ELEVERS DISKUSJON OM VARIABLER
Kan deres argumenter utfordre forståelsen?

STUDENTS' DISCUSSION OF VARIABLES
Can their arguments challenge their understanding?

Ellen Kristine Solbrekke Hansen

UNIVERSITETET FOR MILJØ- OG BIOVITENSKAP
Institutt for matematiske realfag og teknologi (IMT)
Masteroppgave 30 stp. Våren 2011

Forord

August 2006 begynte jeg på lektorutdanningen på UMB, Universitetet for Miljø- og Biovitenskap i Ås. I løpet av fem år har jeg studert matematikk og biologi, samt praktisk pedagogisk utdanning (PPU). Utdannelsen har gitt meg kompetanse til å undervise matematikk, biologi og naturfag på den videregående skole og i ungdomsskolen.

Forberedelsene til masteroppgaven i matematikkdidaktikk begynte høsten 2010. Gjennom en pilotoppgave den høsten fant jeg mitt interessefelt og fikk erfaring med å skrive en større oppgave. Årene på UMB har vært særdeles lærerike og spennende, men ikke desto mindre krevende. Denne masteroppgaven oppleves som en slutt, men i like stor grad en begynnelse. Slutten på fem spennende år og en begynnelse på arbeidslivet hvor kunnskapen skal benyttes og videreutvikles. Dessuten vil jeg karakterisere denne studien som en fantastisk reise. Både fordi jeg har fått reflektere og fordype meg i et spennende felt, men også fordi jeg har fått tilegne meg ny kunnskap som kommer til nytte i møte med elever. Derfor vil jeg takke alle ved lektorutdanningen ved UMB for fem spennende år.

Margrethe Naalsund har vært min veileder på masteroppgaven. Jeg vil takke henne for gode innspill og konstruktive tilbakemeldinger. Hennes genuine interesse for elever, matematikk og algebra har bidratt til innholdsrike samtaler og diskusjoner. Margrethe har således vært en svært positiv og inspirerende person, samt støtte gjennom mitt arbeid med masteroppgaven.

Videre vil jeg takke min enestående ektemann, Thomas Solbrekke Hansen, som har oppmuntret og støttet meg gjennom hele utdannelsen og spesielt ved hver eksamensperiode. Han har trodd på meg, da jeg selv ikke trodde. Til slutt vil jeg takke min familie og svigerfamilie som alltid har heiet på meg, og oppmuntret meg gjennom hele utdannelsen.

Fredrikstad, mai 2011
Ellen Kristine Solbrekke Hansen

Sammendrag

Nøkkelord i masteroppgaven er diskusjon, argumentasjon, forståelse og variabler. Studien dreier seg om elevers relasjonsforståelse av variabler, og hvorvidt argumentasjon kan bidra til å utfordre deres forståelse. Forskningsspørsmålet er ”*Hvordan kan argumentasjon i diskusjon bidra til å utfordre elevers relasjonsforståelse av variabler?*”.

Diskusjon legger til rette for at elever kan dele sine matematiske tanker og ideer. Således gir det et bilde av deres forståelse. Denne studien baserer seg på forståelsestypene resonnementsforståelse og begrepsforståelse, som anses som viktige aspekter ved elevers relasjonsforståelse. Et problemområde i matematikk for mange elever er algebra. Spesielt synes elever at variabler er vanskelig. Elever viser ulik forståelse på ulikt nivå ved bruk av bokstaver i matematikk. Forståelsen henger sammen med deres utvikling, som har likhetstrekk med den historiske utviklingen til algebra. Å bruke bokstavene som objekter, det vil si at bokstaven *a* kan stå for *ape* og bokstaven *b* for *banan*, er en av flere misoppfatninger av variabler. Ved å la elevene diskutere oppgaver, som gir en passende utfordring, kan deres misoppfatninger og relasjonsforståelse av variabler komme til uttrykk. Gjennom diskusjon kan dessuten matematiske ideer og begreper bli personlige og oppleves som meningsfulle for elevene. Det kan styrke deres oppfatning og utvikle deres relasjonsforståelse.

I denne masteroppgaven ble fire elever fra niende klasse observert ved hjelp av videokamera. Disse elevene hadde nylig stiftet bekjentskap med algebra. Sammensetningen av gruppen ble gjort på bakgrunn av en skriftlig matematikktest med diagnostiske oppgaver. Testen ble analysert på bakgrunn av koder som avdekket misoppfatninger. Toulmins modellen ble benyttet som analytisk verktøy for å analysere elevenes argumenter fra videoobservasjonen. Resultatene ble fremstilt ved korte transkripsjonsutdrag med påfølgende analyse. Den komplekse situasjonen og elevenes argumenter skapte et nyansert bilde av elevenes relasjonsforståelse.

Diskusjonen la til rette for at elevene kunne dele sine synspunkter og meninger. Ved at elevene satte ord på sine ideer knyttet til et variabelproblem, ble elevenes matematiske tanker gjort offentlig. Situasjonen ga således innsyn i elevenes misoppfatninger og relasjonsforståelse av variabler. Av de fire elevene i gruppen viste to av elevene trygghet i

situasjonen og delte engasjert sine tanker. En elev så ut til å finne situasjonen ubehagelig, mens den siste eleven ikke i tilstrekkelig grad ble oppmuntret til å dele sine meninger. Dette skyldtes lærerens, altså min, uerfarenhet på området. Allikevel viste én av elevene eierskap i å lære matematikk, som påpekes som et viktig aspekt ved produktiv diskusjon. Litteraturen peker på diskusjon, arbeidsoppgaver, engasjement og motivasjon som viktige faktorer for å utfordre elever. Denne studien forklarer en utfordring som en situasjon eller faktor som motiverer elevene til å si sin mening. Gjennom elevenes diskusjon ble de utfordrende faktorene, fra tidligere vitenskaplige arbeider, bekreftet. En av elevene demonstrerte engasjement i å avgjøre hvilken påstand som ga mening i situasjonen. Det bidro til å utfordre hans relasjonsforståelse. Elevene hadde ulik oppfatning av bokstavene i oppgavene og uttrykte det ved ulike påstander i argumentasjonen. Ved motstridende påstander ble spesielt en av de fire elevene utfordret. Utfordringen viste hvordan eleven resonnerte mellom situasjonen og betydningen av bokstaven. Elevens resonnementsforståelse ble utfordret, samt hans begrepsforståelse. Da han viste begrepsforståelse av variabler på et høyere nivå, ga sammenhengen og variabelbegrepet i større grad mening for ham. Den samme eleven forsøkte å forklare hvordan en medelev tenkte. Det utfordret ham til å ta oppgjør med sin egen påstand knyttet til oppgaven. Således utfordret det ham til å reflektere og resonnere. Følgelig viste det seg at å forsvare en påstand utfordret elevens resonnementsforståelse av variabler.

Flere av elevene uttrykte entusiasme over å diskutere variabler, hvilket gir et godt utgangspunkt for å lære og tilegne seg dypere forståelse for matematiske begreper. Gjennom diskusjonen avdekket elevenes argumenter deres relasjonsforståelse av variabler. Dessuten bidro argumentene til å utfordre egen og medelevenes forståelse av variabler. Ved at elever diskuterer variabler, kan de få positive erfaringer med variabler og matematikk. Ettersom andre områder i matematikk bygger på variabelbegrepet, er det viktig å utvikle god begrepsforståelse. Ved å la elevene representere sine ideer knyttet til variabler, kan det føre til at variabelbegrepet gir mening for dem. Således kan også andre områder i matematikk gi mening for dem.

Abstract

Discussion, argumentation, understanding and variables are key words in the master's thesis. The focus of the study is students' relational understanding of variables, and in which ways argumentation can challenge their understanding. The research question is "*How can argumentation in discussion contribute to challenge students' relational understanding of variables?"*

Discussion arranges for students to share their mathematical thoughts and ideas. Thus it gives a picture of their understanding. This study is based on two components of understanding, called adaptive reasoning and conceptual understanding, which are interpreted to be important aspects of students' relational understanding. Algebra is a problem area for many students. Students find variables difficult and variables seem to be a particularly difficult notion to grasp. Students understand letters in mathematics in different ways and on different levels. The understanding is connected to their development, which has similarities to the historical development of algebra. To use letters as objects, for instance that the letter *a* means *apple* and the letter *b* means *banana*, is one of several misconceptions tied to variables. When students discuss tasks given an appropriate challenge, aspects of their relational understanding of variables and misconceptions can be studied. Through discussion mathematical ideas and conceptions can become personal, experienced as meaningful and strengthen students' thought and develop their relational understanding.

In this masters' thesis four students from the ninth grade, who recently got to know algebra in school, were observed with a video camera. The group selection was based on results from a written test containing diagnostic tasks. These tasks were given specific codes emphasizing various misconceptions. Toulmin's model was used as an analytical tool analyzing the students' arguments from the video observation. The results were represented by short transcription extracts with following analysis. A nuanced picture of the students' relational understanding of variables was created in the complex situation and expressed through their argumentation.

The discussion made it possible for students' to share their points of view and opinions. When students expressed their ideas concerning a variable problem, their thoughts were made

public. The situation gave insights to the students' misconceptions and relational understanding of variables. Two of the four students in the group showed confidence in the situation and shared their thoughts. The third student was seemingly uncomfortable in the situation, while the fourth student was not sufficiently encouraged to share his opinions. That was because of the teachers, in this case my, inexperience in the area. Either way, one of the students showed ownership in learning mathematics, as pointed out as an important aspect in productive discussion. The literature points at discussion, tasks, commitment and motivation as important aspects to challenge students. A challenge, in this study, is considered a situation or an aspect that motivates students to express their opinions. This study confirms findings from earlier studies. One of the students demonstrated commitment in making a decision on which of the claims that made sense in the situation, which challenged his relational understanding. The students had different opinions of the letter from the tasks, which they expressed by different claims in the argumentation. The conflicting claims challenged especially one of the students. The challenge showed the students' reasoning about the situation and his meaning of the letter. The student' adaptive reasoning was challenged, and so was his conceptual understanding. When he showed conceptual understanding of variables on a higher level, the context and the concept of the variable, made more sense to him. The same student tried to explain how a co-student was thinking, which challenged him to do something about his own claim concerning the task, which challenged him to reflect and reason. Thus a students adaptive reasoning was challenged by defending a claim.

Several of the students expressed enthusiasm discussing variables, which is an important basis for learning and to adapt a deeper understanding of mathematical concepts. The students' relational understanding of variables was revealed through discussion. In addition, the arguments challenged their own and co-students understanding of variables. When students discuss variables, they can receive a positive experience with variables and mathematics. It is important to develop good conceptual understanding, because other areas in mathematics are built upon the concept of variables. By letting students represent their ideas of the variable, the result might be that variables make sense to them. Thus other areas in mathematics will probably make sense.

Innholdsfortegnelse

Innledning

"Discussion allow students to test ideas, to hear and incorporate the ideas of others, to consolidate their thinking by putting their ideas into words, and hence, to build a deeper understanding of key concepts" (McCrone 2005 s. 1). Dette sitatet beskriver godt min personlige opplevelse med matematikk. Gjennom å diskutere matematikkoppgaver med medstudenter har jeg tilegnet meg dypere forståelse for matematiske begreper. Denne prosessen skjedde i løpet av min tid på universitetet. Tidligere hadde mye av min forståelse vært instrumentell. Det vil si at mye av det jeg hadde lært var basert på pugging. Først da jeg begynte å sette ord på noe jeg ikke forstod og diskuterte problemet med noen andre, opplevde jeg at begreper og sammenhenger ble satt i system. Diskusjon er følgelig et tema som jeg er personlig interessert i, og som jeg ønsker at elever skal få erfaring med. Dessuten hevder litteraturen at fordelene er mange ved å diskutere, argumentere og resonnere i matematikk (f.eks Maher 2005; McCrone 2005; Weber, Maher, Powell & Lee 2008).

En av flere inspirasjonskilder i litteraturen har blant annet vært Weber et al. (2008). Artikkelen baseres på en studie som gikk over tre år; fra elevene gikk i sjette klasse til de gikk i åttende klasse. Elevene møtte en forskergruppe etter skoletid, og noen deltok i tillegg på sommerkurs. Gjennom årene var det flere hendelser hvor diskusjon ledet til læring i matematikk. Weber et al. (2008) hevder at de sosiale og miljømessige betingelsene var viktige faktorer for produktive diskusjoner. Elevene ble observert ved hjelp av video. Dette ga meg inspirasjon for gjøre en lignende studie høsten 2010, dog i liten skala. I løpet av høsten 2010 gjennomførte jeg en pilotstudie, som forberedelse til denne masteroppgaven. Forskningstemaet for pilotstudien var elevers diskusjon i matematikk, hvorpå algebra ble diskutert blant elevene. Forskningsmetoden var observasjon ved hjelp av videokamera. Det viste seg å gi et nyansert bilde av elevenes diskusjon. Allikevel var gruppesammensetningen ikke helt optimal. Således ga pilotstudien føringer for prosessen med å velge forskningsmetode i denne studien. Kapittel **3 Forskningsmetode** beskriver hvordan en skriftlig matematikktest benyttes for å avdekke elevenes misoppfatninger og forståelse av variabler. Dessuten beskrives bakgrunnen for sammensetningen til en diskusjonsgruppe.

Algebra er *"…a tool for manipulating symbols and for solving problems…"* (Kieran 2007 s. 707). Algebra benyttes altså som et verktøy i matematikk og kan bidra til å forenkle lange uttrykk. Brekke, Grønmo & Rosén (2000) sier at norske elever møter algebra i grunnskolen. Der lærer elevene å se regelmessigheter i sitt arbeid med tall. Det vil si at tallregningen blir generalisert. Fra praksisopphold på skoler og fra pilotstudien møtte jeg elever som sa "algebra er vanskelig". Algebra blir betraktet som et problemområde for mange elever (Booth 1984; Booth 1988; Brekke et al. 2000). Hva er det da elevene opplever som vanskelig med algebra? Nathan og Koedinger (2000) undersøkte hvor godt læreren kjente elevene (bl.a. sitert av Kieran 2007 s. 1). I undersøkelsen ble det stilt flere spørsmål knyttet til utviklingen av et algebraisk resonnement. Både lærere og elever skulle rangere matematiske problemer etter vanskelighetsgrad. Lærerne trodde at elevene syntes at tekstoppgaver var vanskeligst, mens elevene syntes at bokstavoppgaver var vanskeligst.

På ungdomsskolen møter elevene bokstavregning og likninger. I følge veiledningen til lærerplanen, foreslår de at elever etter åttende trinn bør kunne *"sette opp likninger ut i fra en praktisk situasjon, løse dem, tolke løsningen og sette prøve"* (skolenettet.no/veiledninger). I TIMMS 2007 rapporten viser resultatene at norske elever i åttende klasse presterer lavere enn referanselandene når det gjelder formell algebra (Grønmo & Onstad 2009). Spesielt har de problemer med å mestre bokstavuttrykk og variabler (Grønmo, Onstad & Pedersen 2010). Dette kommer også til uttrykk i skolenettets veiledning til læreplanen: *"Elever på 8.- 10. årstrinn sliter ofte med å forstå symbolbruk, faste og variable størrelser"* (skolenettet.no/veiledninger). Ettersom norske elever har problemer med å forstå variabler, synes jeg det er interessant å møte elever som nylig stiftet bekjentskap med begreper som algebra, bokstavregning og spesielt variabler. Og i den kategorien havner elever på ungdomsskolen. I åttende klasse har man lagt grunnlag for hva algebra er, og i niende klasse skal man utvikle det videre. Derfor er det interessant å undersøke hvordan elever i niende trinn på ungdomsskolen snakker om variabler og deres forståelse av variabler. Ved å diskutere matematikk kan elever sette ord på sine matematiske ideer, som kan bidra til økt refleksjon. Dermed kan matematiske begreper i større grad gi mening for én selv. Kapittel **2 Diskusjon i matematikk** belyser fordelene ved å diskutere matematikk, samt læreren og elevens rolle i situasjonen.

Å forstå variabler er helt essensielt for å forstå matematikk. En variabel er et symbol eller en bokstav som representerer en rekke tall på en og samme tid. Har man problemer med å forstå variabler på en slik måte, hevder Gray, Loud & Sokolowski (2009) at man får problemer med å forstå matematikk på et høyere nivå, som på universitetet. I løpet av de siste tretti årene har det blitt gjort viktig forskning knyttet til elevers forståelse av variabler. Hodgen, Küchemann, Brown & Coe (2009) har tatt utgangspunkt i flere store, nasjonale undersøkelser i England og sammenlignet tidligere CSMS studier (Concepts in Secondary Mathematics and Science study). Fra dette materialet og sitt eget har de analysert endringen i elevers forståelse over tid. Kun deler av resultatene er publisert. Et av områdene i forskningen gjelder forståelse av variabler. Om dette sier de foreløpige resultatene at elevenes karakterer har økt, men testene viser at elevenes forståelse ikke har endret seg. Hodgen et al. (2009) mener det henger sammen med at læreren har "undervist til prøven". "*Every important mathematical idea can be understood at many levels and in many ways*" (Kilpatrick, Swafford & Findell 2001 s. 135). Kilpatrick et al. (2001) henviser til måter å forstå matematiske ideer eller begreper. I denne studien er fokuset for forståelse rettet mot relasjonsforståelse, som innebærer å forstå et begrep på et dypere plan (Skemp 1976). Relasjonsforståelse for variabelbegrepet er i ungdomsskolen en sjelden, men en viktig vare (Asquith, Stephens, Knuth & Alibali 2007). Kapittel **1 Variabler** beskriver blant annet hvordan elever betrakter variabelbegrepet og deres misoppfatninger på området.

Som innledningssitatet sa, kan elevene bygge en dypere forståelse av nøkkelbegreper gjennom diskusjon (McCrone 2005). En velfungerende diskusjon kan oppfordre elevene til å dele sine meninger. Det gjøres gjennom argumentasjon. Et argument kan struktureres ved en tredeling etter Toulmins modellen; påstand, data og begrunnelse (1969, referert til i Weber et al. 2008).Ved at elevene får oppgaver som legger til rette for å diskutere variabler, vil det være mulig å kunne tilegne seg en dypere forståelse av variabler. I denne studien er fokuset på elevenes argumenter i diskusjonen, og hvilke muligheter de skaper for å forstå nøkkelbegrepet variabler. Disse mulighetene kalles utfordringer. En utfordring er en situasjon eller en faktor i argumentasjonen, som bidrar til at eleven setter ord på sin mening. Hensikten var å kartlegge faktorer i elevenes argumenter som utfordret sin egen eller andres forståelse av variabler. Blant annet så kan arbeidsoppgaver utfordre elever til å utforske matematikk (Fuglestad 2003), som for eksempel oppgaver som utfordrer elevers misoppfatninger av variabler.

Ut i fra interessen og viktigheten av å forstå variabler har følgende forskningsspørsmål blitt utarbeidet: ***Hvordan kan argumentasjon i diskusjon bidra til å utfordre elevers relasjonsforståelse av variabler?***

De to første kapitlene omhandler studiens teorigrunnlag for å belyse forskningsspørsmålet. **Kapittel 1 Variabler** beskriver variabelbegrepet og elevers forståelse. Der utdypes hva som legges i variabelbegrepet, forståelse, å utfordre forståelsen og misoppfatninger. **Kapittel 2 Diskusjon i matematikk** belyser hvordan elevers forståelse kommer til uttrykk ved talen. Viktige begreper, som blant annet thinking-as-communicating, forklares. Forskningsmetoden, som benyttes i denne studien, tydeliggjøres i **kapittel 3 Forskningsmetode**. Forskningsspørsmålet blir således knyttet til metodene; en skriftlig matematikktest og observasjon ved videoopptak. Matematikktesten gir et bilde av elevenes forståelse av variabler og deres misoppfatninger. Testen blir analysert på bakgrunn av koder som avdekker misoppfatninger. Videoobservasjonen gir et nyansert bilde av elevenes argumentasjon knyttet til variabler. Ved analyseverktøy blir elevenes argumenter analysert. Resultatene fra testen beskrives i **kapittel 4 Resultater**. Til slutt blir de empiriske data tolket på bakgrunn av studiens teori med hovedfokus på forskningsspørsmålet i **kapittel 5 Diskusjon**. Avslutningsvis samles trådene og forskningsspørsmålet besvares i **kapittel 6 Konklusjon og refleksjon**.

Kapittel 1 Variabler

I møte med algebra er det mange nye begrepsmessige utfordringer. Fokuset i denne studien er begrepet variabler. Om **variabelbegrepet** sier Brekke et al. (2000)

> *Variabelbegrepet inneholder to ulike aspekter. Det første aspektet er oppfatningen om at noe varierer – i motsetning til å være konstant (...). Det andre aspektet er måten en bruker bokstaver på til å representere generaliserte tall i matematikk* (s. 9).

Å gå fra tall og regneoperasjoner til tanken om å benytte seg av bokstaver og symboler for generalisert tallregning kan være utfordrende. Elever som har et fleksibelt syn på et begrep forstår den strukturelle og operasjonelle sidene ved begrepet (utdypes i avsnitt **1.2 Forståelse**). En elev som besitter denne egenskapen kaller Tall (1993) for en "proceptual thinker". Det vil si at eleven skjønner at begrepet kan representere en potensiell operasjon, men også et objekt som kan manipuleres mentalt. Disse elevene vil ettersigende mestre algebra svært godt. For å komme til stadiet hvor man forstår variabler, slik som Tall (1993) beskriver, må man beherske flere forståelsestyper. Det være seg blant annet gode regneferdigheter og å forstå hvordan og hvorfor man utfører bestemte handlinger knyttet til et problem (underavsnitt **1.2.1 Forståelsestyper**). I avsnitt **1.1 Et historisk perspektiv** settes elevenes forståelse i sammenheng med den historiske utviklingen av algebra, og overgangen fra aritmetikk til algebra. Avsnitt **1.2 Forståelse** utdyper hvordan litteraturen kategoriserer forståelse. Ut i fra litteraturen har denne studien tatt for seg bestemte begrep for forståelse. Disse beskrives og settes i sammenheng med forskningsspørsmålet. Dessuten beskrives seks måter for hvordan elevene tolker bokstaver knyttet til nivå av forståelse. I det påfølgende avsnittet, **1.3 Misoppfatninger omkring variabler**, beskrives elevers misoppfatninger med eksempler og hva misoppfatningene skyldes.

1.1 Et historisk perspektiv

For å undersøke elevers forståelse av variabler er det av interesse å se det i et historisk perspektiv. Det hevdes at elevers forståelse for algebra gjenspeiles i algebraens utvikling (f.eks Brekke et al. 2000; Kieran 1992; Mason, Graham & Johnson-Wilder 2005). I dette avsnittet utdypes begrepene aritmetikk og algebra, og overgangen fra aritmetikk til algebra.

Ofte forenkles begrepene algebra og aritmetikk, ved å si at algebra er generalisert aritmetikk og aritmetikk er tallregning (f.eks Carpenter, Franke & Levi 2003; Mason et al. 2005). Selv om det er forskjeller mellom begrepene aritmetikk og algebra, så er ikke algebra adskilt fra aritmetikk (Booth 1988). Det blir også påpekt at algebra er et komplekst begrep, fordi algebra avhenger av sammenhengen det knyttes til, slik som Usiskin (1988) påpeker at algebra og skolealgebra har to ulike betydninger på grunn av sammenhengen. Algebra knyttes til universitetsnivå, mens skolealgebra er grunnskolens algebra. Dette er forklaringen på skolealgebra:

> *...school algebra has to do with the understanding of "letters" (today we usually call them variables) and their operations, and we consider students to be studying algebra when they first encounter variables* (Usiskin 1988 s. 7).

Selv om man skulle benytte seg av uttrykket generalisert aritmetikk for algebra, er det en fordel å vite at uttrykket er mer komplekst enn det høres ut som. Slik som begrepet variabel også er et komplekst begrep med flere sider. Elever kan oppleve begrepet som vanskelig, og deres forståelse av variabler beskrives i underavsnitt **1.2.4 Bruken av variabler**.

Som sagt er det likheter ved elevens forståelse for algebra, som ved algebraens utvikling.
De tre stegene i utviklingen av algebra er følgende: (Brekke et al. 2000; Kieran 1992)

- Retorisk algebra – bruk av vanlig språk.
- Synkopert algebra – bruk av bokstaver for ukjente størrelser.
- Symbolsk algebra – uttrykke generelle løsninger og som et verktøy for å bevise tallmessige sammenhenger. "*Først på dette stadiet ble det mulig å angi ukjente og variable størrelser...*" (Brekke et al. 2000 s. 6)

Disse stadiene går således elevene gjennom for å forstå algebra og variabelbegrepet. Overgangen fra aritmetikk til algebra henger sammen med overgangen fra instrumentell forståelse til relasjonsforståelse (bl.a. Brekke et al. 2000; Kieran 1992; Warren 2003). Det vil si at i første omgang forstår man hvordan man skal regne. For deretter å gjennomgå en prosess hvor man forstår både hvordan problemet bør løses og hvorfor metoden fungerte på det spesifikke problemet. Følgelig utelukker ikke overgangen til relasjonsforståelse den instrumentelle forståelsen. Dette utdypes i neste avsnitt, **1.2 Forståelse**. For at elevene skal kunne utvikle seg i en slik retning må flere faktorer falle på plass.
Litteraturen nevner: (Booth 1984; Brekke et al. 2000; Kieran 1992; Molina, Ambrose & Castro 2004; Warren 2003)

- Elevene må ha god forståelse og erfaring med tallregning (aritmetikk)
- Kunne tenke aritmetisk før man tenker algebraisk
- Bruke dagligdagse ord på problemet før man bruker symboler

Dette er altså viktige punkter for å forstå algebra, som har et fokus på å utlede sammenhenger mellom prosedyrer og relasjoner. Hvorpå dette generaliseres og skrives på en forenklet form (Booth 1988).

Hvorfor er det viktig å forstå algebra? Carpenter et al. (2003) hevder at for mange elever er algebra en hindring for å studere og ta høyere utdannelse. Ved å utvikle matematisk tenkning på lavere trinn kan det lede elevene til å lære matematikk med forståelse, slik som relasjonsforståelse. Dermed blir algebra veien til flere valgmuligheter, og ikke noe som blokkerer veien.

> *Algebra remains a vehicle for solving certain problems but it is more than that as it provides the means by which to describe and analyze relationships. And it is the key to the characterization and understanding of mathematical structures. Given these assets and the increased mathematization of society, it is no surprise that algebra is today the key area of study in secondary school mathematics and that this preeminence is likely to be with us for a long time* (Usiskin 1988 s. 13).

Usiskin (1988) uttrykker at algebra stod på dagsordenen i skolen. I dag er det heller intet unntak. Som nevnt innledningsvis opplever elever algebra som et problemområde i matematikk, hvilket ikke er et nylig fenomen (Booth 1984). *Hva gjør algebra så vanskelig?* For å finne svaret på dette har elevenes misoppfatninger blitt undersøkt, og hva som er årsaken til misoppfatningene (Booth 1984; Booth 1988). Undersøkelser viser at ungdomsskolelever har problemer med følgende områder i algebra (Booth 1984; Booth 1988; MacGregor & Stacey 1997):

- Fokus på algebraisk aktivitet. Elevene ønsker å finne et tallsvar, enn for eksempel svar på formen 2a + 3b.
- Betydningen av bokstaver og symboler i algebra. For eksempel blir symbolsystemet sammenlignet med ord i dagliglivet, som at *b* står for *banan* og *e* for *eple*.
- Algebraiske notasjoner, som ”+” og ”=”. Dette skaper problemer, fordi notasjonene fungerer som operasjoner i aritmetikk og elevene forventer å finne et tallsvar eller et svar som ikke involverer en operasjon. Som for eksempel a + b = ab.
- Relasjoner og metoder som benyttes i aritmetikk

En av årsakene til problemene er dårlig undervisning og misvisende undervisningsmateriale, hevder MacGregor og Stacy (1997). Brekke et al. (2000) peker på at undervisningen må legge til rette for å la elevene oppleve å forstå, ikke bare mestre en prosedyre i algebra. For vanskelighetene, som elevene erfarer i algebra, reflekterer ikke alltid elevens kognitive kapasitet, men heller elevens læreprosess (MacGregor & Stacey 1997). Derfor er det helt nødvendig at eleven får gjøre sine egne tanker om resultatene, og ikke la fokuset kun være på prosedyren og å få riktig svar på utregningen (Brekke et al. 2000). I denne studien er fokuset elevers problemområde knyttet til betydningen av bokstaver og variabler, da dette påpekes som et av de største utfordringene og det største skillet mellom aritmetikk og algebra (Booth 1988). Derfor utdypes elevenes misoppfatninger knyttet til variabler, som beskrives i avsnitt **1.3 Misoppfatninger**.

1.2 Forståelse

For at elever skal bli suksessfulle i matematikk, må de forstå matematiske begreper og sammenhenger. I matematikk bygges ulike begrep på hverandre og utgjør et hierarkisk byggverk. Å forstå et begrep er en viktig forutsetning for å bygge et nytt begrep. Matematiske begrep har to ulike sider, en strukturell side og en operasjonell side, som Sfard (1991) kaller en dualistisk natur. Begrepet kan være henholdsvis et abstrakt objekt og en prosess. De strukturelle sidene ved et begrep er oftest vanskeligst å forstå, i forhold til de operasjonelle sidene ved et begrep som dannes først. Sfard (1991) foreslår en modell over begrepsdanning i matematikk. Den viser en tredelt struktur i elevers forståelse av et nytt begrep, som for eksempel variabelbegrepet. Modellen støttes av flere studier (bl.a. Gray, Loud & Sokolowski 2007; Kieran 1992). Den første fasen i modellen kalles ***internalisering***. Det vil si at læringsprosessen legger til rette for erfaringer eller at man får utføre handlinger med familiære og konkrete objekt. Når man kan gjøre disse handlingene mentalt har man nådd første fase i prosessen. Andre fase er ***kondenseringsfasen***. De operasjonelle sidene ved begrepet man arbeider med konstrueres og man får et mer helhetlig bilde av det man jobbet med i den første fasen. Den tredje og vanskeligste fasen er **reifikasjonsfasen** og betyr at begrepet blir mer tingliggjort, som et objekt eller et strukturelt begrep. Denne fasen kan erfares som om at det "går opp et lys for én" eller en "aha-opplevelse". Gray et al. (2009) påpeker at et slikt perspektiv på algebraiske begreper er anerkjent i flere studier knyttet til forståelse (Dubinsky, 1991; Dubinsky & Harel, 1992; Jacobs, 2002; Kieran, 1992; Sfard & Linchevski, 1994; Stacey & MacGregor, 2000; Tall et al., 2000; Trigueros & Ursini, 2003, referert i Gray et al. 2009).

I litteraturen benyttes ulike termer for forståelse. Denne studien benytter begrepene relasjonsforståelse og instrumentell forståelse (Skemp 1976), som beskrives i underavsnitt **1.2.1 Forståelsestyper**. For å benytte instrumentell forståelse og relasjonsforståelse begrunnes viktigheten av å undersøke elevenes begrep om variabler i underavsnitt **1.2.2 Hvorfor er det viktig å forstå variabelbegrepet?**. I studien belyses forståelsen av variabler knyttet til en situasjon hvor elevene snakker matematikk, hvor elevene potensielt må revurdere sin forståelse. En slik situasjon er det Carpenter et al. (2003) mener kan utfordre elevens forståelse. Hva som ligger i dét og dens betydning for forståelsen begrunnes i underavsnitt **1.2.3 Utfordre elevers forståelse**. Det siste underavsnittet knyttet til forståelse, **1.2.4 Bruken av variabler**, beskriver hvordan elever bruker variabler knyttet til nivå av forståelse (Küchemann 1981).

1.2.1 Forståelsestyper

I dette underavsnittet skisseres hvordan denne studien har orientert seg i litteraturen om matematikkforståelse knyttet til å forstå algebra, og deretter mer spesifikke retninger av forståelse. Videre vil også denne studien spesifisere valg av begrep for forståelse.

I litteraturen benyttes mange ulike begreper for forståelse av algebra. Blant annet Gray et al. (2007, 2009) henviser til flere studier, som har gjort en inndeling på to grupper. Oversikt over hva de ulike grupperingene blir kalt skisseres i **Tabell 1** og bygger på begrunnelser i litteraturen (bl.a. Batanero, Godino, Vallacillos, Green & Holmes 1994; Gray et al. 2007; Kieran 1992; Skemp 1976; Vinner 1997).

Forståelse		**Referanse**	**Referert i**
Instrumentell	Relasjonell	Skemp (1979)	
Prosedyrekunnskap	Begrepskunnskap	Hiebert & Lefebre (1986)	Batanero (1994)
Operasjonell	Strukturell	Sfard (1991)	
Prosedural	Strukturell	Kieran (1992)	
Operasjoner	Funksjonell algebra	Sfard & Linchevski (1994)	Gray et al. (2007)
Aritmetisk tenkning	Algebraisk tenkning	Stacy & McGregor (2000)	
Utregningstilnærming	Begrepsforståelse	Jacobs (2002)	
Prosedyretenkning	Relasjonstenkning	Carpenter et al. (2005)	

Tabell 1 Oversikt over noen ulike begreper om forståelse i matematikk fra litteraturen. Kategorisert etter årstall for publikasjon.

Star (2000) gjennomførte en "review" av forskning knyttet til kunnskap og forståelsesformer i matematikk. Der skildrer han hvordan man ofte deler de to grupperingene av forståelse i å vite *hvorfor* og å vite *hvordan*. I denne studien benyttes begrepene instrumentell forståelse og relasjonsforståelse (Skemp 1976). Elever som viser **instrumentell forståelse** svarer ofte med konkretisering på en oppgave. Det vil si at man for eksempel setter inn et tall i en likning og får ut et tallsvar, og man vet følgelig *hvordan* problemet bør løses. En slik forståelse kan komme av å pugge algoritmer, uten å virkelig forstå *hvorfor* man utførte en operasjon. Om **relasjonsforståelse** sier Skemp (1976) "*knowing not only what method worked out but why*" (s. 9). Skemp (1976) nevner flere viktige fordeler ved relasjonsforståelse. For det første blir man mer tilpasningsdyktig i forhold til nye oppgaver og problemer ved å vite *hvorfor* man benytter seg av en metode, og ikke bare hvilken metode som er viktig for å tilpasse en metode til nye problemer. For det andre er det enklere å huske, fordi man forstår relasjoner og skjønner for eksempel hvordan og hvorfor en spesifikk formel ble utledet. Selv om man ikke utleder en formel hver gang, man skal for eksempel løse et areal- eller omkretsproblem, kan relasjonsforståelse bidra til å huske den spesifikke formelen knyttet til figuren. Det kommer av at man forstår utledningen, som et resultat fra matematiske sammenhenger. En slik forståelse er dessuten en mer langvarig forståelse, i motsetning til den instrumentelle forståelsen, som bygger på pugging og god hukommelse ved gjenkjennelse av oppgaver og fremgangsmåten for å løse de. Følgelig kan elever som viser relasjonsforståelse "*forklare sammenhengen mellom premissene i utfordringen og den endelige løsningen*" (Solvang 1992 s. 97). Dermed forstår elevene både *hvordan* og *hvorfor*.

Relasjonell forståelse er et vidt begrep, som også omhandler instrumentell forståelse. Det er ikke dermed gitt at eleven enten har instrumentell forståelse eller relasjonsforståelse, da begge grupperingene henger sammen og ikke kan adskilles. Dette vektlegger Star (2000), som hevder at det har blitt gjort lite forskning på sammenhengen mellom de to gruppene, relasjonsforståelse og instrumentell forståelse, spesielt knyttet til algebra. Det kommer til uttrykk i hans studie at inndelingen mellom grupperingene er nokså statisk og lite fleksibel. Derfor påpeker Star (2000) at hvilken forståelse som kommer først ikke følger en bestemt mal, men avhenger av personen.

> *For "knowing how", which appears to be a single knowledge type (knowledge of skills), there are actually multiple ways in which one can "know how". Similarly, conceptual knowledge appears to be a single knowledge type (knowledge of principles or facts), but there are actually many ways in which concepts can be known* (Star 2000 s. 5)

Det blir understreket at både instrumentell forståelse og relasjonsforståelse er komplekse begreper, hvor litteraturen har en tendens til å undergrave mangfoldet i å forstå *hvordan* og *hvorfor*. Derfor har denne studien sett nærmere på studien til Kilpatrick et al. (2001), som mener at ”*it is not always necessary, useful, or even possible to distinguish concepts from procedures because understanding and doing are interconnected in such complex ways*” (s.134). Målet deres er å skape variasjon i henhold til begrepet om forståelse. Fem områder skal gi læreren holdepunkter på veien mot å gjøre elever suksessfulle i matematikk. Disse områdene omtales som fem ”tråder” som utgjør matematisk kyndighet (Mathematical proficiency). ”*We have chosen mathematical proficiency to capture what we believe is necessary for anyone to learn mathematics successfully*” (Kilpatrick et al. 2001 s. 116). Med fokus på et enkelt område vil ikke elevene oppnå matematisk kyndighet innen et matematikkfelt, fordi ”*The five strands are interwoven and interdependent in the development of proficiency in mathematics*” (Kilpatrick et al. 2001 s. 116). De fem trådene er begrepsforståelse, regneferdighet, resonnementsforståelse, strategisk kompetanse og engasjement. Begrepene utdypes under i **Tabell 2**.

Matematisk kyndighet	**Forklaring**
Begrepsforståelse *Conceptual understanding*	Elever forstår matematiske ideer og forstår mer enn isolerte faktakunnskaper og metoder. Begrepsforståelsen har likhetstrekk med hvordan relasjonsforståelse defineres, hvor elevens forståelse for en idé er satt i et system.
Regneferdighet *Procedural fluency*	Elevers regneferdighet er å effektivt, fleksibelt og nøyaktig utføre prosedyrer. Dessuten innebærer det en forståelse for om svaret gir mening i den gitte sammenhengen. Følgelig kan regneferdighet knyttes til instrumentell forståelse og relasjonsforståelse.
Resonnementsforståelse *Adaptive reasoning*	Med denne forståelsen vurderer man om fakta, begreper og metodene gir mening i situasjonen. Følgelig representerer resonnementsforståelse elevers logiske tenking, refleksjon, forklaring og begrunnelse mellom begreper og situasjoner. En slik forståelse kan knyttes til relasjonsforståelse.
Strategisk kompetanse *Strategic competence*	Dette er kompetanse for å formulere matematiske problemer, representere dem og løse dem, som ofte blir kalt problemløsning. Med en slik kompetanse kan man også mestre å løse oppgaver som ikke er rutineoppgaver. Det knytter strategisk kompetanse til relasjonsforståelse.
Engasjement *Productive disposition*	Engasjement for å lære matematikk henger sammen med å se matematikk som nyttig og at det gir mening. For å utvikle de respektive delene av matematisk kyndighet, må de oppleve at matematikk gir mening, er nyttig og verdt å studere. Derfor er ikke dette en type forståelse, men en forutsetning som har betydning for elevens utvikling i matematikk.

Tabell 2 Kilpatrick et al. (2001) sine fem tråder i matematisk kyndighet.

Alle disse områdene er viktige for å lære matematikk suksessfullt, også variabler. For å kunne besvare denne studiens forskningsspørsmål var det et behov for et teorietisk rammeverk for hvordan elever forstår begrepet variabler (utdypes mer spesifikt i underavsnitt **1.2.4 Bruken av variabler**) og hvordan elevers argumenter er knyttet til forståelsen for å resonnere. Derfor er begrepsforståelse og resonnementsforståelse spesielt viktige begreper. Videre utdypes resonnementsforståelse og begrepsforståelse, og sammenhengen mellom disse.

Resonnementsforståelse er hva Kilpatrick et al. (2001) kaller ”*adaptive reasoning”,* og forklarer det med *”capacity to think logically about the relationships among concepts and situations*” (Kilpatrick et al. 2001 s. 129). Resonnementsforståelsen blir sett på som limet som holder alt sammen ved at man forstår hvordan fakta, prosedyrer, metoder og løsningen henger sammen og gir mening. Elever som viser en slik forståelse resonnerer logisk og ser sammenheng mellom begreper og situasjoner. Det medfører at eleven også er i stand til å forsvare sin mening og vurdere ulike alternativer. For å måle resonnementsforståelse kan man blant annet gi elever oppgaver hvor de må begrunne og forklare sine løsninger (Kilpatrick et al. 2001).

En **begrunnelse** defineres som et godt nok grunnlag for at en påstand er sann (Carpenter et al. 2003; Kilpatrick et al. 2001). ”*Justification is central to mathematics, and even young children cannot learn mathematics with understanding without engaging in justification*” (Carpenter et al. 2003 s. 85). Å vise en slik forståelse gjennom begrunnelser er i større grad vanlig for elever på ungdomsskolen, men med de riktige forutsetningene kan også elever på barneskolen mestre dette (bl.a. Carpenter et al. 2003; Kilpatrick et al. 2001; Maher 2005). Utbyttet av å begrunne sine meninger i diskusjon utdypes i **kapittel 2 Diskusjon i matematikk**, dessuten hvordan begrunnelser benyttes i studiens analyse blir utdypet i underavsnitt **3.4.2 Analysemodellen for observasjonen**.

For å begrunne og forklare sine løsninger knyttet til variabler forutsetter det at elevene har kunnskap om begrepet og prosedyrer. Det kalles begrepsforståelse (*conceptual understanding*). I denne studien oversettes ordet *concepts* med begreper eller matematiske ideer. **Begrepsforståelse** er ”*integrated and functional grasp of mathematical ideas*” (Kilpatrick et al. 2001 s. 118). Ved å forklare og begrunne sine ideer blir både ferdighetene og begrepsforståelsen bedre, påpeker Kilpatrick et al. (2001). For å gjenkjenne elevers begrepsforståelse blir det foreslått å undersøke om eleven er i stand til å representere matematiske situasjoner på ulike måter, og om eleven vet i hvilke situasjoner de ulike representasjonene er hensiktsmessige. Dessuten knytter denne studien elevenes begrepsforståelse nært sammen med Küchemanns (1981) nivåer av forståelse av variabler i underavsnitt **1.2.4 Bruken av variabler**.

> *When students have acquired conceptual understanding in an area of mathematics, they see the connection among* ***concepts*** *and* ***procedures*** *and can give* ***arguments*** *to* ***explain*** *why some facts are consequences of others. They gain confidence, which then provides a base from which they can move to another* ***level of understanding*** (Kilpatrick et al. 2001 s. 119. Forfatters uthevinger).

Når elever har fått ”taket på” et nytt begrep, som variabler, vil de potensielt heve forståelsen for begrepet til et nytt nivå. I underavsnitt **1.2.4 Bruken av variabler**, presenteres ulike nivå av forståelse knyttet til hvordan elever forstår variabler.

1.2.2 Hvorfor er det viktig å forstå variabelbegrepet?

For å forstå matematikk er man nødt til å forstå ulike begreper. Dersom man ikke forstår variabelbegrepet kan det få konsekvenser for andre områder som bygger på forståelsen av variabler. “*The study of calculus, with its fundamental concepts of limit, derivative, and integral, requires an ability to understand algebraic variables as generalized numbers and as functionally related varying quantities*” (Gray et al. 2009). Følgelig er variabelbegrepet viktig fundament å bygge videre på. Variabelbegrepet er dessuten viktig for elevenes utvikling av kommunikasjonsferdigheter, skriftlig så vel som muntlig, påpeker Carpenter et al. (2003). For å øve kommunikasjonsferdighetene kan elevene derfor representere sine matematiske ideer ved hjelp av variabler. Carpenter et al. (2003). hevder at det er noe av det viktigste elevene lærer i matematikk. Elever helt ned i barneskolen, kan som sagt, lære seg å representere matematiske ideer symbolsk. På den måten vil elevens uttrykk av matematiske ideer bli mer tydelig og presist. Allikevel er det ikke vanlig praksis å la elever i barneskolen få uttrykke sine ideer ved hjelp av variabler. Brekke et al. (2000) hevder at i den videregående skole er det å lære elevene å manipulere symboler favorisert over å få uttrykke sine ideer ved hjelp av variabler. ”*Det er rimelig å hevde at den overdrevne fokuseringen på den rene matematikken har ført til at en har undervurdert problemene som elevene møter i sin begrepsdanning*” (Brekke et al. 2000 s. 5). Med fokus på manipulering av variabler og utregninger utvikler de ferdighetene sine knyttet til den operasjonelle siden ved begrepet. Dersom fokuset ikke går hånd i hånd med å få uttrykke sine matematiske ideer ved hjelp av variabler, vil forståelsen for den strukturelle siden ved begrepet svekkes. Hvorpå man ikke forstår hvordan eller hvorfor man skal løse eller representere et problem ved å benytte variabler.

1.2.3 Utfordre elevers forståelse

I underavsnitt **1.2.1 Forståelsestyper** ble begrepet relasjonsforståelse og instrumentell forståelse innført, hvor én av fem områder knyttet til matematisk kyndighet var engasjement. I flere studier blir det påpekt at elevene bør være motiverte til å undersøke og lære noe nytt for å forstå noe nytt (bl.a. Kilpatrick et al. 2001; Martino & Maher 1999). Dersom eleven ikke ser mening med å snakke, forklare og begrunne sine meninger i en matematikksammenheng, er sannsynligheten liten for at eleven skal forstå noe nytt. Derfor er engasjement en viktig faktor for å forstå variabelbegrepet. Denne studien har undersøkt en slags motivasjonsfaktor, som kalles å *utfordre* elevens forståelse. Videre begrunnes hva det vil si å utfordre elevenes forståelse.

Både Fuglestad et al. (2003) og Carpenter et al. (2000, 2003) belyser situasjoner og faktorer som kan utfordre en elevs forståelse. Carpenter et al. (2000, 2003) fant ut at for å hjelpe elever til å få en god forståelse for likhetstegnet, var det hensiktsmessig å sette de i en situasjon som utfordret deres daværende forståelse. Diskusjon var en slik situasjon som kunne bidra til å utfordre deres forståelse. I diskusjonen var det viktig at elevene ble oppmuntret til å være eksplisitte om sin forståelse for likhetstegnet, slik at de andre elevene kunne se de ulike innfallsvinklene til problemet. Fuglestad et al. (2003) sier at ”*Det vil være en god hjelp å ha arbeidsoppgaver som kan* ***utfordre*** *elevene til å utforske flere egenskaper ved en figur*” (s. 226. Forfatters uthevinger). I dette sitatet påpeker hun at det er viktig å gi arbeidsoppgaver som utfordrer elevene til å utforske. Følgelig er oppgavene en faktor som stimulerer til utforskning. Oppgaver kan benyttes til å utfordre elevens misoppfatning og ”*skape kognitive konflikter og diskusjoner*” (Fuglestad 2003 s. 213). I avsnitt **1.3 Misoppfatninger omkring variabler** beskrives vanlige misoppfatninger knyttet til variabler.

Carpenter et al. (2003) legger vekt på at det er viktig for elever å være tydelige på hva som er deres ideer knyttet til et begrep og hva som støtter disse begrepene. En slikt utgangspunkt bidrar til å se forskjellen i hverandres forståelse for et begrep, som i deres tilfelle var begrepet likhetstegnet. Dersom det er motsetninger i elevers ideer kan diskusjon bidra til å fremme et behov for å undersøke og løse motsigelsen. På den måten kan diskusjon bidra til å utfordre elevers forståelse for likhetstegnet. I denne studien er fokuset rettet på en elevs argumentasjon i en diskusjon og hvordan en elevs argumenter utfordrer sin egen eller medelevens relasjonsforståelse for begrepet variabler.

Med ordet *utfordre* menes situasjoner eller faktorer i en argumentasjon som kan bidra til at elevene setter ord på sin oppfatning av variabler, slik som Carpenter et al. (2003) beskriver diskusjon og Fuglestad et al. (2003) beskriver hensikten til arbeidsoppgaver. Hvorvidt elevers argumentasjon kunne skape en slik tilstand hvor elevene fikk et behov for å oppklare en uklarhet, som utfordrer deres forståelse av variabler, drøftes i **kapittel 5 Diskusjon**.

1.2.4 Bruken av variabler

I dette underavsnittet beskrives spesifikt elevers forståelse av variabler. Küchemann (1981) deler elevers forståelse av variabler inn i fire hierarkiske kategorier, basert på seks ulike måter å bruke variabler på (**Tabell 3**). På nivå 1 og 2 betraktes ikke bokstaver som ukjente og omtales som et lavt nivå av forståelse og kan knyttes til instrumentell forståelse (Gray et al. 2009). Nivå 3 og 4 behandles bokstaver som spesifikke ukjente eller generaliserte tall og variabler, og betraktes som et høyere nivå av forståelse, som relasjonsforståelse (Gray et al. 2009). Küchemann (1981) sier at begrepsforståelse av variabler innebærer forståelse for hvordan verdier til en ukjent varierer, hvilket kan relateres til relasjonsforståelse.

<table>
<tr><td colspan="3">Küchemanns (1981) 6 kategorier for bruk av variabler med 4 nivåer av forståelse</td></tr>
<tr><td colspan="3">Beskrivelse av nivåene (1 – 4)
1. Oppgavene har en enkel form og kan løses ved å regne ut bokstavens verdi, bruke den som objekt eller ikke bruke den.
2. Oppgaven har økt kompleksitet og man trenger kun å finne bokstavens verdi eller bruke den som et objekt.
3. Oppgaven har en enkel form og man bruker bokstavene som spesifikke ukjente (et symbol med en bestemt verdi) og generaliserte tall (et symbol som representerer flere verdier, men en verdi om gangen).
4. Oppgavene har en kompleks struktur og man behandler bokstavene som variabler (symbol som representerer en rekke tall på en og samme tid), og kan behandle variablene i en funksjonell sammenheng.</td></tr>
<tr><td>Kategori</td><td>Beskrivelse</td><td>Eksempler på ulike nivå</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Å finne verdien til en bokstav. Man gir den ukjente en verdi.</td><td>1. Hva kan du si om a hvis a + 5 = 8
2. Hva kan du si om u hvis u = v + 3 og v = 1
3. Hva kan du si om r hvis r = s + t og r + s + t = 30</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Bokstaver som ikke trengs brukes. Man kan løse oppgaven uten å vite noe om bokstavenes verdi.</td><td>1. Hvis a + b = 43
a + b + 2 =…
3. Hvis e + f = 8
e + f + g = …</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Bokstaver brukt som objekt. Bokstaver kan for eksempel være en benevning på en side i en trekant, istedenfor dens ukjente lengde.</td><td>1. 2a + 5a = …
2. 2a + 5b + a =…
3. 3a – b + a = …
4. (a – b) + b = …</td></tr>
<tr><td colspan="3">”De tre kategoriene over beskriver alle måter å unngå generalisert aritmetikk på, ved ikke å bruke bokstaver som ukjente tallstørrelser. Dette gjelder ikke for de neste kategoriene, selv om den første kategorien er av en noe primitiv oppfatning av hva bokstaver står for i algebra” (Brekke et al. 2000 s. 11).</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Bokstav som en spesifikk ukjent størrelse. Man utfører regneoperasjoner på en bokstav som betraktes som spesifikk ukjent.</td><td>2. Legg 4 til n + 5
3. Legg 4 til 3n
4. Gulrøtter koster 13 kroner pr. kg og poteter koster 5 kr pr. kg.
Hvis g står for hvor mange kg gulrøtter som blir kjøpt, og p står for hvor mange kg poteter som blir kjøpt, hva står da 13g + 5p for?</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Bokstav som et generelt tall. Bokstaven har mer enn én verdi.</td><td>3. Hva kan du si om c + d = 10, dersom c er mindre enn 10
4. L + M + N = L + P + N
Når er dette sant? Alltid, noen ganger eller aldri? Utdyp svaret.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Bokstav som en variabel</td><td>4. Hvilken er størst 2n eller n+2? Forklar.</td></tr>
</table>

Tabell 3 Küchemanns 6 kategorier for bruk av variabler med beskrivelse av kategorier og eksempler

Eksemplene og store deler av forklaringene er hentet fra litteraturen (Brekke et al. 2000; Gray et al. 2007; Gray et al. 2009; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg & Stephens 2005; Küchemann 1981). Kategoriene er hvordan elevene tolker og bruker bokstavene. Nivå henger sammen med vanskelighetsgrad og grad av mulig oppnåelse for å vise hvilken forståelse man har av variabler. Om man gir en oppgave på forståelsesnivå 2 kan ikke eleven vise en forståelse på nivå 4.

Elevene som er på nivå 1 og 2 viser instrumentell tenkning, som er den helt elementære forståelsen av variabler. Elever har ofte flere misoppfatninger på disse nivåene, dette beskrives nærmere i avsnitt **1.3 Misoppfatninger omkring variabler**. I oppgaven knyttet til kategorien ”Bokstav som variabel” forklarer Küchemann (1981) at 2n er et forhold i seg selv, og når man ser på forholdet mellom 2n og n+2 får vi et andregradsforhold. Elevene kan derfor se på forholdet som et førstegradsforhold eller andregradsforhold. Et førstegradsforhold ser på hvordan uttrykket 2n og n+2 endrer seg ved innsetting av ulike verdier for n. For eksempel n=3 gir paret (6,5) og n=6 gir paret (12,8) for (2n, n+2). Mens et andregradsforhold ser også på forholdet mellom parene (6,5) og (12,8). Som for eksempel ”når n øker så øker forskjellen mellom 2n og n+2 (12-8 > 6-5)” eller ”økningen i 2n er større enn økningen i n+2 (12-6 > 8-5)”. En slik type oppgave skiller seg fra andre variabeloppgaver, fordi denne oppgaven gir et bilde av en elevs forståelse for andregradsforhold. I mange generaliserte aritmetikkoppgaver er det ikke behov for det, da man kan løse oppgaven uten å se på andregradsforholdet.

Relasjonsforståelse er knyttet til nivå 3 og 4. Om nivå 4 sier Brekke et al. (2000 s. 11) ”*Hvis elevene har arbeidet med å uttrykke slike generaliseringer med ord før de blir bedt om å formalisere dem ved bruk av symboler, vil en trolig hjelpe elevene til å få forståelse av dette begrepet*”. Carpenter et al. (2003) vektlegger viktigheten av å legge til rette for å utfordre deres forståelse. I denne studien skal elevens relasjonsforståelse av variabler utfordres. Hvordan elevene kan uttrykke sin forståelse gjennom diskusjon blir utdypet nærmere i avsnitt **2.1 Diskutere bokstavsymboler**.

Oppsummering: For at elever skal forstå et nytt begrep foreslår Sfard (1991) en modell over begrepsdanning, som utgjør tre faser av å forstå et begrep. Fokuset i studien er variabelbegrepet. Det er viktig begrep å forstå for å bygge nye begreper og danne nye ideer i matematikk (Carpenter et al. 2003). Tilnærmingen til dette begrepet kan være ulik, og avhengig av personen og utfordringene som skal møtes. For glede av algebra og variabelbegrepet må begrepet forstås. Forståelsen deles således inn i to grupperinger; relasjonsforståelse og instrumentell forståelse (Skemp 1976). Knyttet til relasjonsforståelse har vi blant annet begrepsforståelse og resonnementsforståelse, hvorpå begge er viktige områder for suksess i matematikk (Kilpatrick et al. 2001). Litteraturen har kategorisert hvordan elever bruker variabler og nivå av forståelse (Küchemann 1981). Hvilket er av betydning for analysen i denne studien. For å forstå av variabelbegrepet blir det foreslått å utfordre elevenes forståelse. Med utfordring menes en situasjon eller faktor som "trigger" elevene til å være eksplisitte om sin forståelse. Hvilke utfordringer argumentasjon i diskusjon kan fremme, er en viktig del av forskningsspørsmålet og drøftes i **kapittel 5 Diskusjon**.

1.3 Misoppfatninger omkring variabler

Dette avsnittet beskriver hva misoppfatninger er, og spesifikke eksempler knyttet til variabler. "*Vi kaller ufullstendige tanker knyttet til et begrep for misoppfatninger*" (Brekke 2002 s. 10). Elevene ønsker å gjøre seg opp en mening og gi mening til det man lærer. Misoppfatninger kommer av at man trekker konklusjoner og lager seg en forståelse basert på erfaringer knyttet til et avgrenset felt. Misoppfatninger er noe elevene har, og er ikke feilene de gjør. Brekke (2002) forteller at en feil kommer ofte tilfeldig, mens misoppfatninger ikke er tilfeldige, fordi de bygger på en bestemt idé som brukes konsekvent.

Misoppfatningene som elever har knyttet til variabler avhenger av hvor de befinner seg i utviklingen av sin forståelse. Oppgaver hvor et korrekt svar innebærer at bokstaven blir oppfattet som en variabel eller et generelt tall bidrar til å avdekke hvor eleven befinner seg i sin forståelsesutvikling. Elevens svar på oppgaven kan knyttes til Küchemanns (1981) kategorier for hvordan eleven bruker bokstaven, og gi et bilde av elevens forståelse.

Eksempler på misoppfatninger knyttet til variabeloppgaver:

Eksempel 1 – Bokstav brukt som objekt

"Gulrøtter koster 13 kroner pr. kg og poteter koster 5 kr pr. kg.

a) Hvis g står for hvor mange kg gulrøtter som blir kjøpt, og p står for hvor mange kg poteter som blir kjøpt, hva står da 13g + 5p for?" (Brekke et al. 2000).

En slik oppgave kan avdekke en dominerende misoppfatning: å oppfatte bokstavene som "merkelapper"/objekter (Brekke et al. 2000; Gray et al. 2009; Küchemann 1981). Det vil si at elevene oppfatter g som gulrøtter og p som poteter, eller g er "kg gulrøtter" og p er "kg poteter". Elever som har denne misoppfatningen synes det er vanskelig oversette en tekstoppgave til et algebraisk uttrykk og bruke bokstaver (Ermete, Brackett, Krause, Powell & Lapp 2010; Gray et al. 2009; Warren 2003).

Eksempel 2 – Bokstaver som ignoreres eller fjernes

"Legg sammen 2 og n+5" (Brekke et al. 2000) er en oppgave på nivå 2, mens "Legg sammen 4 og 3n" (Küchemann 1981) er en oppgave på nivå 4. Begge sier noe om elevens forståelse for å betrakte bokstaven som en spesifikk ukjent. Dersom elevene velger å ikke forholde seg til bokstaven kan de ignorere den eller fjerne den. Disse strategiene kan i noen tilfeller gi rett svar og bidra til å skape misoppfatning hos elevene. Bakgrunnen for strategien er en utilfredshet ved å gi et svar som inneholder en regneoperasjon, som kalles "lack of closure" (Küchemann 1981) og viser instrumentell forståelse. Derfor kan elever være tilbøyelige med svar som 7n og n7 på oppgave "4 og 3n". Fremgangsmåten elevene benytter er å samle tallene og variablene hver for seg, legger sammen tallene og legger til variabelen. Det samme gjelder oppgaven "hvilket uttrykk er størst av 2n eller n+2" (Küchemann 1981). I denne oppgaven ønsker flere elever et svar som virker "endelig", slik som det blir beskrevet over med hensyn på "lack of closure". Derfor er elevene tilbøyelige til å svare at 2n = n+2, fordi n+2 er 2n. Dette er elevenes begrunnelse for at de to uttrykkene er like hverandre, og dermed at ingen av de er størst. Denne oppgaven utdypes i underavsnitt **3.1.2 Oppgavene i diskusjonsgruppen**.

Eksempel 3 – Fruktsalaten

"l + m + n = l + p + n. Svaralternativer: Dette er alltid sant, dette er aldri sant eller dette kan være sant" (Brekke et al. 2000; Küchemann 1981). Riktig svar er "det kan være sant, hvis m og p har samme verdi". I denne oppgaven krever det at elevene behandler bokstaven som et generelt tall. I undersøkelsen til Brekke et al. (2000) svarte halvparten av elevene "aldri sant". Svarene ble begrunnet med "l, m, n, p" representerte forskjellige verdier, fordi de var symbolisert ved forskjellige bokstaver. En slik oppfatning kan tyde på at bokstavene sees på som objekter. Hvilket "fruktsalaten" kan ha bidratt til. Det vil si at læreren forklarer at man ikke kan legge sammen epler og pærer til en "eplepære", eller skruer og spikere til en "skruespiker". Følgelig kan elevene tro at bokstavene er objekter, som "lampe", "mutter", "nål" og "pult", og at disse ikke kan være like fordi de er ulike ord. Det medfører at elevene ikke betrakter bokstavene som variabler.

For å rette opp en misoppfatning:

> *... må man legge vekt på begrepsforståelse av de ulike prosedyrene ved algebraiske omforminger, en forståelse som må bygge på solide kunnskaper i tallregning, som så kan bli utgangspunktet for de algebraiske prosedyrene* (Brekke et al. 2000 s.42).

Dessuten er det "*... nødvendig med kunnskap om vanlige feiloppfatninger og hvordan disse kan utfordres*" (Fuglestad 2003 s. 231). Å utfordre elevens misoppfatning kan derfor bidra til å endre og utvikle forståelsen av variabler. I neste kapittel omtales hvorvidt diskusjon kan bidra til et slikt fenomen.

Oppsummering: Misoppfatninger for variabler kommer av ufullstendige tanker om bokstaver som variabler. Dersom man ikke har en fullutviklet forståelse, i henhold til Küchemanns (1981) modell, vil elever være tilbøyelige til å betrakte variabler som objekter, ignorere eller fjerne bokstavene. Det er viktig at elevens misoppfatning blir konfrontert, slik at oppfatningen kan modifiseres.

Kapittel 2 Diskusjon i matematikk

McCrone (2005) hevder at ved å dele ideer og matematiske bevis med andre, kan man i større grad oppleve at matematikk blir en personlig opplevelse og en egen erfaring. Denne opplevelsen og erfaringen er knyttet til at matematikk gir mening for seg selv.
Å dele ideer og matematiske bevis kaller hun diskurs, og beskriver det som en utveksling av matematiske tanker og informasjon. Diskusjon er således en del av en diskurs.
I en diskusjon snakker man sammen, fremmer sitt synspunkt, lytter til hverandre, argumenterer for eller i mot det en annen sa og så videre. ”En meningsutveksling om et spesifikt tema” beskriver hvordan man kan oppleve en diskusjon. I matematikkundervisningen ønsker man at diskusjonen skal dreie seg om matematikk, og helst temaet for timen.

Hvorfor setter flere forskere diskusjon i matematikkundervisningen på dagsordenen? Et argument er *”... putting communication in the heart of mathematics education is likely to change not only the way we teach but also the way we think about learning and about what is being learned”* (Sfard 2003 s. 13). Sfard (2003) er ikke alene om å mene at kommunikasjon i undervisningen er viktig. Og fokuset på kommunikasjon; diskusjon, argumentasjon og resonnement, har opptatt flere forskere. I USA har det vært et skifte i pedagogikken; fra det klassiske klasserommet, hvor individet jobber for seg selv med penn og papir, til et klasserom med samarbeid og diskusjonsbasert matematikk. I dette klasserommet jobber læreren og eleven side om side. Sammen skaper de et miljø hvor de kan utforske og dele matematiske prinsipper (f.eks Lampert, Rittenhouse & Crumbaugh 1996; McCrone 2005). I den siste tiden er det flere som publiserer artikler knyttet til temaet kommunikasjon i matematikk. Fokuset er fordelene med diskusjon, snakke sammen i grupper omkring ulike problembaserte oppgaver i matematikk, hvordan man skal gjennomføre det og høste et utbytte, lærerens rolle og likeså elevens rolle.

2.1 Elevene begrunner sine påstander gjennom diskusjon

Felles for alle gode lærere er et ønske om at elevene blant annet skal lære og forstå. Hvordan kan diskusjon, som er en kompleks interaksjon, bidra til det? *”Through open discussion, as students explain, share and argue about their ideas, certain features of their internal, cognitive representations are made public”* (Maher 2005 s. 3). Maher (2005) sier at visse trekk av elevenes indre kognitive representasjoner blir gjort offentlig. Når et individ gjør matematikk formes det mentale bilder av matematikken. I forbindelse med å løse matematikkoppgaver hentes bildene frem igjen. Bildene kan manipuleres eller nye kan oppstå, hevder Maher (2005). I en undersøkelse gjort av Sfard (2003) er fokuset "thinking-as-communicating", hvor læring sees på som tilegnelse av kunnskap. Tilegnelsen skjer på individets prinsipper, gjennom hennes holdning til å nå målet. Og tilegnelsen kan blant annet skje ved tilnærmingen kommunikasjon. "*The basic tenet of the communicational approach to the study of human cognition is that thinking may be conceptualized as a case of communication, that is, as one's communication with oneself*" (Sfard 2003 s. 26). Videre sier Sfard at tenkningen vår er en bestrebelse på en dialog, hvor vi informerer oss selv, vi argumenterer, stiller spørsmål og venter på vår egen respons. Tanken og det man sier skal ikke skilles, fordi det er et og samme fenomen, hvor ingen av dem settes foran den andre. Elevenes kommunikasjon kan blant annet bidra til å belyse hvordan de tenker, ettersom tanken og det man sier henger sammen. Og det eleven forteller illustrerer hva eleven tenker og hennes matematiske bilde knyttet til problemet. Dette beskrives som et konstruktivistisk syn på læring (Fuglestad 2003; Imsen 2005). Det vil si at man tar utgangspunkt i elevens erfaring for å bygge kunnskap, slik som man tar utgangspunkt i elevens matematiske bilde. Ettersom elevene bygger og utvikler sine bilder knyttet til begrepsforståelsen gjennom å kommunisere, innebærer det for denne studien et læringssyn som er kognitiv- og sosial konstruktivistisk.

Når diskusjon fungerer vil det oppmuntre elevene til å bli mer reflektert omkring sine resonnementer, styrke oppfatningen ved å sette ord på tankene og utvikling av kommunikasjonskompetansen i matematikk (Maher 2005; Weber et al. 2008). Ved å teste sine egne ideer, lytte til andres ideer og vurdere hvorvidt ideene er gode og holdbare er med på å utvikle refleksjonskompetansen og resonnementsforståelsen. Det gir en bekreftelse på at måten man tenker på gir mening for seg selv og andre elever. Gruppediskusjoner kan skape læringsmuligheter ved at elevers implisitte matematiske argumenter gjøres eksplisitte (Mercer & Sams 2006; Weber et al. 2008). Mercer og Sams (2006) mener det er med på å styrke elevers resonnement kollektivt, så vel som individuelt. Oppfatningen opplever jeg at kan både styrkes og svekkes. Ved å sette ord på sin idé er man med på å avsløre tankene sine, og flere scenarioer kan oppstå:

1. Det man tenkte hørtes fornuftig ut og andre kommer med sine ideer som bekrefter ens egen.

2. Det lød ikke så fornuftig da man sa det høyt, og andres ideer var mer logiske.
3. Selv om man diskuterer er det ikke sikkert man har noen spesiell oppfatning om temaet.

Når elevene snakker sammen og skal diskutere hverandres argumenter og påstander, kan det bidra til å utvikle deres kommunikasjonsevner. Den sistnevnte faktoren er sterkt knyttet opp til hvorvidt elevene mestrer å diskutere og hva som skal til for å få det til. Det drøftes i neste avsnitt, **2.2 Støttestruktur for gjennomføring av diskusjon**.

Oppsummering: For at diskusjon skal bidra til læring bør det matematiske bildet av en idé, bli gjort synlig for seg selv og andre. Det gjøres ved å sette ord på tanker og ideer i møte med et matematikkproblem. Gitt at elevene mestrer å diskutere kan det øke refleksjonsnivået i matematikk, styrke troen på seg selv og hvordan man tenker og gi bedrete kommunikasjonsevner.

2.2 Støttestruktur for gjennomføring av diskusjon

Selv om fordelene ved diskusjon er mange, er det ikke sikkert elevene mestrer å diskutere med hverandre. Dessuten er det ikke sikkert læreren vet hvordan man kan få det til å fungere. Dette avsnittet drøfter hvordan lærerne og elevene kan suksessfullt gjennomføre diskusjon i matematikkundervisningen. I tillegg belyses noen hindringer, som teorien peker på, i møte med diskusjon mellom elever.

2.2.1 Lærerens rolle og språkets betydning

For å gjennomføre diskusjonen, peker litteraturen på lærerens viktige rolle. Det hersker stor enighet om følgende: lærerens oppgave er å sette i gang diskusjon, gi elevene interessante oppgaver, gi elevene mulighet til å oppleve at matematikken gir mening, ha forventninger og gi elevene ansvar (f.eks Maher 2005; McCrone 2005; Mercer & Sams 2006; Mueller & Maher 2009; Skemp 1976). For noen elever kan ordet diskusjon ha en negativ klang, og forbinder det med uenighet og krangling. Derfor kan oppgaven å skulle diskutere med klassekameratene være en vanskelig oppgave, da man ikke vil krangle med en venn resten av dagen eller uken. I tillegg til at elevene forbinder krangling med diskusjon, kan de oppleve selve diskusjonen som ubehagelig (Lampert et al. 1996). Vissheten om at man må mene noe og at andre kan være uenige, kan oppleves som en negativ konflikt; som følelsen av at ”det er ikke sikkert noen kommer til å være på mitt lag” og ”jeg tør ikke si noe”. Det kan altså være frykt for å ikke bli akseptert av de andre og frykt for å ”dumme seg ut”. I en klasse kan det være elever med ulik status. Dersom man tror at de andre er ”kulere” og mer populære, kan usikkerheten bli for stor til at man tør å si noe. Det samme gjelder motsatt vei. Om ”den kule” er på et lag med de såkalte upopulære elevene, kan det være at han ikke ønsker å bidra fordi de andre er underlegne ham selv. Elevene i Lampart (1996) følte at når andre skulle vise deg at du tok feil, opplevdes det som et personangrep, selv da de brukte matematiske påstander.

For at diskusjon skal fungere mener Mercer & Sams (2006) at læreren er en viktig rollemodell. Deres fokus var hvordan språket var et viktig verktøy for å resonnere sammen. Utvikling av språket skulle gjøre dem i stand til å bruke diskusjon i matematikkaktiviteter. Det fungerte da læreren ledet dem i fremgangsmåten å resonnere på. Læreren oppmuntret noen av elevenes bestemte måter å bruke språket på. Det ledet til bedre læring og begrepsforståelse i matematikk. ”*Språket er et viktig redskap for å utvikle gode begreper og å gi mening til symboler*.” (Brekke et al. 2000 s. 63). Hvorpå Brekke et al. (2000) begrunner viktigheten av å ta utgangspunkt i elevenes ståsted i henhold til språk og erfaringer for å kunne hjelpe de til å videre utvikle sin begrepsforståelse. Også lærerens spørsmål til elevene og måten de stilles på har betydning for elevenes utvikling (McCrone 2005). Lampert (1996) mener at ”Hvorfor tror du det?” er et godt spørsmål å stille elevene når de kommer med en påstand. Situasjonen åpner opp for at elevene får mulighet til å forklare hvordan de tenker. Følgelig er det en idé å snakke med elevene om diskusjon og utvikle et språk som passer seg for diskusjon. Dermed vil elevene forhåpentligvis unngå å sette likhetstegn mellom diskusjon og krangel. For eksempel kan læreren utarbeide regler sammen med elevene, slik at de vet hva de har å forholde seg til (McCrone 2005). Læreren kan ha en diskusjon med elevene om å diskutere. Dermed kan de utarbeide regler for hvordan man diskuterer: som å lytte, oppmuntre og ha forventing til hverandre, stille oppklarende spørsmål, begrunne påstander, være positive og være på lag med hverandre. Å bevisstgjøre elevene på hvordan man diskuterer er utviklende for kommunikasjonskompetansen. I tillegg blir de klar over rammene for hvordan de skal gjennomføre kommunikasjonen, slik at de ikke opplever et motargument som et personangrep. Lærerens rolle som ordstyrer og skape ro og orden påpekes som viktig, dersom diskusjonens fokus er langt unna rekkevidde. Og roen i gruppen er viktig for at elevene skal få tid og ikke presses til å komme med en løsning på et problem (Maher 2005; Martino & Maher 1992)

2.2.2 Elevens rolle i diskusjonen

En longitudinal studie fra USA viser at elever helt ned i andre klasse kan jobbe sammen og diskutere matematikk (Martino & Maher 1992). Studien fortsatte helt frem til elevene gikk siste året på videregående og over på universitetet (Maher 2005). En av lærerens viktige oppgaver var å gi elevene ansvar. Da elevene fikk ansvar og opplevde at de kunne greie det på egenhånd fungerte diskusjon bra. "*Minimal, carefully planned teacher interventions can empower students to take ownership of their learning and solutions. Thus, the responsibility for learning shifts to the students*" (Mueller & Maher 2009 s. 111).

Ideene som elever har i hodet kan jobbes kreativt med. I møte med et problem velger elevene selv fremgangsmåten og strategier for å løse problemet. Ut i fra den prosessen danner elevene seg teorier. Forståelsen av problemet bygger på teoriene og hvordan man jobber med teoriene man har dannet (Maher 2005). Elevene de jobbet med ble motiverte av å få bruke sine egne teorier og ha ansvar for å løse problemene. Da det ble deres ansvar resulterte det i at løsningene måtte gi mening for dem. Svaret måtte gi mening i forhold til teoriene de hadde dannet. Da de argumenterte og måtte overbevise hverandre, førte det til at elevene generaliserte funnene sine. Elevene hadde ikke lenger kun tro på at læreren ene og alene satt med fasitsvaret. Det hadde skjedd et skifte fra lærersentrert klasserom til elevsentrert klasserom (f.eks Lampert et al. 1996; Martino & Maher 1992; McCrone 2005; Mueller & Maher 2009; Weber et al. 2008). Elevene hadde forventing og tro på hverandre. Da de argumenterte og diskuterte påstander med hverandre og det ga mening for dem, "kjøpte" de hverandres påstander (Maher & Martino 1991).

Oppsummering: Lærer og elever må jobbe sammen for å lage klasseromsregler for diskusjon. Det vil kunne bidra til å utvikle deres muntlige ferdigheter. Fokuset fra et lærersentrert klasserom må skifte til et elevfokusert klasserom: læreren stiller krav og forventninger til elevene. Det smitter over og elevene har forventninger til hverandre. Når elevene diskuterer ulike løsninger og begrunner de, vil de kunne akseptere hverandres påstander, dersom det gir mening for dem.

Kapittel 3 Forskningsmetode

Studien dreide seg om å undersøke på hvilke måter elevers argumentasjon i diskusjon kunne utfordre deres relasjonsforståelse av variabler. For å besvare problemstillingen ble ulike forskningstilnærminger og metoder som kunne belyse situasjonen undersøkt. Den valgte forskningstilnærmingen var en kvalitativ casestudie. *"Qualitative case study methodology provides tools for researchers to study complex phenomena within their contexts"* (Baxter & Jack 2008 s. 1). Denne kvalitative tilnærmingen er et verktøy for å studere en sak (case) så vel som rammen rundt saken. For å undersøke hva argumentasjon i diskusjon hadde å si for elevers relasjonsforståelse var det ideelt å observere diskusjon i en gruppe. Erfaringene fra pilotstudien, høsten 2010, ga et nyansert bilde av eleven i gruppen. Da var elevene tilfeldig satt sammen, hvilket ga lærdom i henhold til sammensetning av en hensiktsmessig gruppe. I denne studien det nyttig å vite hvordan elever oppfattet variabler og hvilke misoppfatninger de hadde. Et velgjennomtenkt valg ga retningslinjer for hva slags oppgaver elevene skulle diskutere under observasjonen. Derfor ble en skriftlig matematikktest benyttet for å kartlegge deres ståsted og for dypere innsikt i elevens begrepsforståelse av variabler.

Oppgavene i den skriftlige matematikktesten, så vel som oppgavene benyttet i diskusjonsgruppen, kalles diagnostiske oppgaver. Oppgavene har til hensikt å avsløre elevenes misoppfatninger og beskrives utfyllende i avsnitt **3.1 Utvalg av oppgaver**. For at alle elevene skulle få mulighet til å diskutere matematikk, var det visse kriterier som lå til grunn for sammensetningen. Bakgrunnen og kriteriene for sammensetningen av diskusjonsgruppen beskrives i avsnitt **3.2 Utvelgelse av gruppe**. Etter den skriftlige matematikktesten diskuterte elevene oppgaver, som hadde til hensikt å utfordre deres påstander og meninger. Diskusjonen varte i omtrent en time. I avsnitt **3.3 Observasjon** beskrives metoden hvor videokamera ble brukt for å observere diskusjonen. Fra litteraturen (f.eks Maher 2005; McCrone 2005; Mercer & Sams 2006; Mueller & Maher 2009) går vanligvis slike studier over lang tid og elevene blir observert flere ganger, dessuten er fokuset ofte på læring. I denne studien ble det foretatt én observasjon, i stedet for flere observasjoner over lengre tid.

Oppsummering: For å gå i dybden på en situasjon hvor elever diskuterte variabeloppgaver ble en casestudie med forskningsmetoden observasjon med video ble benyttet.

3.1 Utvalg av oppgaver

Ved forskning på elevers forståelse knyttet til variabler, viser litteraturen til oppgaver som bidro til å belyse elevens begrepsforståelse av variabler (bl.a. Brekke et al. 2000; Gray et al. 2007; Gray et al. 2009; Knuth et al. 2005; Küchemann 1981). Slike oppgaver blir kalt diagnostiske oppgaver. Bell (1993) sier at "*diagnostisk undervisning fokuserer på å avsløre misforståelser og feilmønstre eller ufullstendige begreper først - for så å provosere elevene til å justere sine begreper og oppfatninger*" (bl.a. sitert av Fuglestad 2003 s. 212). Diagnostiske oppgaver bidrar til å utforske elevenes tanker om ulike begreper, som var nyttig da studien skulle undersøke elevers begrepsforståelse av variabler. Brekke (2002) påpeker viktigheten av at oppgavene som gis bør formes på en slik måte at elevene ikke kan få riktig svar med feilaktige ideer knyttet til begrepet. Ut i fra Küchemanns (1981) seks kategorier, beskrevet i underavsnitt **1.2.4 Bruken av variabler**, kategoriseres elevens forståelse av variabler. For å undersøke deres oppfatning av variabler har Brekke et al. (2000) gjort omfattende undersøkelse av grunnskoleelever fra 5., 7. og 9.klasse etter M87 (den reviderte læreplanen fra 1974 som kom i 1987 og ble kalt mønsterplanen). De diagnostiske oppgavene de brukte i testen kan i dag benyttes på skoletrinnene 6. til 10.klasse etter L97 (Læreplanen fra 1997). Det vil si at den kan benyttes i dag med LK06 (Kunnskapsløftet fra 2006).

For å avdekke elevenes forståelse og misoppfatninger knyttet til variabler ble en test med diagnostiske oppgaver benyttet. Testen ga således grunnlag for å sette sammen en diskusjonsgruppe. Sammensetningen av individer var slik at elevens begrepsforståelse knyttet til variabler kunne bli utfordret. Den skriftlige matematikktesten (Vedlegg 1) inneholdt fire ulike oppgaver. Det var dessuten fire diskusjonsoppgaver. Oppgavene som ble benyttet utdypes i de to påfølgende underavsnittene.

3.1.1 Oppgavene fra den skriftlige matematikktesten

Fra avsnitt **1.3 Misoppfatninger omkring variabler** ble flere misoppfatninger beskrevet. Blant annet å bruke bokstaver som objekt eller merkelapp og bokstaver som fjernes eller ignoreres. Slike misoppfatninger kan komme til uttrykk ved diagnostiske oppgaver. For å sette sammen en diskusjonsgruppe var det hensiktsmessig å undersøke elevenes begrepsforståelse av variabler, hvorpå det var nærliggende å benytte seg av diagnostiske oppgaver. Utvelgelsen og hensikten med gruppesammensetningen forklares nærmere i avsnitt **3.2 Utvelgelse av gruppe**. Oppgavene som ble valgt ut for denne studien er godt begrunnet og benyttet i litteraturen (f.eks Brekke et al. 2000; Brekke 2002; Fuglestad 2003; Gray et al.

2007; Gray et al. 2009). Videre beskrives de fire oppgavene som ble brukt i den skriftlige matematikktesten (Vedlegg 1).

I **oppgave 1** skulle elevene lage en matematikkfortelling ut i fra de to bokstavuttrykkene: **a)** $4a + 6a = 10a$ og **b)** $4x + 40 = 120$. Formen på oppgaven ga et bilde av elevers oppfatning av variabler størrelser. Mange elever oppfatter det som et konkret objekt eller selvstendige objekt (Brekke et al. 2000). For et korrekt svar i oppgaven innebar det at bokstaven ble oppfattet som en variabel, ukjent tall eller et generelt tall.

I **oppgave 2** skulle elevene avgjøre hvilket bokstavuttrykk som var størst, $2n$ *eller* $n+2$. For enkelhetens skyld kaller vi oppgaven ”hvilket uttrykk er størst” problemet (Avsnitt **3.4.1 Analyse av testen**). ”*This problem involves the comparison of two expressions, both using the same variable. There is a need to think of the variable as taking on a range of values while making this comparison*” (Gray et al. 2007 s. 7). Oppgaven er hentet fra Küchemann (1981) og blir omtalt som en viktig oppgave for å kartlegge forståelsen for relasjoner. Dersom man behandler uttrykkene separat sees det på som forhold av førstegrad, men dersom man behandler begge utrykkene og ser på sammenhengen vil det bli et andregradsforhold[1]. For en fullverdig besvarelse av oppgave 2 ble det forventet at elevene viste at det var et forhold av førstegrad og andregrad.

Videre i **oppgave 3** var det av interesse å undersøke om elevene så relevansen av en eller annen matematisk sammenheng i en konkret situasjon. En av de tre deloppgavene var følgende: **a)** *Lars kjøper en bil som koster 100 000 kroner. Kompisen Rune har en bil som koster en og en halv gang mer enn bilen til Lars. Hva koster Rune sin bil?*
Oppgaven gikk ut på å se på forholdet mellom en størrelse og ikke differansen, som så mange elever gjør. Av de som betrakter forholdet korrekt, er det flertallet som også klarer å representere et forhold ved bruk av algebra (Brekke et al. 2000).

Den avsluttende oppgaven, **oppgave 4**, tok utgangspunkt i det Brekke et al. (2000) kaller oppvarmingsoppgave for diskusjon; ”Gjett regelen min”. Oppgaven kan gjøre det enklere for

[1] Fra underavsnitt 1.2.4 Bruken av variabler: Küchemann (1981) sier at 2n er et forhold i seg selv, og når man ser på forholdet mellom 2n og n+2 får vi et andregradsforhold. Elevene kan se på forholdet som et førstegradsforhold, andregradsforhold eller begge.

elevene å snakke matematikk. På skriftlig form, så vel som muntlig legger den til rette for god trening i å uttrykke seg matematisk, da man skal begrunne hvordan man tenker. Når en slik oppgave gjøres muntlig kan det bidra til å trene ferdigheter, som å lytte og begrunne.

3.1.2 Oppgavene i diskusjonsgruppen

I dette avsnittet presenteres to av oppgavene elevene diskuterte i gruppen og hva de kan fortelle om elevens nivå av forståelse av variabler. Begge oppgavene legger opp til at elevene kan vise det høyeste nivå av forståelse, altså nivå 4. Det var ikke enkelt å forutsi hvordan elevene ville håndtere oppgavene, derfor skisserer jeg hvilke forberedte spørsmål jeg kunne stille i underavsnitt **3.1.3 Mine forberedte spørsmål**. Spørsmålene ble laget fordi det var en viktig forutsetning at jeg som lærer var åpen for at det kunne oppstå uforutsette situasjoner.

I møte med elevene fortalte jeg at de skulle diskutere ulike matematikkoppgaver. Hvorpå jeg meddelte at målet for økta var å forklare hverandre hva man tenkte, slik at alle på gruppa skjønte hva den andre mente. Dette ble vektlagt, slik at jeg ikke underbevisst motiverte elevene til å bli raskest mulig ferdig med oppgavene. Et slik utfall kan dog være vanlig, da det er uvisst hva som er elevenes erfaring med å diskutere matematikk. Etter en kort forklaring spurte jeg elevene om de hadde samarbeidet i gruppe og hva som var viktig i et samarbeid. Svarene de kom med ble kjørereglene for gruppesamarbeidet. Jeg repeterte svarene de ga og la til noen viktige punkter, som å lytte til hverandre.

Oppgavene elevene diskuterte, som beskrevet under, er to oppgaver hentet fra litteraturen (Brekke et al. 2000; Gray et al. 2007; Gray et al. 2009; Küchemann 1981). Disse oppgavene er godt undersøkt og gjennomført tidligere, hvilket var en støtte for denne studien. Som er referert til innledningsvis har Hodgen et al. (2009) gjennomført en studie som tar for seg forskning av elevers forståelse, i blant annet algebra, fra de siste tretti årene. De har nøye plukket ut oppgaver basert på de originale data fra CSMS testen på 1970-tallet og Küchemanns (1981) fire nivåer i sin egen forskning. Algebraoppgavene fra deres studie var således relevant for denne studien. Hodgen et al. (2009) illustrerer tre algebraoppgaver som ble gitt til elevene, hvorpå resultatene beskrives. Av disse tre oppgavene har en lik og en liknende oppgaver blitt benyttet i denne studiens diskusjonsoppgaver. Elevene diskuterte i utgangspunktet fire oppgaver, men kun to av oppgavene ga mening for studiens problemstilling. To av oppgavene ble eliminert da de hverken bidro til å bygge oppunder eller avkrefte antagelsene man fikk om elevenes forståelse i de to andre oppgavene. Oppgavene kunne dessuten ikke si så mye om hvorvidt argumentasjonen til elevene utfordret hverandre. Dermed var det oppgavene, som kalles ”hvilket uttrykk er størst” problemet og ”samlet pris” problemet, som bidro til å gi det mest helhetlige bildet av elevens forståelse av variabler. Fra oppgave 1, ”hvilket uttrykk er størst” problemet ble elevenes begrepsforståelse av variabler mer tydelig. Mens i oppgave 2, ”samlet pris problemet”, kom også elevenes resonnementsforståelse knyttet til variabler mer tydelig frem. Denne sammenhengen var dessuten en viktig faktor for valg av oppgaver som skulle være med i resultatdelen, i avsnitt 4.2 Resultater fra diskusjonsoppgavene.

Beskrivelse av de to oppgavene:

Oppgave 1: Hvilket uttrykk er størst 2n eller n+2?

Riktig svar: Det avhenger. Hvis $n < 2$, $n+2$ er størst; hvis $n = 2$, $2n = n+2$; hvis $n > 2$, $2n$ er størst.

”Hvilket uttrykk er størst” problemet skilte seg ut fra de andre variabeloppgavene i den skriftlige matematikktesten, og ble benyttet videre som diskusjonsoppgave. Oppgaven skilte seg ut, fordi den ga et bilde av en elevs forståelse for et andregradsforhold. I mange generaliserte aritmetikkoppgaver er det ikke behov for å vise det, da man kan løse oppgaven uten å se på andregradsforholdet. Da oppgaven som nevnt er vel omtalt i litteraturen, var det interessant å undersøke hvordan elevene snakket og satte ord på denne oppgaven.
Oppgaven tilhører kategorien ”bokstaver brukt som en variabel” på forståelsesnivå 4.
Kjennetegn på elever som befinner seg på forståelsesnivå 4 knyttet til kategori 6:
elever gjenkjenner at den relative størrelsen fra de to uttrykkene avhenger av verdien til n.
Misoppfatning som forekommer for denne oppgaven er blant annet elever som tror at 2n er størst på grunn av gangetegnet (Gray et al. 2007; Gray et al. 2009; Küchemann 1981). Fra avsnitt **1.3 Misoppfatninger omkring variabler**, ble det påpekt at elever også hadde misoppfatninger knyttet til et ønske om å gjøre et uttrykk mindre uferdig, som å samle n+2 til 2n.

Litteraturen viser til følgende riktige besvarelser oppgitt i prosent på tilsvarende oppgaver:

Kilde	**Alder**	**Prosent**	**Oppgave**
Küchemann (1981)	13 år	4 ($n \approx 1000$)	2n vs. n + 2
Küchemann (1981)	14 år	6 ($n \approx 1000$)	2n vs. n + 2
Hodgen et al. (2009)	13 år	ca. 4 (n = 756)	2n vs. n + 2
Hodgen et al. (2009)	14 år	ca. 6 (n = 608)	2n vs. n + 2
Gray et al. (2007)	Calculus 1 studenter [2]	46 (n = 174)	2n vs. n + 2
Gray et al. (2009)	Calculus intro. kurs	15 (n = 174)	2n vs. n + 2

Tabell 4 Elevers riktige svar på oppgave 1 oppgitt i prosent.

Oppgave 2**:** Gulrøtter koster 13 kroner pr. kg og poteter koster 5 kr pr. kg.

a) Hvis g står for hvor mange kg gulrøtter som blir kjøpt, og p står for hvor mange kg poteter som blir kjøpt, hva står da 13g + 5p for?

b) Hvor mange kg ble kjøpt til sammen?

Riktig svar:

a) Det beskriver hvor mye man må betale når en kjøper forskjellige mengder av gulrøtter og poteter.

b) g + p

Uttrykket er en funksjon som beskriver hvor mye man må betale ved kjøp av ulike mengder gulrøtter og poteter. Oppgaven kalles "samlet pris problemet", for enkelhetens skyld med hensyn til videre omtale av oppgaven. Om en slik oppgave sier Brekke et al. (2000) at problemstillingen er gitt i en bestemt kontekst, som skal "omsettes" til et "algebraisk språk". Elevene skulle derfor forklare hva uttrykket representerte i denne konteksten.
Oppgave 2 er hentet fra artikkelen "Veiledning til Algebra; F, H og J" (Brekke et al. 2000). Fra både Hodgen et al. (2009) og Küchemann (1981) finner vi lignende oppgaver, hvor oppgaven tilhører kategorien "bokstaver brukt som objekt" på forståelsesnivå 4. Kjennetegn

[2] Calculus 1 og Calculus introduksjonskurs er studier ved college. Elever kan begynne på College etter endt videregående skole. Gray et al. (2007, 2009) gjorde undersøkelsen blant de to overnevnte klassene ved "Liberal arts colleges in New England". Hvilket College det er snakk om er usikkert. "Saint Anselm College" (http://www.anselm.edu/) er et eksempel på et slikt college, og elevene som tar Calculus 1 og Calculus introduksjonskurs går som oftest første året og er rundt 18 til 19 år.

på elever som befinner seg på forståelsesnivå 4 knyttet til kategori 4: elever kan håndtere uttrykk som krever forståelse av spesifikk ukjent størrelse med en kompleks struktur. Oppgave 2 avslørte raskt om elevene behandlet bokstavene som objekter (g for gulrøtter og p for poteter). Elever som viser en slik oppfatning befinner seg på nivå 2 i sin forståelsesutvikling knyttet til variabelbegrepet.

Litteraturen viser til følgende riktige besvarelser oppgitt i prosent på oppgave 2:

Kilde	Alder	Prosent	Oppgave
Küchemann (1981)	13 år	14 (n ≈ 1000)	Hva står 4k + 3b for, dersom kaker koster k kroner og boller koster b kroner?
Küchemann (1981)	14 år	22 (n ≈ 1000)	Samme som over.
Hodgen et al. (2009)	13 år	ca. 10 (n = 756)	Samme som over.
Hodgen et al. (2009)	14 år	ca. 15 (n = 608)	Samme som over.
Brekke et al. (2000)	13 år	2 (n = 517)	Oppgave 2
Brekke et al. (2000)	15 år	7 (n = 511)	Oppgave 2

Tabell 5 Elevers riktige svar på oppgave 2 oppgitt i prosent .

Som vi ser av **Tabell 5** er det en drastisk endring fra hva elevene som var 14 år presterte i 1981 sammenlignet med elevene som var 14 år 2009. For å forklare dette sier Hodgen et al. (2009)

> *This may be because fewer word problems are now encountered in algebra than used to be the case; there may now be more non-contextual algebra which would explain students" apparently slightly greater familiarity with algebraic language* (s. 24).

Oppsummering: Både den skriftlige matematikktesten og diskusjonsoppgavene bestod av diagnostiske oppgaver hentet fra litteraturen. Oppgavene bidro til å avsløre hvor elevene befant seg i sin forståelse av variabler, og hadde til hensikt å utfordre elevene til å justere og begrunne svarene sine, som i sin tur kunne bidra til å bekrefte eller avkrefte en elevs teori og oppfatning av variabler.

3.1.3 Mine forberedte spørsmål

Lærerens rolle er å sette i gang diskusjoner, stille spørsmål og legge frem interessante oppgaver, som påpekt i underavsnitt **2.2.1 Lærerens rolle og språkets betydning**. Dessuten skal faktorene diskusjon og arbeidsoppgavene kunne legge til rette for at elevene skal kunne utfordres (Carpenter et al. 2003; Fuglestad 2003). Med disse tankene i bakhodet utarbeidet jeg noen spørsmål og retningslinjer, for å kunne stille elevene gode spørsmål i diskusjonen. Spørsmålene var ment for å sette elevene på sporet av en tanke eller idé, og til å virke oppklarende. Under presenteres oppgaven med tilhørende spørsmål, som jeg hadde skrevet før møtet med elevene. Spørsmålene tok utgangspunkt i retningslinjene fra blant annet Lampert (1996) og McCrone (2005).

Oppgave 1: **"Hvilket uttrykk er størst" problemet**

Elevene hadde sett denne oppgaven tidligere i den skriftlige matematikktesten. Derfor tenkte jeg at det kunne gjøre det enklere å snakke om den. Allikevel hadde jeg utarbeidet følgende retningslinjer, som skulle være en hjelp til å avklare situasjoner:

- Dersom eleven opplevde at noe var vanskelig kunne jeg spørre om hva er det var som vanskelig. Og om eleven kunne forklare hva som gjorde det vanskelig å forklare.
- Dersom eleven var uklar i sin besvarelse av oppgaven eller om begrunnelsen var uklar, kunne jeg spørre om eleven kunne forklare det igjen eller på en annen måte.
- Dersom elevene kun ga svar ved å sette inn tall kunne jeg spørre om argumentet gjaldt for alle tall, eller om eleven kunne uttrykke det matematisk eller generelt.

Oppgave 2**: "Samlet pris" problemet**

For denne oppgaven hadde jeg utarbeidet følgende spørsmål og retningslinjer, dersom jeg skulle føle at situasjonen ble vanskelig eller at elevene avsluttende en diskusjon som kunne gi interessante utfall:

- Dersom elevene ikke visste hvordan de skulle begynne samtalen kunne jeg stille følgende spørsmål: Hva forteller uttrykket oss? Hva forteller de ulike leddene i uttrykket deg? Hvordan kan du forklare dette til noen som ikke forstår, hvilke ord vil du bruke?
- Dersom elevene bruker p og g som merkelapper kunne jeg stille spørsmålet: hva skjer dersom du skal handle flere kilo poteter eller gulrøtter, får dere det samme svaret?
- Dersom elevene uttrykker mengdesvaret 13 kg gulrøtter + 5 kg poteter kunne jeg stille spørsmålet: hva koster det dersom du skal handle flere kg poteter eller gulrøtter, får dere det samme svaret da?

Jeg fikk bruk for deler av disse spørsmålene, som jeg hadde forberedt. Og det var en nyttig prosess og reflektere rundt hva jeg trodde elevene ville svare.

3.2 Utvelgelse av gruppe

Da formålet var å komme nært inn på personer, og forstå hvordan de oppfattet variabler var det hensiktsmessig å velge ut en gruppe individer, hvor hver enkelt skulle få mulighet til å diskutere, komme med påstander for så å begrunne dem. Ved en kvalitativ undersøkelse forsøker man å få informasjon om et begrenset antall mennesker. Ikke fordi det er representativt, men fordi det er hensiktsmessig. På den måten får man overførbar og utvidet kunnskap om fenomenet som undersøkes (Johansen, Tufte & Kristoffersen 2005). Utvelgelsesprosessen av gruppen som diskuterte matematikkoppgaver, beskrives gjennom tre steg: valg av klasse, gruppe og diskusjonsgruppe.
Denne studien ble meldt til Personvernombudet for forskning:

> *Forskere og studenter ved institusjoner som har utpekt NSD som personvernombud, og som i forbindelse med forsknings- eller kvalitetssikringsprosjekt skal behandle personopplysninger elektronisk eller opprette et manuelt personregister med sensitive opplysninger, har meldeplikt til personvernombudet* (Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS, www.nsd.uib.no/personvern/).

Prosjektet ble godkjent av personvernombudet (Vedlegg 4) og foreldre og foresatte i elevens klasse ble informert om prosjektet (Vedlegg 2). I informasjonsbrevet ble foreldre/foresatte oppfordret til å samtykke til at sønn eller datter kunne delta i den skriftlige matematikktesten og i videoobservasjonen. Elevene, som deltok i denne studien og nevnes med fiktive navn, har foreldre/foresatte som har godkjent deres deltagelse på testen, så vel som i videoobservasjonen.

Klassen, som skulle gjennomføre den skriftlige matematikktesten gikk i niende klasse, beskrives i underavsnitt **3.2.1 Klassen**. Fra besvarelsene i den skriftlige matematikktesten utpekte et spesifikt fokus seg. Gruppen elever som hadde det spesifikke fokuset kalles utvalgsgruppen og beskrives ytterligere i underavsnitt **3.2.2 Utvalgsgruppen**. Denne gruppen ble sett i sammenheng med blant annet Küchemanns (1981) kategorier. For å sette sammen en hensiktsmessig diskusjonsgruppe ble det valgt ut fire elever som utgjorde diskusjonsgruppen. Begrunnelsen for sammensetningen utdypes i underavsnitt **3.2.3 Diskusjonsgruppen**.

3.2.1 Klassen

Første steget i prosessen kalles ”strategisk utvelging”, som er forskerens målgruppe for innsamling av data (Johansen 2005). I denne studien ble en niende klasse valgt.
Rapporten fra TIMMS i 2007 og 2010 slår fast at norske elever har problemer med å forstå variabler (Grønmo & Onstad 2009; Grønmo et al. 2010). Elevene som TIMMS rapportene

henviser til er elever på ungdomsskolen. Også andre studier med fokus på ungdomsskoleelever kan bekrefte at elever opplever algebra som vanskelig å forstå (f.eks Hodgen et al. 2009; Knuth et al. 2005; Küchemann 1981). I denne studien synes jeg derfor at det var interessant å møte elever som nylig hadde stiftet bekjentskap med begreper som algebra, likninger, bokstavregning og variabler. I åttende klasse har man lagt et grunnlag for hva algebra er, og i niende klasse skal man utvikle det videre. Derfor ønsket jeg å undersøke hvordan elever i niende trinn på ungdomsskolen snakket om algebra og om deres argumentasjon kunne utfordre sin egen eller andres relasjonsforståelse. Klassen som deltok i denne studien ble valgt på bakgrunn av tilgjengelighet, da det ikke forelå noen føringer i studiens problemstilling, som for eksempel type skole eller skolens beliggenhet og miljø. Tilgjengelighet vil si en nærliggende skole i forhold til mitt bosted og en skole som var villig til å delta i prosjektet. Dessuten var valget av klassen et resultat av en vikarstilling jeg fikk i desember 2010.

3.2.2 Utvalgsgruppen

Den skriftlige matematikktesten ble analysert på bakgrunn av Küchemanns (1981) seks kategorier. Resultatene fra testen bidro til å velge fokuset for å velge ut en spesifikk gruppe elever i klassen. Gruppen ble kalt en utvalgsgruppe. Om å velge utvalgsgruppe på denne måten sier Johansen et al. (2005); ”*Hvilke kriterier vil skal legge til grunn for rekrutteringen, og hvor mange informanter som skal være med (…) kan være noe som utkrystalliseres etter hvert som arbeidet skrider fram*” (s. 107). Valget av utvalgsgruppen var ikke gitt på forhånd, men avhengig av elevene i klassen og svarene de ga på testen. For at hver enkelt elev skulle ha mulighet til å bli utfordret gjennom en annen elevs påstand eller argument, medførte det at elevene ikke kunne befinne seg i hver sin ende av ”forståelseskalaen”. I tråd med det sosiokulturelle perspektivet på læring vil en elev som kan mer, fungere som en medierende hjelper for medeleven som kan litt mindre. Prinsippet går ut på å bruke språket for å utvikle ”tankens byggeklosser” (Imsen 2005). I dette tankesamarbeidet mellom elevene, som befinner seg på ulikt nivå, vil eleven som kan mer bidra til å stimulere eleven som kan mindre til å ”strekke seg” for å klare mer. Dersom elevenes forståelse er på svært ulikt sted i utviklingen kan det bli til stor frustrasjon for dem begge. For eleven som befinner seg på et høyere nivå kan samarbeidet med medeleven, som befinner seg på et mye lavere nivå, oppleves meningsløst. Det samme kan eleven på et lavere nivå også oppleve. Dersom elevene befinner seg på omtrent samme sted kan det gi for liten utfordring. Derfor var det viktig at elevene fikk mulighet til å jobbe sammen med andre elever hvor samtalen hadde størst potensial til å gi mening og utfordring for enkeltindividet. En slik gruppesammensetning av elever med ulik forståelse utgjør en heterogen gruppe:

> *I heterogene grupper ser vi at en mer utførlig og komplisert tenkning finner sted, elevene engasjerer seg oftere i å forklare for hverandre, de tar oftere andres perspektiv når de diskuterer lærestoff. Alt dette øker forståelsen, kvaliteten på tenkningen og nøyaktigheten av langtidsminnet* (Johnson, Johnson, Haugaløkken & Aakervik 2006 s. 69).

På grunn av tidsbegrensinger i studien ble utvalget basert på elever som befant seg i det øvre sjiktet av ”forståelsesskalaen”. Det kom av at de kunne begynne å snakke om oppgavene uten å føle seg ”avkledd” i situasjonen ved at en utenforstående og andre elever skulle finne ut hva man ikke mestret så godt. Jeg mener allikevel at den samme metoden vil fungere for elever på et lavere forståelsesnivå knyttet til variabler, men da tiden var knapp var elever på et høyere nivå en tryggere løsning.

Etter å ha undersøkt elevenes svar i testen ble jeg motivert til å rette fokus mot relasjonsforståelse knyttet til variabler. Fra testen ble en utvalgsgruppe på ni elever valgt ut basert på oppgave 2: ”Hvilket uttrykk er størst av 2n eller n+2? Forklar hvorfor.” Oppgave 2 utpekte seg, fordi den ga tydelige indikasjoner på hvilket nivå elevene befant seg på i sin forståelse av variabler. En av de ni elevene viste en særdeles god forståelse av variabler. Eleven ble tiltenkt rollen som den medierende hjelperen. Fire av åtte elever besvarte oppgave 2 ved å sette inn tall for n og sa at 2n var størst. Tre av åtte elever skrev at de skjønte at 2n ikke alltid var størst. Disse besvarelsene viste en forståelse for variabler knyttet til nivå 3 hvor svaret på oppgaven kalles ”delvis rett svar” (**Avsnitt 4.1 Testresultater**). Den videre sammensetningen av en diskusjonsgruppe utdypes nærmere i neste underavsnitt.

3.2.3 Diskusjonsgruppen

I det siste trinnet i prosessen ble en diskusjonsgruppe valgt. Diskusjonsgruppen ble valgt ut i fra helheten av besvarelsen fra den skriftlige matematikktesten til utvalgsgruppen, prinsippet om den medierende hjelper og en heterogen gruppesammensetning. For at elevene skulle få mulighet til å utfordre hverandres forståelse gjennom diskusjon, skulle gruppens medlemmer befinne seg på litt ulikt sted i utviklingen av forståelsen av variabler. I gruppen elever som viste høyt forståelsesnivå var det som sagt én elev som utpekte seg. Eleven viste ikke bare god forståelse på én oppgave, men på samtlige oppgaver. Denne eleven skulle fungere som en medierende hjelper, og eleven skulle potensielt bidra til å utfordre medelevenes forståelse. De andre elevene i gruppen hadde et forståelsesnivå som ikke var for langt unna til at kommunikasjon og diskusjon potensielt skulle fungere for alle parter. Kunne den såkalte ”flinke eleven” også bli utfordret? Med fokus på begrunnelser og bruk av det algebraiske språket, skulle hele gruppen kunne bli utfordret. Spesielt da de ikke var vant til å snakke om matematikk og dele sine tanker og meninger om matematiske problemer.

En gruppe som skal samarbeide har en hensiktsmessig størrelse på to til seks deltagere (Johnson et al. 2006). Fra de åtte elevene som hadde et delvis rett svar, ble det valgt ut tre elever, slik at gruppen ville bestå av totalt fire elever.

Faktorer som støtter gruppestørrelsen (Johnson et al. 2006 s. 68):

- **Større gruppe, dess større spennvidde på evner:** Med fire elever med ulik forståelse av variabler, ville variasjonen kunne bidra til flere muligheter for å utfordre hverandres forståelse av variabler.
- **Mindre gruppe:** Da elevene skulle diskutere oppgaver i omtrent én time, ville fire elever være bedre enn seks elever, slik at hver elev ville få større mulighet til snakke og dele sine meninger. Dermed ble hver elev synlig, og fikk mindre mulighet til å gjemme seg bak en annen elev. En mindre gruppe kan dessuten bidra til mer personlig støtte, i motsetning til større grupper som kan oppleves som upersonlige.
- **Sosiale ferdigheter** kreves av en gruppe uavhengig størrelsen, men dess større gruppen er dess mer kreves av gruppemedlemmene. Derfor ville en større gruppe kreve en høyere kompetanse på dette området. Da de sosiale ferdighetene ikke skulle trenes før diskusjonsøkten, var det hensiktsmessig med en mindre gruppe.

I nybegynnerfasen for gruppesamarbeid råder Johansen et al. (2006) å sette sammen grupper på to eller tre personer. Allikevel valgte jeg fire elever. Årsaken til at jeg ikke valgt to eller tre elever var fordi jeg var usikker på hvorvidt paret eller trioen ville fungere sammen. Med større variasjon i gruppen ville potensielt noen kunne kommunisere bedre enn andre. Dessuten vil et bredere mangfold i forståelses for variabler kunne bidra til å oppdage hva elevene mestret og hvor de kom til kort. Elevenes ulike innspill kan følgelig bidra til å utfordre og engasjere hverandre, følgelig hadde spennvidden i forståelsen en viktig betydning for utvelgelsen. Dersom denne studien hadde vart over en lengre periode kunne gruppestørrelsen ved en senere anledning blitt redusert til par, hvor et hensiktsmessig par av elever diskuterte en meningsfull oppgave. Reduksjonen ville ha blitt gjort på bakgrunn av elevenes evne til å utfordre hverandres påstander og evne til å kommunisere med hverandre. Og oppgaven ville ha vært i samsvar med parets evne, for å utfordre deres forståelse.

I avsnitt **4.1 Testresultater** beskrives de fire elevene som ble valgt ut fra utvalgsgruppen på bakgrunn av testresultatene. Elevene fikk de fiktive navnene Sara, Lise, Jon og Ivar.

Oppsummering: Den strategiske utvelgingen av klassen har utgangspunkt i fokuset til studien. Utvalgsgruppen ble valgt på bakgrunn av interessante funn i testen og bestod av ni elever. Ut fra utvalgsgruppen ble det dannet en heterogen diskusjonsgruppe på fire elever. Gruppen skulle ikke ha for store forskjeller, med tanke på hvor de befant seg i utviklingen av sin forståelse av variabler. Oppgavene som ble benyttet i den skriftlige matematikktesten og som oppgaver i diskusjonen kalles diagnostiske oppgaver. Oppgavene hadde til formål å avdekke elevenes forståelse, misoppfatninger og å bidra til å utfordre hverandre gjennom sine begrunnelser.

3.3 Observasjon

Et fellestrekk i teorien (f.eks Maher 2005; McCrone 2005; Weber et al. 2008) på området diskusjon i matematikk, er observasjon av elever ved hjelp av videoopptak. Da elevene i forskningen til Weber et al. (2008) skulle argumentere for hvilket terningselskap som ga best terninger, ble elever og lærere observert ved hjelp av video. For å bli godt kjent med data ble videoopptakene av gruppediskusjonen sett flere ganger av forskningsteamet. I forskningen til McCrone (2005) var fokuset på hvordan elevers bidrag til diskusjon endrer seg over tid og hvilke grep læreren gjorde i forhold til utvikling i diskusjonen. Metoden som ble brukt var observasjon ved video av elever og lærere. De valgte observasjon på grunn av *"The research questions needed to be addressed through close observation of a mathematics classroom"* (McCrone 2005 s. 116). Et annet eksempel er *"to gain an understanding of how students think about mathematical ideas when they work together on well-defined investigations with minimal outside intervention"* (Maher 2005 s. 1). Forskningsteamet benyttet seg av videoobservasjon av fokusgrupper, som tilsvarer denne studiens "diskusjonsgruppe". De hevdet at videoopptakene kunne hjelpe dem å studere kompleksiteten av læring i en gruppe. I tillegg gjennomførte de blant annet intervju med enkeltelever for å få innsikt i hvordan elevene så på sin deltakelse i studien.

Valget av videoobservasjon ble i første omgang gjort med tanke på at det skapes muligheter gjennom videoopptaket, til å se og oppleve spesifikke hendelser selv etter gjennomføringen. Det gir mulighet for å oppdage nyanser og detaljer, som man kunne ha gått glipp av ved å kun notere der og da. Dessuten ga videoobservasjon meg mulighet til å erfare gjennomføringen av et slikt opplegg. For det andre inspirerte og støttet litteraturen meg i valget av forskningsmetoden videoobservasjon. I observasjonen av diskusjonsgruppen vil ser man etter kritiske øyeblikk. Dette er øyeblikk hvor elevens argument kan ha bidratt til en forandring i hans eller hennes forståelse. Hvordan videoklippene ble behandlet og hvordan disse kritiske øyeblikkene ble valgt ut, beskrives i neste avsnitt **3.4 Fremgangsmåten for analyse av data**.

Oppsummering: Observasjon av elevene som diskuterte matematikk ble gjort ved hjelp av videokamera. En slik fremgangsmåte ga et detaljrikt bilde av gruppen og diskusjonen de gjennomførte.

3.4 Fremgangsmåten for analyse av data

I dette avsnittet utdypes hvordan den skriftlige matematikktesten og videoobservasjonen ble analysert med støtte i litteraturen. For å tolke elevenes besvarelser fra testen med tanke på deres forståelse av variabler, ble noen retningslinjer benyttet. Disse retningslinjene kalles koder og baserer seg på Küchemanns (1981) kategorier, som utdypes i underavsnitt **3.4.1 Analysen av testen**. For å håndtere det visuelle datamaterialet ble en godt utarbeidet fremgangsmåte benyttet. Med den valgte fremgangsmåten ble videoopptaket gjennomgått. Deretter ble klippene nøye analysert med tanke på elevenes argumenter. Samtalen elevene hadde i diskusjonsgruppen ble således analysert ved hjelp av en modell som kalles Toulmins modell. Fremgangsmåten og Toulmins modellen beskrives i underavsnitt **3.4.2 Analysemodellen for observasjon**.

3.4.1 Analysen av testen

I studien til Knuth et al. (2005) benyttet de seg av variabeloppgaver som kan sammenlignes med oppgavene benyttet i denne studien. Et av deres flere fokus var å undersøke elevers forståelse og tolkning av symboler. Elevene, som gikk i 6. – 8.klasse, gjennomførte en skriftlig matematikktest. I deres undersøkelse brukte de oppgaven ”hvilket uttrykk er størst av 3n og n + 6”, mens denne studien benyttet oppgaven ”hvilket uttrykk er størst av 2n og n+2”. Disse oppgavene kalles altså ”hvilket uttrykk er størst” problemet (Knuth et al. 2005). Kodingen av testen tok utgangspunkt i Küchemanns (1981) seks kategorier og elevers misoppfatninger knyttet til variabler.

<u>Kodene som ble benyttet var følgende seks kategorier (Knuth et al. 2005):</u>

- *Flere verdier:* Eleven uttrykte at en bokstav kunne representere mer enn en verdi.

- *Spesifikt tall:* Eleven uttrykte at en bokstav hadde en spesifikk verdi.
- *Objekt:* Eleven uttrykte at bokstaven representerte en merkelapp for et fysisk objekt.
- *Operasjon:* Eleven uttrykte at en matematisk regneoperasjon ga en større verdi enn en annen (for eksempel multiplikasjon ga større verdier enn addisjon).
- *Ingen respons eller vet ikke.*

Disse kodene, tilpasset elevenes besvarelse, ble således benyttet i denne studien, da det forelå et tilsvarende teoretisk utgangpunkt sammenlignet med undersøkelsen til Knuth et al. (2005). I avsnitt **4.1 Testresultater** presenteres elevenes besvarelse av ”hvilket uttrykk er størst” problemet.

3.4.2 Analysemodellen for observasjonen

Ved den skriftlige matematikktesten kom elevers begrepsforståelse av variabler til uttrykk gjennom besvarelsen. Diskusjonen ga også et innblikk i elevenes forståelse og dessuten et mer nyansert bilde. Et bilde av gruppesammensetningen og hvordan samtalen mellom elevene fungerte. Et bilde av elevenes argumenter og hvorvidt de bidro til å utfordre deres forståelse. Videre beskrives fremgangsmåten i arbeidet med videoopptakene.

Powell, Francisco & Maher (2003) presenterer en analytisk modell for å studere elevers utvikling av matematiske ideer og resonnement ved å bruke videoobservasjon. Modellen baseres på en longitudinal studie, som på det tidspunktet var på sitt sekstende år. Hovedfokuset var elevers utvikling av matematiske ideer, ved hjelp av observasjon av elever i fokusgrupper. Elevenes behov for å gjøre matematikk fornuftig bidro til å utvikle elevenes argumentasjon, rettferdiggjøring og bevisføring av påstander. Da modellen har blitt utviklet over flere år og gjelder for data av elever som jobber sammen, snakker matematikk og argumenterer, har denne analytiske modellen blitt benyttet for å jobbe med videoopptaket.

Fremgangsmåten (Powell et al. 2003):

1. Være oppmerksom når man ser på videoopptaket.
2. Beskrive videodata objektivt.
3. Identifisere kritiske øyeblikk. Det kritiske øyeblikket oppfattes av forskeren som en situasjon hvor en elev forstod noe nytt.
4. Transkribere. Lyd og bilde skal overføres ved å skrives ned.
5. Koding. Dette verktøyet er til for å finne temaer, slik at det blir enklere å analysere data.
6. Konstruere en tidslinje (storyline).

7. Komponere en fortellende historie.

Derry (2010) oppsummerer godt sluttprosessen med utsagnet*"A continual and interactive process of building the researcher's understanding, similar to how a film director watches rushes and makes selections, influences these selections"* (s. 11).
I første omgang så jeg nøye gjennom videoopptaket. Opptaket ble sett i lys av forskningsspørsmålet og en kategori hentet ut i fra litteraturen: kjennetegn på god diskusjon, som kan lede til læring; elevene er aktive med i diskusjonen, presenterer og begrunner sine matematiske påstander, lytter aktivt til hverandres argumenter, utfordrer hverandres argumenter dersom det ikke gir mening (McCrone 2005; Weber et al. 2008). Denne kategorien utdypes ved hjelp av Toulmins modell senere i dette underavsnittet.

Da videoopptaket var gjennomgått etter strukturen til Powell et al. (2003), var fokuset rettet på elevenes argumenter knyttet til deres relasjonsforståelse, sett i sammenheng med deres resonnementsforståelse og begrepsforståelse av variabler. I forskningen til Weber et al. (2008) undersøkte de altså elevenes argumenter knyttet til diskusjon om hvilket terningselskap som ga best terninger. Fokuset i forskningen deres var hvordan diskusjon kunne på spesifikke måter bidra til læring. Samtalene til elevene omkring terningselskapene ble observert og elevenes argumenter ble tatt i nærmere betraktning. For å analysere elevenes argumenter ble Toulmins modellen benyttet. Den skulle bidra til å analysere begrepsforståelsen, så vel som å kategorisere og vurdere kvaliteten av en begrunnelse, som denne studien referer til som resonnementsforståelse. Følgelig er fremgangsmåten de benyttet i fokuset på elevers argumenter relevant for min studie.

Toulmins modellen deles i tre deler: **påstand** (claim), **data** (data) og **begrunnelse** (warrant). En begrunnelse er hva Weber et al. (2008) kaller *warrant* eller *mathematical principles*. *Warrant* oversettes med "hjemmel, støtte, garanti" og knyttes til å "begrunne og garantere". I denne studien benyttes ordet begrunnelse for ordet warrant med følgende definisjon: Begrunnelsen er en matematisk garanti for at en påstand er gyldig knyttet til data.

I en diskusjon vil elevene kunne fremme sine synspunkter. En elev kan for eksempel hevde at et bokstavuttrykk er større et enn annet uttrykk, ved å sette inn tall i uttrykket. Dermed uttrykker eleven en påstand og bruker tall som data. Elevens argument kan potensielt utfordre de andre elevene til å si sin mening knyttet til hans påstand. Dersom en medelv er uenig i hans påstand, kan det utfordre eleven til å forsvare sin mening. Weber et al. (2008) bekrefter at ved uenighet om påstand, data eller begrunnelsen utfordres eleven til å forsvare argumentet sitt. I situasjonen over kan man tolke elevens påstand som; hvilket uttrykk som er størst avhenger av verdien til bokstaven. Det vil si at eleven viser forståelse av variabler hvor en bokstav er som et generelt tall (kategori 5 – bokstaven har mer enn én verdi), hvilket er elevens begrunnelse for at påstand og data stemmer.

Det er ikke alltid elevens begrunnelse kommer til uttrykk, som illustrert i eksemplet over. Ved et slikt tilfelle foreslår Weber et al. (2008) å anta hva som er elevens begrunnelse knyttet til påstand og data. Videre vil jeg skissere en fremgangsmåte for å analysere argumentet. Den tar utgangspunkt i fremgangsmåten til Weber et al. (2008) ved bruk av Toulmins modell, som har blitt utdypet over ved hjelp av et eksempel og forklaring av denne studiens begreper knyttet til Toulmins modell.

<u>Fremgangsmåten for å analysere argumenter:</u>

- Elevenes argument:
    1. **Påstand**, noe som hevdes
    2. **Data**, støtte for påstanden
    3. **Begrunnelse**, sier hvordan påstanden utledet fra data stemmer knyttet til Küchemanns (1981) kategorier og nivå av forståelse av variabler.
- Dersom elevene **ikke fremlegger en garanti** for at data stemmer overens med påstanden, drøftes hva slags matematisk begrunnelse jeg tror lå til grunn for elevens argument.
- Ved **forsvar av argumentet**, er fokuset på hvilken del av argumentet som forsvares: påstand, data eller begrunnelsen.
- Dersom **argumentet utfordres**, undersøkes elevens grunnlag for å utfordre argumentet.

Argumentene ble sett i sammenheng med elevens relasjonsforståelse, med fokus på elevens begrepsforståelse eller resonnementsforståelse (beskrevet i underavsnitt **1.2.1 Forståelsestyper**). *Hva var årsaken til at eleven kom med en påstand? Hva sier påstanden om elevens forståelse, og hvilken del av forståelsen? Hvor befinner eleven seg i forhold til Küchemanns kategorier og på hvilket nivå? Endret elevens forståelse seg underveis? Og hva skyldtes det?* Disse spørsmålene var retningslinjer for å forklare sammenhengen mellom elevens argumentasjon, deres forståelse av variabler og for å undersøke om argumentet kunne utfordre elevens eller medelevens forståelse av variabler (beskrevet i underavsnitt **1.2.3 Utfordre elevers forståelse**).

Resultatene fra videoobservasjonen presenteres som utrag med transkripsjon, hvorpå de kort beskrives og analyseres ut i fra fremgangsmåten skissert over. Å presentere korte transkripsjonsutrag har til hensikt å gi et innblikk i gruppens kompleksitet og gjenoppleve det viktige øyeblikket. Et transkripsjonsutrag er hensiktmessig for å presentere bevis og grunnlag for tolkningen av det kritiske øyeblikket. Transkripsjonsutdragene skal ikke tas ut av sin sammenheng for å ikke gi et feilaktig bilde av hva som faktisk skjedde (Powell et al. 2003). Det vil si at de utvalgte transkripsjonene i avsnitt **4.2 Resultater fra observasjonen** gir et fullverdig bilde av hva som hendte da elevene diskuterte matematikkoppgavene. En slik fremgangsmåte er ofte benyttet i liknende studier (bl.a. Lampert et al. 1996; Maher, Powell, Weber & Lee 2006; McCrone 2005; Mueller & Maher 2009; Powell et al. 2003; Weber et al. 2008), og er således en støtte for å bruke denne fremgangsmåten for å gjenfortelle hva som skjedde i observasjonen.

Oppsummering: Den skriftlige matematikktesten ble kodet fra retningslinjer i litteraturen (Knuth et al. 2005) i sammenheng med Küchemanns (1981) kategorier og misoppfatninger knyttet til variabler. I analysen av observasjonen ble først fremgangsmåten til Powell et al. (2003) og problemstillingen min for utvelgelsen av videoklipp benyttet. Deretter brukte jeg ”linsen” til Weber et al. (2008) ved hjelp av Toulmins modell for å analysere elevenes argumenter og hvorvidt de utfordret hverandres ideer knyttet til variabler. Utdragene fra observasjonen kalles transkripsjoner og gir et inntrykk av hva som skjedde. Til slutt ble elevenes argumenter tolket i lys av teorien.

Kapittel 4 Resultater

I første del av kapittelet presenteres elevenes resultater fra den skriftlige matematikktesten, med utgangspunkt i "hvilket uttrykk er størst" problemet. Testresultatene er kategorisert etter kodene fra underavsnitt **3.4.1 Analyse av testen**. Ut i fra resultatene tolkes misoppfatningene i henhold til Küchemanns (1981) kategorier og hvilket forståelsesnivå elevene befant seg på. Dessuten beskrives elevene som ble valgt ut til å representere diskusjonsgruppen. Elevene har fått fiktive navn og beskrives med tanke på hvorfor de er satt sammen og eventuelt hva slags rolle som de ble tiltenkt. I andre del av dette kapittelet presenteres observasjonen av de to ulike oppgavene, som elevene diskuterte: "hvilket uttrykk er størst" problemet og "samlet pris" problemet. Disse resultatene struktureres i henhold til det som ble skissert i underavsnitt **3.4.2 Analysemodellen for observasjon**.

4.1 Testresultater

Resultatene fra den skriftlige matematikktesten har flere likhetstrekk med resultatene fra ungdomsskoleelevene i Brekkes et al. (2000) undersøkelse, Gray et al. (2009) og Gray et al. (2007) sin undersøkelse av elever fra første året på college. Fra Knuth et al. (2005) sin studie ble følgende kategorier benyttet: *flere verdier*, *spesifikke tall, objekter, operasjon* og *blankt svar*. Tilpasset denne studien ble en felles kategori, *misoppfatninger*, benyttet (**Tabell 6**).

Oppgave 2: Hvilken er størst av 2n og n+2. Forklar.	
Riktig svar – *Flere verdier*	**Ant.**
2n er større enn n+2 når n er større enn 2	3
Delvis riktig svar – *Spesifikke tall*	
Det er ikke i alle sammenhenger at 2n er større enn n+2	3
2n er størst og setter inn et eller to vilkårlige tall for n.	5
Misoppfatninger	
Objekt: 2n = n+2	13
Operasjon: 2n er størst, pga. gangetegn eller plusstegn	9
Sier at 2n er størst. Ingen begrunnelse.	5
n+2 er uferdig	1
Blankt svar	11
Totalt antall elever	**49**

Tabell 6 Svarene fra den skriftlige matematikktesten knyttet til oppgave 2.

Misoppfatningen som hadde størst oppslutning blant elevene var at de trodde at 2n var lik n+2. Flertallet som svarte dette mente at når man la sammen n og 2 så ble det 2n, altså n+2=2n. Hvilket indikerer at de trodde utrykkene var like store. Elevens misoppfatninger knyttet til dette er at de ser på bokstavene som konkrete objekter og ikke som symboler for tall. I dette tilfellet kombinerer de tall og variable størrelser ved å tro at addisjon betyr ”legge sammen” eller ”å samle”, som Brekke et al. (2000) sier. Ut i fra dette svaret kan man anta at elevene har et lavt nivå av forståelse, omkring nivå 1.

8 av 49 elever svarte at 2n er størst, fordi det er et gangetegn mellom bokstaven og tallet. Noen satt inn tall for å begrunne denne påstanden. Dette er hva Knuth et al. (2005) kaller begrunnelse ved operasjon og viser instrumentell forståelse, som ikke er en fullstendig urasjonell begrunnelse, sier Küchemann (1981). Også noen elever på College[3] har denne misoppfatningen. Gray et al. sier at ”*This persistent general view that multiplication makes numbers larger than addition appears to indicate that these students are thinking only of natural numbers as the referents of the variable here*” (2007 s. 7). Disse elevene har et lavt forståelsesnivå av variabler.

8 av 49 elever har delvis riktig svar. Fem elever setter inn ulike tall for n, og sier at 2n er størst, mens tre elever sier at det ikke er i alle sammenhenger at 2n er større enn n+2. Disse elevene har skjønt at uttrykkene er avhengig av n, og at n kan variere. Det er hva Küchemann (1981) kaller forståelse for relasjoner av førstegrad. Elevene som besitter denne forståelsen har kommet langt i sin utvikling, og kan antas å være på nivå 3. Det er rimelig å anta at de behandler n som en spesifikk ukjent størrelse. For at disse elevene, som allerede har en gryende forståelse av variabler, er det viktig å få utfordringer som kan bidra til en fullstendig overgang fra instrumentell forståelse til relasjonsforståelse.

3 av 49 elever som tok den skriftlige matematikktesten klarte å begrunne at 2n > n+2 dersom n>2. Küchemann (1981) mener at elever som mestrer å begrunne svaret sitt i en slik oppgave kan håndtere komplekse forhold av denne typen og kan se på den mulige effekten n kan ha på uttrykkene. Elevene som mestret denne oppgaven viser et høyt forståelsesnivå, trolig opp til nivå 4.

[3] Etter å ha gått på High School (9 – 12 klasse), kan man fortsette på College. College varer omtrent fire år. (http://en.wikipedia.org/wiki/Education_in_the_United_States#College_and_university)

Fra testresultatene ble altså en diskusjonsgruppe satt sammen som bestod av fire elever. Faktorene som spilte inn for gruppesammensetningen ble beskrevet i underavsnitt **3.2.3 Diskusjonsgruppen**. Én av elevene som ble valgt ut til diskusjonsgruppen viste som nevnt et høyt nivå av forståelse gjennom alle oppgavene i den skriftlige matematikktesten. Eleven kalles Sara og hennes karakteristikk beskrives i neste avsnitt.

De tre andre elevene ble valgt ut fra følgende faktorer:

- *Fellestrekk*: alle hadde et delvis rett svar på oppgave 2, men unngikk eller mestret ikke å skrive et endelig svar med bokstaver.
- *Variasjon i besvarelsen knyttet til de andre oppgavene*: noen viste god forståelse for oppgave 1, mens andre viste svak forståelse for den samme oppgaven. Hvilket også gjaldt for de resterende oppgavene. Det vil si elevene hadde ulike styrker og svakheter knyttet til sin forståelse av variabler.

Til sammen ble dette en gruppe på fire elever med de nevnte navnene Jon, Ivar, Sara og Lise.

Karakteristikken av de ulike personene, med fiktive navn:

Sara: Oppgaven til Sara skilte seg med en gang ut fra de andre besvarelsene til klassen. Hun viste god forståelse av variabler og begrunnet svare sine svært presist. Følgelig var hun en god kandidat som den medierende hjelperen. Med god forståelse for alle oppgavene i matematikktesten, ville hun være fleksibel i forhold til oppgaven som ble gitt til diskusjonsgruppen.

Lise: Lise ga en middels god besvarelse og hører innunder kategorien ”setter inn tall for n, og sier at n er størst”. I oppgave 1, matematikkfortellingen, viser hun en ufullstendig forståelse av variabler. Allikevel ga det hun skrev uttrykk for at hun kunne strekke seg ganske raskt med rett utfordring. Blant annet skulle Sara være en nøkkelperson for å gi Lise utfordringer. Lise satte altså inn høye tall for n i oppgave 2 for å vise at hun mente 2n var størst. Hun begrunnet ikke svaret, hvilket gjorde det interessant å høre hennes begrunnelser knyttet til variabler.

Jon: Jon ga en middels god besvarelse og besvarte oppgave 2 på følgende vis: svaret avhenger av n og dens størrelse. Han viste det med flere tall som befant seg i grenseområdet hvor 2n og n+2 bytter på å være størst. Også han viste en ufullstendig forståelse for oppgave 1, matematikkfortellingen. Den var svakere enn Lise sin besvarelse, men foruten om den oppgaven var hans besvarelse en bedre besvarelse enn hennes. Jon er den av de tre elevene, som skjønner at 2n ikke alltid størst. Jon besvarte den skriftlige matematikktesten best av disse tre. Han skulle potensielt kunne utfordre Saras påstander og begrunnelser.

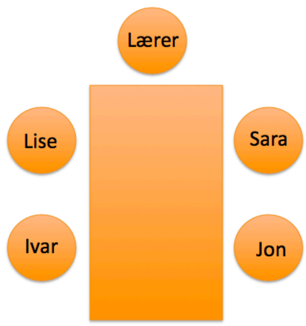
Ivar: Ivars oppgave var annerledes enn Jon og Lise sine besvarelser. Han besvarte oppgave 1 bra, men dårlig på de siste to oppgavene. Ivar skjønte at svaret var avhengig av hva n var, og sa at man måtte vite hva n var for å kunne gi det endelige svaret. Det viser en tilbøyelighet for å gi svar med tall. Ivar ble ansett å være den med lavest forståelse av variabler.

Om disse elevene ble utfordret, og hvorvidt dette var en hensiktsmessig gruppesammensetning utdypes nærmere i **kapittel 5 Diskusjon**.

Oppsummering: Fra den skriftlige matematikktesten viste flere elever misoppfatninger av variabler, som kan sammenlignes med tidligere gjennomførte studier. Sammen med resultatene i testen og faktorer for en hensiktsmessig gruppesammensetning ble fire elever valgt ut til en diskusjonsgruppe. Disse elevene hadde ulik karakteristikk av sin forståelse av variabler.

4.2 Resultater fra diskusjonsoppgavene

I dette avsnittet presenteres flere utdrag fra diskusjonen mellom elevene omkring variabeloppgavene. Disse utdragene kalles episoder. De illustrerer elevenes engasjement i et argument, viser en type forståelse av variabler eller en situasjon som utmerket seg. Episodene er strukturert slik at første del er et utdrag av transkripsjonen, som er en blanding av elevenes sitater og fortellende tekst. Fra utdraget spesifiseres argumentet; påstand, data og begrunnelsen, slik som beskrevet i underavsnitt **3.4.2 Analysemodellen for observasjonen**. I siste del av avsnittet tolkes episoden i lys av teorien. Episodene som er valgt ut gir innsyn i hvordan elevenes forståelse har utviklet seg i takt med diskusjonen. Hvordan episodene henger sammen og utvelgelsen av hver enkelt kommer til uttrykk i **kapittel 5 Diskusjon**.



Figur 1 Slik satt jeg og elevene. Elevenes plasser var tilfeldige.

Elevene og jeg satt som illustrert ved **Figur 1**. Elevene valgte selv plasser, mens jeg plasserte meg selv ved enden av bordet. Elevene fikk utlevert oppgavene, hvor hver oppgave ble stilt øverst på et A4 ark (Vedlegg 3). Dermed kunne elevene gjøre notater underveis. Episode 1 og 2 er knyttet til oppgaven ”hvilket uttrykk er størst” problemet. Denne oppgaven hadde elevene sett tidligere i forbindelse med den skriftlige matematikktesten. Episode 3 til 6 handler om ”samlet pris” problemet.

Episode 1: Bokstaven n har mer enn én verdi

Jeg stilte oppgavespørsmålet og sa at de kunne begynne å snakke om oppgaven.

Jon: Kommer ikke det helt an på da?

Sara var enig med Jon.

Jon: Si at n er 1. Da blir det 2 ganger 1 og da er det 2, og hvis det er n+2 da blir det 3.

Sara: Eller hvis det er 0. Hvis det er 2 ganger 0 så blir jo det 0…

Jon: Og så blir det 2. Den der kan også være størst (pekte på 2n), hvis n er for eksempel 5.

Sara: Ja.

Jon: Så blir jo den der 10 (pekte på 2n og satte n lik 5) og den der 7 (pekte på n+2 og satte n lik 5).

Sara: Men så går det jo også an at n er et minustall da. Et negativt tall.

Jon: Et negativt…?

Ivar: Hvis n er minus, minus…

Sara: Ja, 2 ganger minus 1 da. Da blir det jo minus 2 (pekte på 2n). Da kommer det helt an på da også, for hvis den (pekte på n+2) er minus 1 pluss 2 da blir jo det 1.

Jon: Så det kan jo hele tiden bli ulike svar da, så… Hvilket uttrykk som er størst, det kommer jo an på…

Ivar og Lise: …hva n er.

<u>Analyse av episode 1</u>

<u>Argumentasjonen knyttet til hvilket uttrykk som er størst:</u>

Påstand: Hvilket uttrykk som er størst avhenger av hva n er

Data: Setter inn tall for n i uttrykkene. n = -1, 0, 1, 5.

Begrunnelsen: Det er en sammenheng mellom uttrykkene hvor begge er avhengige av variabelen n.

Jon og Sara var aktive i prosessen med å avgjøre hvilket uttrykk som var størst. Ivar slapp nesten ikke til og kom kun med små innskytelser. Lise nikket for det meste samtykkende og viste med kroppsspråket at hun ikke engasjerte seg. Resultatet av gruppesammensetningen og gruppedynamikken drøftes som nevnt i kapitelet **5 Diskusjon**. Både Jon og Sara ga eksempler med tall som ga uttrykket n+2 var størst, men like etterpå skjøt Jon inn at 2n også kunne være størst. Han begrunnet påstanden ved å sette inn tallet 5. En slik argumentasjon er hva Carpenter et al. (2003) kaller "justification by example". Det er dessuten et slags mellomstadium i følge Gray et al. (2009). De mener at elevene ikke fullt ut klarer å generalisere problemet, og at svaret derfor er ufullstendig. Dette indikerer forståelsesnivået 2 til 3. Elevene indikerer dessuten at bokstaven brukes som beskrevet i kategori 5: Bokstav som et generelt tall.

Da Sara foreslo at n kunne være et negativt tall ble Jon overrasket. Det kan virke som at han hadde forestilt seg at n var positive heltall, allikevel var han ikke uenig med Sara. Jon utfordret ikke påstanden. Muligens ga det ikke mening for ham å vurdere negative tall, da han så at n+2 var større enn 2n for tall som n = 0 og n = 1. Allikevel hadde Saras innspill betydning for Jons svar senere i diskusjonen.

Episode 2: Bokstav brukt som en variabel

Elevene fortsatte å diskutere oppgaven videre, etter at jeg spurte om de kunne diskutere hvordan de ville skrive svaret. I diskusjonen fastslår Sara at 2n er størst dersom n er større enn 1. Dersom n er mindre enn 1 blir 2n minst, men ved n lik 2 så ble det likt.

Sara: Og hvis det er minustall, så vil jo den her bli mindre og mindre (pekte på uttrykket 2n på arket) … så da vil jo n+2 hele tiden være større. Så når man ganger så blir det bare mindre og mindre.

Dette var Ivar og Jon enige i. Lise ga ikke uttrykk for sin mening.

Da Sara var ferdig med å snakke, ga jeg de i oppgave å uttrykke det de hadde sagt matematisk.

Sara: Er det dét samme som å skrive større eller mindre enn?

Ivar: Sånn her (tegnet i lufta for deretter å tegne det på arket).

Sara: Ja, større og mindre enn… Vi må skrive hvis og sånn da.

Lise: Og når.

Jon og Sara begynte å skrive et svar på egenhånd. Mens Ivar svarte delvis på egenhånd, tittet Lise på Saras svar. Jeg brøt inn og sa at de gjerne måtte snakke sammen om hvordan de skulle formulere svaret. Sara dikterte høyt hva hun tenkte svaret skulle bli, og Lise skrev ned og nikket bekreftende. Elevenes svar ble nokså forskjellige (**Tabell 7**).

Elevenes skriftlige svar i diskusjonsoppgaven	
Svar fra Lise	**Svar fra Sara**
Hvis n = et negativt tall vil alltid 2n < n+2 Hvis n = 0 eller 1 vil 2n < n+2 Hvis n = 2 vil 2n = n+2 Hvis n = høyere enn 2 vil 2n< n+2	Hvis n = et negativt tall vil 2n < n+2 Hvis n = 0/1 vil 2n < n+2 Hvis n = 2 vil 2n = n+2 Hvis n = < 2 vil 2n< n+2
Svar fra Ivar	**Svar fra Jon**
Hvis n = et negativt tall vil 2n < n+2 Hvis n = 0 eller 1, 2n < 2n < n+2 Hvis n = 2 vil svaret bli likt Hvis n = større enn 2 er 2n > n+2	n + 2 er < 2n når n = > 2 n + 2 = 2n når n = 2 2n er < n+2 når n = < 2

Tabell 7 Elevenes svar i oppgaven "hvilket uttrykk er størst" problemet.

Analyse av episode 2

Lise og Sara sitt svar var veldig like, ettersom Lise skrev av Sara. Jeg tror for øvrig at Sara har skrivefeil i siste linje hvor hun uttrykker at "hvis n er mindre enn 2 vil 2n være mindre enn n+2", da hun allerede har uttrykt dette i de to første linjene. Muntlig uttrykker hun at 2n er større enn n+2 dersom n er større enn 2. Hvilket jeg tror hun forsøkte å uttrykke i siste linje. Lise uttrykker det samme muntlig, selv om hun har skrevet omtrent likt som Sara. Det kan være at Lise har skjønt prinsippet, men bare skrevet av Sara og vært usikker på seg selv. Eller hun husket hva Sara sa og trodde at hun uttrykte seg korrekt skriftlig. Hvilket scenario som er gjeldende er usikkert.

For uten om Sara var Jon den som utarbeidet svaret sitt mest på egenhånd. Jon gjorde ikke slik som Sara dikterte høyt. Han skrev ikke "hvis" setninger og dessuten uttrykte han svaret på en enda enklere måte enn de andre elevene. Svaret hans spesifiserer ikke hvilket uttrykk som er størst ved n mindre enn 0, og ved 0 og 1. I siste linje skrev Jon at dersom n er mindre enn 2 er n+2 større enn 2n. Svaret gir indikasjoner på at han har skjønt at for alle tall mindre enn 2 blir n+2 størst, for n lik 2 er uttrykkene like store, og for n større enn 2 blir 2n størst. I episode 1 foreslår Sara at n kan være negativ. Hennes forslag tror jeg bidro til å utforme Jon sitt svar. Svaret hans indikerer at han forstod at n kunne være et negativt tall, ikke bare et positivt tall. Jon "kjøpte" følgelig Sara sin påstand, og han forenklet svaret mer enn hva Sara gjorde.

Sara bekrefter dessuten antagelsene, fra den skriftlige matematikktesten, om at hun besitter en god forståelse av variabler. Det viser hun blant annet ved kommentaren om at når man ganger et negativt tall, så vil svaret bli mindre og mindre for økningen i negative tall. Dette gir et inntrykk av at Sara har det Küchemann (1981) kaller forståelse av et andregradsforhold. Sara så at ”når n ble et større og større negativt tall, så ble forskjellen større mellom 2n og n+2”. Hun var den eneste av elevene som ga en muntlig forklaring som indikerer en slik forståelse.

Under diskusjonen la jeg ikke merke til hvor ulike de skriftlige svarene var, ettersom det de uttrykte muntlig ga inntrykk av at de hadde samme oppfatning av svaret. Da ingen av elevene reagerte på at de muntlige svarene ikke alltid stemte med det de hadde skrevet, vitner det om elevenes usikkerhet eller kunnskap om bruk av ulikhetstegnet. Allikevel vil jeg si at elevene har besvart oppgaven ved å bruke n som en variabel, slik som kategori 6 skisserer. Når det gjelder forståelse, viser noen av elevene en bedre forståelse enn de andre, som Jon og Sara som besvarer oppgaven mer selvstendig. De viser en forståelse på nivå 4, mens Lise og Ivar blir mer anonyme da de skriver av de to andre elevenes besvarelser. Følgelig viste både Sara og Jon en god forståelse for hvordan begge uttrykkene var avhengig av n, og at n kunne være et hvilket som helst tall. For dem var overgangen fra å demonstrere hvilket uttrykk som var størst med talleksempler til et generalisert svar en hurtig prosess.

Episode 3: Jon og Ivar bruker bokstaven som objekt

Denne episoden er knyttet til oppgave 2, som omhandler den samlede prisen ved kjøp av gulrøtter og poteter. Elevene fikk som nevnt i oppgave å forklare hva 13g + 5p stod for i den gitte konteksten.

Jon: Det betyr jo at man har kjøpt 13 kg gulrøtter og 5 kg poteter, er det ikke det? Da kan man jo bare ta 13 pluss 5 for å finne ut hvor mye det ble kjøpt. For tallene står for kilo.

Sara: Det blir jo 13g, det må jo bli det. Det blir jo 13 ganger hvor mange kilogram det er da, blir det ikke det da? Og g er jo, gulrøtter koster 13 kr per kilo.

Ivar: Det blir jo 13 ganger 13.

Sara: Det blir 13 ganger, 13 ganger hvor mange, 13 kroner som man ganger med hvor mange kilo det er.

Ivar: Og det er 13.

Sara: Så det står egentlig for prisen til sammen det da, hvis de bare kjøper gulrøtter og poteter. Først hvor mange, mye det koster å kjøpe gulrøtter, så hvor mye det koster å kjøpe poteter.

Jon: Hvordan vet vi da hvor mye som ble kjøpt, hvis 13 er tydeligvis da prisen og 5 er tydeligvis prisen og g står for hvor mange kilo, og g er jo da en ukjent. Hvordan kan vi da finne ut hvor mange..?
Ivar: Fordi den står for kilo.
Sara: Ja, det står jo bare hva den står for, det står jo ikke at vi skal regne det ut.
Lise: Nei.
Sara: Det må jo stå for prisen til sammen.

Analyse av episode 3

I begynnelsen av diskusjonen ble tre ulike påstander lagt frem. I denne episoden og den neste forfølges påstandene til Jon og Ivar, som ble utfordret av Sara.
Påstandene som fremlegges i transkripsjonen blir kodet slik:
Påstanden til Jon: g står for kg gulrøtter og p står for kg poteter.
Påstanden til Ivar: Man kjøper 13 kg gulrøtter til 13 kroner per kg.
Påstanden til Sara: Samlet pris for en mengde gulrøtter og poteter.

Jon, Ivar og Sara viser en ulik forståelse for bokstavene i oppgaven. Jon trodde at g og p var ”kg gulrøtter” og ”kg poteter” som ble kjøpt. Dette er hva Brekke et al. (2000) kaller mengdesvar. Fra påstanden til Ivar er det tilbøyelig å tro at han mener g står for kiloprisen til gulrøtter, og med den betydning vil p stå for kiloprisen til poteter. Svaret til Jon og Ivar tilhører kategorien ”bokstav brukt som objekt”, på nivå 2 (Küchemann 1981). Både Jon og Ivar søkte et tallsvar i oppgaven, mens Sara godtok raskt at man ikke trengte å finne et svar på tallform. Jon gjenfortalte høyt hva Sara sa, men forstod det ikke helt, da det ikke stemte overens med hans oppfatning av uttrykket. Han utfordret også Sara på å utdype hva hun mente. Hverken Jon, Ivar eller Sara ga data som belegg for påstandene sine. Episoden viser hvordan de tre elevene tolket oppgaveteksten, hvilket hadde betydning for deres videre utvikling i diskusjonen.

Episode 4: Ivars oppfatning av variabelen g som et objekt

Jeg: Men, Ivar, du begynte å nevne på noe. Du sa at det blir 13 ganger 13, hvorfor det?
Ivar: Det er fordi 13 kilo og hvis det koster 13 kr per kilo så koster det 13 ganger 13.
Jeg: Er dere enige i det?

Jon: Ja, jeg ble litt usikker. Fordi at hvis g står for hvor mange gulrøtter, og så står det jo 13 g, da tenkte jeg at siden det står at det koster 13 kroner, så må det da bli 13 gange da det antallet, det ukjente antallet, kg gulrøtter som da er kjøpt.

Jeg: Ja, men da sier du jo at det er prisen 13 kroner. Også, men så sier du at (henvendte meg mot Ivar) du handler 13 kilo. Men står det noe sted at dere skal handle 13 kilo?

Jon: Nei, men det står jo 13 g og da kan man jo tenke at g står for hvor mange kilo. Altså 13 g, 13 kilo. At det blir sånn.

Jeg: Du tenker sånn ja.

Jon: Nei, er det ikke sånn, var det ikke sånn du mente? (Henvendte seg mot Ivar).

Jeg: Ok, du prøvde å forklare det han tenkte.

Jon: Ja.

Jeg: Kjempebra.

Analyse av episode 4

Utdraget av Ivars påstand blir kodet slik:

Påstand: Kjøper 13 kg gulrøtter til 13 kroner per kg.

Data: g står for kiloprisen

Begrunnelse: g er et objekt

Etter de ulike påstandene til Jon, Ivar og Sara ble lagt frem, var jeg interessert i å høre Ivars begrunnelse for sin påstand. Jeg rettet spørsmålet direkte mot Ivar. Hans svar bekreftet påstanden i episode 3, hvor han mente at uttrykket 13g var ”13 kg gulrøtter”. Det vil si at hans oppfatning av g som et objekt plasserer ham på et lavt nivå av forståelse av variabler. I et forsøk på å sette i gang en samtale rundt denne oppfatningen viste Jon at han begynte å endre sin oppfatning om uttrykket. Han var noe usikker, men tolket uttrykket annerledes enn i episode 3. Hans usikkerhet knyttet til betydningen av uttrykket, eller hans velvilje for å hjelpe medeleven Ivar, kom frem av Jons forsøk på å se uttrykket med Ivars øyne. Ivar la derimot ikke merke til hvordan Jon ordla seg, og at måten han forklarte det på var annerledes enn sin egen oppfatning. I den påfølgende episoden utviklet samtalen seg.

Episode 5: Fra bokstav som objekt til bokstav som spesifikk ukjent

Jeg: Kan dere se at det er en forskjell i deres svar? (Pekte på Sara og Ivar)

Jon: Ja. (De andre nikket ivrig).

Sara: Det står jo på en måte usynlig gangetegn mellom 13 og g, og 5 og p.

Jeg: Hva står g for?

Ivar: Kilogram.

Jeg: Bare det? Les teksten en gang til og hva g står for.

Ivar: Ja, det står for hvor mange gulrøtter som blir kjøpt.

Jeg: Hvor mange kilo gulrøtter som blir kjøpt.

Jon: Så egentlig, det står jo her i spørsmålet hva står da 13g + 5p for. Det er da, det står for formelen for hvordan man kan vite hvor mye det koster da, på en måte.

Sara: Ja, formelen for prisen.

Jeg spurte Ivar igjen om det stod noe sted i teksten om at man kjøper 13 kilo.

Ivar svarte nei.

Jon: Det eneste vi vet om 13 er at det koster 13 kr per kg.

Analyse av episode 5

Da Ivar svarte at g stod for kilogram, spurte jeg han om han kunne lese oppgaveteksten. Ivar sa at det stod for ”hvor *mange* gulrøtter som ble kjøpt”. Det var første gang han sa at det handlet om antall, men hvorvidt det hadde betydning for hans forståelse av uttrykket er usikkert. Derimot ble det Jons usikkerhet vendt til trygghet. Da jeg vektla ”hvor *mange kilo* som ble kjøpt”, virket det som Jon fikk en ”aha-opplevelse”. Da han fortalte at det var den samlete prisen sa han det med en større sikkerhet og overbevisning, i motsetning til de foregående episodene. I episode 3 uttrykte Jon at bokstaven var et objekt, mens i denne episoden skjer det en endring. Jon forteller at uttrykket står for samlet pris av poteter og gulrøtter. Hvorvidt han behandler bokstavene som et generalisert tall eller en variabel, er usikkert i denne fasen. Allikevel kan det virke som at Jon endret oppfatningen og at han behandler bokstaven som et generalisert tall (kategori 5).

Episode 6: Variablene g og p har mer enn én verdi

Jeg: Hvor mange kilo ble kjøpt til sammen?

Jon: Den skjønte ikke jeg helt. For det står jo ikke noe sted i teksten hvor mye kilo som blir kjøpt.

Ivar: Hvis det står for kilo, da er det jo 18 kilo til felles.

Jon: Men det der fant vi jo ut at stod for samla pris. Men hvor mange kilo ble kjøpt til sammen, det stod jo ikke noe sted i teksten at…

Sara: Det kan jo være hva som helst det da…

Jeg: Vet vi, hva var det som stod for kilo da i stykket?

Ivar og Jon: g og p.

Jeg: g og p, ja.

Jon: Åja, det blir g pluss p er lik totalt kilo kjøpt.

Ivar og Sara så spørrende på ham og sa ”hæ”.

Jon begynte raskt og iverig å forklare at g var antall kilo og p var antall kilo, derfor ble det g pluss p som var totalt antall kilo som ble kjøpt. De andre elevene sa at de forstod hva Jon mente. Lise ga ikke uttrykk via muntlig tale eller kroppsspråk at hun fulgte med, så jeg konfronterte henne og spurte om hva Jon hadde funnet ut. Lise forklarte at g stod for kilo og p stod for kilo, men at man ikke visste hvor mye det var av hver og det var årsaken til at det ble g+p.

Analyse av episode 6

Både Jon og Ivar lette etter et numerisk svar. Ivar, som ikke hadde forstått oppgave 2a, var tilbøyelig til å legge sammen 13 og 5, da de var de eneste tallene involvert. Jon, som hadde forstått oppgave 2a, skjønte at Ivars sitt forslag var utelukket da tallene stod for pris per kilo. Det virket som at Ivar godtok at forslaget hans var nedstemt og at han forstod hvorfor. Bakgrunnen for å hevde det, var at han svarte samtidig med Jon at g og p stod for kilo i oppgaven. Etter at Jon sa g og p høyt i kor med Ivar, forstod han hva løsningen ble. Nemlig g+p. Jon baserte svaret sitt på det han hadde forstått i oppgave 2a. Dette kan tyde på at Jon brukte bokstaven som et generalisert tall (nivå 3). Det vil si at g og p representerer flere verdier, men en om gangen.

At Jon løste denne oppgaven raskere enn Sara var interessant. Fra å behandle g og p som objekter, til å sette seg inn i en medelevens tankesett og samtidig utvikle sin egen idé om uttrykket, ga et bilde av hvordan utfordringene underveis fikk Jon til å ”strekke seg”. Jon arbeidet med Sara sin idé og lot seg utfordre av hennes påstand, så vel som Ivars lave forståelsesnivå knyttet til variabler i en kontekst. Både Ivars idé og Saras idé var to ulike utfordringer som Jon måtte vurdere, og følgelig gjøre opp sin egen mening om.

Oppsummering: Elevene snakket sammen og delte sine meninger rundt to oppgaver, ”hvilket uttrykk er størst” problemet og ”samlet pris” problemet. Sara og Jon var mest aktive i samtalen, i forhold til Lise og Ivar. I løpet av diskusjonen var det Jon sin forståelse av variabler som viste endring. Jon sin forståelse ble utfordret av medelever og læreren. Elevenes argumenter baserte seg noe på hverandres meninger og på oppgaveteksten.

Kapittel 5 Diskusjon

Forskningsspørsmålet i denne studien er som nevnt ”*Hvordan kan argumentasjon i diskusjon bidra til å utfordre elevers relasjonsforståelse av variabler*?”. I dette kapittelet drøftes hvilke situasjoner eller faktorer som bidro til å utfordre elevers relasjonsforståelse av variabler. Denne studien har som nevnt brukt begrepet utfordre, som en situasjon eller faktor som motiverer elevene til å si sin mening. Elevenes forståelse blir således nyansert ved å drøfte hvorvidt de viste begrepsforståelse og resonnementsforståelse gjennom argumentene i diskusjonen. Situasjonene og faktorene beskrives og knyttes til det teoretiske rammeverket beskrevet i **kapittel 1 Variabler** og **2 Diskusjon i matematikk**, og det analytiske verktøyet **3 Forskningsmetode**. Dessuten skildres elevene, læreren og gruppesammensetningen for å gi et helhetsinntrykk av situasjonen, og hvordan den la til rette for å avdekke faktorene, som bidro til å utfordre elevenes relasjonsforståelse.

5.1 Utfordrende situasjoner i episode 1 og 2

For å besvare forskningsspørsmålet har episodene, fra avsnitt **4.2 Resultater fra diskusjonsoppgavene**, blitt knyttet til hvordan argumentene utfordret elevens relasjonsforståelse. For at elevene skulle diskutere variabeloppgaver og utfordre hverandre, var det helt nødvendig at gruppesammensetningen fungerte. Det gjorde den også, men ikke like godt for alle elevene. Jon og Sara var mest aktive i diskusjon, i motsetning til Ivar og Lise. Således ga episodene 1 og 2 best inntrykk av Jon og Saras relasjonsforståelse av variabler. I disse episodene diskuterte elevene oppgaven ”hvilket uttrykk er størst” problemet.

I **Episode 1: Bokstaven n har mer enn én verdi** forsøkte Jon raskt å besvare problemet ”hvilket uttrykk er størst”. Svaret hans var det samme som i den skriftlige matematikktesten; løsningen var avhengig av n. Fra første stund delte Jon og Sara sine tanker omkring oppgaven. Dermed ble de indre kognitive representasjonene, eller deres mentale bilde av variabler, offentliggjort (Maher 2005). I diskusjonen ble dessuten antagelsene fra testen om deres forståelse for variabelbegrepet bekreftet. Fra den skriftlige matematikktesten viste Jon forståelse av variabler omtrent på nivå 3 (bruker bokstaven som spesifikk ukjent og generalisert tall). I testen viste Sara forståelse på nivå 4 (behandler bokstaven som en variabel). Slik fremstod også deres forståelse av variabler innledningsvis i diskusjonen (Analyse av episode 1).

Både Jon og Sara satte altså inn tall i uttrykkene for å begrunne påstandene de kom med. De så sammenheng mellom uttrykkene, hvor begge var avhengig av n. I denne episoden betraktet Jon og Sara allikevel variabelbegrepet på ulik måte. Ettersom elevenes tanker kom til uttrykk gjennom talen (*thinking-as-commuticating*) kan det virke som at Jon kun betraktet det ene aspektet ved variabelbegrepet (Brekke et al. 2000), mens Sara var klar over begge. Variabelbegrepets to aspekter er som nevnt oppfatningen om at noe varierer og måten man bruker bokstaver til å representere generaliserte tall i matematikk (Brekke et al. 2000). Både Jon og Sara ga uttrykk for at n varierte. Jon viste ikke tegn til at bokstaven n representerte et generaliserte tall, men det gjorde derimot Sara. Det ble bekreftet ved hennes utsagn om at n kunne være et negativt tall. Dette ga signaler om at Sara forstod at begrepet var en potensiell operasjon, men samtidig et abstrakt objekt. Følgelig viste hun egenskaper som en "proceptual thinker" besitter (Tall 1993). Jon ble overrasket over at n kunne være et negativt tall. Om dette sier Gray et al. (2009) at flere elever betrakter variabler slik; "*thinking of natural numbers as the referents of the variable*" (s. 64). Hvilket vitner om bruk av bokstav som en spesifikk ukjent størrelse på nivå 3 (Küchemann 1981).

I denne episoden dreide elevenes argumenter om å sette inn tall i uttrykkene, for å undersøke i hvilke sammenhenger uttrykkene var størst. Som for eksempel da Sara hevdet at n kunne være et negativt tall og satte inn et negativt tall i uttrykkene. Hun kom således med en påstand som ble underbygget av data. På den måten viste hun Jon hva hun mente. Jons og Saras innsetting av tall i uttrykkene ga indikasjoner på instrumentell forståelse. Allikevel var det tydelige indikasjoner på relasjonsforståelse hos begge, men på ulikt nivå. Det henger sammen med at relasjonsforståelse, som er et vidt begrep, også innebærer instrumentell forståelse (Skemp 1976). Saras påstand om at n kunne være et negativt tall så ut til å skape en ny tanke hos Jon, og fungerte som en utfordring for ham. I episode 2 fikk det konsekvenser for hvordan Jons relasjonsforståelse kom til uttrykk.

Episode 2: Bokstav brukt som en variabel bekreftet at Jon godtok Saras påstand om at n kunne være et negativt tall. Det fremkommer av Jons skriftlige svar i episoden. Elevenes besvarelse var noe ulik hverandre, og ingen reagerte på at det som ble uttalt muntlig var noe annerledes enn det som var blitt skrevet ned. I etterkant ser man at dette kunne ha vært grunnlag for diskusjon. Således ville det ha vært lærerens rolle, og i denne studien min rolle. Årsaken til at det ikke ble tatt tak i kommer av min manglende erfaring i en slik situasjon.

Dersom elevene hadde fått til å diskutere svarene og sammenligne dem, kunne det ha bidratt til å avdekke større deler av deres begrepsforståelse og resonnementsforståelse. Allikevel gir svarene deres innsikt i deres forståelse. I avsnitt **1.1 Et historisk perspektiv** blir det påpekt at et av områdene elevene har problemer med i algebra er algebraiske notasjoner (Booth 1988). Det gjenspeiles blant annet i Jons notasjoner, som for eksempel ”n+2 er < 2n når n = > 2”. Her skriver Jon ”er” samtidig som han bruker ulikhetstegnet, og ”=>” hvor han uttrykker ”n er større enn to”. Det er rimelig å anta at Jon brukte notasjonen fordi han hadde lite erfaring med å uttrykke et generalisert svar og for det meste var vant til å få svar som ikke inneholdt regneoperasjoner. Når det gjelder Lise og Ivar, skrev de av Sara. Det indikerer usikkerhet og at de ikke på egenhånd forstod hvordan de skulle løse oppgaven. De gangene Lise ble konfrontert med å svare selvstendig, trakk hun seg unna og svarte ”jeg synes de andre har sagt mye bra” og ”jeg tror at, eller hva mener du Sara..?”. Eller hun gjenfortalte hva en medelev sa. Med slike kommentarer viste hun usikkerhet knyttet til situasjonen, hvor hun måtte dele sin mening med de andre. Situasjonen ble således ubehagelig for henne, som Lampert et al. (1996) beskriver. Det kan komme av frykt for å vise hva hun ikke forstod, og at hun fryktet at Sara og Jon skulle betrakte henne annerledes, eller hun kan ha vært sjenert. Lise forble ut gjennom diskusjonen anonym. Noen elever, som Lise, kan av natur være sjenert og trenger tid for å bli komfortabel i slike situasjoner. Andre elever, som Sara og Jon, viser trygghet i seg selv. De trenger å læres opp i og få erfaring med samarbeid og diskusjon, slik at de kan involvere andre elever med i diskusjonen (Mueller & Maher 2009).

Foruten om gruppedynamikken, som kom til uttrykk gjennom denne episoden, ble også deler av elevens forståelse avdekket. Fra episode 1 ble Saras begrepsforståelse fra den skriftlige matematikktesten bekreftet gjennom diskusjonen. I episode 2 kommer også hennes resonnementsforståelse frem. Fra å vise god forståelse for selve variabelbegrepet ga hun raskt uttrykk for sammenhengen mellom uttrykkene, hvorpå hun viste forståelse av et andregradsforhold mellom uttrykkene (Küchemann 1981). Hun demonstrerte således *”capacity to think logically about the relationships among concepts and situations*” (Kilpatrick et al. 2001 s. 129), hvilket er definisjonen på resonnementsforståelse. Jon viste også god forståelse for sammenhengen, som bekreftet at han ”kjøpte” Saras påstand om at n kunne være et negativt tall. Således støttet denne episoden at Saras påstand, i forrige episode, bidro til å utfordre Jons relasjonsforståelse.

5.2 Utfordrende situasjoner i episode 3 til 6

I episodene 3 til 6, omtalt i avsnitt **4.2 Resultater fra diskusjonsoppgavene**, ble elevene utfordret gjennom ”samlet pris” problemet. Gjennom deres argumenter kom større deler av elevenes resonnementsforståelse og begrepsforståelse av variabler til syne. Også disse episodene ga best innblikk i Saras og Jons forståelse, i forhold til Lise og Ivar.

Fra **Episode 3: Jon og Ivar bruker bokstavene som objekt** kom det frem at både Ivar og Jon oppfattet g og p som ”kg gulrøtter” og ”kg poteter”, mens Sara forstod raskt at uttrykket stod for samlet pris for gulrøtter og poteter. I diskusjonen gjentok Jon Saras påstand, men stilte spørsmålstegn ved hvordan de skulle finne ut hvor mange kilo som ble kjøpt til sammen. Bakgrunnen for et slikt utsagn ligger i en utilfredshet ved å gi svar som inneholder en regneoperasjon, som beskrevet i avsnitt **1.3 Misoppfatninger omkring variabler**. Det tyder på en instrumentell forståelse og kalles ”lack of closure” (Küchemann 1981). Dette indikerer begrepsforståelse av variabler på nivå 2, hvor man finner verdien av en bokstav eller bruker den som et objekt. Saras påstand om at uttrykket stod for samlet pris indikerer at hun betraktet bokstavene som variabler, som gir begrepsforståelse opptil nivå 4. Jon så forskjellen i hans og hennes påstand, og uttrykte forskjellen og satte ord på sin forståelse (thinking-as-communicating). Det gjorde ikke Ivar, som i utgangspunktet hadde vist tilnærmet lik forståelse som Jon. Følgelig ble Jon utfordret av påstanden til Sara. Den utfordret ham til å ta en annen mening i betraktning. Utfordringen ga således et inntrykk av hans begrepsforståelse, samt hans resonnementsforståelse. I første omgang ble ikke Jon fortrolig med at uttrykket stod for samlet pris, da han forestilte seg et tallsvar på antall kilo grønnsaker. Resonnementsforståelsen kom til uttrykk ved at Jon forsøkte å se sammenheng mellom bokstavene og antall kilo grønnsaker som skulle kjøpes. Han viste evne til å resonnere og tenke logisk. Allikevel utfordret påstanden til Sara ham, fordi den ikke ga mening for ham i første omgang. Det skyldtes trolig hans begrepsforståelse av variabler i den gitte situasjonen. Begrepsforståelse og resonnementsforståelse er som nevnt to av fem tråder i matematisk kyndighet (Kilpatrick et al. 2001). Selv om de er ”tvunnet i sammen”, ga noen argumentasjoner en tydeligere indikasjon på elevenes forståelse knyttet til en spesifikk tråd. Slik som her, hvor Jon viste god resonnementsforståelse ved å se sammenhenger, mens begrepsforståelsen var lav, da han betraktet bokstavene som objekter (nivå 2).

Antagelsene om Ivars forståelse av variabler fra episode 3 ble bekreftet i **Episode 4: Ivars oppfatning av variabelen g som et objekt**. Ivar hevdet at 13g betydde 13 kilo gulrøtter til 13 kroner per kilo. Ivars oppfatning indikerer begrepsforståelse på nivå 2. Det er derfor tydelig at Ivar har misoppfatningen "bokstav brukt som objekt". Med en slik misoppfatning finner elever det vanskelig å oversette en tekstoppgave til et algebraisk uttrykk (Ermete et al. 2010; Gray et al. 2009; Warren 2003). Den diagnostiske oppgaven fungerte således godt for å gi innblikk i elevenes forståelse, og for å avdekke misoppfatninger. Også i den skriftlige testen viste Ivar en tilsvarende begrepsforståelse av variabler knyttet til oppgaver med mer tekst. Følgelig illustrerer ikke kun én oppgave elevens forståelse av variabler, om man sammenligner hvordan Ivar løste problemet "hvilket uttrykk er størst" og problemet "samlet pris" i denne diskusjonsøkten. Hvilket demonstrerer at en vanskelighet i algebra ikke alltid reflekterer elevenes kognitive kapasitet (MacGregor & Stacey 1997).

Jon forsøkte i episoden å forklare hvordan Ivar tenkte, men var bevisst på at det ikke var hans egen mening. Jon søkte å se problemet med Ivar sine øyne, hvilket bidro til å utfordre hans egen forståelse. For ved å se det med Ivar sine øyne forklarte også Jon hva det var som gjorde han usikker i første om gang. Dette tyder på refleksjon over sin egen forståelse, som er logisk tenkning. Dermed viste Jon god resonnementsevne og fremstod mer bevisst på hvordan han tidligere hadde betraktet uttrykket og bokstavene, da som objekt (nivå 2).

I **Episode 5: Fra bokstav som objekt til bokstav som spesifikk ukjent** kom det frem at Jon ble mer sikker på hva uttrykket betydde i den gitte konteksten. I et av mine forsøk på å utfordre Ivar til å si mer om hva han trodde uttrykket betydde, ytret Jon "det står for formelen for hvordan man kan vite hvor mye det koster da". Det kan virke som at Jon endret oppfatning om uttrykket og forstod hva Sara hadde ment. Jon så ut til å behandle bokstavene som generaliserte tall (nivå 3). I diskusjonen virket Jon ivrig og glad "for å endelig ha skjønt det". En slik opplevelse og erfaring kan komme av at matematikk gir mening for seg selv (McCrone 2005). Dessuten kan Jon ha blitt motivert av å få bruke sine egne teorier og ha ansvar for å løse problemet, slik som Maher (2005) beskriver som viktig for elevenes forståelse. Argumentene til Ivar, Sara og meg bidro til utfordre Jons mening om uttrykket. Samt at hans engasjement var en viktig motiverende faktor for å forstå noe nytt (Kilpatrick et al. 2001; Martino & Maher 1999). Jon virket mer bevisst og tydelig på hva som var riktig svar, og at løsningen ga mening i større grad enn tidligere. Det kan virke som at de ulike påstandene og engasjementet bidro til at Jon så en tydeligere sammenheng mellom bokstavene og situasjonen, som kom tydelig frem gjennom hans tale. Således viste Jon resonnementsforståelse ved å bli utfordret av Ivars og Saras motstridende påstander om hva uttrykket stod for, fra episode 3 og 4.

I **Episode 6: Variablene g og p har mer enn én verdi** forsøkte elevene finne ut hvor mange kilo grønnsaker som ble kjøpt til sammen. Jon var den første som forstod at svaret ble g+p. Diskusjonen ga indikasjon på at han forstod hva variablene betydde i konteksten, og dessuten kunne han forklare sammenhengen. Sara, som tilsynelatende, hadde best utviklet forståelse for variabelbegrepet, så ikke ut til å forstå hva Jon hadde forstått. Sara virket usikker i denne episoden, sammenlignet med selvtilliten hun viste i de foregående episodene. Årsaken kan være den uvante situasjonen, hvor man skulle forklare sine tanker muntlig. Innledningsvis i observasjonen, da elevene ble spurt om de snakket sammen og diskuterte matematikkoppgaver, ble antagelsen bekreftet. Svaret var enstemmig nei, men det hendte at de løste oppgaver sammen, selv om det var sjeldent. Følgelig var elevene vant til å jobbe selvstendig, og derfor var det uvant å ta utgangspunkt i andres argumenter for å jobbe videre med et problem. I videoklippet viste Sara at hun var usikker på hva Jon mente, og selv da hun sa at hun forstod hadde hun et usikkert blikk. Hun ga derfor ikke entydig indikasjon på at hun virkelig hadde forstått oppgave 2b, hvor man skulle finne ut hvor mange kilo grønnsaker, som ble kjøpt. Det kan være at Sara var vant til å løse oppgaver på egenhånd og syntes det var vanskelig å relatere seg til Jons utsagn. Da diskusjonsøkten var over, var det ikke mulighet for å stille oppklarende spørsmål og undersøke hvorvidt Sara forstod hva Jon mente. Hypotetisk sett kunne Jons begrunnelse av påstanden om at g+p var samlet kilo grønnsaker, fungert som en utfordring til Sara. En mulig diskusjon kunne ha blitt satt i gang med åpne spørsmål (Lampert et al. 1996; McCrone 2005). På den måten hadde Jon måttet forsvare sin påstand, og blitt utfordret til å vurdere om løsningen hans var god. Således hadde det potensielt vært mulig at Sara fikk en ”aha-opplevelse”. Dessuten kunne Jons selvtillitt blitt forsterket, ved at ideen hans ble drøftet og funnet gyldig. Dette påpekes som viktig for både enkeltindividet, men også for begge. Således ville både Sara og Jons resonnement ha blitt styrket (Mercer & Sams 2006).

I den siste episoden viste Jon ennå tydeligere at han hadde forstått oppgaven og at hadde et godt tak om variabelbegrepet. Løsningen på spørsmål 2b virket til å gi mening for Jon, da han raskt og engasjert forklarte de andre elevene på gruppen hvorfor g addert med p ga samlet vekt for grønnsakene. Dette gjorde han på egenhånd, uten bekreftelse fra de andre elevene eller meg, om at svaret var korrekt. Det viser at han opplevde svaret som meningsfullt. Dessuten kan det tyde på at Jon opplevde ansvar for å løse problemet; ”*the responsibility for learning shifts to the students*” (Mueller & Maher 2009 s. 111). Dette er et kritisk punkt for videre arbeid med matematikk gjennom diskusjon. For ved å selv ta ansvar kan det lærerstyrte klasserommet skiftes til elever som tar eierskap i det å lære matematikk (f. eks Lampert et al. 1996; Martino & Maher 1992; McCrone 2005; Mueller & Maher 2009; Weber et al. 2008).

Jon demonstrerte at han forstod g og p som generaliserte tall, knyttet til den gjeldende konteksten med grønnsakene poteter og gulrøtter. Trolig var det den komplekse situasjonen som bidro til at Jon ble utfordret og at han løste oppgave 2b først. I den komplekse situasjonen var Ivars og Saras motstridende argumenter og mine oppklarende spørsmål som skapte et nyansert bilde. Dessuten Jons engasjement, matematikk som ga mening for ham og to ulike problemer bidro til å utfordre gruppens kollektive relasjonsforståelse av variabler. Derfor kan den komplekse situasjonen ha utfordret Jon til å gjøre opp sin egen mening. Han uttrykte begeistring over å skjønt oppgaven, slik som frasen ”det gikk opp et lys”. Dette viste antydninger til en ”aha-opplevelse” for Jons forståelse av variabelbegrepet. Jons begrepsforståelse viste forandring fra episode 3 til episode 6. Fra å være usikker på hva bokstavene betydde i konteksten i episode 3, til å finne ut hvordan bokstavene kunne gi mening i konteksten i episode 6. Progresjonen tyder på at Jon så uttrykket og bokstavene ikke bare som en prosess, men også som et abstrakt objekt. Dermed kom Jons oppfatning av de strukturelle sidene og operasjonelle sidene av variabelbegrepet til uttrykk gjennom diskusjonen. Således kan hans begrepsforståelse gjennom episode 3 til episode 6 sees i sammenheng med overgang fra kondenseringsfasen til reifikasjonsfasen (Sfard 1991). Ikke bare ga progresjonen Jon en trygghet i sin begrepsforståelse, men den viste også at han så sammenheng mellom bokstavene og situasjonen med grønnsakene. Dermed ble også hans resonnementsforståelse mer tydelig.

Oppsummering: I løpet av de ulike episodene fra resultatene var det ulike faktorer og situasjoner som bidro til å utfordre elevenes forståelse. Spesielt var det Jons begrepsforståelse og resonnementsforståelse som kom til uttrykk. Saras påstand om negative tall, Ivars forståelse av bokstavene som objekter var blant annet viktige faktorer som utfordret Jons relasjonsforståelse i diskusjonen. Progresjonen gjennom episode 3 til 6 ga et bilde Jons relasjonsforståelse; både det nyanserte bildet av hvordan begrepsforståelsen kom til utrykk gjennom de ulike utfordringene, og hvordan han resonnerte og tenkte logisk omkring uttrykket og konteksten, altså hans resonnementsforståelse.

Kapittel 6 Konklusjon og refleksjon

I dette kapittelet sammenfattes drøftingen fra **kapittel 5 Diskusjon**. Dessuten belyses tanker omkring hvordan dette kan benyttes i en lærers hverdag. Fra underavsnitt **1.2.3 Utfordre elevers forståelse** forklares begrepet utfordre, som en situasjon eller faktor som motiverer elevene til å si sin mening.

Fra tidligere vitenskapelige arbeider kommer det frem at elever kan utfordres på ulike måter. Litteraturen peker på følgende faktorer: (Carpenter & Levi 2000; Carpenter et al. 2003; Fuglestad 2003; Kilpatrick et al. 2001; Martino & Maher 1999)

- Engasjement og motivasjon
- Diskusjon
- Arbeidsoppgaver

For å skape en passende utfordring for elevenes forståelse av variabler, var det viktig at oppgaven lå på riktig nivå. Studien bekreftet at tilpassede oppgaver la til rette for å skape en utfordring. Dessuten kom det tydelig frem at gruppesammensetningen var viktig. Videoobservasjonen ga detaljert informasjon om alle elevene, men mest informasjon om tre av elevenes forståelse, da de var mest aktive. Hvorpå to av elevene fungerte godt sammen og drev problemløsningen fremover gjennom diskusjon. Følgelig kan det være hensiktsmessig å sette sammen en gruppe på fire elever, for å deretter sette sammen par. Dersom man skal gjennomføre dette i en klasse er forslaget følgende; la elevene jobbe med forskjellige elever i ulike grupper, observer og få tilbakemelding på hvordan de opplevde situasjonen. Kanskje man ikke finner en potensiell samarbeidspartner i første gruppesammensetning, men at det dukker opp én i en annen gruppe. Det kan være et tidkrevende tiltak, men diskusjon kan oppleves som spennende og engasjerende. Selvfølgelig også utfordrende, i den forstand at det ikke er enkelt å skulle snakke matematikk. Det er allikevel hevet over en hver tvil at fordelene ved å diskutere matematikk og således variabler er mange (se **kapittel 2 Diskusjon i matematikk**).

Fra den skriftlige matematikktesten ble elevenes forståelse av variabler gjort synlig, spesielt deres begrepsforståelse. Gjennom diskusjon kom elevenes relasjonsforståelse tydeligere frem, både i form av begrepsforståelse og resonnementsforståelse. Fra resultatene ble spesielt eleven Jon sin relasjonsforståelse tydeligere. Jon ble utfordret av Saras påstand om negative tall. Dette medførte at han revurderte sin påstand og tok i bruk Saras påstand. Dessuten forsøkte Jon å forklare Ivars mening, og se problemet fra hans synspunkt. Følgelig forsøkte han å forklare et argument. Det bidro til refleksjon og illustrerte Jons resonnementsforståelse av variabler. Også ved motstridende påstander viste Jon evne til å orientere mellom påstandene og avgjøre hvilken påstand som ga mening. Følgelig resonnerte han logisk og knyttet påstandene til variabelbegrepet slik han forstod det. Dermed skapte de motstridende påstandene en utfordring som endret hans oppfatning.

Jon endret mening underveis og kunne til slutt forklare de andre hva bokstavene p og g stod for. Det kan virke som at hans relasjonsforståelse utviklet seg underveis, da noen av hans utsagn indikerte en aha-opplevelse. Hvorvidt Jons relasjonsforståelse faktisk utviklet seg er usikkert. Dersom studien hadde gått over lenger tid kunne elevens utvikling vært målt. Allikevel kan det virke som at Jons forståelse endret seg i løpet av observasjonen, ved at han ble mer trygg og fikk selvtillit i sin relasjonsforståelse av variabler. Han uttrykte dessuten at han hadde opplevd diskusjon som spennende og gøy. Han viste således engasjement og ansvar for å løse oppgaven. Mye tydet på at Jon opplevde oppgavene som meningsfulle. Følgende sitat (også benyttet i underavsnitt **1.2.1 Forståelsestyper**) gir et bilde av hvordan Jons progresjon foreløp seg gjennom observasjonen:

> *When students have acquired conceptual understanding in an area of mathematics, they see the connection among* ***concepts*** *and* ***procedures*** *and can give* ***arguments*** *to* ***explain*** *why some facts are consequences of others. They gain confidence, which then provides a base from which they can move to another* ***level of understanding*** (Kilpatrick et al. 2001 s. 119. Forfatters uthevinger).

Når det gjelder de andre elevene kom det ikke like godt frem hvorvidt deres forståelse ble utfordret, slik som Jon. Allikevel ga den skriftlige matematikktesten og observasjonen indikasjoner på deres relasjonsforståelse av variabler. I etterkant ser man at flere oppklarende spørsmål kunne vært stilt. På den måten kunne flere av elevene blitt utfordret til å si sin mening og følgelig dele sin relasjonsforståelse av variabler. Årsaken til at det ikke alltid var like suksessfullt i denne studien var på grunn av meg, som lærer i situasjonen. Dette er et resultat å ta med seg i skolehverdagen. Det viktig at læreren får erfaring med å stille oppklarende og utfordrende spørsmål. Følgelig er det ikke bare elevene som trenger erfaring for å gi produktiv diskusjon. Også læreren må gjennom en liknende prosess. Således blir ikke lærerens undervisning en hindring for at elevene får gjøre opp sine egne tanker og teorier knyttet til algebra og variabelbegrepet. På den måten kan læreren bidra til å minske et av flere problemområder knyttet til algebra (listet opp i avsnitt **1.1 Et historisk perspektiv**).

Under oppsummeres faktorene som bidro til å utfordre elevenes relasjonsforståelse av variabler gjennom denne studien.

Kort oppsummering av faktorene:

- Påstand utfordret en elevs begrepsforståelse av variabler.
- Forklare en annens argument demonstrerte resonnementsforståelse av variabler.
- Motstridende påstander utfordret eleven til å gjøre opp sin egen mening og viste således relasjonsforståelse.

En utfordring kan altså komme på flere måter, også gjennom elevers argumenter. Selv om argumenter ikke alltid bidrar til å gi eleven en aha-opplevelse, kan det allikevel skje på et senere tidspunkt. Derfor kan argumentene skape situasjoner hvor eleven opplever en tilstand av forundring, engasjement og dypere forståelse for variabelbegrepet, slik som Jon gjorde. Dette tror jeg er viktig å ta med inn i skolehverdagen. Ved å benytte diskusjon og være bevisst på elevenes argumenter, kan mye av deres forståelse avdekkes. For ha suksess i matematikk hevder Kilpatrick et al. (2001) at det er viktig med god matematisk kyndighet. Det vil si god forståelse på mange områder, som de refererer til som tråder. I denne studien var fokuset på to av trådene, begrepsforståelse og resonnementsforståelse, knyttet til relasjonsforståelse. Argumentasjonen bidro til å kaste lys over elevenes forståelse knyttet til de overnevnte områdene. Således kan argumentasjon trolig belyse de tre andre områdene av matematisk kyndighet. Ved at elevenes ideer gjøres offentlig, kan læreren hente ut verdifull informasjon om elevers forståelse og misoppfatninger. Dermed kan informasjonen legge til rette for læreren å sette elevenes forståelse i utfordrende situasjoner. Det kan blant annet gjøres ved tilrettelagte oppgaver og stille utfordrende spørsmål, enten i plenum, i gruppe eller i par. Dermed får elevene mulighet til si sin mening, som kan gi dypere forståelse innenfor flere viktige områder av forståelse. Slik kan argumentasjonen legge til rette for at flere elever får eierskap av nøkkelbegreper, og at hensikten med å lære matematikk gir mening for elevene. I motsetning til hvor målet er å gi et tilfredsstillende svar, for å oppnå best mulig karakter.

Litteraturliste

Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J. & Alibali, M. W. (2007). Middle School Mathematics Teachers' Knowledge of Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equal Sign and Variable. *Mathematical Thinking and Learning*, 9 (3): 249 - 272.

Batanero, C., Godino, J. D., Vallecillos, A., Green, D. R. & Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 25 (4): 527 - 547.

Baxter, P. & Jack, S. (2008). Qualitative Case Study Methodology: Study Design and Implementation for Novice Researchers. *Qualitative Report*, 13 (4): 544-559.

Booth, L. R. (1984). Algebra: Children's Strategies and Errors. *Windor, England; NFER-Nelson*.

Booth, L. R. (1988). *Children's difficulties in beginning algebra*. In A. F. Coxford (Ed.). The ideas of algebra, K–12 (1988 Yearbook, pp. 20–32). : Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Brekke, G., Grønmo, L. S. & Rosén, B. (2000). Veiledning til algebra; F, H og J. *Nasjonalt læremiddelsenter (NLS)*: 1-93.

Brekke, G. (2002). Introduksjon til diagnostisk undervisning. *Læringssenteret (LS)*: 1-24.

Carpenter, T. P. & Levi, L. (2000). Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades. Research Report: NCISLA, Wisconsin Center for Education Research, University of Wisconsin, School of Education.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*: Heinemann, 361 Hanover Street, Portsmouth, NH 03801-3912.

Derry, S. J., Pea, R. D., Barron, B., Engle, R. A., Erickson, F., Goldman, R., Hall, R., Koschmann, T., Lemke, J. L., Sherin, M. G., et al. (2010). Conducting Video Research in the Learning Sciences: Guidance on Selection, Analysis, Technology, and Ethics. *Journal of the Learning Sciences*, 19 (1): 3-53.

Ermete, M., Brackett, N., Krause, E., Powell, K. & Lapp, D. A. (2010). The Role of Dynamic Representations in Students' Development of Algebraic Concepts. *Central Michigan University LURE program*.

Fuglestad, A. B. (2003). *Konstruktivistisk perspektiv på datamaskiner i matematikkundervisning*: I B. Grevholm (Ed)(2001). Matematikk for skolen. Bergen: Fagbokforlaget.

Gray, S. S., Loud, B. J. & Sokolowski, C. P. (2007). Calculus students' difficulties in using variables as changing quantities. *Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, Tenth Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education, San Diego.*

Gray, S. S., Loud, B. J. & Sokolowski, C. P. (2009). Calculus Students' Use and Interpretation of Variables: Algebraic vs. Arithmetic Thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 9 (2): 59 - 72.

Grønmo, L. S. & Onstad, T. (2009). Tegn til bedring. *Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007*: 1-292.

Grønmo, L. S., Onstad, T. & Pedersen, I. F. (2010). Matematikk i motvind. *TIMSS Advanced 2008 i videregående skole*: 1-288.

Hodgen, J., Küchemann, D., Brown, M. & Coe, R. (2009). Secondary students' understanding of mathematics 30 years on. *Proceedings of the British Educational Research Association (BERA) Annual Conference University of Manchester.*: 1-31.

Imsen, G. (2005). *Elevens verden - innføring i pedagogisk psykologi*. 4 utg.: Universitetsforlaget. 536 s.

Johansen, A., Tufte, P. A. & Kristoffersen, L. (2005). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode*: Abstrakt forlag, Oslo. 105-155 s.

Johnson, D. W., Johnson, R. T., Haugaløkken, O. K. & Aakervik, A. O. (2006). *Samarbeid i skolen*. 4 utg.: Pedagogisk psykologisk forlag. 170 s.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. *In T. D. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning New York: Macmillan.*: 390-419.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School through College Levels: Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. *In F.K Lester (Ed.) Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*: 707-762.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. *Washington, DC: National Academy Press.*

Knuth, E., Alibali, M., McNeil, N., Weinberg, A. & Stephens, A. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & Variable 1. *ZDM*, 37 (1): 68-76.

Küchemann, D. (1981). Algebra. *In K. Hart (red.) Children's understanding of Mathematics*: s. 102 -119.

Lampert, M., Rittenhouse, P. & Crumbaugh, C. (1996). Agreeing to disagree: Developing sociable mathematical discourse. *Handbook of Education and Human Development*: 731-764.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11 - 15. *Educational Studies in Mathematics*, 33 (1): 1-19.

Maher, C. A. & Martino, A. (1991). The construction of mathematical knowledge by individual children working in groups. *In P. Boero (Ed.), Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2: 365-372.

Maher, C. A. (2005). How students structure their investigations and learn mathematics: insights from a long-term study. *The Journal of Mathematical Behavior*, 24 (1): 1-14.

Maher, C. A., Powell, A. B., Weber, K. & Lee, H. S. (2006). Tracing middle-school students' arguments. *In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Eds.), Proceedings of the Twenty Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2 (403-410).

Martino, A. M. & Maher, C. A. (1999). Teacher Questioning to Promote Justification and Generalization in Mathematics: What Research Practice Has Taught Us. *The Journal of Mathematical Behavior*, 18 (1): 53-78.

Martino, A. M. & Maher, C. A. (1992). Individual thinking and the integration of the ideas of others in problem solving situations. *In W. Geeslin and K. Graham (Eds.), Proceedings of the 16th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education*, 2: 72-79.

Mason, J., Graham, A. & Johnson-Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra*: SAGE Publications Ltd. 324 s.

McCrone, S. S. (2005). The Development of Mathematical Discussions: An Investigation in a Fifth-Grade Classroom. *Mathematical Thinking and Learning An International Journal*, 7 (2): 111-133.

Mercer, N. & Sams, C. (2006). Teaching Children How to Use Language to Solve Maths Problems. *Language and Education*, 20 (6): 507-528.

Molina, M., Ambrose, R. & Castro, M. (2004). In the transition from arithmetic to algebra: Misconceptions of the equal sign. *Encarnación Comunicación presentada en 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education (July 14-18, 2004). Bergen, Norway.*

Mueller, M. & Maher, C. (2009). Convincing and Justifying through Reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15 (2): 108-116.

Powell, A. B., Francisco, J. M. & Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22 (4): 405-435.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (1): 1-36.

Sfard, A. (2003). There is More to Discourse than Meets the Ears: Looking at Thinking as Communicating to Learn More About Mathematical Learning. I: Kieran, C., Forman, E. & Sfard, A. (red.) *Learning Discourse*, s. 13-57: Springer Netherlands.

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teacher*, 77: 20-26.

Solvang, R. (1992). *Kap. 5 Kunnskaps- og forståelsestyper i matematikklæring*. Matematikk-didaktikk: NKI-Forlaget. 75-105 s.

Star, J. R. (2000). On the Relationship Between Knowing and Doing in Procedural Learning. *In B. Fishman & S. O'Connor-Divelbiss (Eds.), Proceedings of the Fourth International Conference of the Learning Sciences* Mahwah, NJ: Erlbaum: 1-8.

Tall, D. (1993). The Transition from Arithmetic to Algebra: Number Patterns or Proceptual Programming. *In Proceedings of Second Annual Conference on Teaching and Learning, London.*

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. *In Algebraic Thinking, Grades K–12: Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications*, edited by Barbara Moses, pp. 7–13. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1999.

Vinner, S. (1997). The Pseudo-Conceptual and the Pseudo-Analytical Thought Processes in Mathematics Learning. *Educational Studies in Mathematics*, 34 (2): 97-129.

Warren, E. (2003). The Role of Arithmetic Structure in the Transition from Arithmetic to Algebra. *Mathematics Education Research Journal, Australian Catholic University*, 15, No. 2: 122-137.

Weber, K., Maher, C., Powell, A. & Lee, H. (2008). Learning opportunities from group discussions: warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics*, 68 (3): 247-261.

Internettsider

Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS. Personvernombudet for forskning, [Internett]. Tilgjengelig fra: <http://www.nsd.uib.no/personvern/> [Nedlastet 05.mai.2011].

Skolenettet. Veiledning til læreplan i matematikk. Bokstavregning og likninger, [Internett]. Tilgjengelig fra: <http://skolenettet.no/Web/Veiledninger/Templates/Pages/ArticleWithNavTable.aspx?id=58666&epslanguage=NO> [Nedlastet 12.november.2010].

Saint Anselm College in New England, USA.
[Internett], Tilgjengelig i fra: <http://www.anselm.edu/> [Nedlastet 22.april.2011].

Utdanningsdirektoratet. Likninger - en introduksjon på 8. trinn Hva er en likning og hva betyr å løse den?, [Internett], Tilgjengelig fra: <http://skolenettet.no/Web/Veiledninger/Templates/Pages/ArticleWithNavTable.aspx?id=58666&epslanguage=NO> [Nedlastet 01.oktober.2010].

Wikipedia. College and university. [Internett]. Tilgjengelig i fra: <http://en.wikipedia.org/wiki/Education_in_the_United_States#College_and_university> [Nedlastet 06.april.2011].

Vedlegg 1

Oppgavetest tilknyttet Ellen Kristine S. Hansen til

Masteroppgave 2011

LYKKE TIL og takk for at du svarer ☺

Navn:	Klasse:

Oppgave 1
Oppgaven
a)
Skriv en matematikkfortelling som passer til dette uttrykket:
$4a + 6a = 10a$
Svar:
b)
Skriv en matematikkfortelling som passer til dette uttrykket:
$4x + 40 = 120$
Svar:

Oppgave 2
Oppgaven Hvilken er størst, 2n eller n+2? Forklar hvorfor og hvordan du tenkte for å løse oppgaven.

Oppgave 3
Oppgaven **Vis utregning og forklar hvordan du tenkte for løse oppgaven.** a) Lars kjøper en bil som koster 100 000 kroner. Kompisen Rune har en bil som koster en og en halv gang mer enn bilen til Lars. Hva koster Rune sin bil? Svar: b) Mina har en scooter som koster x kroner. Lise har en scooter som koster dobbelt så mye som mina sin scooter. Hva koster Lise sin scooter uttrykt ved x? Svar: c) Per sine slalåmski koster en og en halv gang så mye som Malin sine slalåmski. Hva koster Per sine slalåmski uttrykt ved x? Svar:

Oppgave 4

Oppgaven

"Gjett regelen og begrunn svaret"

Magnus har laget et tabell over tall som hører sammen. Han har et starttall og med en regel han har laget får han det tilhørende resultattallet. Nedenfor har Magnus satt opp tabellen over flere starttall og tilhørende resultattall.

Tabellen:

Starttall	4	7	9	3	0	10
Resultattall	12	21	27	9		

a) Fyll ut de manglende tallene i tabellen over ☺.

b) Finn regelen og skriv ned hvordan den virker.

c) x står for starttallet og y står for resultattallet. Uttrykk regelen med x og y.

Vedlegg 2

Dato: 02.mars.2011

Til foreldre og foresatte

Informasjon om Mastergradsprosjekt
"Diskusjon og forståelse av variabler i matematikk"

Bakgrunn og mål for undersøkelsen
Jeg ønsker med dette å informere om en undersøkelse i faget matematikk som skal gjennomføres ved skolen. Denne undersøkelsen er en del av mitt Mastergradsprosjekt om elevers forståelse av variabler i algebra. Undersøkelsen vil bestå av en test for elever i en 9.klasse på Kvernhuset Ungdomsskole. På bakgrunn av denne testen vil 3-5 elever velges ut til en gruppe. Gruppen skal observeres ved hjelp av videokamera. Elevene skal motvieres til i diskutere en algebraoppgave knyttet til variabler.
Bakgrunn for denne undersøkelsen er funn fra forskning knyttet til elevers diskusjon i matematikk (blant annet. Maher et al. 2008, McCrone 2005, Weber 2008). Disse studiene avslører at når elever får teste ideene sine og begrunne sine påstander kan være med på å bygge en dypere forståelse for nøkkelbegreper. Spesielt synes jeg variabler er et interessant felt, da elever synes det er vanskelig å se symboler som et generalisert tall og som en variabel på samme tid. Dessuten har mange problemer med å oversette en tekstoppgave til et algebraisk uttrykk og bruke bokstaver. Med dette som bakgrunn ønsker jeg å gå dypere inn i elevers konsept knyttet til variabler. Særlig er det interessant å undersøke om å diskutere en variabeloppgave kan bidra til å utfordre elevenes begrepsforståelse tilknyttet variabler.

Undersøkelsens innhold og omfang
Denne undersøkelsen består av en skriftlig test, med beregnet prøvetid ca. 45 minutter. Observasjonen av en gruppe elever vil skje en skoletime, ca. 45 minutter. Både før og etter observasjonen vil det sannsynligvis bli foretatt et intervju av elevene i gruppen. Intervjuet vil foreløpe seg som et personlig intervju som dreier seg om forståelse av variabler. Undersøkelsen skal gjennomføres denne våren og helst i mars måned. Dersom eleven ikke deltar blir det gjennomført en vanlig skoletime. Utvalgskriteriene for observasjon av en gruppe elever baserer seg på Küchemanns (1981) seks kategorier for forståelse av variabler, samt et sosiokulturelt perspektivet på læring.

Anonymitet og oppbevaring av data
Dette prosjektet er meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS, og innsamlingen, oppbevaringen og rapportering av data skjer i tråd med retningslinjene til personvernombudet. Testene vil bli lagret hos undertegnede ut prosjekttiden, for deretter å bli makulert. Prosjekttiden er over da karakteren mottas i august 2011. Videoopptakene vil også bli lagret på undertegnedes PC. Disse vil ikke andre få tilgang på og etter endt prosjekttid vil opptakene bli slettet. I prosjektoppgaven vil elevene forbli anonyme og få fiktive navn. Det er derfor ikke mulig å identifisere hvilke personer som deltar

og siteres i prosjektet. Alle innsamlete data vil bli behandlet med respekt for deltakerne og underlagt taushetsplikt ved bearbeiding av dataene. Elever som refereres til i prosjektoppgaven vil få fiktive navn, og vil derfor forbli anonyme.

Elevers og foreldres rettigheter

Det er frivillig å delta i en slik undersøkelse. Foreldre kan nekte å la sitt barn delta, og det er også mulig å trekke seg fra undersøkelsen på et senere tidspunkt. Jeg håper imidlertid at så mange som mulig sier seg villig til å delta. I slutten av dette informasjonsbrevet finner du en svarslipp. Der krysser du av for om du samtykker eller ei. Svarslippen leveres omgående til en av klassens lærere.

Kort om meg selv

Mitt navn er Ellen Kristine Solbrekke Hansen, jeg er 23 år og lektorstudent ved Universitetet for Miljø- og Biovitenskap i Ås. Min veileder er Margrethe Naalsund (64935431, margrethe.naalsund@umb.no).
Jeg jobber på Kvernhuset Ungdomsskole som vikar.

Vennlig hilsen

Ellen Kristine Solbrekke Hansen
Mobil: 416 12 416
E-post: ellen.solbrekke@student.umb.no

Elevens navn: ____

Jeg som foreldre/foresatte samtykker at barnet mitt deltar

i testen ☐

på videoobservasjonen ☐

Foreldre/foresattes underskrift:_________________________________

Vedlegg 3

Disse oppgavene var gitt i et hefte, hvor det var én oppgave per A4 side.

Hvilket uttrykk er størst 2n eller n + 2?

Gulrøtter koster 13 kroner pr. kg og poteter koster 5 kr pr. kg.

a) Hvis g står for hvor mange kg gulrøtter som blir kjøpt, og p står for hvor mange kg poteter som blir kjøpt, hva står da 13g + 5p for?

b) Hvor mange kg ble kjøpt til sammen?

Vedlegg 4

Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS
NORWEGIAN SOCIAL SCIENCE DATA SERVICES

NSD

Harald Hårfagres gate 29
N-5007 Bergen
Norway
Tel: +47-55 58 21 17
Fax: +47-55 58 96 50
nsd@nsd.uib.no
www.nsd.uib.no
Org.nr. 985 321 884

Margrethe Naalsund
Institutt for matematiske realfag og teknologi, IMT
Universitetet for miljø og biovitenskap
Box 5003
1432 ÅS

Vår dato: 04.04.2011	Vår ref: 26582 / 3 / MAB	Deres dato:	Deres ref:

KVITTERING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 02.03.2011. Meldingen gjelder prosjektet:

26582	*Diskusjon og forståelse av variabler i matematikk*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet for miljø- og biovitenskap, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Margrethe Naalsund*
Student	*Ellen Kristine Solbrekke Hansen*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, eventuelle kommentarer samt personopplysningsloven/-helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/forsk_stud/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://www.nsd.uib.no/personvern/prosjektoversikt.jsp.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 14.05.2011, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Atle Alvheim

Marte Bertelsen

Kontaktperson: Marte Bertelsen tlf: 55 58 33 48
Vedlegg: Prosjektvurdering
Kopi: Ellen Kristine Solbrekke Hansen, Øvre tomtegate 17, 1651 SELLEBAKK

Personvernombudet for forskning

Prosjektvurdering - Kommentar

Prosjektnr: 26582

Formålet med prosjektet er å undersøke hvorvidt elever som får testet ideene sine, og begrunnet sine påstander, kan få en dypere forståelse for nøkkelkonsepter innenfor algebra.

Det skal i prosjektet gjennomføres en test i en skoletime. På bakgrunn av testen velges fire elever ut til videre observasjon og intervju.

Utvalget består av en 9. klasse, tilsammen ca. 25 elever.

Det gis skriftlig informasjon til foreldre/foresatte, samt muntlig informasjon til elevene. Det innhentes skriftlig samtykke fra foreldre/foresatte, samt muntlig samtykke fra elevene.

I de tilfellene hvor det ikke er blitt innhentet samtykke fra foreldre/foresatte skal elevene følge ordinær undervisning.

Revidert informasjonsskriv, mottatt av ombudet 01.04.2011, finnes tilfredsstillende under forutsetning av at setningene "Det er frivillig å delta på i en slik undersøkelse. Foreldre kan nekte å la sitt barn delta, og det er også mulig å trekke seg fra undersøkelsen på et senere tidspunkt." endres til "Det er frivillig å delta i prosjektet. Dersom du nå samtykker til deltakelse for ditt barn, kan du likevel når som helst innen prosjektslutt trekke ditt samtykke.".

Ingen enkeltpersoner vil kunne gjenkjennes i publisering fra prosjektet.

Prosjektslutt er 14. mai 2011. Ved prosjektslutt skal videoopptak og koplingsnøkkel slettes og datamaterialet anonymiseres. Med anonymisering menes at direkte personidentifiserbare opplysninger som navn slettes, og at indirekte personidentifiserbare opplysninger som navn på skole og bosted, endres eller slettes.