gi seg utslag i at man kan få en mer nyansert erfaring av relasjoner i livsverden, hvor kanskje opplevelsen av kvaliteten til en rasjonal funksjon kan overføres til sammenhenger man erfarer i livsverden.

Ved å gjøre en slik utvidelse av den fenomenologiske læringsmodellen er det mulig å synliggjøre både ulikheter og likheter mellom matematikken og naturfaget, og relasjonen mellom fagene blir klarere. Dette kan være med på å tydeliggjøre matematikkens egenart, i tillegg til å klargjøre prosesser i naturfaget. En slik tydeliggjøring vil kanskje også kunne forhindre at elevens relasjon til de sanselige fenomener svekkes. De fysiske og matematiske fenomener trenger da ikke å være i konflikt med hverandre, men heller utfylle hverandre. Modellen vil også kunne brukes for å tydeliggjøre den rikholdige prosessen som foreligger i det matematiske arbeidet, hvordan elevene kan oppøves til å ”sanse” det abstrakte, og hvordan de gjennom innsikt og forståelse skal kunne lære prosessene i det abstrakte matematiske univers. Dette står i forhold til øving av sansningen som foregår i naturfaget. I fenomenologisk naturfagundervisning er det en vesentlig ferdighet å kunne sanse og erfare fenomenet slik det kommer til uttrykk.

> Jo lengre, jo mer inngående man iakttar fenomener i den omgivende verden, desto rikere synes de å fremstå. Fenomener blir mer nyansert og mer mangfoldige når de gis rom og anledning til å utfolde seg. (Østergaard 2004, s. 65)

Denne evnen til å iaktta, er en ferdighet som øves gjennom *observasjon*, *kommunikasjon*, *refleksjon* og *deltakelse* (Østergaard 2004). Er det mulig på samme måte å øve opp en ferdighet i å “sanse” de abstrakte fenomener, hvor det å “sanse” vil være å få en føling med de kvaliteter som ligger i matematikken? Det vil i så fall være med på å bringe eleven nærmere inn på de matematiske konsepter (Sinclair 2009).

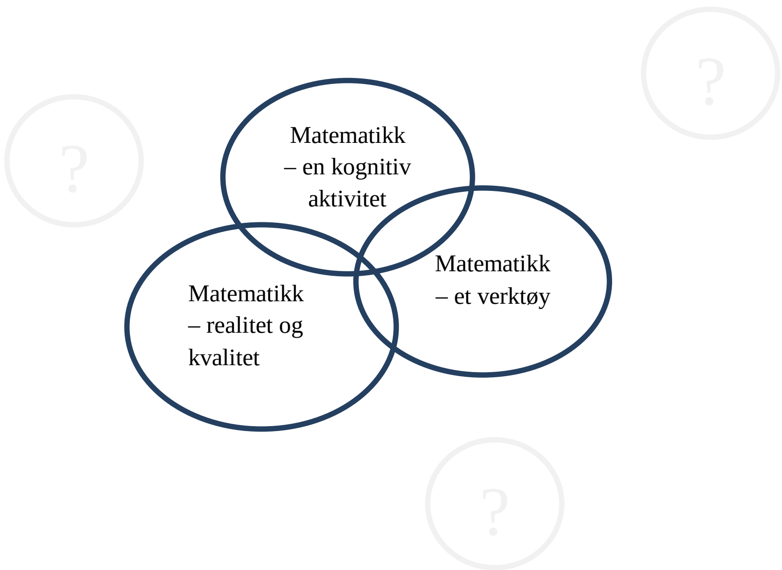
Jeg har her vist et forsøk på å utvide en fenomenologisk læringsmodell. Hensikten med modellen er å gi et perspektiv på hvordan begrep, erfaring og fenomen kan stå i relasjon til hverandre i matematikkundervisningen. Men i virkeligheten er dette prosesser som skjer kontinuerlig i alle faser og nivåer samtidig. Jeg karakteriserer det som at denne modellen illustrerer det spenningsfelt som eleven står i, når eleven lærer matematikk. En slik modell kan gjøre det enklere å orientere undervisningen mot ulike aspekter i matematikken. Noe undervisning vil kunne vektlegge erfaring av naturens rikholdige matematiske uttrykk, mens annen undervisning kan ha fokus på egenaktiviteten i matematikken, tenkningen og problemløsingsprosessene. En tredje form for undervisning vil kunne gi eleven rikholdig egenerfaring av de matematiske fenomeners kvaliteter.

# 6 SAMMENFATNING OG VEIEN VIDERE

## 6.1 Sammenfatning på grunnlag av forskningsspørsmålene

Forskningsspørsmålene som ligger til grunn for denne studien er følgende: Hvordan kan prinsipper fra fenomenologisk naturfagundervisning inspirere matematikkundervisning? Og: Hva kan kjennetegne fenomenologisk matematikkundervisning?

Ut fra det som kom frem i analysen av samtalene, har jeg vektlagt tre aspekter ved matematikken (se figur 15): *Matematikkens realitet og kvalitet* antyder hvordan matematikken kan fremstå som et reelt uttrykk i naturen og hvordan matematikken kan gi et mangfold av erfaringer. *Matematikkens kognitive aktivitet* har satt fokus på hvordan tenkningen er vesentlig både for å verifisere matematikken og for å bedrive den, og at det er vesentlig selv å skape en relasjon til denne tenkningen. *Matematikken som verktøy* viser hvordan matematikken er et viktig redskap i møte mellom mennesket og livsverden og beherskelsen av denne. Disse aspektene har jeg prøvd å sette i relasjon til de prinsipper som ligger bak en fenomenologisk naturfagundervisning.




*Figur 14: De tre aspekter som er blitt vektlagt i denne oppgaven*

### Hvordan kan prinsipper fra fenomenologisk naturfagundervisning inspirere matematikkundervisning?

Det som i hovedsak er blitt fremført og som svarer på dette første forskningsspørsmål kan sammenfattes slik:

- Naturens tilbøyelighet til å utrykke seg gjennom matematikk er mangfoldig.

- Den abstrakte verden kan også være kilde til rike erfaringer. Der hvor naturfaget søker rike erfaringer av naturfenomenet, kan man i matematikken forsøke å dyrke frem opplevelser av de abstrakte fenomener.
- Eleven må utvikle et forhold til sin egen tenkning, både som et fundament for matematikken selv og til tenkningen som noe som står i relasjon til livsverden.
- Som lærer gjelder det å levendegjøre alle disse tre hovedaspektene i figur 15 for eleven, slik at eleven selv kan erfare og gripe matematikkens mangfoldighet.
- Det er kanskje en mulighet for å utvide den fenomenologiske læringsmodellen. Noe som vil kunne tydeliggjøre prosessene i både matematikken og i naturfaget.

Dette er hva denne oppgaven tilfører, ut fra hvordan jeg har latt meg inspirere av perspektiver fra den fenomenologiske naturfagundervisningen i samtale med 5 lærere. Det som kan sies, er at dette er temaer som omfatter store områder av matematikken som undervisningsemne. Spørsmålet er om jeg har greid å fylle disse områdene tilstrekkelig og satt det i en fruktbar relasjon til aspekter fra den fenomenologiske naturfagundervisningen. Det er fremkommet noen områder hvor matematikkundervisningen kan få inspirasjon fra den fenomenologiske naturfagundervisningen. Dette utelukker selvfølgelig ikke at det finnes flere områder både i matematikken og i naturfagundervisningen som burde vært med i drøftelsen i denne oppgaven. Og kanskje undervisningen også i andre fag, kunne bli både inspirert og vitalisert ved å bli betraktet noe mer fenomenologisk og mer virkelighetsnært?

### Hva kan kjennetegne fenomenologisk matematikkundervisning?

I oppgaven er det i hovedsak blitt drøftet hvordan aspekter ved matematikken kan settes i relasjon til den fenomenologiske naturfagundervisningen. Det finnes pr. i dag ikke noen egen «fenomenologisk matematikkundervisning», og det er heller ikke i denne oppgaven blitt drøftet hva som skal definere en fenomenologisk matematikkundervisning. Likevel vil jeg sette opp noen punkter på det jeg mener kjennetegner matematikkundervisning som er «farget» av fenomenologiske prinsipper for læring:

- Lar eleven oppdage matematikken gjennom det som jeg i denne oppgaven har definert som matematiske fenomener.
- Legge til rette for at elevene kan få en erfaring av de forskjellige kvaliteter ved de ulike matematiske objekter og prosesser.
- Ha et mer avbalansert forhold mellom naturfagets fenomener og de matematiske fenomener, hvor disse mer utfyller hverandre som forklaringsmodell.
- Gi eleven erfaring med hvilken rolle tenkningen spiller i utviklingen av matematikken.

Til slutt vil jeg igjen understreke, at jeg med dette arbeidet ikke har kommet frem til noen eksakt definisjon på en «fenomenologisk matematikkundervisning». Å diskutere en fenomenologisk matematikkundervisning, har i oppgaven vært motivert av å ville gi et bidrag til en forbedret matematikkundervisning - en undervisning som kanskje vil gi eleven større opplevelser, og mer glede i matematikkfaget. Slik jeg ser det så vil et slikt arbeid som jeg har prøvd å få til i denne oppgaven bidra til å gi plass til matematikkens kvaliteter og opplevelser inn i matematikken undervisningen. Hvor den utvidete modell gir plass til opplevelsene i matematikkundervisningen.

## 6.2 Veien videre

I arbeidet med de tre aspektene ved matematikken, og hvordan disse står i forhold til en fenomenologisk undervisningsmetode, er det i hovedsak lærerens perspektiver som er lagt til grunn. Det hadde også vært interessant å gjøre en forskningsstudie av hvordan elevenes arbeid, og deres opplevelse i matematikkfaget kunne relateres til det jeg har kommet frem til i denne oppgaven. Å utvide undersøkelsen i den retningen er en mulig fortsettelse i neste omgang.

I forsøket på å besvare mine forskningsspørsmål har det dukket opp flere andre spørsmål, så selv om ikke mine svar skulle bli stående, så blir i alle tilfeller spørsmålene stående:

- Hvordan erfarer vi matematikken og hva er det vi møter?
- Hvilke egenskaper er opphav til opplevelser av matematiske konsepter?
- Hva er det som bærer den prosessen hvor matematikken bygger ut sitt abstrakte univers?
- Går det an å opprettholde livsverdenens fenomener som reelle, samtidig som matematikkens realitet anerkjennes?
- Hvilke likheter og ulikheter finner vi mellom de konkrete fenomener og de abstrakte?
- På hvilken måte bygger eleven sin relasjon til de abstrakte fenomener?

Å skrive denne oppgaven har vært en lang reise - fra mine forsøk på å prøve å forstå den fenomenologiske naturfagundervisningen, til å møte fem læreres refleksjoner rundt matematikk og til slutt til å sette disse perspektiver sammen. Det har tidvis vært en veldig tung prosess, det har sett håpløst ut, og jeg har ergret meg over valget av et slikt "håpløst tema". Men det som har holdt oppe driven i arbeidet, har nettopp vært samtalene med lærerne. Det å ha disse samtalene på lydfil og hele tiden kunne vende tilbake til denne levende settingen, har vært veldig viktig. Å kunne ta del i disse lærernes engasjement, og deres tanker om matematikken, er det som har gitt mest egenlæring i arbeidet, og det er selvfølgelig mye av disse til sammen 10 timer lange samtaler, som ikke er med i denne oppgaven. Om den sammenstilling og konklusjon jeg har lagt frem i oppgaven står sin prøve, vil tiden vise. Men det jeg helt sikkert kommer til å ta med meg videre, er diskusjonen om hvordan elevene kan skape seg et rikt og levende forhold til matematikken. På dette feltet har oppgaven for meg, avdekket mange interessante perspektiver.

Disse aspektene er vel akkurat det som jeg kommer til å beskjeftige meg med videre i mitt arbeid med matematikkundervisning. Når jeg får egne elever og skal praktisere min egen undervisning, vil jeg få rikelig anledning til å prøve dette opp mot virkeligheten.

## LITTERATURLISTE

Adam, J. A. (2003). *Mathematics in nature: modeling patterns in the natural world*. Princeton, N.J.: Princeton University Press. XXII, 360 s., 24 pl. s.

Bakke, B. & Bakke, I. N. (2006). *Grunntall 9: matematikk for ungdomstrinnet*. Drammen: Elektronisk undervisningsforl.

Bengtsson, J. (2001). *Sammanflätningar: Husserls och Merleau-Pontys fenomenologi*. Göteborg: Daidalos. 144 s.

Berthold, V. (2011). Næsehonsstenen. *Tangenten: tidsskrift for matematikklundervisning*, 22 (2/2011): 5.

Budnik, P. (2009). What is Mathematics About. I: Ernest, P., Greer, B. & Sriraman, B. (red.) b. 1 *Critical Issiues in Mathematics education*, s. 283-291. Charlotte, NC: Information Age Publishing, INC.

Dahlin, B. (2001). The Primacy of Cognition – or of Perception? A Phenomenological Critique of the Theoretical Bases of Science Education. *Science & Education*, 10 (5): 453-475.

Dalen, M. (2011). *Intervju som forskningsmetode*. Oslo: Universitetsforl. 121 s.

Devlin, K. (2007). *The Myth That Will Not Go Away*. I: Devlin, K. (red.). Mathematical Association of America. Tilgjengelig fra: http://www.maa.org/devlin/devlin_05_07.html (lest 08.11).

Eide, M. (2011). *Spiraler og Fibonacci tall*. Upublisert manuskript.

Einstein, A. (1921). *Geometry and Experience*. Berlin: Julius Springer.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press. XIV, 329 s.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel. x, 595 s.

Hals, S. (2010). *Notater fra hjelplærer i emnet Brukerkurs i matematikk ved UMB høst 2010*. Upublisert manuskript.

Heir, O. (2006). *Matematikk 1T*. [Oslo]: Aschehoug. 312 s.

Hugo, A. (2002). Når faget vokser ut av fenomenene, naturen som historieforteller.

Jardin, D. W. (1994). On the Ecologies of Mathematical Language and the Rhyhtmes of the Earth. I: Ernest, P. (red.) b. 1 *Mathematics, Education and Philosophy: And Internatinal Perspektives*, s. 109-124. London - Washington, D.C.: The Falmer Press.

Jewitt, C. (2006). Towards a mulitmodal analysis. I: *Technology, Literacy, Learning: A Multimodal Approach*, s. 24: Routledge.

Johannessen, A., Tufte, P. A. & Kristoffersen, L. (2006). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode*. Oslo: Abstrakt forlag. 382 s.

Kirfel, C. (2010). Korden. *Tangenten: tidsskrift for matematikklundervisning*, 21 (1).

Kjærnsli, M. & Roe, A. (2010). *På rett spor: norske elevers kompetanse i lesing, matematikk og naturfag i PISA 2009*. Oslo: Universitetsforl. 274 s.

Kunnskapsforlaget. (2011). *Ordnett.no - Kunnskapforlagets blå språk- og orbøktajenste*: Kunskapsforlaget. Tilgjengelig fra: http://ordnett.no/ordbok.html (lest 24. mars).

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju*. Oslo: Gyldendal akademisk. 344 s.

Mack, A. (2006). A Deweyan Perspective on Aesthetic in Mathematics Education. 24 (lest 1. april 2011).

Markowsky, G. (1992). Misconceptions about the Golden Ratio. *The College Mathematics Journal*, 23 (1): 2-19.

Mogens, N. (2006). *The concept and role of theory in mathematics education*. Roskilde: IMFUFA, Roskilde University, Danmark. 13 s.

Nordal, S. (2006). *Fysikkens levende sammenhenger: praksisteorier i kontekstualisert fysikkundervisning*. Ås: Universitet for Miljø og Biovitenskap. 145 s.

Petersen, V. & Tvete, K. (2010). *I tallenes verden*. [Bergen]: Caspar. VIII, 141 s.

Posamentier, A. S. (2003). *Math wonders: to inspire teachers and students*. Alexandria, Va.: Association for Supervision and Curriculum Development. XVI, 277 s.

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode, En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier*, b. 2. Oslo: Universitetsforlaget AS. 242 s.

Ranestad, K. (2004). *Estetikk i matematikk*. Oslo: Universitetet i Oslo, Matematisk Institutt.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (1): 1-36.

Sinclair, N. (2009). Aesthetics as a liberating force in mathematics education? *ZDM*, 41 (1): 45-60.

Sion, A. (2003). *Phenomenology: basing knowledge on appearance*. Geneve: Avi Sion. Tilgjengelig fra: http://books.google.no/books?id=pFlxAH1Iq-EC&lpg=PP1&dq=Avi%20Sion&hl=no&pg=PA7#v=onepage&q=Avi%20Sion&f=false (lest 19.11.11).

Sokolowski, R. (2000). *Introduction to phenomenology*. Cambridge: Cambridge University Press. IX, 238 s.

Sriraman, B. & English, L. (2010). Surveying Theories and Philosophies of Mathematics Education. I: Sriraman, B. & English, L. (red.) Advances in Mathematics Education, *Theories of Mathematics Education*, s. 7-32: Springer Berlin Heidelberg.

Tjora, A. H. (2010). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis*. Oslo: Gyldendal akademisk. 218 s.

Tjora, H. & Florhaug, G. (2010). *Mattemagi: over 100 morsomme, magiske, praktiske og nyttige matematikkøvelser for trent og utrent*. Oslo: Kagge. 127 s.

Treffers, A. (1993). Wiskobas and Freudenthal realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,* 25 (1): 89-108.

Ulin, B. (1988). *Att finna ett spår: motiv och metoder i matematikundervisningen - erfarenheter ur Waldorfpedagogiken*. Stockholm: Utbildningsförlaget. 346 s.

Ulin, B. (2004). Vad innebär undervisning i verkligheten? *Nämnaren: tidskrift för matematikundervisning*, 1 (2004): 53-54.

Ulin, B. (2006). Vackert! sa Arkimedes. *Nämnaren: tidskrift för matematikundervisning*, 1 (2006).

Ulin, B. (2007). *Matematisk design i naturen*. Järna: Telleby bokförlag. 141 s.

Ulin, B. (2008). *Fibonacci-talen och gyllene snittet*. Göteborg: NCM, Nationellt Centrum för Matematikutbildning, Göteborgsuniversitet. 67 s.

Wagenschein, M. (2000). The Law of Free FAll as an "Exemplary Theme" for the Mathematicizability of Certain Natural Processes. I: Westbury, I., Hopmann, S. & Riquarts, K. (red.) *Teaching as a reflective practice: the German didaktik tradition*, s. 10. Mahwah, N.J.: L. Erlbaum Associates.

Wikipedia. (2011). *Archimedes*: Wikipedia: The free Encyclobedia. Tilgjengelig fra: http://en.wikipedia.org/wiki/Archimedes (lest 6. Mai 2011).

Yin, R. K. (2009). *Case Study Research*. Design and Methods, 5.

Østergaard, E. (2004). Fenomenologi som læringsform. I: Østergaard, E. & Strangstadstuen, S. (red.) *Fenomen og virksomhetsbasert undervisning: en eksempelsamling*, s. 56-65. Ås: SLL, IMT, NLH (UMB).

Østergaard, E., Hugo, A. & Dahlin, B. (2007). From phenomenon to concept: designing phenomenological science education. *V. Lamanauskas & G. Vaidogas (eds): Proceedings from the 6th IOESTE Symposium for Central and Eastern Europe (pp 123-129).*

Østergaard, E., Dahlin, B. & Hugo, A. (2008). Doing phenomenology in science education: a research review. *Studies in Science Education*, 44 (2): 93 - 121.

Østergaard, E. (2010). *Forskningsprosessen og forskningsdesign*: SLL, IMT, UMB. Upublisert manuskript.

Østergaard, E. (2011). Naturfaglærerens doble blikk. Fenomenologiske perspektiver på elevers naturkunnskap. *Norsk pedagogisk tidsskrift* (4): 314-326.

Østtvei, K. (2011, 13.10.2011). Lavere status for lærere. *Aftenposten Morgen*.

# VEDLEGG

Nr 1

Til Dagligleder Ås, 16. mars 2011

Jeg er lektorstudent ved Universitet for Miljø- og Biovitenskap i Ås. I mitt masterarbeid skal jeg studere hvordan matematikkundervisning kan relateres til fenomenologisk undervisning. Fenomenologisk undervisning, også kalt fenomenbasert undervisning, er en didaktisk metode som tradisjonelt sett er tilknyttet naturfagene. Et vesentlig punkt ved fenomenologien er at kunnskapen ikke kan tilegnes rent kognitivt, men at også de rike erfaringer og opplevelser av fenomenet bør danne grunnlag for undervisningen. Dette er ikke noe som er nytt eller fremmed i dagens undervisning hvor varierte arbeids- og undervisningsmetoder er sentrale begreper. Matematikk er et fag som i karakter er forskjellig fra naturfaget, og jeg ønsker da å se på hva som skjer når en overfører prinsipper fra fenomenologisk undervisning til matematikkundervisningen.

I denne forbindelse ønsker jeg å observere matematikkundervisning hvor det legges vekt på elementer som: opplevelser, utforskende arbeid, bruk av konkreter og lignende. De observasjoner jeg gjør vil bli analysert og drøftet opp mot min problemstilling ”Matematikkundervisningens relasjon til fenomenologisk undervisning”.

Jeg vil med dette spør om tillatelse til å filme klassens arbeid i 1-2 undervisningsøkter og til å innhente samtykke fra elever over 15 år og fra foresatte til elever under 15 år. Jeg har allerede vært i kontakt med X lærer i 1. videregående og han har samtykket til at jeg kommer og filmer i klasserommet.

Jeg vil ikke publisere eller vise noe som kan identifisere noen av deltagerne. Datamaterialet vil bli oppbevart forsvarlig slik at uvedkommende ikke får tilgang til det. Dette har jeg forpliktet meg til ved at prosjektet er innrapportert til Norsk Samfunnsvitenskapelige datatjeneste (http://www.nsd.no). De som har tilgang til materialet er kun jeg og mine veiledere. Når masteroppgaven er godkjent vil videomaterialet destrueres, dette vil senest skje februar 2012. Det er helt frivillig å delta og alle deltagere kan til enhver tid trekke seg fra undersøkelsen uten å oppgi noen grunn.

Dersom dere har spørsmål om dette kan dere ta kontakt med mine veiledere førsteamanuensis Edvin Østergaard, IMT/UMB, edvin.ostergaard@umb.no eller universitetslektor Margrethe Naalsund, IMT/UMB, margrethe.naalsund@umb.no

Hilsen fra Sigurd Hals
Lektorstudent ved UMB
tlf: 41354409
sigurd@cassiopeia.no